ВАРИАНТ ЗАДАНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Вар. 14 (9392)

1. Решить диофантово уравнение $3211x + 2679y = 133$

2. Представить $\sqrt{125}$ в виде периодической цепной дроби.

3. Найти наименьшее натуральное число x, удовлетворяющее условиям $x \equiv 11 \bmod 14$; $x \equiv 1 \bmod 15$; $x \equiv 13 \bmod 23$; $x \equiv 3 \bmod 19$;

4. Найти остаток от деления $43^{7^{53}}$ на 66.

5. По формуле Лагранжа найти многочлен p не выше 4-ой степени, удовлетворяющий условиям: $p(-2) = 31$; $p(1) = 1$; $p(-4) = 21$; $p(-1) = 9$; $p(-3) = 49$;

6. Найти рациональные корни: $x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 7x - 2$

7. Решить уравнение, записанное в 5-ичной системе счисления: $4x + 242 = 1124$. Решение записать в 5-ичной и десятичной системах.

8. Вычислить 14/16 в кольце вычетов по модулю 95.

9. Найти представление рационального числа $\frac{802}{655}$ непрерывной дробью.

10. Найти остаток от деления многочлена $3x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 3$ на $2x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ в кольце $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\,[x]$

№	Ответ
1	$\begin{cases} x = -35 + 141k \\ y = 42 - 169k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
2	$[11; \overline{5,1,1,5,22}]$
3	$x = 4981$
4	43
5	$p(x) = -x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 1$
6	Рациональных корней нет
7	$x = 43_5 = 23_{10}$
8	84
9	[1,4,2,5,6,2]
10	$4x^2 + 2x + 2$

Выполнил: Радионов Роман, 0362

1. $3211x + 2679y = 133$

i	-1	0	1	2	3
r	3211	2679	532	19	0
q		1	5	28	
x	1	0	1	-5	
y	0	1	-1	6	

$$x = x_2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right) + \frac{a}{d} \cdot k = -5 \cdot \frac{133}{19} + \frac{2679}{19} k = -35 + 141k, k \in \mathbb{Z};$$
$$y = y_2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right) - \frac{a}{d} \cdot k = 6 \cdot \frac{133}{19} - \frac{3211}{19} k = 42 - 169k, k \in \mathbb{Z}.$$

Проверка:

$k = 1$:
$x = -35 + 141 = 106$, $y = 42 - 169 = -127$;
$3211 \cdot 106 + 2679 \cdot (-127) = 133$;
$340366 - 340233 = 133$ – истина.

Ответ: $x = -35 + 141k$, $y = 42 - 169k$.

2. $\sqrt{125} = 11 + \sqrt{125} - 11 = 11 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{125}+11}{4}} = 11 + \cfrac{1}{5+\frac{\sqrt{125}-9}{4}} =$

$$= 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\frac{4(\sqrt{125}+9)}{44}}} = 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{125}-2}{11}}} = 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{11(\sqrt{125}+2)}{121}}}} =$$

$$= 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{125}-9}{11}}}} = 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{11(\sqrt{125}+9)}{44}}}}} = 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\frac{\sqrt{125}-11}{4}}}}} =$$

$$= 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\frac{4(\sqrt{125}+11)}{4}}}}}} = 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{22+\frac{\sqrt{125}-11}{1}}}}}} = 11 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{125}+11}{4}}}}}}}.$$

Проверка: $x_1 = \frac{x_n}{2} \Rightarrow 11 = \frac{22}{2}$ – истина.

Ответ: $[11; \overline{5,1,1,5,22}]$.

3. $x \equiv 11 \bmod 14$, $x \equiv 1 \bmod 15$, $x \equiv 13 \bmod 23$, $x \equiv 3 \bmod 19$.
$14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$, 23 – простое число, 19 – простое число. Общих множителей нет, следовательно $D(14,15,23,19) = 1$.
Согласно китайской теореме об остатках, данная система имеет единственное решение.
1) $M = 14 \cdot 15 \cdot 23 \cdot 19 = 91770$;
$M_1 = 6555$;
$M_2 = 6118$;

$M_3 = 3990;$
$M_4 = 4830.$
2) $M_1x_1 = 1 \bmod m_1 \Rightarrow 6555x_1 = 1 \bmod 14$:
$6555x - 14y = 1$

i	-1	0	1	2	3	4
r	6555	14	3	2	1	0
q		468	4	1	2	
x	1	0	1	-4	5	
y	0	1	-468	1873	-2341	

$x_1 = 5;$
$M_2x_2 = 1 \bmod 15 \Rightarrow 6118x_2 = 1 \bmod 15$:
$6118x - 15y = 1$

i	-1	0	1	2	3	4
r	6118	15	13	2	1	0
q		407	1	6	2	
x	1	0	1	-1	7	
y	0	1	-407	408	-2855	

$x_2 = 7;$
$M_3x_3 = 1 \bmod 23 \Rightarrow 3990x_3 = 1 \bmod 23$:
$3990x - 23y = 1$

i	-1	0	1	2	3
r	3990	23	11	1	0
q		173	2	11	
x	1	0	1	-2	
y	0	1	-173	347	

$x_3 = -2;$
$M_4x_4 = 1 \bmod 19 \Rightarrow 4830x_4 = 1 \bmod 19$:
$4830x - 19y = 1$

i	-1	0	1	2	3	4
r	4830	19	4	3	1	0
q		254	4	1	3	
x	1	0	1	-4	5	
y	0	1	-254	1017	-1271	

$x_4 = 5.$
3) $x = (M_1x_1c_1 + M_2x_2c_2 + M_3x_3c_3 + M_4x_4c_4) \bmod M =$
$= (6555 \cdot 5 \cdot 11 + 6118 \cdot 7 \cdot 1 + 3990 \cdot (-2) \cdot 13 + 4830 \cdot 5 \cdot 3) \bmod 91770 =$
$= (360525 + 42826 - 103740 + 72450) \bmod 91770 =$
$= 372061 \bmod 91770 = 4981.$
Проверка:
1) $4981 - 14 \cdot 355 = 11$

2) $4981 - 15 \cdot 332 = 1$
3) $4981 - 23 \cdot 216 = 13$
4) $4981 - 19 \cdot 262 = 3$

4. $43^{7^{53}} \bmod 66$
$k = 7^{53} \Rightarrow 43^k \bmod 66$
$\varphi(66) = \varphi(6) \cdot \varphi(11) = 2 \cdot 10 = 20$
$43^k = 43^{20n+b} = 43^{20n} \cdot 43^b = 43^b$
$k = 7^{53} = 20n + b \Rightarrow b \equiv 7^{53} \bmod 20$
$53_{10} = 110101_2$

a	c	c^2	$if(a == 1)c^2 \cdot a$ $else\ c^2$	$c^2 \cdot a \bmod k$
1	1	1	7	7
1	7	49	343	3
0	3	9	9	9
1	9	81	567	7
0	7	49	49	9
1	9	81	567	7

$b \equiv 7^{53} \bmod 20$
$7 \equiv 7^{53} \bmod 20$
$b = 7$
$43^k \bmod 66 \equiv 43^b \bmod 66 \Rightarrow 43^k \bmod 66 \equiv 43^7 \bmod 66$
$7_{10} = 111_2$

a	c	c^2	$if(a == 1)c^2 \cdot a$ $else\ c^2$	$c^2 \cdot a \bmod k$
1	1	1	43	43
1	43	1849	79507	43
1	43	1849	79507	43

$43 \equiv 43^7 \bmod 66$
Ответ: 43

5. $p(-2) = 31, p(1) = 1, p(-4) = 21, p(-1) = 9, p(-3) = 49$
$$p(x) = \frac{(x-1)(x+4)(x+1)(x+3)}{(-3)\cdot 2\cdot(-1)\cdot 1} \cdot 31 + \frac{(x+2)(x+4)(x+1)(x+3)}{3\cdot 5\cdot 2\cdot 4} \cdot 1 +$$
$$+ \frac{(x+2)(x-1)(x+1)(x+3)}{(-2)\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)} \cdot 21 + \frac{(x+2)(x-1)(x+4)(x+3)}{1\cdot(-2)\cdot 3\cdot 2} \cdot 9 +$$
$$+ \frac{(x+2)(x-1)(x+4)(x+1)}{(-1)\cdot(-4)\cdot 1\cdot(-2)} \cdot 49 = \frac{31}{6}(x-1)(x+4)(x+1)(x+3) +$$
$$+ \frac{1}{120}(x+2)(x+4)(x+1)(x+3) + \frac{7}{10}(x+2)(x-1)(x+1)(x+3) -$$
$$- \frac{3}{4}(x+2)(x-1)(x+4)(x+3) - \frac{49}{8}(x+2)(x-1)(x+4)(x+1) =$$
$$= (x+4)(x+1)(x+3)\left(\frac{1}{40}(207x - 206)\right) +$$

$+(x+2)(x-1)(x+3)\left(\frac{1}{20}(-x-46)\right)-$

$-\frac{49}{8}(x+2)(x-1)(x+4)(x+1)=$

$=\frac{207}{40}x^4+\frac{145}{4}x^3+\frac{457}{8}x^2-\frac{143}{4}x-\frac{309}{5}-\frac{1}{20}x^4-\frac{5}{2}x^3-\frac{37}{4}x^2-2x+\frac{69}{5}-$

$-\frac{49}{8}x^4-\frac{147}{4}x^3-\frac{343}{8}x^2+\frac{147}{4}x+49=$

$=-x^4-3x^3+5x^2-x+1.$

Проверка:

x	-1	-3	5	-1	1
-2	-1	-1	7	-15	31
1	-1	-4	1	0	1
-4	-1	1	1	-5	21
-1	-1	-2	7	-8	9
-3	-1	0	5	-16	49

6. $x^4-5x^3-6x^2+7x-2=0$

$\frac{p}{q}=\frac{\pm 2, \pm 1}{\pm 1}$

x	1	-5	-6	7	-2
1	1	-4	-10	-3	-5
-1	1	-6	0	7	-9
2	1	-3	-12	-17	-36
-2	1	-7	8	-9	16

Проверка потенциальных корней.

Ответ: рациональных корней нет.

7. 1) $4_5 x+242_5=1124_5;$

$4_5 x=1124_5-242_5;$

$$\begin{array}{r}
\scriptstyle\cdot\;\;4\;\;10\\
-\;1\;1\;2\;4\\
2\;4\;2\\
\hline
3\;3\;2
\end{array}$$

$4_5 x=332_5;$

$$\begin{array}{r|l}
3\;3\;2 & 4\\ \cline{2-2}
3\;1 & 4\;3\\ \cline{1-1}
2\;2 & \\
2\;2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$x=43_5.$

2) $4_5 x+242_5=1124_5;$

$4_5=4_{10}, 242_5=2+20+50=72_{10},$

$1124_5=4+10+25+125=164_{10};$

$4_{10}x + 72_{10} = 164_{10}$;
$4_{10}x = 92_{10}$;
$x = 23_{10}$;

$$
\begin{array}{r|l|l}
23 & 5 & \\
\cline{2-2}
20 & 4 & 5 \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
3 & 0 & 0 \\
\cline{2-2}
 & 4 &
\end{array}
$$

$x = 43_5$.

8. $x = \frac{14}{16} \bmod 95$;
$16x = 14 \bmod 95$;
$16x - 95y = 14$;
$16x + 95y' = 14$;
$\mathrm{D}(16,95) = 1$;

i	-1	0	1	2	3	4
r	16	95	16	15	1	0
q		0	5	1	15	
x	1	0	1	-5	6	
y	0	1	0	1	-1	

$x_0 = 6$;
$x = 14 \cdot 6 + 95n,\ n \in \mathbb{Z}$;
$x = 84 + 95n,\ n \in \mathbb{Z}$;
$x = 84 + 95 \cdot 0 = 84$;
Ответ: 84.

9. 1) $\frac{802}{655} = 1 + \frac{147}{655} = 1 + \frac{1}{\frac{655}{147}} = 1 + \frac{1}{4+\frac{67}{147}} = 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{13}{67}}} = 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{2}{13}}}} =$

$= 1 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}}}} = [1,4,2,5,6,2]$.

2) $802 = 1 \cdot 655 + 147$
$655 = 4 \cdot 147 + 67$
$147 = 2 \cdot 67 + 13$
$67 = 5 \cdot 13 + 2$
$13 = 6 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1$
Ответ: $[1,4,2,5,6,2]$

10. Найти остаток от деления многочлена $3x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 3$ на $2x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ в кольце $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5+0x^4+2x^3+4x^2+0x+3 & 2x^3+3x^2+3x+4 \\
\cline{2-2}
\underline{3x^5+2x^4+2x^3+x^2} & 4x^2+4x+4 \\
\quad 3x^4+0x^3+3x^2+0x & \\
\quad \underline{3x^4+2x^3+2x^2+x} & \\
\qquad 3x^3+x^2+4x+3 & \\
\qquad \underline{3x^3+x^2+4x+3} & \\
\qquad\quad 4x^2+2x+2 &
\end{array}
$$

Проверка: $(4x^2+4x+4)(2x^3+3x^2+3x+4)+4x^2+2x+2=$
$=8x^5+12x^4+12x^3+16x^2+8x^4+12x^3+12x^2+16x+8x^3+12x^2+$
$+12x+16+4x^2+2x+2=8x^5+20x^4+32x^3+44x^2+30x+18 \overset{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}{\sim}$
$\overset{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}{\sim} 3x^5+0x^4+2x^3+4x^2+0x+3.$