AULA 02: CÁLCULO DO NÚMERO DE COMBINAÇÕES

Combinações

As **combinações** são subconjuntos de um conjunto. Sabemos que em um subconjunto, a ordem dos elementos não importa. Dessa forma, para calcular uma combinação simples de *n* elementos tomados p a p (p ≤ n), é utilizada a seguinte expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Entendendo

1.Dentre um grupo de 12 pessoas, 3 serão escolhidas para formar uma comissão organizadora de um evento acadêmico. De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Observe que diferentemente dos arranjos, nas combinações a ordem dos elementos não importa. Isso quer dizer que uma comissão formada por Pedro, José e Telma, é a mesma comissão que é formada por Telma, José e Pedro.

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!(9)!} = \frac{12.11.10.\cancel{9!}}{3!.\cancel{9!}} = \frac{12.11.10}{3!} = \frac{1320}{6} = 220$$

Então, podemos afirmar que é possível formar 220 comissões.

2. Qual o total de resultados (JOGOS) possíveis da MEGA SENA?

MEGA SENA [01, 02, 03, ... 60]   60 DEZENAS

Um jogo simples é um conjunto de 6 dezenas extraídos das 60 dezenas possíveis.

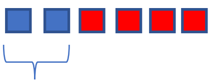
$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(54)!}$ **= 50.063.860 cartões distintos**

3. Dispomos de 10 tipos produtos para montagem de cestas básicas. Qual é o número de cestas distintas que podemos formar com 6 desses produtos, de modo que dois determinados produtos sejam sempre incluídos?

Explicação:

Total de produtos: 10 produtos.

Condição: os produtos **a (feijão) e b (fubá de milho)** devem sempre estar presente. Então, nesse caso, vamos separar dois lugares para sempre colocar esses dois produtos. Desta forma sobrarão apenas 8 produtos dos 10 iniciais e apenas 4 espaços para colocar os 4 produtos que ainda faltam em cada sexta. Esses 4 produtos serão escolhidos entre os 8 restantes.



$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!(4)!} = \frac{40320}{576} = \mathbf{70}$$

Portanto, é possível formar 70 diferentes tipos de sexta, satisfazendo essa condição.

Agora vamos aperfeiçoar o conhecimento adquirido!

Importante

1.Uma comissão de 5 pessoas é formada de membros de uma diretoria que é composta por 6 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras é possível formar a comissão de modo que ela tenha:

a) exatamente 3 mulheres? (então dois serão homens)

Total de pessoas: 11 pessoas   6 homens e 5 mulheres

Formar equipes com 5 pessoas

$$C_{5,3} \cdot C_{6,2} = \left(\frac{5!}{3!.2!}\right) \cdot \left(\frac{6!}{2!.4!}\right) = 10.15 = 150 \text{ comissões}$$

b) pelo menos 4 mulheres?

$$C_{5,4} \cdot C_{6,1} + C_{5,5} = \left[\left(\frac{5!}{4!.1!}\right) \cdot \left(\frac{6!}{1!.5!}\right)\right] + \left[\left(\frac{5!}{5!.0!}\right)\right] = (5).(6) + 1 = 30+1$$

= 31 comissões

Propriedades:

$$C_{n,1=n}$$

$$C_{n,n=1}$$

$$C_{n,p} = C_{n,n-p)}$$

Exemplos:

$$C_{7,2} = C_{7,5} \qquad C_{10,4} = C_{10,6} \qquad C_{20,4} = C_{20,16}$$

2.Dispomos de 10 pessoas para formar equipes com 6 pessoas. Sabendo que **Pedro e Paula** são duas dessas 10 pessoas e que os dois não querem estar juntos nas equipes formadas. Nessas condições, qual é o número de equipes distintas que podemos formar?

 Total de pessoas

Total de Equipes:

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6!(4)!} = 210$$

Desse total de equipes iremos subtrair aquelas que não interessa. Nesse caso, são aquelas em que Pedro e Paula estão juntos.

 Equipes com Pedro e Paula juntos

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

Eles não estarão juntos 210 – 70 = 140 equipes.

3. Dispomos de 15 tipos produtos para montagem de cestas básicas. Qual é o número de cestas distintas que podemos formar com 8 desses produtos, de modo que três determinados produtos sejam sempre incluídos?

(Feião, arroz e açúcar) sempre presentes

$C_{12,5} = \frac{12!}{5!(7)!}$ = 792 cestas diferentes.

4. Um Químico possui 8 (oito) tipos de substâncias. De quantos modos possíveis poderá associar 5 (cinco) dessas substâncias se, entre as oito, duas somente não podem ser juntadas porque produzem uma mistura explosiva.

Total de mistura: $C_{8,5} = \frac{8!}{5!(3)!}$ = 56 misturas.

Mistura explosiva: Substâncias a e b juntas

$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(3)!}$ = 20 misturas

56 misturas - 20 misturas = 36 misturas não explosivas.

5. Numa primeira fase de um campeonato de futebol, cada time joga uma única vez contra todos os outros. Nessa fase foram realizadas 78 partidas de futebol. Quantos times de futebol existiam no campeonato?

n *são as equipes* que resultaram em 78 partidas

$C_{n,2} = 78$

$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 78$

$\frac{n.(n-1).\cancel{(n-2)!}}{2.1\cancel{(n-2)}!} = 78$

$n^2 - n = 156 \rightarrow n^2 - n - 156 = 0$

$n^2 - n - 156 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ a = 1, b = - 1 c = -156

$\sqrt{\Delta} = b^2 - 4.a.c$

$\sqrt{\Delta} = (-1)^2 - 4.(1).(-156) = 625$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$

$\boldsymbol{x = \frac{1 \pm 25}{2} = 13\ equipes.}$

6. Dispondo-se de abacate, mamão, abacaxi, goiaba, maçã e laranja. Calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar uma vitamina usando-se **4 (quatro**) frutas distintas de cada vez, de maneira que o abacate esteja sempre presente.

Total de VITAMINAS: $C_{5,3} = \frac{5!}{3!(2)!}$ = 10 VITAMINAS.

DESAFIO: Numa festa a que compareceram somente casais (homem e mulher), todas as mulheres cumprimentaram todos os outros convidados (exceto o marido) com um beijo no rosto e todos os homens cumprimentaram todos os demais homens convidados com um aperto de mãos. Aconteceram 190 beijos a mais que apertos de mãos, quantos eram os casais presentes?

n são os casais presentes.

$n = \text{casais} = \text{homens} = \text{mulheres}$

Houve 190 beijos a mais que apertos de mão.

Cálculo de Arranjos

Cálculo de Combinações