AULA 03: CÁLCULO DE PROBABILIDADES

ELEMENTOS E CÁLCULO DE PROBABILIDADES

O experimento aleatório

Experimento aleatório é todo **experimento** cujo resultado não seja prioritariamente conhecido. Por exemplo: ao jogar um dado, antes de observar a face superior, será impossível saber qual das faces do dado ficará voltada para cima, com exceção de casos em que dado seja viciado, ou seja, modificado para ter um resultado mais frequente.

O espaço amostral

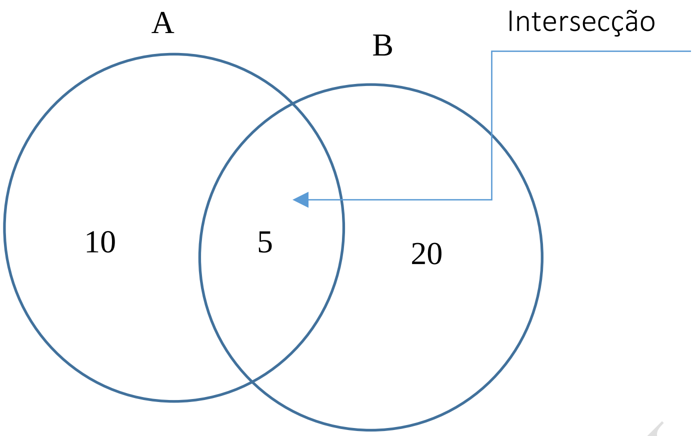
O **espaço amostral** é o conjunto formado por todos os **pontos amostrais** de um **experimento aleatório**, ou seja, por todos os seus resultados possíveis. Dessa maneira, o resultado de um experimento aleatório, mesmo que não seja previsível, sempre pode ser encontrado dentro do espaço amostral referente a ele.

Como os **espaços amostrais** são conjuntos de resultados possíveis, utilizamos as representações de conjuntos para esses espaços. Por exemplo: O espaço amostral referente ao **experimento** "lançamento de um dado" é o conjunto S, tal que:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nesse caso temos 6 casos possíveis. $N(S) = 6$

Esse **conjunto** também pode ser representado por um **diagrama de venn** ou, dependendo do experimento, por alguma lei de formação. O **número de elementos** dos espaços amostrais é representado por n(S). Os elementos de um espaço amostral são os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo de Diagrama de Venn



O Evento

Todos os eventos são subconjuntos de um **espaço amostral**. Um **evento** pode conter desde nenhum ao total de casos possíveis de um experimento aleatório, ou seja, o evento pode ser um conjunto vazio ou o próprio espaço amostral.

Cálculo de Probabilidades

As **probabilidades** são obtidas dividindo-se o número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis, ou seja: $\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{n(E)}}{\boldsymbol{n(S)}}$. Nesse caso, E é um evento que se quer conhecer a **probabilidade,** e S é o **espaço amostral** que o contém.

Dado um espaço amostral (S) e um evento (A), a probabilidade ocorrer A em S é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}}$$

$n(A) =$ é o número de casos favoráveis ao evento que que desejamos investigar.

$n(S) =$ É o número de casos favoráveis a todo espaço amostral, ou seja, é o total de casos possíveis.

Exemplo 1:

Um dado é lançado uma única vez. Qual a probabilidade de ocorrer face virada para cima com número ímpar?

$\mathrm{n(A)} = \ 3$ (três números ímpares) $\{1, 3, 5\}$

$\mathrm{n(S)} = \ 6$ (Total de faces de um dado)

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ ou } P = 50\ \%$$

Exemplo 2:

Um dado é lançado duas vezes. Qual a probabilidade de ocorrer números iguais nas duas faces que ficarem viradas para cima?

$\mathrm{n(A)} =$ Evento: faces iguais $\{(1{,}1), (2{,}2), (3{,}3), (4{,}4), 5{,}5), (6{,}6)\} = 6$

Nesse caso temos 6 casos favoráveis ao que desejamos

$\mathrm{n(S)} =$ Espaço amostral: $6.6 = 36$ casos possíves

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0{,}1666 \text{ ou } P \cong 16{,}67\ \%$$

Exemplo 3:

Ao jogar 10 cartões simples na Mega Sena (cartões com 6 dezenas cada um), qual a probabilidade de ser um ganhador?

Total de resultados possíveis = Espaço amostral = N(s) = ?

01, 02, 03, 04, 05,........, 58, 59, 60 = 60 dezenas

$N(s) = C_{60,6} = \frac{60!}{6!.54!} = 50063860$ cartões diferentes

Evento favorável são 10 cartões (10 possibilidades)

$$P = \frac{10}{50063860} \cong 0{,}0000001997448858 \rightarrow P \cong 0{,}0001997448858\ \%$$

Você deve ter observado que os valores das probabilidades encontradas sempre resultaram em um número dentro do intervalo $0 \leq x \leq 1$. Isso sempre irá acontecer porque A é um subconjunto de S. Dessa maneira, A pode conter desde zero até, no máximo, o mesmo número de elementos que S.

I) Probabilidade Condicional

Probabilidade condicional é um **segundo evento** de um espaço amostral que ocorre em um evento depois que já tenha **ocorrido o primeiro**. Por exemplo, vamos considerar um espaço amostral S finito não vazio e um evento A de S, se quisermos outro evento B desse espaço amostral S, essa nova probabilidade é indicada por P(B/A) e afirmamos que é a probabilidade condicional de A em relação a B.

Sempre consideramos que ao calcularmos o valor da probabilidade B, então A ocorreu. Essa probabilidade condicional irá formar um novo espaço amostral, pois agora o espaço amostral será A e os elementos do evento B irão pertencer a intersecção de B e A, seja B ∩ A.

Então temos: $\mathbf{P(B/A)=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}}$ ou $\mathbf{P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}}$

Para calcular a probabilidade P(B∩A) basta multiplicar as probabilidades de A e B:

$$\mathbf{P(B\cap A)=P(B).P(A)}$$

Exemplo 1:

No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de obtermos faces voltadas para cima com a soma entre elas seja 6, dado que nos dois saírem faces com número ímpar?

Sabemos que espaço amostral é determinado através do produto entre os eventos decorrentes de cada universo de resultados possíveis. No dado, o espaço amostral é composto de 6 eventos e como são dois dados temos que o espaço amostral terá 6 x 6 resultados possíveis. Porém, nesse caso não podemos usar 36 resultados diferentes por causa da presença de uma condição.

Assim fica: No lançamento dos dois dados as possibilidades de parceria entre as faces para que a soma seja 6, dado que nos dois dados saiu número ímpar:

(1 e 3), (3 e 1), (1 e 5), (5 e 1), (1 e 1), (3 e 3), (5 e 5), (5 e 3), (3 e 5), total de casos do evento = 9.

$$\mathbf{P = \frac{3}{9} \cong 0,333333 \to P \cong 33,33\%}$$

Exemplo 2:

Ao lançarmos uma moeda e um dado, qual a probabilidade de obtermos o resultado apresentado por coroa e o número 2, sabendo que no dado saiu número par?

Veja que o espaço amostral do dado corresponde **a 6 eventos** e que o espaço amostral da moeda equivale **a 2 eventos**. Envolvendo o dado e a moeda temos um espaço amostral de 12 eventos. Porém, nesse problema por causa da condição o espaço amostral fica reduzido a **3.2 = 6 casos possíveis.** A probabilidade de obtermos o resultado dado por coroa e o número 2 é determinada por:

N(s) = 3.2 = 6 $\mathbf{P = \frac{1}{6} \to P \cong 0,1666666 \text{ ou } P \cong 16,666\%}$

Então ao lançarmos um dado e uma moeda, a probabilidade de obtermos o par coroa e o número 1 é de aproximadamente $\mathbf{P \cong 16,666\%}$

II) Probabilidade da União de Eventos (Regra do OU)

Dados dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral S, a probabilidade de ocorrer o evento A ou evento B, é determinada por: $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.
P(A OU B) = P(A) + P(B) – P(A∩B), então temos a probabilidade de ocorrer o evento A ou evento B. Somamos as probabilidades P(A) mais P(B) e subtraímos a intersecção entre ambas, caso exista.

Exemplo 1:
Uma carta de um baralho com 52 cartas é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de ocorrer um ÁS ou uma DAMA?

Sabemos que em um baralho existe um total de 52 cartas, assim distribuídas: 13 cartas de paus, 13 cartas de ouro, 13 cartas de espadas e 13 cartas de copas. Além disso qualquer carta aparece 4 vezes.
Por exemplo: existem 4 damas, distribuídas da seguinte forma: Uma dama de paus, uma dama de ouro, uma dama de copas e uma de espadas. Dessa forma acontece para qualquer carta.
Então, nesse problema queremos:

P (A ou B) = P (DAMA OU ÁS) = $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{52}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{52}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{52}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{13}} \cong$ 0,1538 ou P $\cong$ 15,38%

Exemplo 2:
Uma carta de um baralho com 52 cartas é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de ocorrer um ÁS ou carta de COPAS?

Veja que nesse exemplo existe intersecção. Então, nesse problema queremos:
P (A ou B) = P (ÁS ou UMA CARTA DE COPAS) = $\frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \cong$ 0,3076 ou P $\cong$ 30,76%

III) Probabilidade da Intersecção de Eventos

Introdução

O cálculo da probabilidade de eventos simultâneos determina a possibilidade de dois ou mais eventos ocorrerem simultaneamente ou sucessivamente, e irá considerar que o evento que antecede aquele que está sendo calculado ocorreu.

A fórmula para o cálculo dessa probabilidade é decorrente da fórmula para cálculo da probabilidade condicional, considerando que os eventos sejam independentes $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(B/A)\ .\ p(A) = p(B).(A/B)}$

O fato do evento B não alterar a probabilidade de ocorrer o evento A, a fórmula para cálculo da probabilidade condicional é dada por: $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A).p(B)}$.

Exemplo 1:

Uma moeda é lançada duas vezes. Qual a Probabilidade de ocorrer cara nas duas vezes.

P(A ∩ B) = P(A). P(B) = $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ = **0,25** ou **P = 25%**

Exemplo 2:

Uma urna contém duas bolas brancas e uma vermelha. Retiram-se duas bolas da urna ao acaso, uma e em seguida a outra e sem que a primeira tenha sido recolocada. Qual a probabilidade de as duas serem brancas.

P(A) é bola branca na primeira retirada

P(B) é bola branca na segunda retirada

P(A ∩ B) = P(A). P(B) = $\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ≅ **0,3333** ou **P ≅ 33,33%1**

Exemplo 3:

Numa escolha de 3 (três) minhocas de uma amostra com 50 minhocas, onde 3/5 das minhocas têm menos que 10 cm de tamanho e o restante tem mais que 10 cm de tamanho, qual a probabilidade que as três escolhidas tenham mais que 10 cm de tamanho? A escolha é sem reposição.

$\frac{3}{5}$ de 50 é 30. Então existem 30 minhocas com menos de 10 cm de tamanho. Logo concluímos que 20 minhocas, tem mais de 10 cm de tamanho.

P(3 minhocas com mais de 10 cm) = $\frac{20}{50}.\frac{19}{49}.\frac{18}{48} = \frac{6840}{117600} \cong \mathbf{0,05816}$

Ou **P ≅ 5,82%**

Exemplo 4:

Em dois lançamentos sucessivos de um mesmo dado, qual a probabilidade de ocorrer um número maior que 4 e o número 3?

Observe que a ocorrência de um evento não influencia a probabilidade de outro ocorrer, portanto são dois eventos independentes. Vamos diferenciar os dois eventos:
A: sair um número maior que 4. Como possíveis resultados temos os números 5 e 6.
B: sair o número 3
Calculemos a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos. Observe que no lançamento de um dado, temos 6 valores possíveis.
$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $p(B) = \frac{1}{6}$
Então teremos, P(A ∩ B) = P(A). P(B/A) = $\frac{1}{3}.\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ ≅ 0,055555 ou P ≅ 5,555%

Exemplo 5:

Numa urna há 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Serão retiradas dessa urna duas bolinhas, ao acaso, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de sair um múltiplo de 5 na primeira e um número primo maior que dez na segunda retirada?

o fato de a retirada das bolinhas ocorrer sem reposição, implica que a ocorrência do primeiro evento interfere na probabilidade do segundo ocorrer. Portanto, esses eventos não são independentes. Vamos escrever cada um dos eventos.
A: sair um número múltiplo de 5: {5, 10, 15, 20}
B: sair um número primo maior que dez: {11, 13, 17, 19}

A probabilidade de ocorrer os dois eventos sucessivamente será dada por:

P(A∩B)=P(A).P(B/A).Calculando separadamente fica: $p(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Para o cálculo de p(B|A) é necessário observar que não teremos mais 20 bolinhas na urna, pois uma foi retirada e não houve reposição, restando apenas 19 bolinhas na urna.

P(B/A) = $\frac{4}{19}$

Portanto, P(A∩B)=P(A).P(B) = $\frac{1}{5} . \frac{4}{19} = \frac{4}{95} \cong 0{,}042105263 \cong 4{,}21\%$

Exercícios Para Aperfeiçoamento

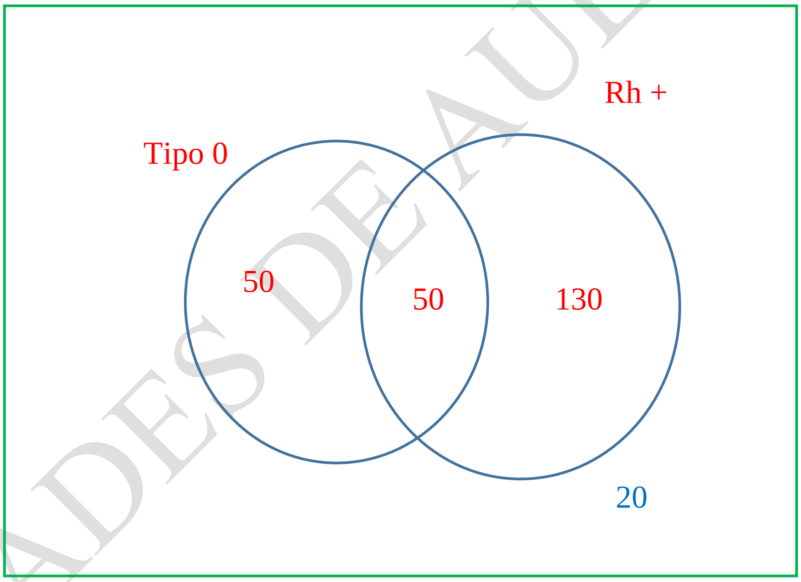
1.De um grupo de 250 pessoas, 180 têm fator Rh positivo, 100 têm sangue tipo O e 50 têm fator Rh positivo e sangue tipo O. Se uma dessas pessoas é selecionada ao acaso, qual a probabilidade de:

a) seu sangue ter fator Rh positivo?; $p = \frac{180}{250} = 0{,}72 \rightarrow p = 72\%$

b) seu sangue não ser tipo O?; $p = \frac{150}{250} = 0{,}6 \rightarrow 60\%$

c) seu sangue não ser Rh positivo?; $p = \frac{70}{250}$ = 0,28→ 28%

d) seu sangue ter fator Rh positivo ou ser tipo O? $p = \frac{230}{250} = 0{,}92 \rightarrow 92\%$



2.Uma cidade tem 50.000 habitantes e 3 jornais, A, B, e C. Sabe-se que:

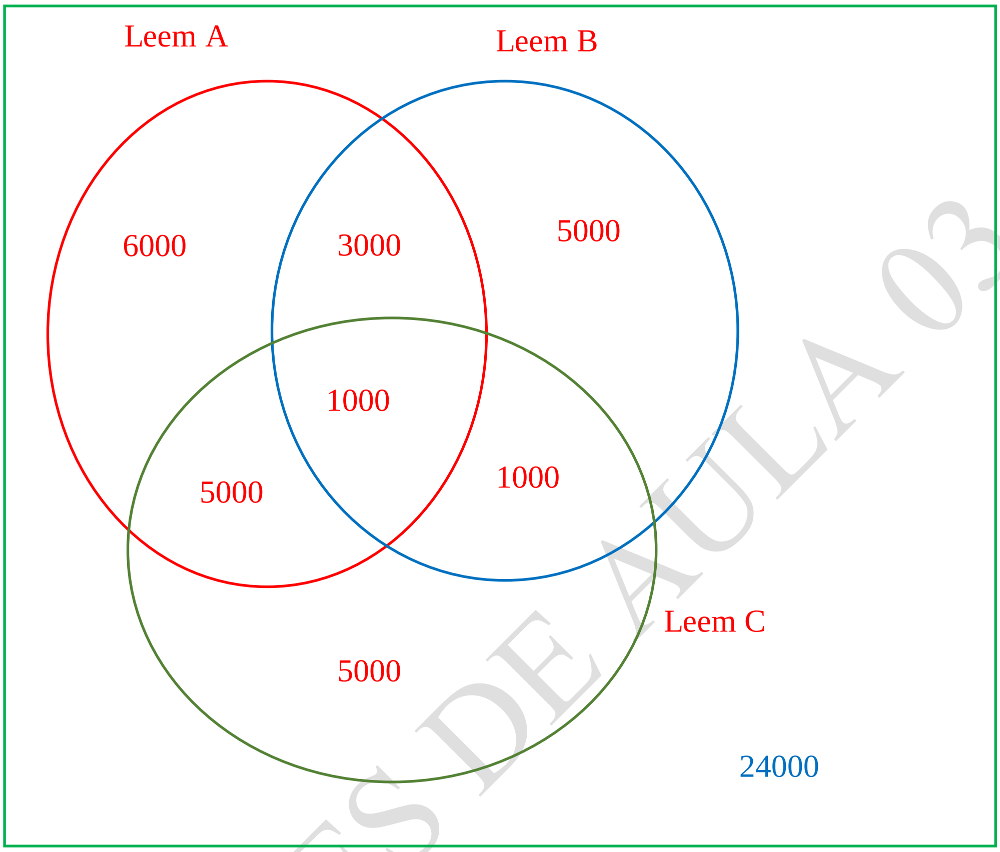
15.000 leem o jornal A; 12.000 leem o jornal C; 10.000 leem o jornal B; 6.000 leem o jornal A e C; 4.000 leem o jornal A e B; 2.000 leem o jornal B e C e 1.000 leem os três jornais

Uma pessoa desse grupo é secionada ao acaso. Qual a probabilidade de que:

Ela leia pelo menos um jornal?; $p = \frac{26000}{50000} = 0{,}52 \rightarrow p = 52\%$

Ela leia somente um jornal?; $p = \frac{16000}{50000} = 0{,}32 \rightarrow p = 32\%$

Ela não leia nenhum desses jornais? $p = \frac{24000}{50000} = 0{,}48 \rightarrow p = 48\ \%$



3.Oito pessoas, entre elas Neco e Liu, são dispostos ao acaso em uma fila. Qual a probabilidade de:

a) Neco e Liu fiquem juntos?

b) Neco e Liu fiquem separados?

Espaço Amostral N(s) = $P_8 = 8! = 40320$

a) Neco e Liu fiquem juntos? $= 2\ P_7 = 2.7! = 2(\,5040) = 10080$

$$p = \frac{10080}{40320} = 0{,}25 \rightarrow p = 25\%$$

b) Neco e Liu fiquem separados?

$p = 75\%$

4.Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 brancas. Duas bolas são extraídas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de:

a) ambas sejam vermelhas?

Portanto, P(A∩B)=P(A).P(B) = $\frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0{,}36 = 36\%$

c) ambas sejam brancas?

Portanto, P(A∩B)=P(A).P(B) = $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$

5.De um baralho de 52 cartas, duas são extraídos sucessivamente ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de observamos:

a) Duas cartas de "paus"?

Portanto, P(A∩B)=P(A).P(B) = $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{156}{2652} = 0{,}0588235 = 5{,}88\%$

b) Dois ases?

Portanto, P(A∩B)=P(A).P(B) = $\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = 0{,}00452488 = 0{,}452\%$

c) Um ás e um rei sem levar em conta a ordem?

(Nesse caso pode ser um ás e um rei ou um rei e um ás)

Portanto, P(A∩B)=P(A).P(B) $=\left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}\right) + \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51}\right) = \frac{16}{2652} + \frac{16}{2652} = \frac{32}{2652} \cong 0{,}01206 \cong 1{,}21\%$

6. De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas sucessivamente ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que pelo menos uma seja de paus?

(Pelo menos uma de paus significa que pode ser uma carta de “paus” ou as duas de “paus”)

P =$(\frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51}) + \left(\frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51}\right) = \frac{507}{2652} + \frac{507}{2652} = \frac{1014}{2652} \cong 0{,}382352 = 38{,}24\%$

P =$(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}) = \frac{156}{2652} \cong 0{,}0588 = 5{,}88\%$

Resposta: $aproximadamente\ 44{,}12\%$

7. De um grupo de 12 pessoas, entre elas Regina, 6 são escolhidas ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de que Regina apareça entre as seis?

$p = 50\ \%$

8. DESAFIO: Um baralho tem 52 cartas, organizadas em 4 naipes, com 13 valores diferentes para cada naipe. Os valores possíveis são: Ás, 2, 3, ..., 10, J, Q, K. No jogo de *poker*, uma das combinações de 5 cartas mais valiosas é o *full house*, que é formado por três cartas de mesmo valor e outras duas cartas de mesmo valor. São exemplos de *full houses*: i) três cartas K e duas 10 ou ii) três cartas 4 e duas Ás. Qual a probabilidade de se retirar cinco cartas de um baralho com 52 cartas, que estejam formando um *full house*?