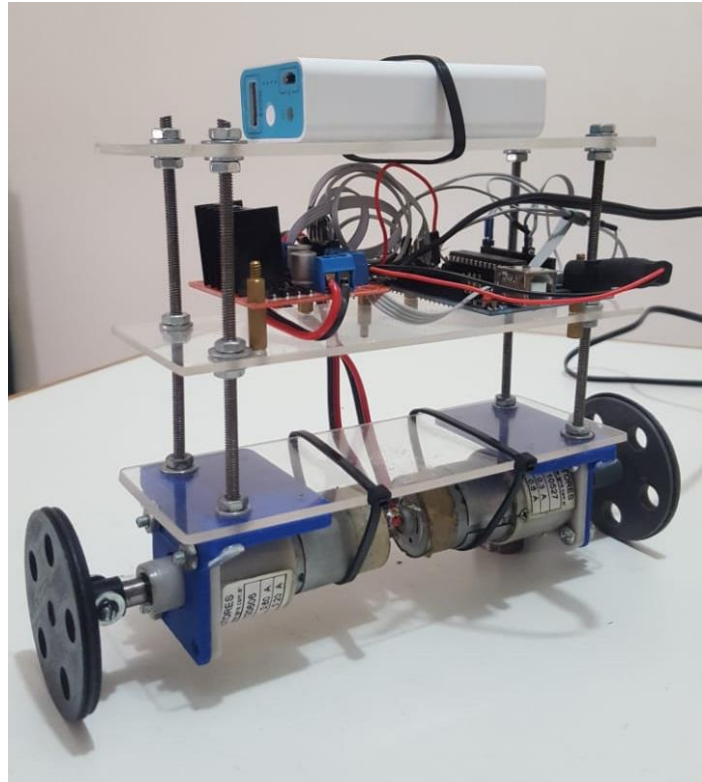


# ROBOT BALANCÍN



**MATERIA: SISTEMAS DE CONTROL**

**PROFESOR: ING. ÁNGEL AGUILAR**

**ALUMNOS: LESCOANO EMMANUEL, SOLLBERGER LUCAS**

**AÑO: 2018**

**CARRERA: INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

## Contenido

Introducción .....	3
Modelo matemático del sistema.....	4
Análisis en Matlab .....	8
<i>Análisis a lazo abierto en campo continuo (s) .....</i>	<i>8</i>
<i>Respuesta al escalón unitario .....</i>	<i>9</i>
<i>Diagrama de polos y ceros .....</i>	<i>9</i>
<i>Diagrama de bode .....</i>	<i>9</i>
<i>Análisis a lazo cerrado en campo continuo (s).....</i>	<i>10</i>
<i>Respuesta al escalón unitario .....</i>	<i>10</i>
<i>Diagrama de polos y ceros .....</i>	<i>11</i>
<i>Diagrama de bode .....</i>	<i>11</i>
<i>Análisis a lazo cerrado en campo discreto (z) .....</i>	<i>12</i>
<i>Respuesta al escalón unitario .....</i>	<i>12</i>
<i>Diagrama de polos y ceros .....</i>	<i>13</i>
Diagrama de bode .....	14
Problemas e inconvenientes que se presentaron a lo largo del proyecto: .....	14

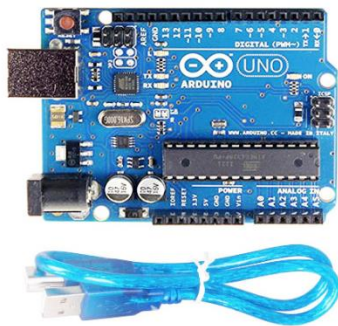
## Introducción

Como proyecto, se buscara realizar un robot balancín, el cual cuenta con un péndulo invertido alojado sobre una base e impulsado por dos motores de C.C.

Para la implementación de este proyecto, se comienza con el modelo matemático del sistema, por tanto, encontrando su función transferencia. Posteriormente se realiza un análisis en tiempo y frecuencia en el software matlab, tanto a lazo abierto como en lazo cerrado en variable continua 's', y a lazo cerrado en variable discreta 'z'.

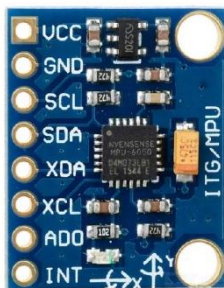
Posteriormente se buscó realizar el modelo físico del sistema, a continuación se detalla los componentes más importantes que fueron utilizados.

### Arduino uno



Esta placa de desarrollo funciona como unidad de control, midiendo tanto el posicionamiento angular del péndulo, el posicionamiento de los motores, los cálculos iterativos del PID, entre otras. Posee una gran aceptación para la realización de proyectos de este estilo, ya que además de poseer un software grafico e interactivo, con facilidad se pueden encontrar múltiples librerías para todo tipo de aplicaciones.

### Mpu 6050



Este sensor cuenta con un giróscopo y un acelerómetro, el cual, con la combinación de ambos, mediante el protocolo i2c, comunica la posición angular con respecto a los ejes X e Y. En conjunto con este dispositivo se realiza un filtro complementario, su fin es eliminar el ruido proveniente de dicho sensor, el cual es muy común.

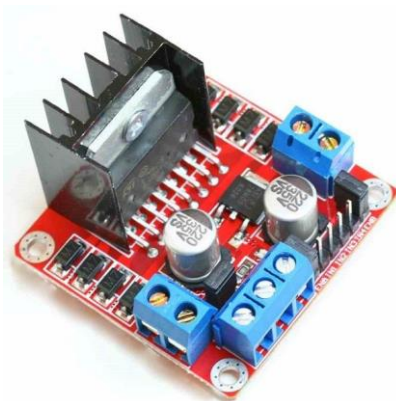
Este dispositivo es ideal para trabajar con arduino, ya que se cuentan con múltiples librerías y filtros digitales para facilitar la lectura y obtener una mejor exactitud de la misma.

### Motores dc



Para el posicionamiento se cuenta con dos motores de corriente continua, se tiene en cuenta que esta no es la mejor opción para este proyecto, quizás un motor pasa a paso hubiera sido lo ideal, pero la elección de este tipo de actuador se debe a la disponibilidad de los mismos.

### L298n motor driver



Para el control de los motores utilizamos simplemente un *L298n*, el cual cuenta con dos puentes H y la posibilidad de controlar la velocidad de los motores mediante dos entradas PWM.

Como mencionamos con el MPU6050, este tipo de IC es ideal para trabajar con arduino, ya que múltiples librerías facilitan el trabajo.

### Modelo matemático del sistema

Para el modelo matemático del sistema se consideró como guía el libro “Ingeniería de control moderna”.

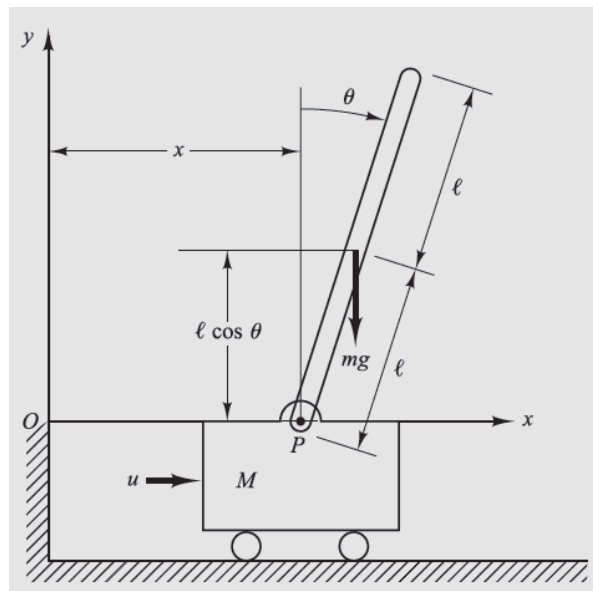


Ilustración 1. Péndulo invertido

El sistema del péndulo invertido es el mostrado en la figura.

Sea el ángulo  $\Theta$  de la barra con respecto a la vertical y además  $(x_g, y_g)$  las coordenadas espaciales del centro de masa.

$$x_g = x + \ell \sin(\Theta) \quad y_g = \ell \cos(\Theta)$$

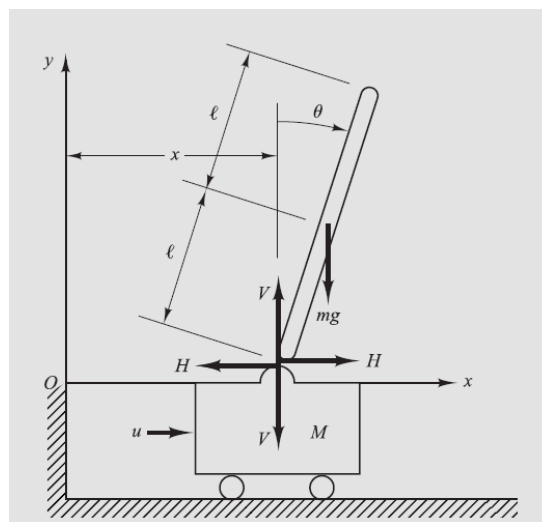


Ilustración 2. Diagrama de cuerpo libre

Posteriormente, considerando la segunda ley de Newton sobre la barra,  $F=m \cdot a$ , podemos describir su equivalente tal que:

$$\sum \tau = I \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = V \ell \sin(\Theta) - H \ell \cos(\Theta) \quad (1)$$

En donde  $\tau$  = torque del péndulo,  $I$  = momento de inercia del péndulo con respecto a su eje de rotación,  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$  = aceleración angular.

- La dinámica de traslación del centro de masa es consecuencia de  $F=m.a$ . pudiendo trasladar esta fuerza sobre una fuerza horizontal y otra vertical, tal que:

$$Fuerza\ horizontal = H = m \frac{d^2(x+l\sin\theta)}{dt^2} \quad (2)$$

$$Fuerza\ vertical = V - mg = m \frac{d^2(l\cos\theta)}{dt^2} \quad (3)$$

- El movimiento horizontal del carro se puede describir de la siguiente forma:

$$\sum F = ma = u - H = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (4)$$

Para linealizar el sistema sobre un punto de trabajo, consideramos que el ángulo  $\theta$  sobre el cual debe posar la barra debe ser prácticamente '0'. Entonces podemos suponer que  $\theta \approx 0$ , siendo que  $\sin(\lim_{x \rightarrow 0} x) = x$ ,  $\cos(\lim_{x \rightarrow 0} x) = 1$  de tal manera que las ecuaciones (1), (2) y (3) se modifican tal que:

$$\sum \tau = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = VI\theta - HI \quad (5)$$

$$H = m \frac{d^2(x+l\theta)}{dt^2} \quad (6)$$

$$V - mg = 0 \quad (7)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (6) resultando:

$$(M+m) \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = u \quad (8)$$

Despejando V y H en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente y reemplazando en la ecuación (5) para luego agrupar términos, de tal manera que resulta:

$$(I+ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + ml \frac{d^2x}{dt^2} = mgl\theta \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) constituyen al modelo matemático del sistema.

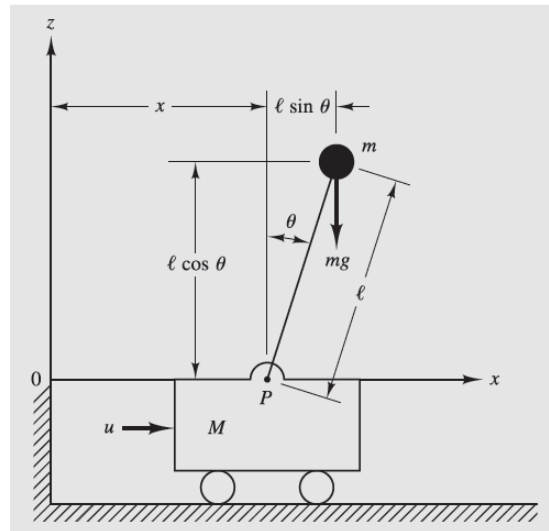


Ilustración 3. Péndulo invertido

Ahora, si se considera el sistema de péndulo invertido como la figura anterior de tal manera que el momento de inercia de la varilla es prácticamente nulo, por lo que podemos deducir que  $I=0$ .

De tal manera que la ecuación (9) se transforma:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + ml \frac{d^2x}{dt^2} = mgl\theta \quad (10)$$

Si se despeja  $\frac{d^2x}{dt^2}$  en la ecuación (8) y reemplazando en la ecuación (10) resultando:

$$Ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = (M+m)g\theta - u \quad (11)$$

Por ultimo despejando  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  en la ecuación (10) y reemplazando en la ecuación (8) resultando:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - mgl\theta \quad (12)$$

Estas dos funciones definen el nuevo modelo matemático.

Para encontrar la función de transferencia primero se aplica Laplace a la ecuación (11) de tal manera que  $-U(s) = Ml^2s^2 - (M+m)g$

De tal manera que la función de transferencia del sistema es:

$$H(s) = \frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ml^2s^2 - (M+m)g}$$

## Análisis en Matlab

Para el análisis en Matlab, se comienza con el análisis a lazo abierto en variable continua 's'.

Declaración de variables y conforme función de transferencia de la planta  $H(s)$ .

```

10 %% Funcion de transferencia H(s)
11
12 - M = 0.5;           %Masa del carro
13 - m = 1.1;           %Masa del pendulo
14 - l = 0.16;          %Largo de la varilla del pendulo en metros
15 - g = 9.8;           %Constante de gravedad
16
17 - A = M*l;
18 - B = 0;
19 - C = -g*(M+m);
20
21 - num = 1;
22 - den = [(A) (B) (C)];
23 - H=tf(num,den);     %Funcion de transferencias H(s)

```

Ilustración 4. Función de transferencia

## Análisis a lazo abierto en campo continuo (s)

Se realiza el cálculo de raíces y ancho de banda del sistema, posteriormente se grafican la respuesta al escalón unitario, diagrama de polos y ceros y por último el diagrama de Bode.

```

24 - R=roots(H.den{1});   %Calculo de raices
25 - bandwidth(H)        %Ancho de banda
26
27 - figure(1)
28 - step(H)              %Respuesta al escalon unitario
29 - grid on;
30 - title('Respuesta escalon unitario');
31 - xlabel('Tiempo');
32 - ylabel('Amplitud');
33
34 - figure(2)
35 - pzmap(H)             %Diagrama de polos y ceros
36 - %grid on;
37 - title('Diagrama de polos y ceros');
38 - xlabel('Im');
39 - ylabel('Re');
40
41 - figure(3)
42 - bodeplot(H)          %Diagrama de Bode
43 - grid on;
44 - title('Diagrama de bode');
45 - xlabel('Tiempo');
46 - ylabel('Amplitud');

```

Ilustración 5. Análisis a lazo abierto en campo continuo



### Respuesta al escalón unitario

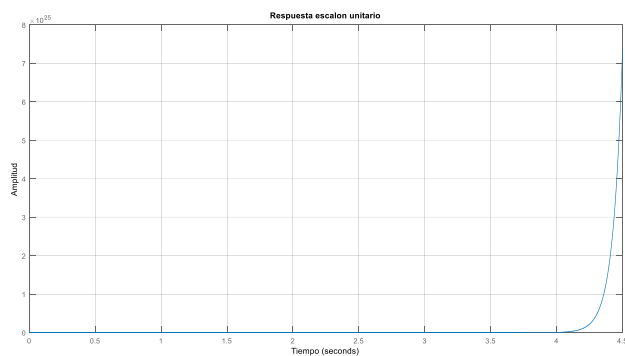


Ilustración 6. Respuesta al escalón unitario

### Diagrama de polos y ceros

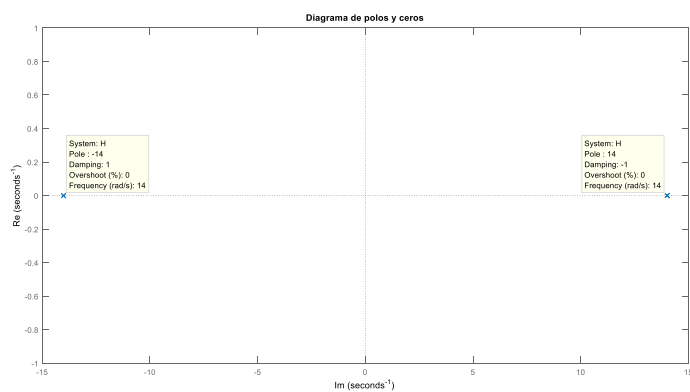


Ilustración 7. Diagrama de polos y ceros

Los polos se encuentran en  $p1 = [-14 \text{ rad/s}]$  y  $p2 = [+14 \text{ rad/s}]$ , con un ancho de banda de **8.9921 rad/s**. Al contar con un polo sobre el eje de abscisas positivo, el sistema es inestable, tal como podemos ver en la imagen de respuesta al escalón unitario.

### Diagrama de bode

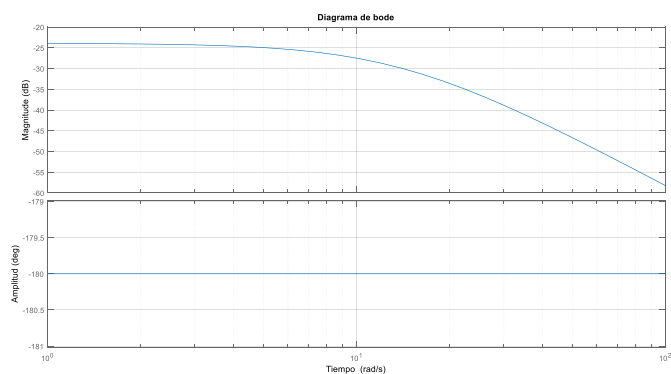


Ilustración 8. Diagrama de polos y ceros

### *Análisis a lazo cerrado en campo continuo (s)*

Se realiza un control PID, se declaran las constantes  $k_p=35$ ,  $k_i=100$  y  $k_d=1,9$ .

```

33 - G_PID_num =conv(num,PID_num);
34 - G_PID_den =conv(den,PID_den);
35 - G_PID=tf(G_PID_num,G_PID_den)
36 - [G_PID_num_c,G_PID_den_c]=cloop(G_PID_num,G_PID_den)
37 - G_PID_c=tf(G_PID_num_c,G_PID_den_c)
38
39 - figure(1)
40 - step(G_PID_c)
41 - grid on;
42 - title('Respuesta escalon unitario');
43 - xlabel('Tiempo');
44 - ylabel('Amplitud');
45
46 - figure(2)
47 - pzmap(G_PID)
48 - title('Diagrama de polos y ceros');
49 - xlabel('Im');
50 - ylabel('Re');
51
52 - figure(3)
53 - bodeplot(G_PID)
54 - grid on;
55 - title('Diagrama de bode');
56 - xlabel('Tiempo');
57 - ylabel('Amplitud');

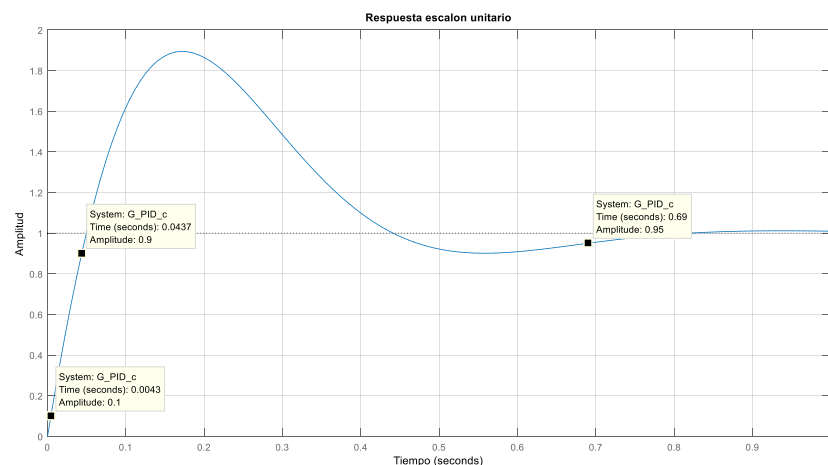
```

**Ilustración 9. Control a lazo cerrado en campo continuo**

Posteriormente se grafican las respuesta al escalón unitario, diagrama de polos y ceros y por último el diagrama de bode.

### *Respuesta al escalón unitario*

Observamos la respuesta al escalón unitario del lazo cerrado, con un tiempo de crecimiento de **39,4ms** y un tiempo de estabilización de **690ms**.



**Ilustración 10. Respuesta al escalón unitario**

### Diagrama de polos y ceros

Se grafican los polos y ceros de la función de lazo cerrado sobre el plano 's', obteniendo dos ceros,  $c1=[-14.8852]$ ,  $c2=[-3.5358]$  y tres polos  $p1=[-12.4051 + 0.0000i]$ ,  $p2=[-5.6725 + 8.2818i]$ ,  $p3=[-5.6725 - 8.2818i]$ . Como todas las partes reales de los polos son negativas, es sistema es estable.

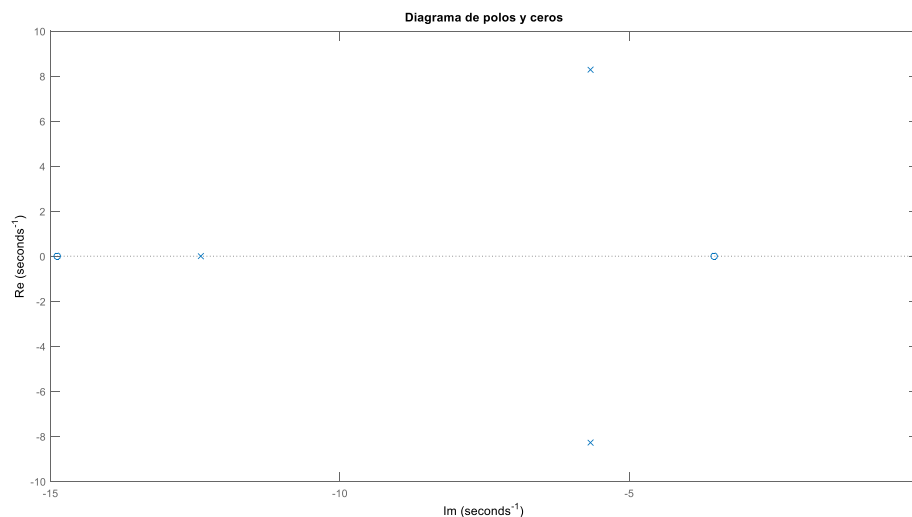
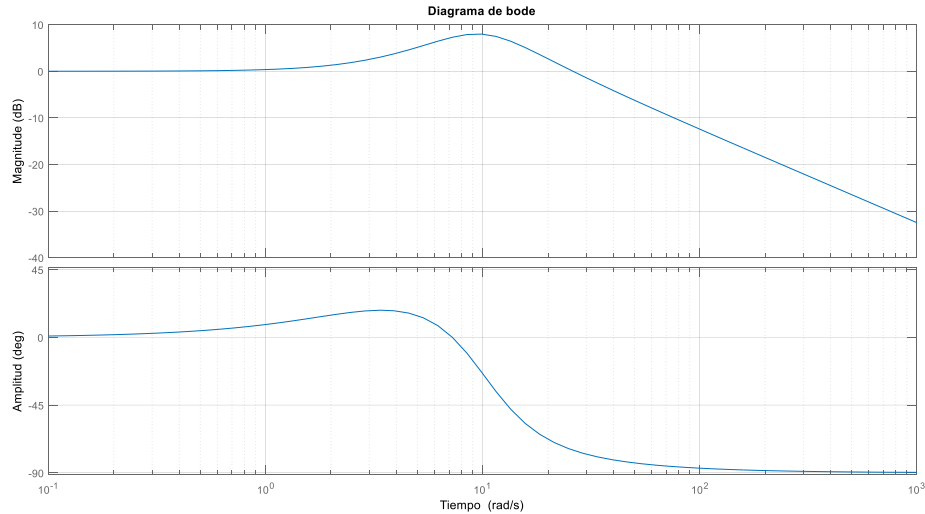


Ilustración 11. Diagrama de polos y ceros

### Diagrama de bode

En el siguiente diagrama de bode podemos observar un pico en la gráfica de magnitud, esto es denominado **pico de resonancia,  $M_r$** , generalmente esta magnitud da idea de la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

Normalmente un valor grande de  **$M_r$**  significa un valor elevado de sobrepaso máximo de la respuesta al escalón unitario, el cual concuerda con lo observado en la imagen n° 9.



**Ilustración 12. Diagrama de bode**

### *Análisis a lazo cerrado en campo discreto (z)*

La discretización del sistema se realiza con un tiempo de muestreo de 0,05 segundos.

```

24 %% Discretizo funcion de la Planta H(s) -> H(z)
25 [numz,denz] = c2dm(num,den,Ts,'zoh')
26 Z=tf(numz,denz)
27 bandwidth(Z)
28 %% Funcion de P.I.D.
29 kp = 35;
30 ki = 100;
31 kd = 1.9;
32 Dnum = [(kd) (kp) (ki)]
33 Dden = [ (1) (0)]
34 D = tf(Dnum,Dden)
35
36 %% Discretizo la funcion de PID D(s) -> D(z)
37 [denDz,numDz] = c2dm(Dden,Dnum,Ts,'tustin')
38
39 %% Producto de Convolucion entre la Planta y el PID
40 numConv = conv(numz, numDz)
41 denConv = conv(denz, denDz)

```

**Ilustración 13. Discretización del sistema**

```

43 %% Control de Lazo cerrado
44 [numCloop,denCloop] = cloop(numConv,denConv)
45 PID_z=tf(numCloop,denCloop,Ts)
46 figure(1)
47 step(PID_z)
48 grid on;
49 title('Respuesta escalon unitario');
50 xlabel('Tiempo');
51 ylabel('Amplitud');
52
53 figure(2)
54 pzmap(PID_z)
55 title('Diagrama de polos y ceros');
56 xlabel('Im');
57 ylabel('Re');
58
59 figure(3)
60 bodeplot(PID_z)
61 grid on;
62 title('Diagrama de bode');
63 xlabel('Tiempo');
64 ylabel('Amplitud');
65

```

**Ilustración 14. Control a lazo cerrado en variable discreta**

### *Respuesta al escalón unitario*

Observamos la respuesta al escalón unitario a lazo cerrado en tiempo discreto, con un tiempo de subida de **20ms** y un tiempo de estabilización de **616ms**

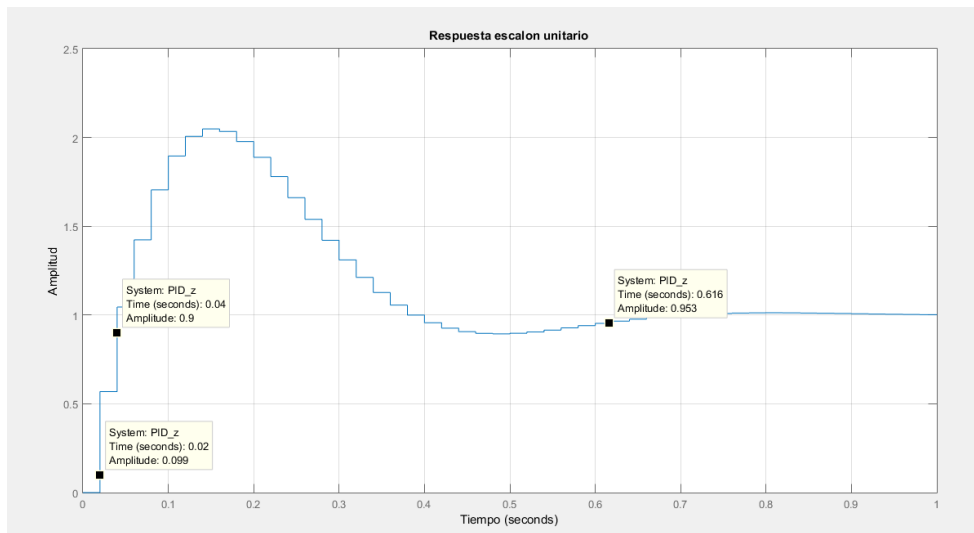


Ilustración 15. Respuesta al escalón unitario

### Diagrama de polos y ceros

Se grafican los polos y ceros, obteniéndose tres ceros  $c1 = [-1.0000]$ ,  $c2 = [0.9317]$ ,  $c3 = [0.7409]$  y cuatro polos  $p1 = [-1.0000]$ ,  $p2 = [0.8582 + 0.1695i]$ ,  $p3 = [0.8582 - 0.1695i]$ ,  $p4 = [0.7939]$ .

Al contar con un polo sobre el círculo unitario, el sistema es marginalmente estable.

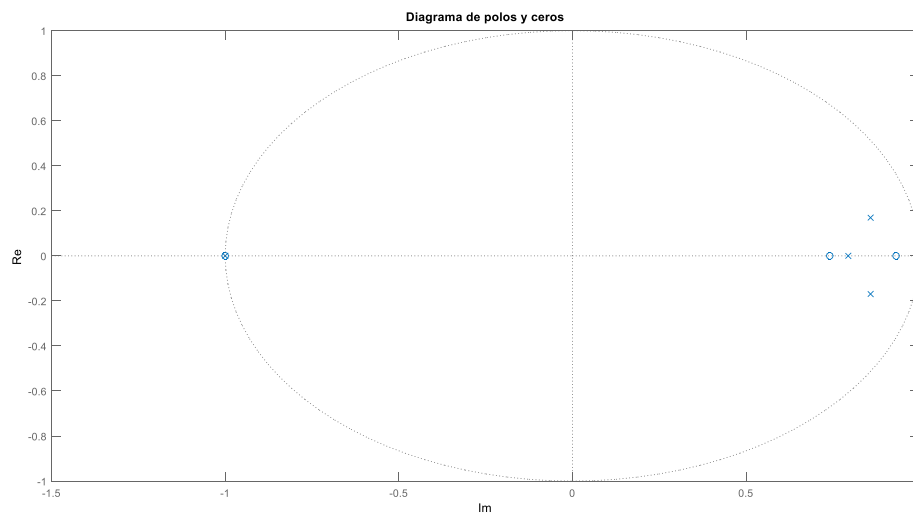


Ilustración 16. Diagrama de polos y ceros

## Diagrama de bode

Analizando la forma de magnitud de Bode, se llega a la misma conclusión que en el análisis sobre variable continua, el pico de esta grafica es debido a un gran valor de sobrepaso máximo de la respuesta al escalón unitario, como se aprecia en la figura n°15.

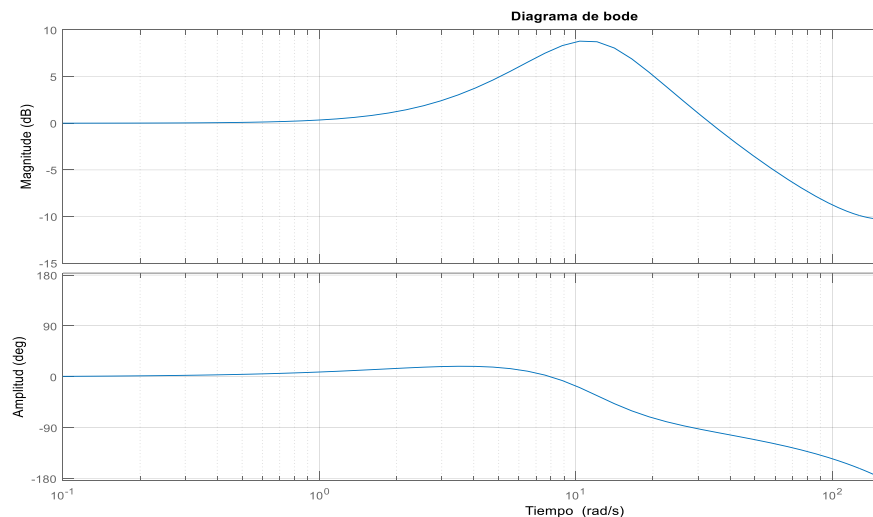
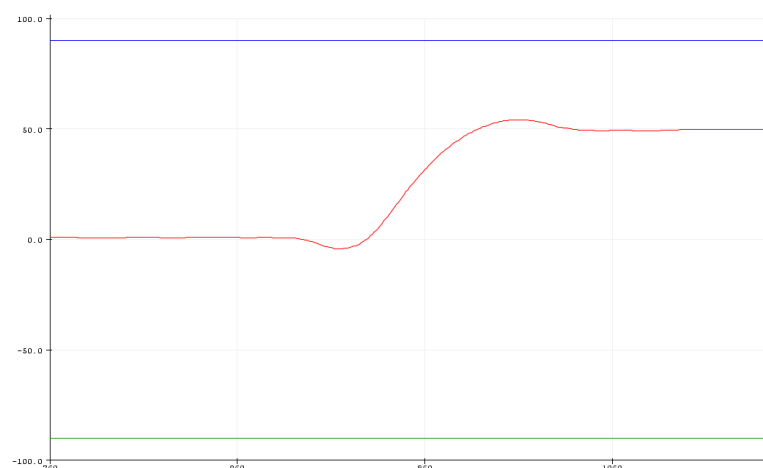


Ilustración 17. Diagrama de bode

## Problemas e inconvenientes que se presentaron a lo largo del proyecto:

1. Obviamente el primer problema que se presento fue el matemático, es decir, hallar una representación matemática de nuestro modelo que estimara el comportamiento físico real de todo el sistema con sus respectivos análisis e interpretación en el plano complejo.
2. Una vez resuelto el problema anterior había que aplicar un control PID a ese modelo matemático y sintonizarlo según nuestros requerimientos.
3. El siguiente asunto a resolver fue discutir la forma física que tendría el robot balancín teniendo en cuenta los elementos que teníamos a disposición. Es muy importante para su correcto funcionamiento lograr que el centro de masa se encuentre sobre el eje de pivot para evitar desbalances mecánicos, estos desbalances harían al control de la planta mucho más difícil.
4. Un tema que puede no parecer un problema, pero que si no se trataba con cuidado podría haber sido un dolor de cabeza, fue el diseño de las ruedas. Como no contábamos con ruedas se optó por diseñarlas con un software CAD en para así imprimirlas en 3D. Como el material utilizado para su impresión es plástico, este tiene

- un coeficiente de fricción relativamente bajo, por lo que se diseñó con un surco para un O-ring de goma que aumentaría la fricción.
- En la instancia de programación el primer problema que se resolvió fue la obtención de nuestro feedback, es decir, la medición del ángulo de inclinación respecto al plano horizontal. El problema en sí no fue la obtención del ángulo, ya que éste se obtiene mediante el acelerómetro y el giroscopio, el problema estuvo en filtrar esa señal para que la medición sea una estimación precisa de lo que sucede realmente. Logramos superar esto implementando un Filtro Complementario.
  - El último inconveniente importante que se presentó fue la implementación del algoritmo de control PID. Había dos caminos posibles por seguir en esta instancia, el primero era diseñar el algoritmo PID por nuestra cuenta que fue el camino que optamos en primer lugar, al terminarlo nos dimos cuenta que el código nos quedó muy largo y exactamente igual al que contiene una librería de Arduino para PID. Sin pensarlo demasiado se dio marcha atrás para implementar el control mediante la librería. Luego de leer la bibliografía que se encontró en internet pudimos comprender con detalle cada función del algoritmo.
  - Cuando se alcanzó la óptima sintonización del controlador podíamos observar que este se comportaba relativamente bien para mantener el robot en equilibrio, la sorpresa apareció cuando se perturbaba el sistema externamente. El controlador no era capaz de mantenerlo en pie, ante una pequeña perturbación daba la sensación que el controlador actuaba de manera extraña y hacía que se cayera. No podíamos entender el porqué de esta situación hasta que notamos gráficamente un potencial error en la medición de la inclinación que se daba en casos particulares. El problema estaba en que cuando se movía rápidamente, por ejemplo, hacia un ángulo positivo, por una fracción de tiempo el sistema media un ángulo negativo. Basto con un simple *delay* en la función que obtiene el ángulo para corregirlo. Para comprender mejor esto se adjuntan unas imágenes con el problema y después de la solución.



**Ilustración 18. Medida angular antes del delay**

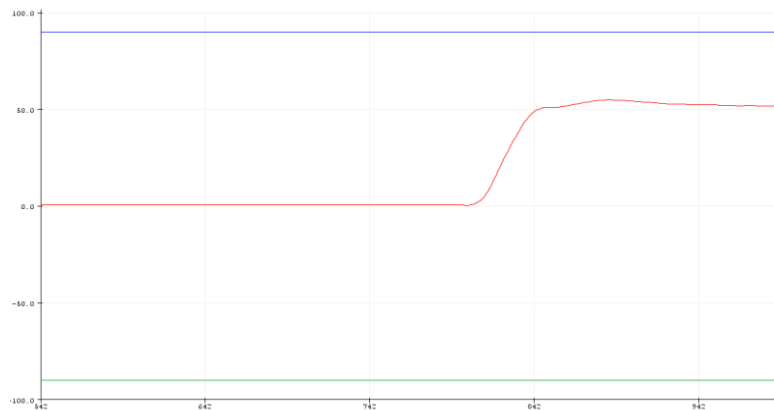


Ilustración 19. Medida angular luego del delay

## Conclusión

Para concluir, el robot balancín cumple con lo propuesto, por supuesto, tiene elementos que se pueden mejorar, como es el caso del cambio de los motores de CC por motores paso a paso o servos, también otro tipo de mecánica para las ruedas, mejoras en el programa, etc. sin embargo pensamos que este es el mejor modelo que pudimos lograr.

Dejando un poco de lado el funcionamiento, podemos decir que nos encontramos totalmente satisfechos al lograr con el objetivo, dejando en claro conocimientos que en la teoría eran algo confusos a entender esto fue en conjunto con numerosos problemas que surgieron en la práctica.