Variables de Estado

Oscar Duarte

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de Colombia

Variables de Estado

Ecuación de Estado y la segunda *Ecuación de Salida*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

A, **B**, **C**, **D**: matrices reales.

u, **y**, **x**: vectores: Entrada, Salida Estado.

Variables de Estado

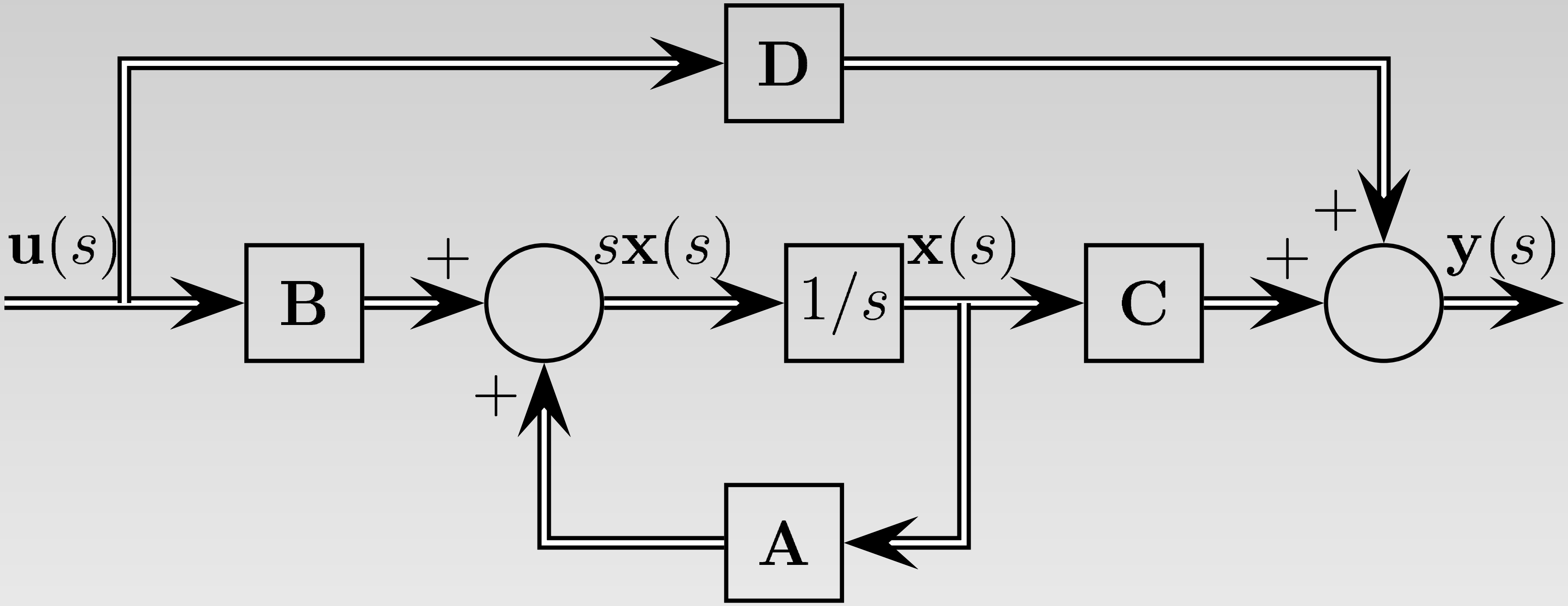


Figura 1: Diagrama de Bloques de un sistema contínuo en representación de espacio de Estado

Variables de Estado

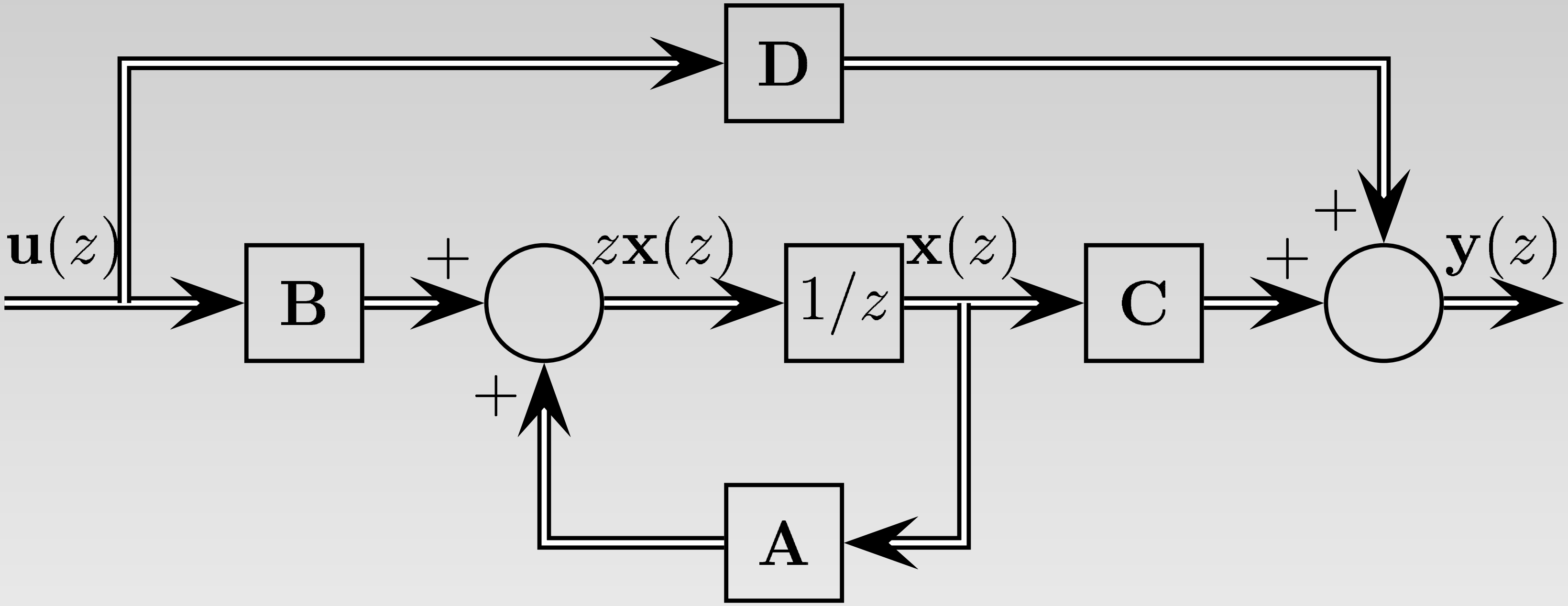


Figura 2: Diagrama de Bloques de un sistema discreto en representación de espacio de Estado

El concepto de Estado

El *Estado* de un sistema en el tiempo t_0 (o en k_0 si es discreto) es la cantidad de información necesaria en ese instante de tiempo para determinar de forma única, junto con las entradas $\mathbf{u}$, el comportamiento del sistema para todo $t \geq t_0$ (o para todo $k \geq k_0$ si es discreto)

Variables de Estado

- Las Variables de Estado pueden tener o no sentido físico.
- Las Variables de Estado pueden o no ser medibles
- Para un mismo sistema dinámico las Variables de Estado no son únicas; de hecho, se pueden definir infinitos conjuntos de variables que sirvan como variables de estado.

Ejemplo

El comportamiento de un circuito RLC serie queda determinado por $v(t)$ y los valores de $i_L(0^+)$ y $v_C(0^+)$, por esta razón, las variables $i_L(t)$ y $v_C(t)$ sirven como variables de estado.

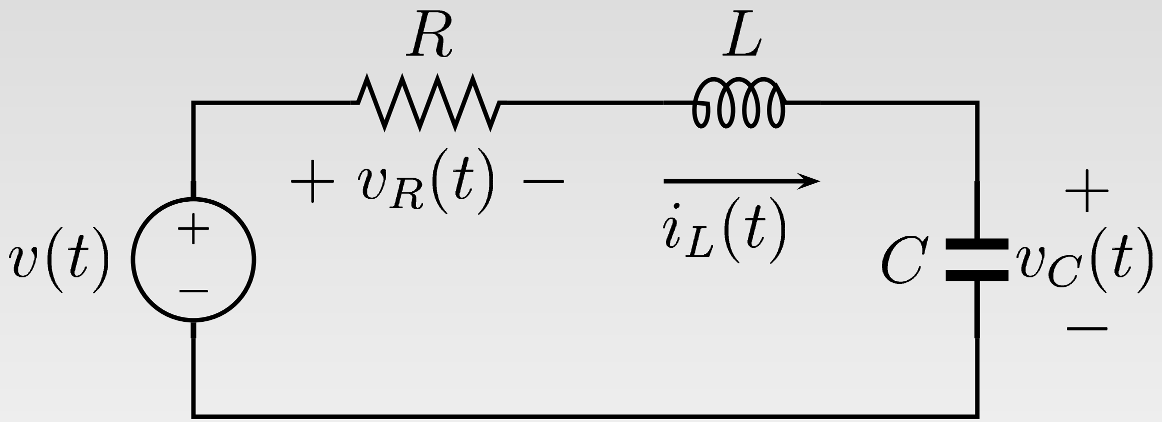


Figura 3: Circuito RLC serie

Ejemplo

Kirchhoff:

$$\begin{cases} Ri_L(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) = v(t) \\ i_L(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

Reorganizando...

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L}i_L(t) - \dfrac{1}{L}v_C(t) + \dfrac{1}{L}v(t) \\ \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i_L(t) \end{cases}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} = -\dfrac{R}{L} i_L(t) - \dfrac{1}{L} v_C(t) + \dfrac{1}{L} v(t) \\ \dfrac{dv_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C} i_L(t) \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} di_L(t)/dt \\ dv_C(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix}$$

Además...

$$\begin{bmatrix} v_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

En resumen, una representación en variable de estado del circuito estaría dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} di_L(t)/dt \\ dv_C(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} v_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

que son de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Otro Ejemplo

Un motor eléctrico de corriente continua controlado por campo; corriente de armadura constante; carga de momento de inercia J; coeficiente de fricción viscosa B; velocodad angular $\omega(t)$.

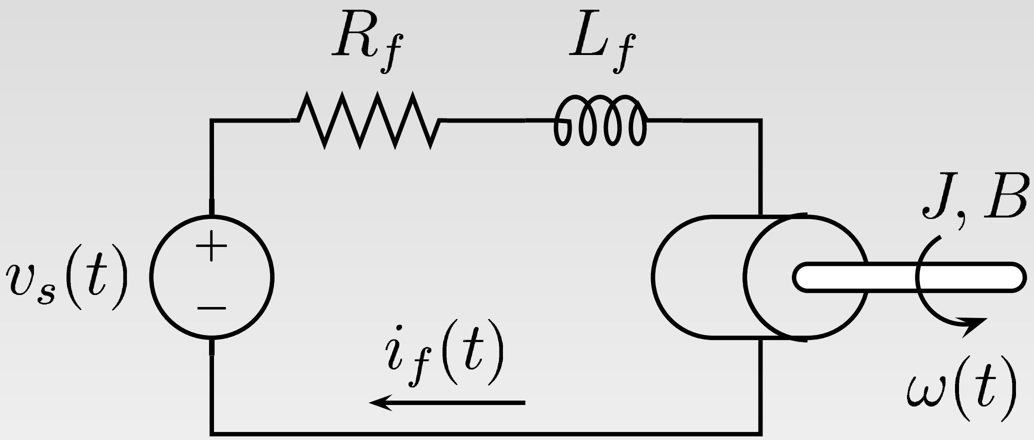


Figura 4: Motor DC controlado por campo

Ejemplo

Circuito eléctrico de campo es

$$R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} = v_s(t)$$

La corriente de armadura es constante: par motor $T(t)$ generado es directamente proporcional a la corriente de campo con una cierta constante de proporcionalidad K_T, es decir

$$T(t) = K_T i_f(t)$$

Newton

$$T(t) - B\omega(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

Ejemplo

Las ecuaciones pueden escribirse como

$$\begin{cases} \dfrac{di_f(t)}{dt} = -\dfrac{R_f}{L_f} i_f(t) + \dfrac{1}{L_f} v_s(t) \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = \dfrac{K_T}{J} i_f(t) - \dfrac{B}{J} \omega(t) \end{cases}$$

Ejemplo

que en forma matricial se convierten en

$$\begin{bmatrix} di_f(t)/dt \\ d\omega(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_f/L_f & 0 \\ K_T/J & B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Si seleccionamos como variable de salida la velocidad angular, obtenemos una representación en variable de estado del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} di_f(t)/dt \\ d\omega(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_f/L_f & 0 \\ K_T/J & B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

Otra posibilidad...

Variables de estado: $T(t)$ y $\omega(t)$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{bmatrix} dT(t)/dt \\ d\omega(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_f K_T/L_f & 0 \\ 1/J & B/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_T/L_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \\ \\ \qquad\qquad \begin{bmatrix} \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s(t) \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

Otro ejemplo

A continuación se presenta un modelo lineal simple del crecimiento demográfico de una sociedad. Se ha distribuido el total de la población por franjas de edad:

$$
\begin{array}{ll}
x_1(k) & : \text{ Población con edades entre } 0 \text{ y } 10 \text{ años} \\
x_2(k) & : \text{ Población con edades entre } 10 \text{ y } 20 \text{ años} \\
\vdots & \qquad \vdots \\
x_n(k) & : \text{ Pobl. con ed. entre } (n-1) \times 10 \text{ y } n \times 10 \text{ años}
\end{array}
$$

Ejemplo

Si denotamos por $y(k)$ la población total de la sociedad en el periodo k se tendrá:

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + \cdots + x_n(k) = \sum_{i=1}^{n} x_i(k)$$

Si tomamos cada periodo como un intervalo de 10 años, en el periodo $k+1$ las personas que en el periodo k están en la franja i, estarán en la franja $k+1$ en el periodo $i+1$, salvo aquellos que mueran, es decir:

$$x_i(k+1) = x_{i-1}(k) - \gamma_{i-1} x_{i-1}(k) \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

Ejemplo

en donde γ_i es la rata de mortalidad para la franja de edades número i.

Para encontrar $x_1(k+1)$, es decir el número de personas que nacen en el periodo k, podemos suponer que cada franja de edades tiene una rata de reproductividad diferente ν_i, es decir:

$$x_1(k+1) = \nu_1 x_1(k) + \nu_2 x_2(k) + \cdots + \nu_n x_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i(k)$$

Ejemplo

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_{n-1} & \nu_n \\
1-\gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1-\gamma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\gamma_{n-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}
$$

Ejemplo

Además, podriamos considerar los fenómenos de migración como entradas al sistema. Definamos $u_i(k)$ como la diferencia entre el numero de inmigrantes y emigrantes de la franja i en el periodo k; con esta definición el modelo se convierte en

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Representación de Estado a partir de ED

Supóngase un sistema dinámico continuo descrito por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

¿Qué representación en espacio de estado se puede obtener?

Representación de Estado a partir de ED

El comportamiento del sistema queda únivocamente determinado si se conocen las condiciones iniciales $y(0), \dot{y}(0), \cdots y^{(n-1)(0)}$, por lo tanto podemos seleccionar las siguientes variables de estado:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) & & \\
x_2(t) &= \frac{dy}{dt} &=& \quad \dot{x}_1(t) \\
x_3(t) &= \frac{d^2y}{dt^2} &=& \quad \dot{x}_2(t) \\
\vdots & \qquad \vdots & & \quad \vdots \\
x_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} &=& \quad \dot{x}_{n-2}(t) \\
x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} &=& \quad \dot{x}_{n-1}(t)
\end{aligned}
$$

Representación de Estado a partir de ED

La función puede escribirse como

$$a_n\dot{x}_n(t) + a_{n-1}x_n(t) + \cdots + a_1x_2(t) + a_0x_1(t) = u(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = -\frac{a_0}{a_n}x_1(t) - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) + \frac{1}{a_n}u(t)$$

Representación de Estado a partir de ED

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

Representación de Estado a partir de ED

Supóngase un sistema dinámico discreto descrito por

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$$

Representación de Estado a partir de ED

Podemos seleccionar las variables de estado:

$$
\begin{array}{rcccc}
x_1(k) & = & y(k) & & \\
x_2(k) & = & y(k+1) & = & x_1(k+1) \\
x_3(k) & = & y(k+2) & = & x_2(k+1) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{k-1}(t) & = & y(k+n-2) & = & x_{n-2}(k+1) \\
x_k(t) & = & y(k+n-1) & = & x_{n-1}(k+1)
\end{array}
$$

Representación de Estado a partir de ED

de tal manera la ecuación se convierte en

$$\mathrm{x}_n(k+1) = -\frac{a_0}{a_n}x_1(k) - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(k) + \frac{1}{a_n}u(k)$$

Representación de Estado a partir de ED

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \end{bmatrix}$$

Sistemas continuos libres

En esta sección se estudia la ecuación de estado con el sistema *libre* (sin entradas).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

... si fuese escalar...

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) \qquad x(t) = e^{at}x(0)$$

$$\frac{d\,e^{at}}{dt} = ae^{at} \qquad e^{a0}x(0) = x(0)$$

Sistemas continuos libres

Es posible demostrar que

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \qquad e^{\mathbf{A}0}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

Para ello, empleamos la expansión en series de Taylor

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots$$

Variables de Estado

de donde se observa que $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, y por lo tanto $\mathbf{x}(0)e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{x}(0)$. Además, podemos calcular la derivada de $e^{\mathbf{A}t}$:

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^3t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5t^4}{4!} + \cdots$$

Sistemas continuos libres

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$\frac{d\,e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

La solución es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$

Algunos métodos:

1. Series de Taylor
2. Forma Canónica de Jordan
3. Transformada de Laplace
4. Laplace y Jordan

Series de Taylor

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \cdots$$

Este método no es práctico, debido a la dificultad de calcular $\mathbf{A}^k$;

Forma Canónica de Jordan

Si se ha obtenido la Forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, entonces se tienen dos matrices $\mathbf{J}$ y $\mathbf{M}$ tales que

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$$

Y ahora Taylor...

Forma Canónica de Jordan

y por lo tanto $e^{\mathbf{A}t}$ puede calcularse asi:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{MIM}^{-1} + \frac{(\mathbf{MJM}^{-1})t}{1!} + \frac{(\mathbf{MJM}^{-1})^2 t^2}{2!}$$

$$+ \frac{(\mathbf{MJM}^{-1})^3 t^3}{3!} + \frac{(\mathbf{MJM}^{-1})^4 t^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{MIM}^{-1} + \frac{\mathbf{MJM}^{-1} t}{1!} + \frac{\mathbf{MJ^2M}^{-1} t^2}{2!} + \frac{\mathbf{MJ^3M}^{-1} t^3}{3!}$$

$$+ \frac{\mathbf{MJ^4M}^{-1} t^4}{4!} + \cdots$$

Forma Canónica de Jordan

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{J}t}{1!} + \frac{\mathbf{J^2}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{J^3}t^3}{3!} + \frac{\mathbf{J^4}t^4}{4!} + \cdots\right)\mathbf{M}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{M}^{-1}$$

La ventaja de emplear esta expresión radica en que $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por bloques, y por lo tanto $e^{\mathbf{J}t}$ es más fácil de calcular, especialmente si $\mathbf{J}$ es completamente diagonal

Transformada de Laplace

Solucionamos la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ por Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\dot{\mathbf{x}}\right\} = \mathcal{L}\left\{\mathbf{A}\mathbf{x}\right\} =$$

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s)$$

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$

Variables de Estado

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{x}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)\right\}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}$$

Jordan y Laplace

Pueden combinarse Laplace y Jordan para obtener

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\right\}\mathbf{M}^{-1}$$

Ejemplo

Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = -1$

Ejemplo

La ecuación es de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, por lo tanto la solución será $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}\mathbf{x}(0)$. El cálculo de $e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}$ es muy simple, debido a que $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal.

$$e^{\mathbf{A}\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Este resultado también se habría podido obtener mediante la transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s-2 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{-t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Otra forma de verlo... La matriz es diagonal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Son tres ecuaciones “por separado”

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2(t) = -1x_2(t) & x_2(0) = 1 \\ \dot{x}_3(t) = 3x_3(t) & x_3(0) = -1 \end{cases}$$

Ejemplo

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{2t} \\ x_2(t) = e^{-t} \\ x_3(t) = -e^{t} \end{cases}$$

Otro ejemplo

Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$

Ejemplo

Se ha obtenido la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, que ha resultado ser la matriz $\mathbf{\Lambda}$, perfectamente diagonal; es decir se han encontrado las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{\Lambda}$ tales que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

lo que permite calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{M}^{-1}$$

Ejemplo

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-e^{2t} + 2e^{3t}) & (-e^{2t} + e^{3t}) \\ (2e^{2t} - 2e^{3t}) & (2e^{2t} - e^{3t}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

O por Laplace:

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} s-4 & -1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} (s-1) & 1 \\ -2 & (s-4) \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+3)} & \frac{s-4}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(\frac{-1}{(s+2)}+\frac{2}{(s+3)}\right) & \left(\frac{-1}{(s+2)}+\frac{1}{(s+3)}\right) \\ \left(\frac{2}{(s+2)}+\frac{-2}{(s+3)}\right) & \left(\frac{2}{(s+2)}+\frac{-1}{(s+3)}\right) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$e^{\mathbf{At}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} (-e^{2t}+2e^{3t}) & (-e^{2t}+e^{3t}) \\ (2e^{2t}-2e^{3t}) & (2e^{2t}-e^{3t}) \end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial será

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} (-e^{2t}+2e^{3t}) & (-e^{2t}+e^{3t}) \\ (2e^{2t}-2e^{3t}) & (2e^{2t}-e^{3t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-e^{2t}+2e^{3t})x_{10} + (-e^{2t}+e^{3t})x_{20} \\ (2e^{2t}-2e^{3t})x_{10} + (2e^{2t}-e^{3t})x_{20} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(-x_{10} - x_{20}) + e^{3t}(2x_{10} + x_{20}) \\ e^{2t}(2x_{10} + 2x_{20}) + e^{3t}(-2x_{10} - x_{20}) \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo más

Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$

Ejemplo

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$, y dos vectores propios asociados son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -j2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} j2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que los valores propios son complejos, es conveniente encontrar la forma canónica real de jordan de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{J_R} = \mathbf{M}_R^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}_R$$

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

lo que permite calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}_R e^{\mathbf{J}_R t} \mathbf{M}_R^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & 2e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Ejemplo

También podemos obtener este resultado mediante la Transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+1 & -4 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+5} \begin{bmatrix} (s+1) & 4 \\ -1 & (s+4) \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} & \frac{4}{(s+1)^2+2^2} \\ \frac{-1}{(s+1)^2+2^2} & \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$e^{\mathbf{At}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & 2e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

por lo tanto la solución de la ecuación diferencial será

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & 2e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10}e^{-t}\cos 2t + 2x_{20}e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{x_{10}}{2}e^{-t}\sin 2t + x_{20}e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo

Obtener la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = x_{10}$ y $x_2(0) = x_{20}$

Ejemplo

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Además se puede comprobar que no es posible diagonalizar $\mathbf{A}$.

En consecuencia, la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$ será un único bloque de tamaño 2. No obstante, vamos a suponer que se han encontrado las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

de tal manera que se puede calcular $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{M}^{-1}$$

Ejemplo

No obstante, como $\mathbf{J}$ no es diagonal, debemos calcular $e^{\mathbf{J}t}$ mediante la transformada de Laplace.

$$s\mathbf{I}-\mathbf{J}=\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\left(s\mathbf{I}-\mathbf{J}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{J}t}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s\mathbf{I}-\mathbf{J}\right)^{-1}\right\}=\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Retomando el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

También podemos obtener este resultado mediante la Transformada de Laplace:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+3 & -4 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}(s-1) & 4\\ -1 & (s+3)\end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{(s+1)}+\frac{-2}{(s+1)^2}\right) & \left(\frac{4}{(s+1)^2}\right)\\ \left(\frac{-1}{(s+1)^2}\right) & \left(\frac{1}{(s+1)}+\frac{2}{(s+1)^2}\right)\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-t}-2te^{-t} & 4te^{-t}\\ -te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\end{bmatrix}$$

Ejemplo

la solución de la ecuación diferencial será:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{-t} - 2te^{-t})x_{10} + 4x_{20}te^{-t} \\ -x_{10}te^{-t} + (e^{-t} + 2te^{-t})x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{10})e^{-t} + (-2x_{10} + 4x_{20})te^{-t} \\ (x_{20})e^{-t} + (-x_{10} + 2x_{20})te^{-t} \end{bmatrix}$$

Retratos de Fase

Supóngase ahora un sistema de dimensión dos, es decir, supóngase

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Variables de Estado

- Punto de Equilibrio de Sistemas Continuos

$\bar{\mathbf{x}}$ es un *Punto de Equilibrio* de un sistema descrito por la ecuación diferencial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si su derivada es cero, es decir, si $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

Variables de Estado

- Si la matrix $\mathbf{A}$ es no singular, el único punto de equilibrio es el origen del plano de fase. Lo anterior se demuestra al notar que un punto de equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ es la solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, que tiene una única solución en $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es no singular.
- Si la matriz $\mathbf{A}$ es singular pueden existir infinitos puntos de equilibrio, y los retratos de fase serán diferentes a los contemplados en las siguientes *Estos casos no se considerarán en este curso*.

Ejemplo

La solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sujeta a las condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 2$ es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-t} \sin 2t \\ 2e^{-t} \cos 2t \end{bmatrix}$$

Diagramas de Fase

Condiciones iniciales

$$\mathbf{x}_a(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_c(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_d(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de **A** son $\lambda_{1,2} = -1 \pm -j2$.

Variables de Estado

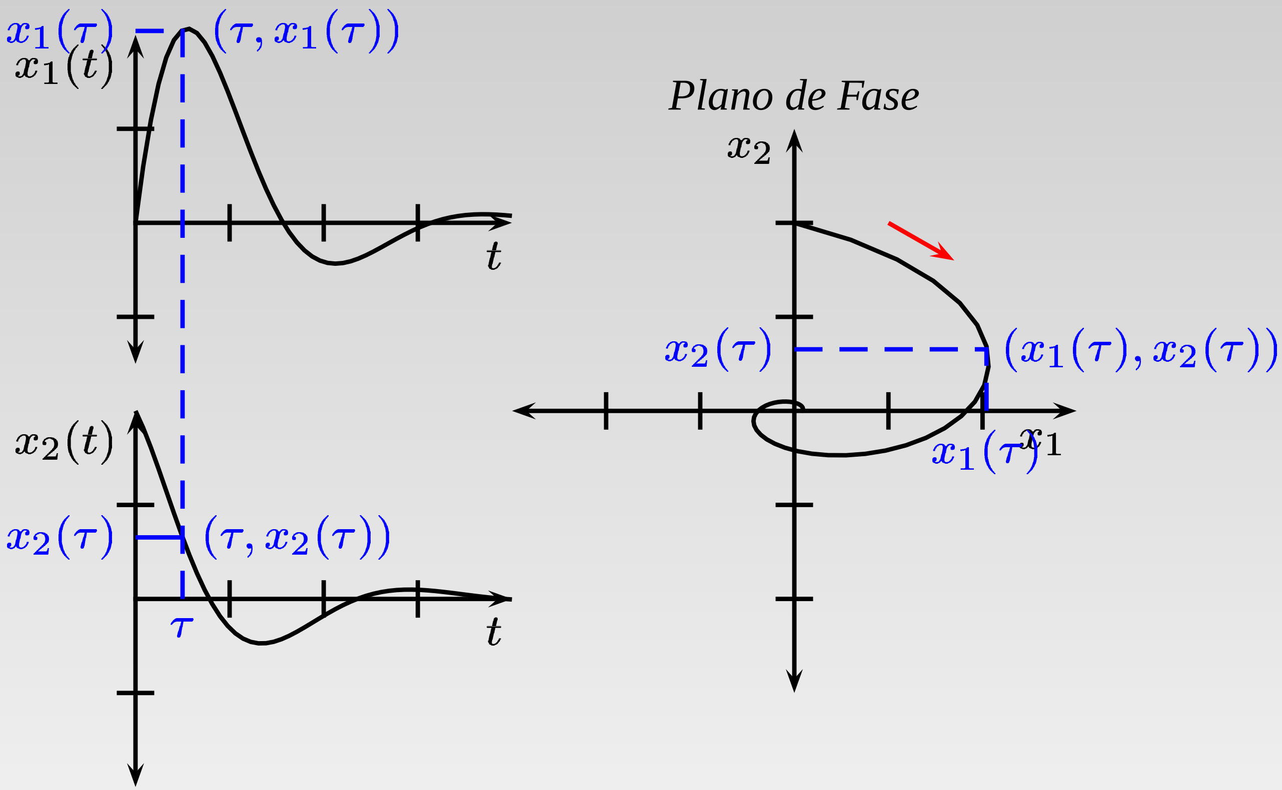
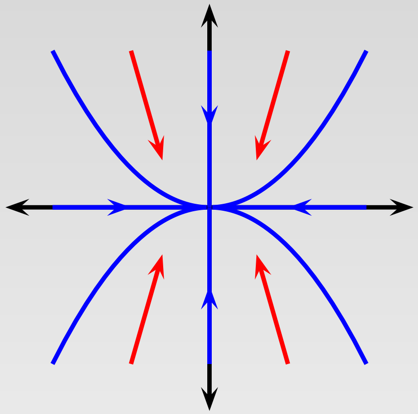
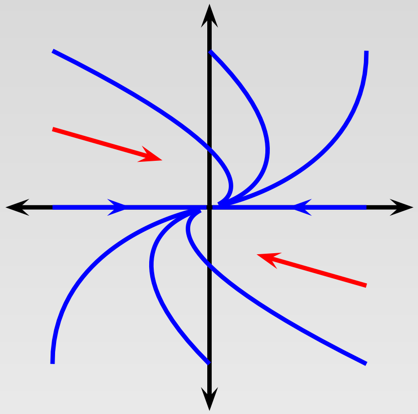


Figura 5: Construcción de una trayectoria en el Plano de Fase

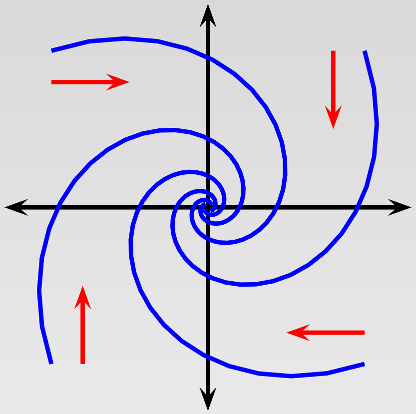
Retratos de Fase Estables

<table>
<tr><td rowspan="2">Estable</td><td rowspan="2"></td><td>Reales
Negativos</td><td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$
$x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$</td></tr>
</table>

Retratos de Fase Estables

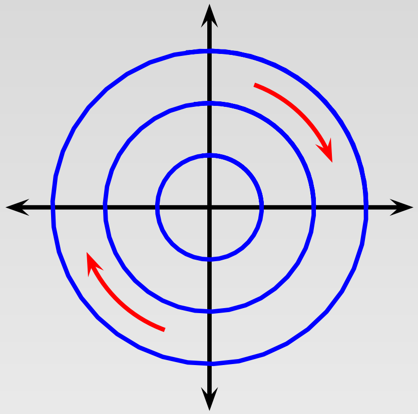
<table>
<tr>
<td rowspan="2">Estable de multiplicidad 2</td>
<td rowspan="2"></td>
<td>Reales Neg.
Rep.</td>
<td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$x_1(t) = (x_{10} + t x_{20}) e^{-t}$
$x_2(t) = x_{20} e^{-t}$</td>
</tr>
</table>

Retratos de Fase Estables

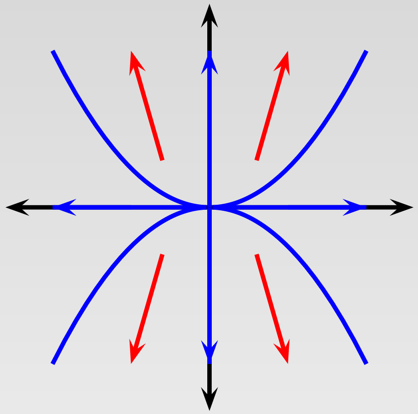


Sifón		Complejos de Parte Real Negativa	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-2t}\cos t + x_{20}e^{-2t}\sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{-2t}\sin t + x_{20}e^{-2t}\cos t$	

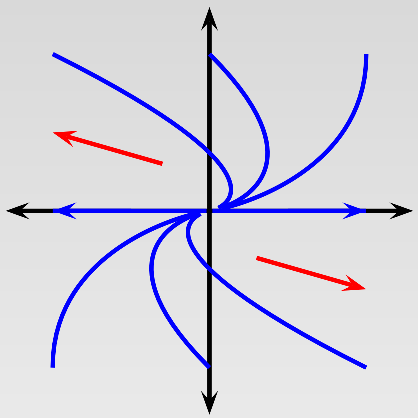
Retratos de Fase Estables

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Centro</td>
<td rowspan="2"></td>
<td>Imaginarios puros</td>
<td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$x_1(t) = x_{10} \cos t + x_{20} \sin t$
$x_2(t) = -x_{10} \sin t + x_{20} \cos t$</td>
</tr>
</table>

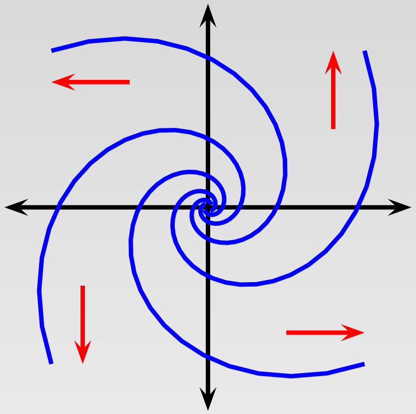
Retratos de Fase Inestables

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Inestable</td>
<td rowspan="2"></td>
<td>Reales Positivos</td>
<td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$x_1(t) = x_{10}e^{t}$
$x_2(t) = x_{20}e^{2t}$</td>
</tr>
</table>

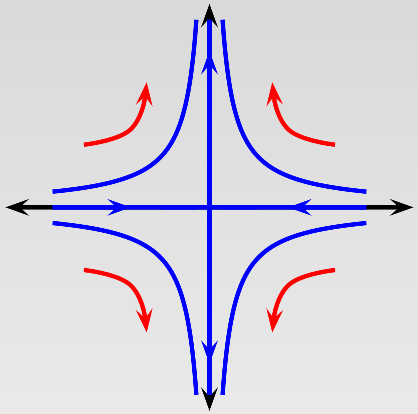
Retratos de Fase Inestables

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Inestable de multiplicidad 2</td>
<td rowspan="2"></td>
<td>Reales Positivos Repetidos</td>
<td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$x_1(t) = (x_{10} + t x_{20}) e^t$
$x_2(t) = x_{20} e^t$</td>
</tr>
</table>

Retratos de Fase Inestables

<table>
<tr><td rowspan="2">Fuente</td><td rowspan="2"></td><td>Complejos de Parte Real Positiva</td><td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_1(t) = x_{10}e^{2t}\cos t + x_{20}e^{2t}\sin t$
$x_2(t) = -x_{10}e^{2t}\sin t + x_{20}e^{2t}\cos t$</td></tr>
</table>

Retratos de Fase Inestables

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Punto de Silla</td>
<td rowspan="2"></td>
<td>Reales de Signo Diferente</td>
<td>$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$
$x_2(t) = x_{20}e^{t}$</td>
</tr>
</table>

Variables de Estado

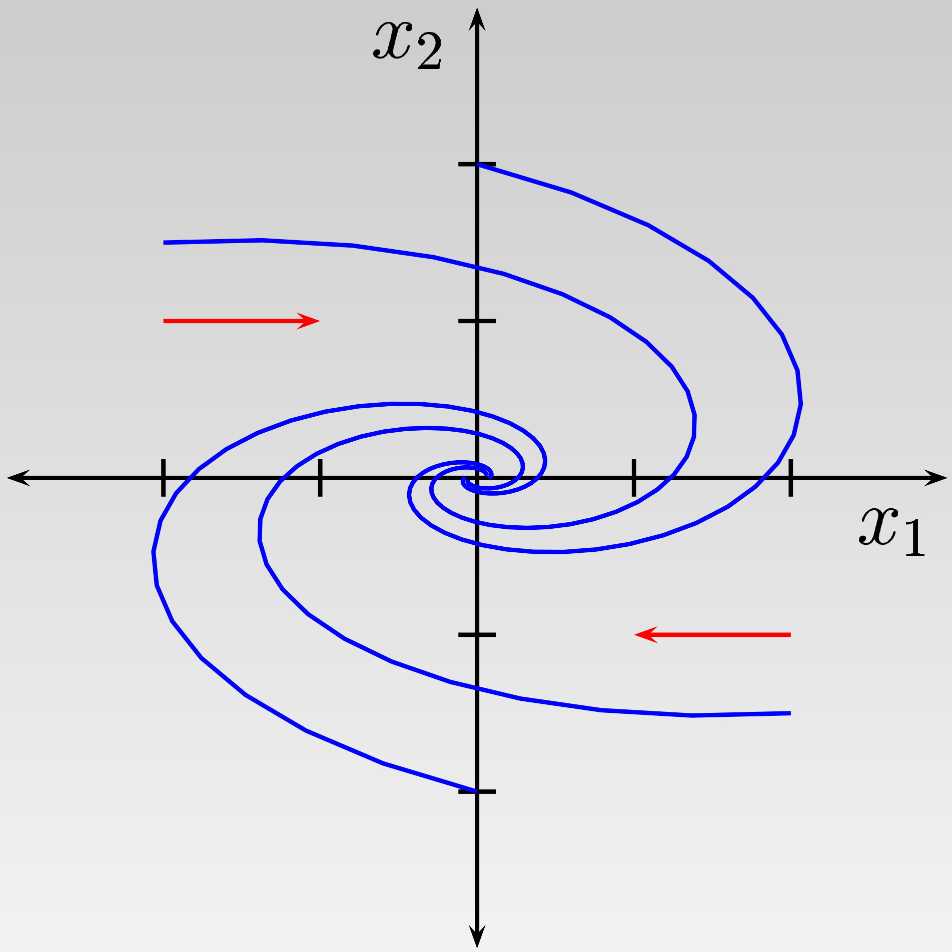
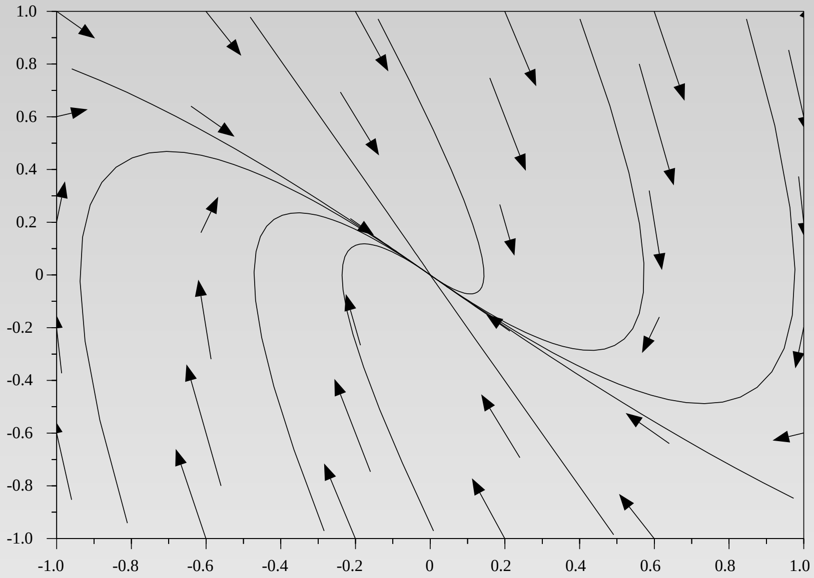


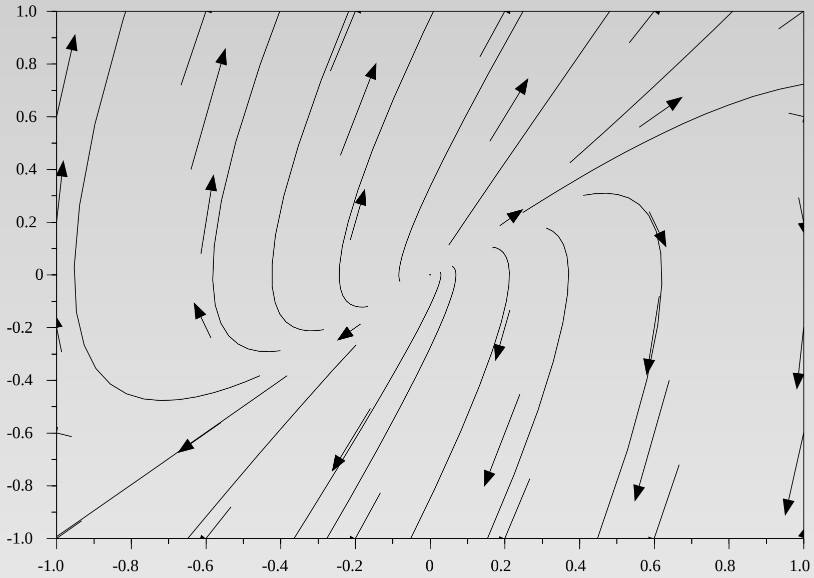
Figura 6: Retrato de Fase

Variables de Estado



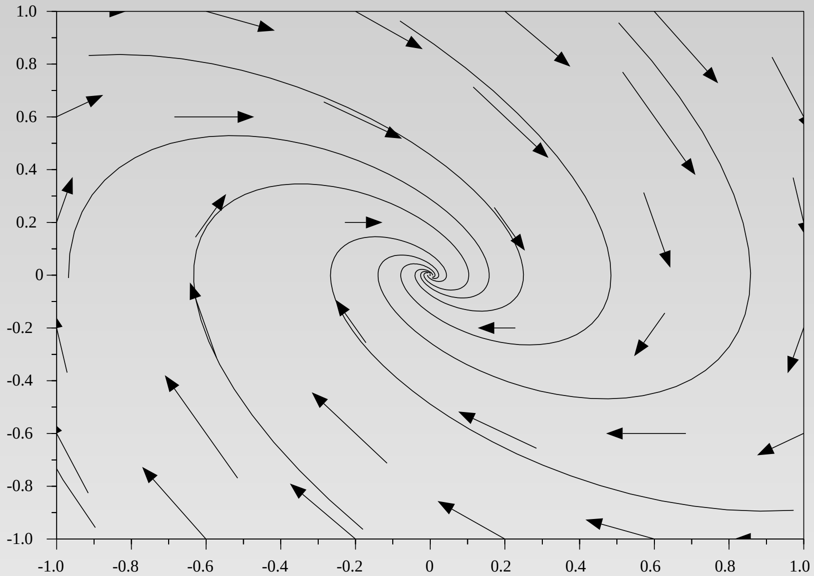
$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Variables de Estado



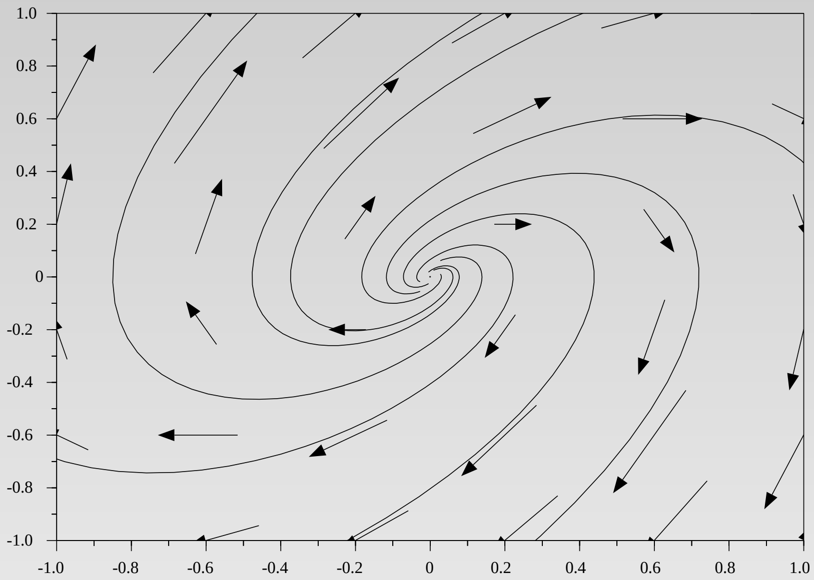
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\ \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Variables de Estado



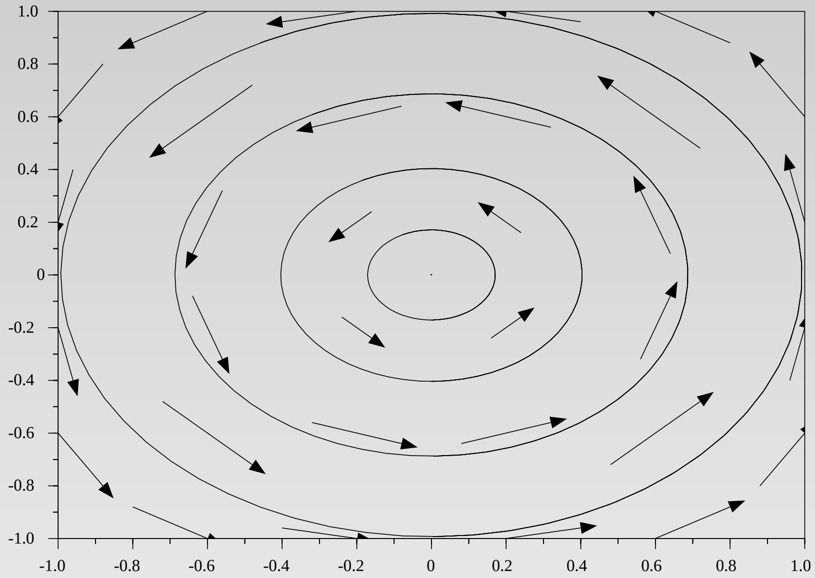
$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \; \Lambda = \begin{pmatrix} -0.5+j0.87 & 0 \\ 0 & -0.5-j0.87 \end{pmatrix}$$

Variables de Estado



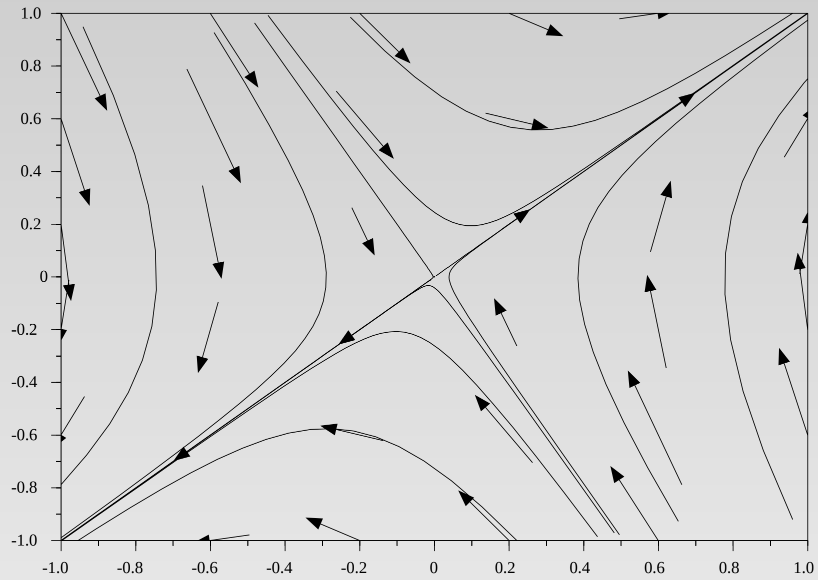
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0.5 + j0.87 & 0 \\ 0 & 0.5 - j0.87 \end{pmatrix}$$

Variables de Estado



$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ \Lambda=\begin{pmatrix}j & 0\\ 0 & -j\end{pmatrix}$$

Variables de Estado



$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\ \Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\ \mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Variables de Estado

Dada una ecuación de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

El conjunto forma un espacio vectorial conocido como el *Espacio de Estado*.

Teorema

Dada una ecuación de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

El conjunto de todas las soluciones forma un Espacio Vectorial $\mathbf{\Sigma}$ sobre el campo $\mathbb{C}$.

Variables de Estado

El conjunto de todas las soluciones es un subconjunto del Espacio Vectorial formado por las funciones vectoriales continuas de orden n. Por lo tanto, sólo es necesario demostrar que el conjunto es cerrado bajo las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalar.

Supóngase dos funciones $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$.

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) \qquad \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t)$$

Variables de Estado

Podemos multiplicarlas por : $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y sumarlas

$$\alpha_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \alpha_1 \mathbf{A} \mathbf{x}_1(t) \qquad \alpha_2 \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{x}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t)\right] = \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(t))$$

Espacio de Estado

Supuesto : $\mathbf{A}$ es no singular y de tamaño $n \times n$:

- Dimensión del Espacio de Estado
- Soluciones linealmente independientes
- Base del Espacio de Estado
- Matriz Fundamental

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) & \cdots & \psi_n(t) \end{bmatrix}$$

Bases y Vectores Propios

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n vectores propios LI, éstos pueden escogerse como el juego de n condiciones iniciales que se necesitan para construir una base de $\mathbf{\Sigma}$. Este cambio de base es equivalente a la obtención de la Forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$.

Ejemplo

Supóngase el sistema dinámico

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, y unos vectores propios asociados a ellos son:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

de tal manera que la forma canónica de Jordan y la matriz modal son

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz $e^{\mathbf{A}t}$ es la siguiente:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t}) & (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}) \\ (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}) & (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

y por lo tanto la solución de la ecuación diferencial, para unas condiciones iniciales x_{10} y x_{20} es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t})x_{10} + (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t})x_{20} \\ (0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t})x_{10} + (0.5e^{-t} + 0.5e^{-2t})x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(0.5x_{10} + 0.5x_{20}) + e^{-2t}(0.5x_{10} - 0.5x_{20}) \\ e^{-t}(0.5x_{10} + 0.5x_{20}) + e^{-2t}(-0.5x_{10} + 0.5x_{20}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Seleccionando condiciones iniciales, las mismas coordenadas del vector propio $\mathbf{v}_1$, es decir, si hacemos $x_{10} = 1$ y $x_{20} = 1$ la solución de la ecuación será

$$\psi_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(0.5 + 0.5) + e^{-2t}(0.5 - 0.5) \\ e^{-t}(0.5 + 0.5) + e^{-2t}(-0.5 + 0.5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- Se encuentra que $x_1(t) = x_2(t)$ lo que corresponde a una recta en el plano de fase.
- La dinámica del sistema sólo depende de términos e^{-t}.

Ejemplo

Un resultado similar obtendremos si seleccionamos como condiciones iniciales las mismas coordenadas del vector propio $\mathbf{v}_2$, es decir, si hacemos $x_{10} = 1$ y $x_20 = -1$. La solución de la ecuación será

$$\psi_2(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(0.5 - 0.5) + e^{-2t}(0.5 + 0.5) \\ e^{-t}(0.5 - 0.5) + e^{-2t}(-0.5 - 0.5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- Se encuentra que $x_1(t) = -x_2(t)$ lo que corresponde a otra recta en el plano de fase.
- La dinámica del sistema sólo depende de términos e^{-2t}.

Una Base del Espacio Vectorial

Supóngase (en $t = 0$) el vector de estado $\mathbf{x}$ es un vector propio del primer valor propio λ_1; su derivada podrá calcularse como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pero como es un vector propio, entonces $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$.

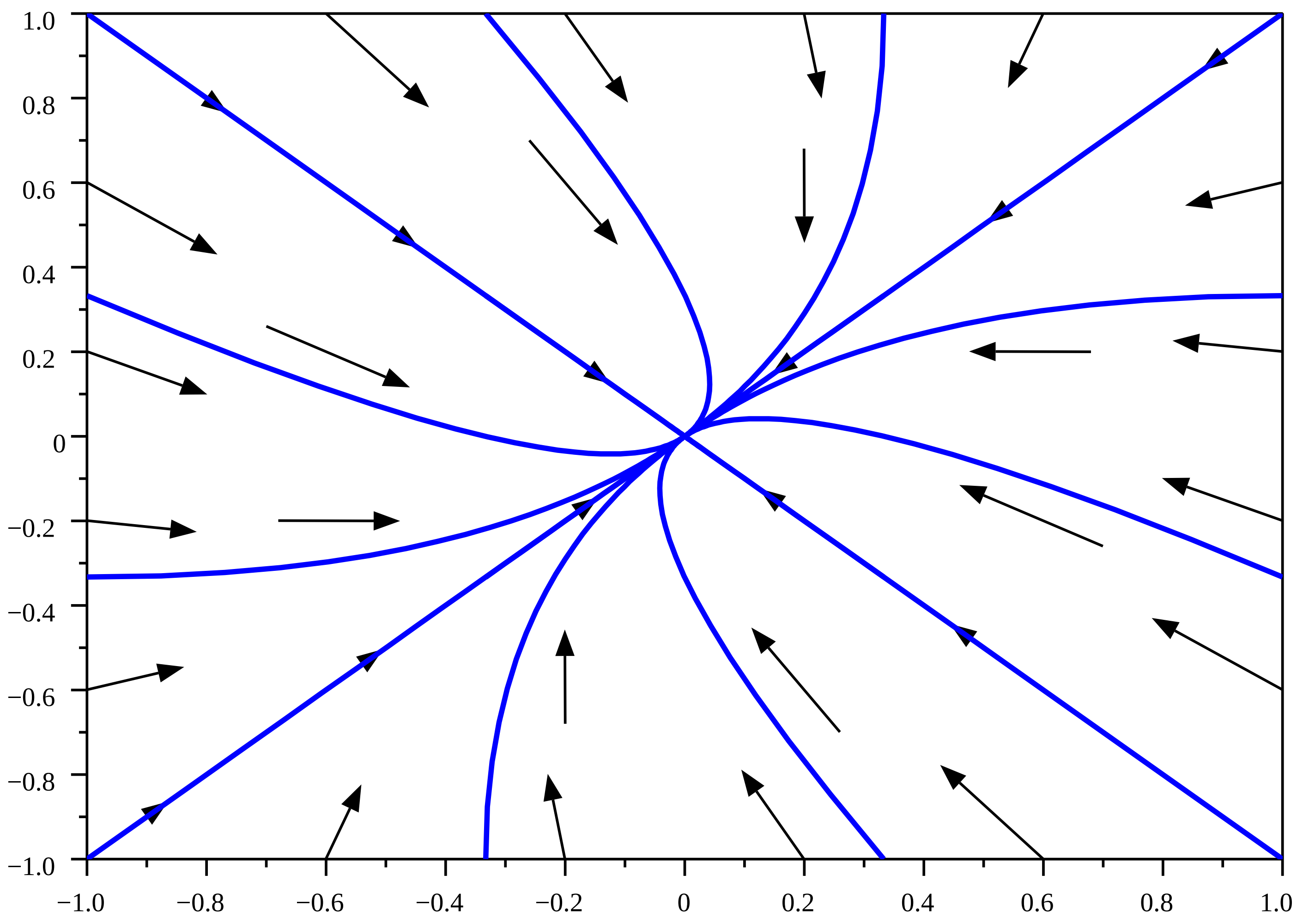
En otras palabras, la derivada será un vector con la misma dirección de $\mathbf{x}$ y por lo tanto el sistema evolucionará en esa dirección, que es justamente la del vector propio.

Una Base del Espacio Vectorial

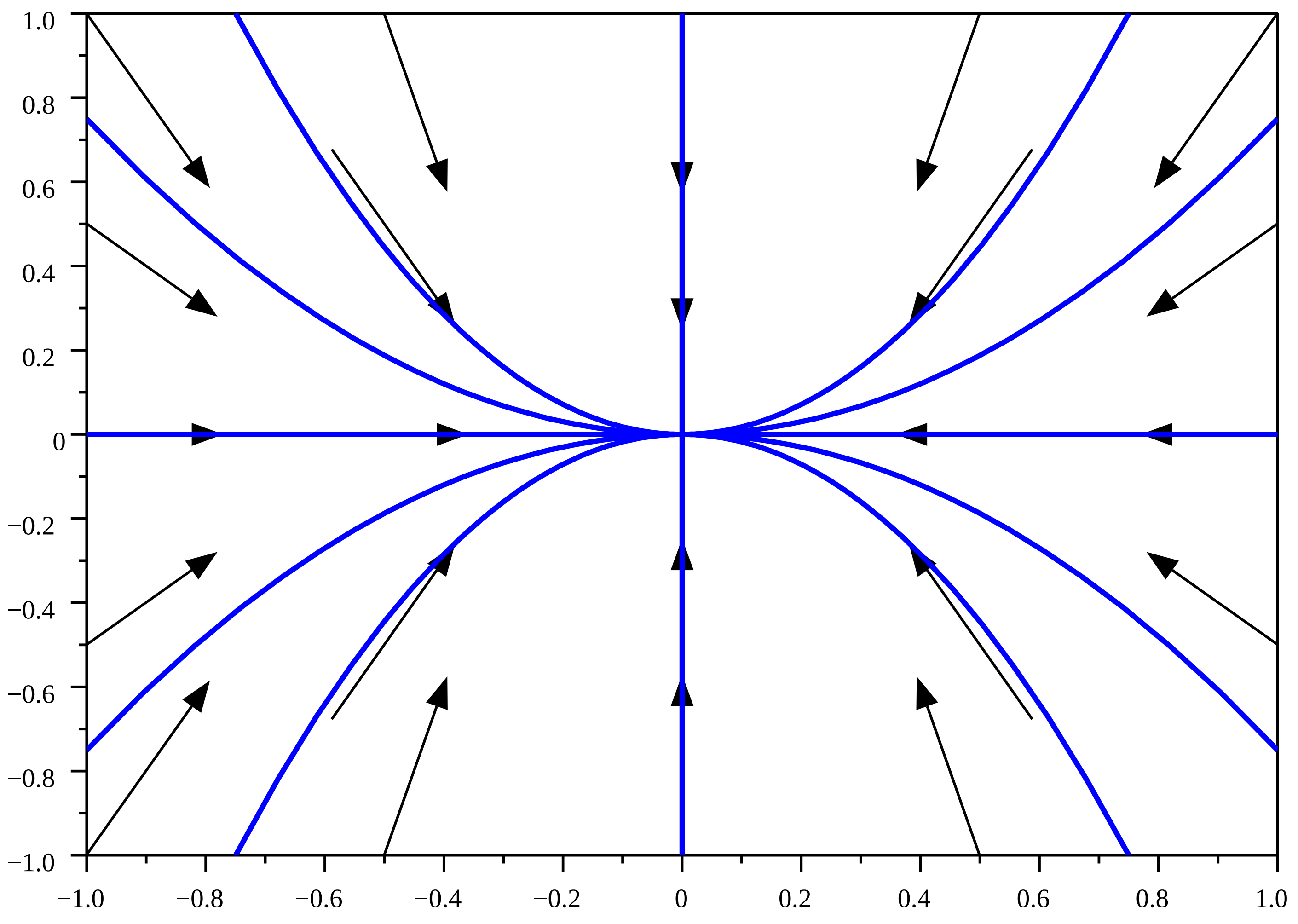
Las dos soluciones que se han obtenido $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ LI, y por lo tanto sirven como base del espacio de estado $\mathbf{\Sigma}$. donde:

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Retratos de Fase en Base Original



Retratos de Fase en Base Desacoplada



Matriz de Transición de Estado

Definimos la *Matriz de Transición de Estado* $\Phi(t_2, t_1)$

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

Para un sistema como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es posible obtener $\Phi(t_2, t_1)$ calculando $\mathbf{x}(t_1)$ y $\mathbf{x}(t_2)$:

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{A}t_2}\mathbf{x}(0)$$

Matriz de Transición de Estado

$$\mathbf{x}(0) = (e^{\mathbf{A}t_1})^{-1}\mathbf{x}(t_1) = e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{A}t_2}e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}\mathbf{x}(t_1)$$

$$\Phi(t_2, t_1) = e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}$$

Sistemas discretos libres

Abordamos la ecuación:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

con el sistema *libre* (sin entradas), es decir:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

Esta ecuación recuerda

$$x(k+1) = ax(k)$$

Sistemas Discretos Libres

cuya solución es

$$x(k) = x(0)a^k$$

debido a que

$$a^{k+1} = aa^k \qquad x(0)a^0 = x(0)$$

Evidentemente

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^k \qquad \mathbf{x}(0)\mathbf{A}^0 = \mathbf{x}(0)$$

Sistemas Discretos Libres

En consecuencia la solución de

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

es

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

$\mathbf{x}(0)$ es el vector que contiene las condiciones iniciales de $\mathbf{x}(k)$. Por otra parte, es posible calcular $\mathbf{A}^k$ por diversos métodos.

Definición

Podemos emplear la definición de $\mathbf{A}^k$ directamente:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A} \quad k \text{ veces}$$

Forma Canónica de Jordan

Si se ha obtenido la Forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, entonces se tienen dos matrices $\mathbf{J}$ y $\mathbf{M}$ tales que

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$$

Variables de Estado

y por lo tanto $\mathbf{A}^k$ puede calcularse asi:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathbf{J}^k\mathbf{M}^{-1}$$

$\mathbf{J}$ es una matriz diagonal por bloques, y por lo tanto $\mathbf{J}^k$ es más fácil de calcular, especialmente si $\mathbf{J}$ es completamente diagonal

Transformada $\mathcal{Z}$

Empleando Transformada $\mathcal{Z}$x, y asi deducir el valor de $\mathbf{A}^k$.

$$\mathcal{Z}\left\{\mathbf{x}(k+1)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\mathbf{A}\mathbf{x}(k)\right\} =$$

$$z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z)$$

$$z\mathbf{x}(z) - \mathbf{A}\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0)$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Variables de Estado

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{x}(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)\right\}$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^{k}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{A}^{k} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}$$

Jordan y Transformada $\mathcal{Z}$:

Pueden combinarse para obtener

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{M}\mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\right\}\mathbf{M}^{-1}$$

Matriz de Transición de Estado

$$\mathbf{x}(k_2) = \Phi(k_2, k_1)\mathbf{x}(k_1)$$

Es posible obtener $\Phi(k_2, k_1)$ calculando $\mathbf{x}(k_1)$ y $\mathbf{x}(k_2)$:

$$\mathbf{x}(k_1) = \mathbf{A}^{k_1}\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{A}^{k_2}\mathbf{x}(0)$$

Variables de Estado

$$\mathbf{x}(0) = (\mathbf{A}^{k_1})^{-1}\mathbf{x}(k_1) = \mathbf{A}^{-k_1}\mathbf{x}(k_1)$$

$$\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{A}^{k_2}\mathbf{A}^{-k_1}\mathbf{x}(k_1)$$

$$\mathbf{x}(k_2) = \mathbf{A}^{(k_2-k_1)}\mathbf{x}(k_1)$$

$$\Phi(k_2, k_1) = \mathbf{A}^{(k_2-k_1)}$$

Sistemas Continuos Excitados

Estudiamos ahora el sistema continuo con excitación, es decir el sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Aplicando Laplace a cada lado de las ecuaciones

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$
$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

Sistemas Continuos Excitados

Despejando $\mathbf{x}(s)$

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{A}\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

Ahora podemos incorporar

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\right] + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)$$

Sistemas Continuos Excitados

$$\mathbf{y}(s) = \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{Rta de entrada cero}} + \underbrace{\left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(s)}_{\text{Rta de estado cero}}$$

Matriz de Funciones de Transferencia

Con condiciones iniciales nulas:

$$\mathbf{y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(s)$$

La *Matriz de Funciones de Transferencia* es aquella que relaciona las entradas y las salidas, cuando las condiciones iniciales son nulas:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)|_{C.I.=0} \qquad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

Matriz de Función de Transferencia

La matriz $\mathbf{G}(s)$ es $q \times p$ (p entradas y q salidas):

$$\begin{bmatrix} {}_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}$$

El elemento $G_{ij}(s)$ de la matriz $\mathbf{G}(s)$ muestra cómo afecta la entrada $u_j(s)$ a la salida $y_i(s)$.

Caso especial

Teniendo:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{pp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix}$$

La entrada $u_j(s)$ sólo afecta la salida $y_j(s)$. Se dice entonces que el sistema es *Desacoplado*

Respuesta en el Tiempo

Aplicando la Transformada inversa de Laplace

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{x}(s)\right] =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\right]$$

La primera de las transformadas corresponde a $e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t,0)$ Nótese que la segunda transformada incluye el producto de dos funciones de s. El resultado es:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Sistemas discretos excitados

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{aligned}$$

Aplicando Transformada $\mathcal{Z}$ a cada lado de las ecuaciones

$$z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z)$$

Sistemas discretos excitados

Despejando $\mathbf{x}(z)$

$$z\mathbf{x}(z) - \mathbf{A}\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(z) = z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

$$\mathbf{x}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)$$

Sistemas discretos excitados

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\left[z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\right] + \mathbf{D}\mathbf{u}(z)$$

$$\mathbf{y}(z) = \underbrace{\mathbf{C}z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{Rta de entrada cero}} + \underbrace{\left[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right]\mathbf{u}(z)}_{\text{Rta de estado cero}}$$

Matriz de Funciones de Transferencia

Considerando condiciones iniciales nulas:

$$\mathbf{y}(z) = \left[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{u}(z)$$

Matriz de Funciones de Transferencia aquella que relaciona las entradas y las salidas, cuando las condiciones iniciales son nulas:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{u}(z)|_{C.I.=0} \qquad \mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

Matriz de Funciones de Transferencia

La matriz $\mathbf{G}(z)$ es una matriz $q \times p$ (p entradas y q salidas):

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \cdots & G_{1p}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \cdots & G_{2p}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(z) & G_{q2}(z) & \cdots & G_{qp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_p(z) \end{bmatrix}$$

El elemento $G_{ij}(z)$ de la matriz $\mathbf{G}(z)$ muestra cómo afecta la entrada $u_j(z)$ a la salida $y_i(z)$.

Caso especial

Supóngase que existe el mismo número de entradas que de salidas p, y que la matriz de funciones de transferencia es diagonal:

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \\ \vdots \\ y_p(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{pp}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \\ \vdots \\ u_p(z) \end{bmatrix}$$

En este caso, la entrada $u_j(z)$ sólo afecta la salida $y_j(z)$. Se dice entonces que el sistema es *Desacoplado*

Respuesta en el Tiempo

Obtener el comportamiento en el tiempo de las variables de estado aplicando la Transformada inversa $\mathcal{Z}$

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\mathbf{x}(z)\right] =$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\right]$$

Nótese que la segunda transformada incluye el producto de dos funciones de s. El resultado es:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{l=0}^{k-1}\Phi(k,l+1)\mathbf{B}\mathbf{u}(l)$$

Respuesta en el Tiempo

Expandiendo la sumatoria:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)+\Phi(k,1)\mathbf{B}\mathbf{u}(0)+\Phi(k,2)\mathbf{B}\mathbf{u}(1)+\cdots$$

$$+\Phi(k,k)\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k,0)\mathbf{x}(0)+\Phi(k,1)\mathbf{B}\mathbf{u}(0)+\Phi(k,2)\mathbf{B}\mathbf{u}(1)+\cdots$$

$$+\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$

Respuesta en el Tiempo

$\mathbf{x}(k)$ esta formada por aportes de las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, y de las entradas $\mathbf{u}(k)$.

Además muestra cuál es el aporte exacto del valor de la entrada en un instante de tiempo específico: por ejemplo, la entrada en $k = 1$, que es $\mathbf{u}(1)$ aporta a la construcción de $\mathbf{x}(k)$ justamente $\Phi(k, 2)\mathbf{B}\mathbf{u}(1)$.

Introducción al Control por Variable de Estado

Utilizando las variables de estado $\mathbf{x}$ para realimentar el sistema mediante una matriz $\mathbf{K}$, y comparar el estado con unas señales de referencia $\mathbf{r}$, de donde se tiene que

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} + \mathbf{K}\mathbf{x}$$

Las dimensiones de las variables involucradas deben ser las siguientes:

$$\mathbf{u}_{p\times 1} = \mathbf{r}_{p\times 1} + \mathbf{K}_{p\times n}\mathbf{x}_{n\times 1}$$

Introducción al Control por Variable de Estado

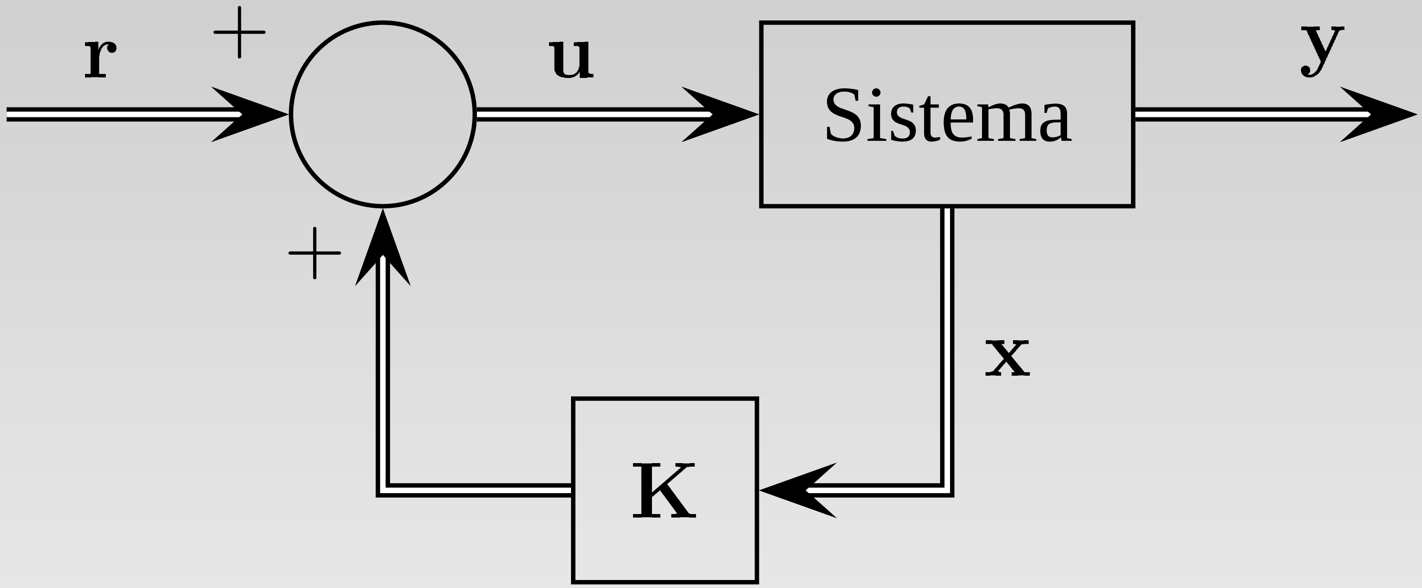


Figura 9: Realimentación por Variable de Estado

Control para Variable de Estado

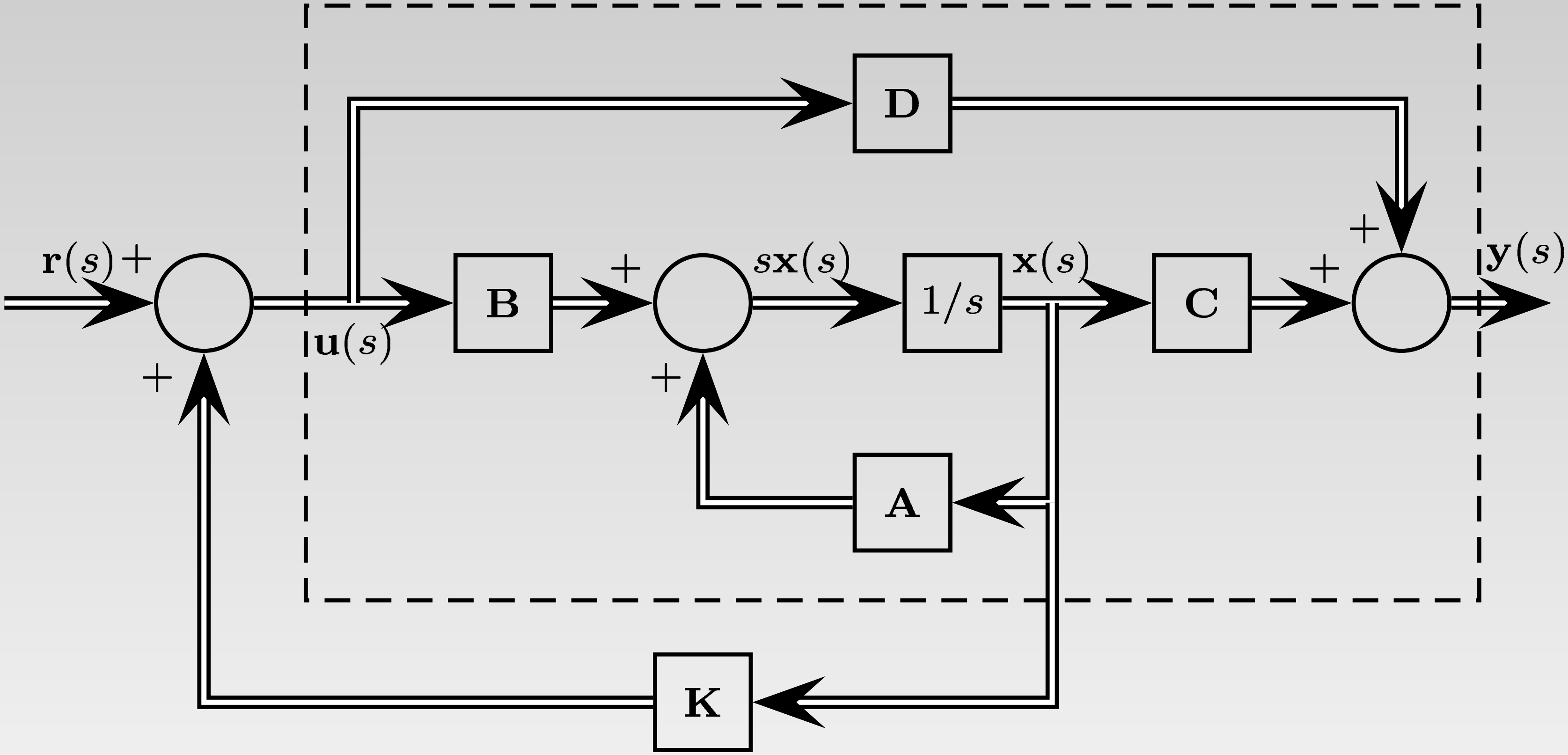


Figura 10: Realimentación por Variable de Estado de un sistema contínuo

Control para Variables de Estado

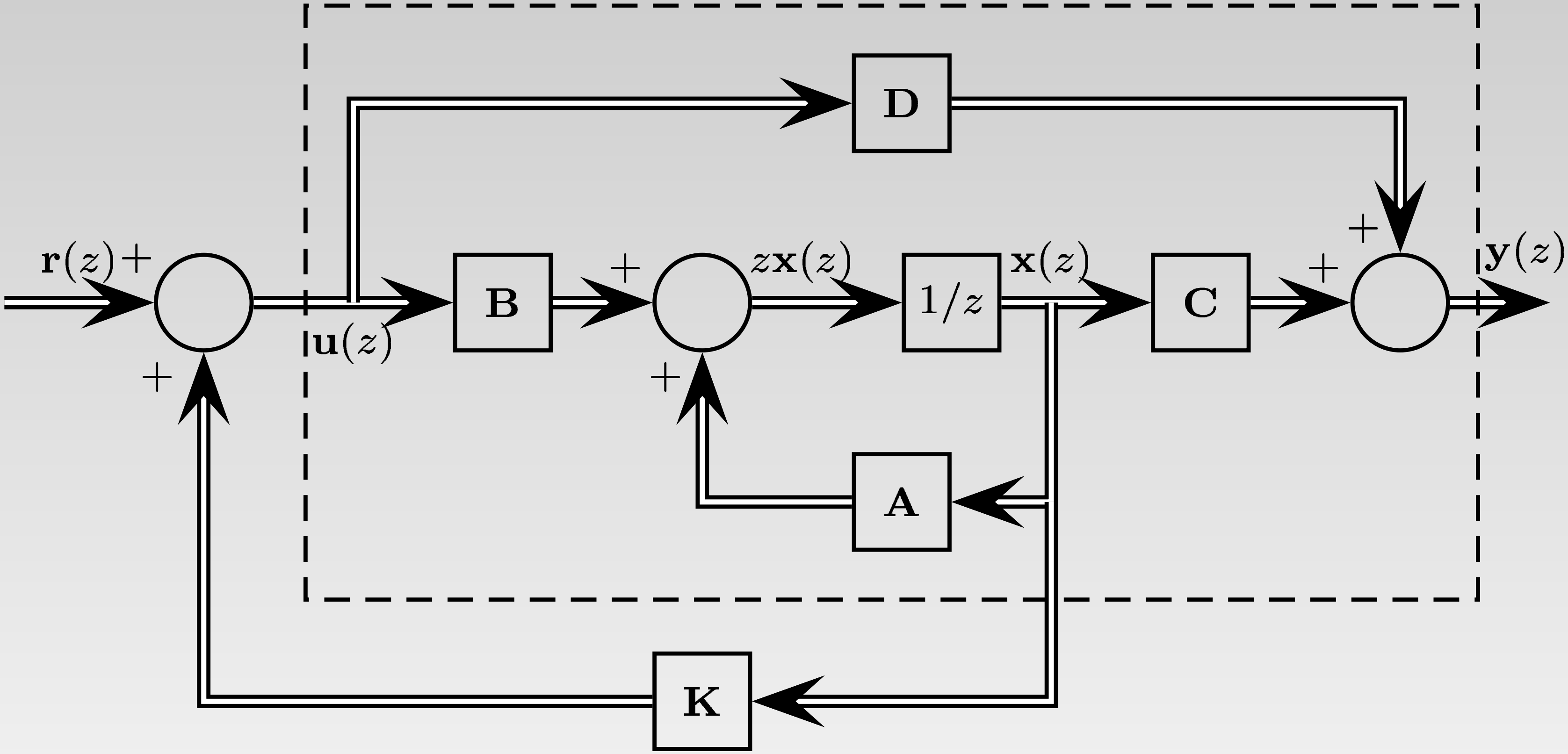


Figura 11: Realimentación por Variable de Estado de un sistema discreto

Control para Variables de Estado

Las ecuaciones de estado para sistemas continuos y discretos con realimentación por variable de estado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[\mathbf{r}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t)] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}[\mathbf{r}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}[\mathbf{r}(k) + \mathbf{K}\mathbf{x}(k)] \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}[\mathbf{r}(k) + \mathbf{K}\mathbf{x}(k)] \end{cases}$$

Control para Variables de Estado

que pueden reescribirse como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{BK}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{Br}(t) \\ \mathbf{y}(t) = [\mathbf{C} + \mathbf{DK}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{Dr}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A} + \mathbf{BK}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{Br}(k) \\ \mathbf{y}(k) = [\mathbf{C} + \mathbf{DK}]\mathbf{x}(k) + \mathbf{Dr}(k) \end{cases}$$

Control para Variables de Estado

Se obtiene entonces unos nuevos sistemas para los que las entradas son $\mathbf{r}$, las salidas son $\mathbf{u}$ y las variables de estado son $\mathbf{x}$. Si definimos $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$ y $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K}$ las ecuaciones de estos nuevos sistemas serán

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{r}(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{r}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{r}(k) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K} \end{aligned}$$

Control para Variables de Estado

Dado que este no es un curso de control, no abordaremos el problema de cómo obtener esa matriz $\mathbf{K}$. Sin embargo, resaltamos que esta estrategia plantea al menos dos interrogantes:

- ¿Pueden asignarse con total libertad los valores propios de $\bar{\mathbf{A}}$?, es decir, dado un conjunto de valores propios deseados, ¿existirá siempre una matriz $\mathbf{K}$ que permita asignarle a $\bar{\mathbf{A}}$ dichos valores propios?

Control para Variables de Estado

- Dado que las variables de estado no necesariamente tienen sentido físico, y en caso de tenerlo no necesariamente son medibles, ¿Como pueden conocerse los valores de las variables de estado para implementar el esquema de la figura.

Controlabilidad

Un sistema dinámico es *Controlable* en t_1 si para cualquier estado $\mathbf{x}(t_1)$ y cualquier estado deseado $\mathbf{x}_d$ es posible encontrar una entrada $\mathbf{u}(t)$ que aplicada entre t_1 y t_2 produce $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_d$, con $t_2 < \infty$

Ejemplo

Variable de entrada: $v(t)$; La variable de salida: $v_x(t)$. Variable de estado: $v_C(t)$.

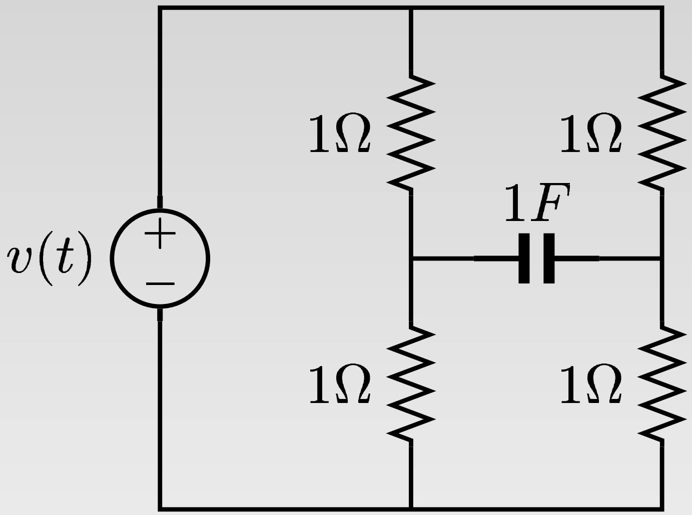


Figura 12: Circuito

Test de Controlabilidad

Para determinar si un sistema es o no controlable, con $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$, se construye la *Matriz de Controlabilidad* $\mathbf{V}$ y se verifica su rango:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & \end{bmatrix}$$

El sistema es controlable sí y sólo si $(\mathbf{V}) = n$

Anotaciones al concepto de Controlabilidad

- La definición expresada es realmente la definición de *Controlabilidad de Estado*, dado que se refiere a la posibilidad de obtener cualquier estado. Existe una definición semejante para la *Controlabilidad de salida*, que no se aborda en este curso.
- El test de Controlabilidad pone de manifiesto que la controlabilidad sólo depende de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, es decir, sólo depende de la ecuación de Estado y no de la Ecuación de salida

Anotaciones al concepto de Controlabilidad

- Para determinar la Controlabilidad de un sistema no es necesario resolver la Ecuación Diferencial. Se realiza un *Análisis Cualitativo* de la Ecuación.
- Si un sistema es Controlable, entonces con un esquema de control por realimentación de variable de Estado siempre es posible encontrar una matriz $\mathbf{K}$ para que la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ tenga los valores propios deseados

Observabilidad

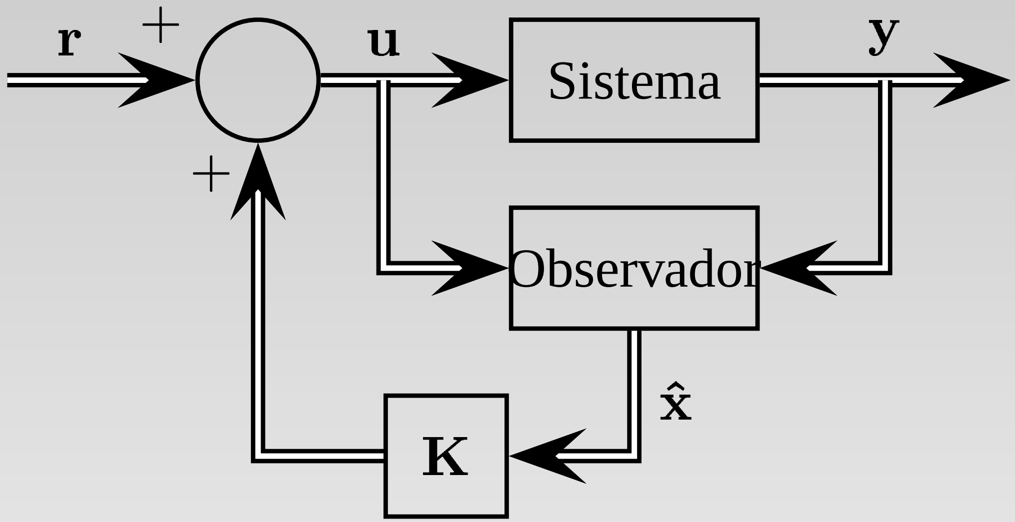


Figura 13: Realimentación por Variable de Estado con Observador

Definición

Un sistema dinámico es *Observable* en t_1 si es posible conocer el estado $\mathbf{x}(t_1)$ a partir de mediciones de las entradas $\mathbf{u}(t)$ y las salidas $\mathbf{y}(t)$ durante el periodo comprendido entre t_1 y t_2, con $t_2 < \infty$

Ejemplo

Considérese nuevamente el circuito, en el que la variable de entrada es $v(t)$, la variable de salida es $v_x(t)$ y la variable de estado la tensión en el condensador $v_C(t)$.

Es claro que a partir de mediciones de $v(t)$ y $v_x(t)$ (que son iguales) no es posible conocer las condiciones iniciales del condensador y en consecuencia el sistema es *No Observable*

Ejemplo

La definición de observabilidad no brinda por sí sóla un mecanismo fácil para determinar si un sistema es observable o no. No obstante, podemos aplicar un *Test de Observabilidad* para determinar si un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo es o no observable

Test de Observabilidad

Para determinar si un sistema es o no observable, con $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$, se construye la *Matriz de Observabilidad* $\mathbf{S}$ y se verifica su rango:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

El sistema es observable sí y sólo si $(\mathbf{S}) = n$

Anotaciones al concepto de Observabilidad

1. El test de Observabilidad pone de manifiesto que la controlabilidad sólo depende de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$.
2. Para determinar la Observabilidad de un sistema no es necesaro resolver la Ecuación Diferencial. Se realiza un *Análisis Cualitativo* de la Ecuación.
3. Si un sistema es observable, entonces puede construirse un observador En este curso no se aborda el problema de cómo construir dicho observador

Ejemplo

Tomemos nuevamente el circuito anterior. El equivalente Thévenin del circuito visto por el condensador es una resitencia de valor R, de tal manera que:

$$v_C = -Ri_C = -RC\frac{d\,v_C}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}v_C(t) = -\frac{1}{RC}v_C(t)$$

La ecuación de salida es trivial:

$$v_x(t) = v(t)$$

Ejemplo

De tal manera que la representación en Variable de Estado para el circuito es:

$$\begin{cases} \dot{v}_C = -\frac{1}{RC} v_C \\ v_x = v(t) \end{cases}$$

Es decir, es un sistema con $\mathbf{A} = -1/RC$, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = 0$, y $\mathbf{D} = 1$. Las matrices de controlabilidad y observabilidad son:

$$\mathbf{V} = [0] \qquad \mathbf{S} = [0]$$

Rango =0, lo que significa que el sistema es No Controlable y No Observable