Trabajo Práctico N^o 6
Análisis Matemático

Tomás Pitinari

1 Consignas

1) Una pelota es lanzada en forma recta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de $49m/seg$. La altura en el instante t viene dada por la función posición

$$x(t) = -4,9t^2 + 49t.$$

(a) Determinar la función que representa la velocidad de la pelota en cada instante de tiempo t.

(b) Determinar en qué tiempo t_0 la pelota alcanza la altura máxima, cuál es esa altura máxima y cuál es la velocidad de la pelota en ese instante t_0. Explique y justifique cómo obtiene cada valor.

(c) Calcule la velocidad de la pelota cuando se encuentra a $19,6m$ del suelo y va hacia arriba.

(d) En un mismo par de ejes cartesianos, graficar las funciones posición y velocidad de la pelota. Es decir, presentarlas en un mismo gráfico.

2) Sea la función

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Determinar los valores de b y c para que la función h sea derivable en $\mathbb{R}$. Justificar detalladamente.

(b) En un mismo gráfico y para los valores encontrados en el ítem anterior, presentar las gráficas de la función h y de la función h'. Realizarlas con algún programa o aplicación graficadora de funciones.

2 Resolución

1) a) Dada la fórmula de la posición de la pelota en cualquier instante como $x(t) = 4,9t^2 + 49t$, se puede decir que derivar la función posición nos da su razón de cambio, osea la velocidad. Ahora paso a encontrar la derivada de la función velocidad.
Consideramos un $f(t) = -\ 4,9t^2 \wedge g(t) = 49t$, entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t) + g(t) \\ x'(t) &= f'(t) + g'(t) \qquad \text{(por álgebra de derivadas).} \\ x'(t) &= -\ 9,8t + 49 \quad \text{(por proposiciones 1 y 2 del apunte)} \end{aligned}$$
$$\therefore x'(t) = v(t) = -\ 9,8t + 49$$

b) En un modelo de tiro vertical, como en el que estamos trabajando en con la pelota en este ejercicio, el objeto alcanza la altura máxima cuando su velocidad es 0. Por lo que para encontrar la altura máxima debo resolver la siguiente ecuación:

$$v(t_0) = 0 = -9,8t_0 + 49$$
$$-49 = -9,8t_0$$
$$t_0 = 5seg.$$

Una vez calculado el instante de tiempo cuando la pelota está en la altura máxima, solo queda calcular el valor de la altura máxima:

$$x(t_0) = -4,9t_0^2 + 49t_0$$
$$x(t_0) = -4,9\ .\ 25 + 49\ .\ 5$$
$$x(t_0) = -122,5 + 245 = 122,5m$$

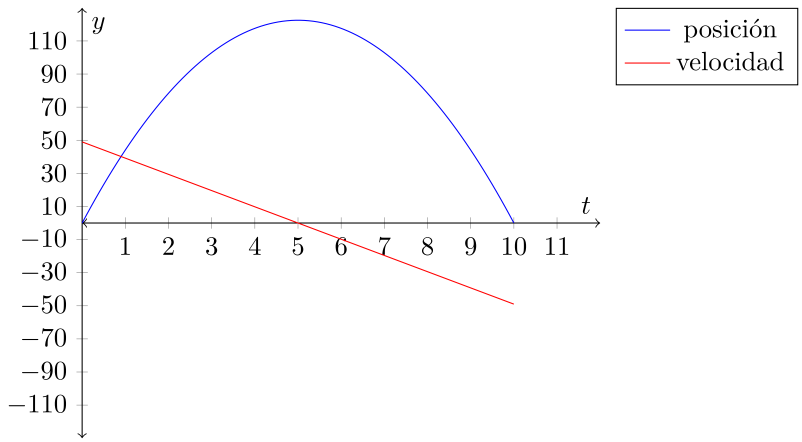
c) Para este ejercicio voy a calcular los t_1 y t_2 en el que la pelota está a $19.6m$:

$$\text{Tenemos un } a = -4,9 \wedge b = 49 \wedge c = -19.6$$
$$\frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4.(-4,9).(-19,6)}}{2.(-4.9)}$$
$$t_1 = 9,58seg. \wedge t_2 = 0,42seg.$$

Como la pelota inicia subiendo, cualquier instante de tiempo mientras esté subiendo, va a ser menor que cuando este bajando, por lo que el tiempo que estamos buscando es t_2. Una vez encontrado el tiempo queda calcular su velocidad:

$$v(t_2) = -9,8t_2 + 49$$
$$44,88m/seg = (-9,8).(0,42) + 49$$

d)



2) a) Primero voy a buscar los valores para b y c, para que exista una derivada en el punto 0, por lo que se tiene que existir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \to \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-(0^3-0)}{x} \to \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$$

Al tener dos definiciones distintas a cada lado del 0, evaluamos la existencia de lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)}{x} \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x}$$

$$\to \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-x}{x} \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+bx+c}{x}$$

Empiezo a resolver por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{x^3-x}^{0}}{\underbrace{x}_{0}} \to \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x^2-1)}{x} \to \lim_{x\to 0^-} x^2-1 = -1$$

Siguiendo por la derecha, para que se cumpla la existencia de la derivada en el valor 0, se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^2+bx+c}^{0^2+0b+c=c}}{\underbrace{x}_{0}} = -1$$

Para que el límite no tienda a infinito (positivo o negativo), se tiene que cumplir que $c = 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x^2+bx+0}^{0}}{\underbrace{x}_{0}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \tfrac{x(x+b)}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} x+b = -1$$

Se sabe por los temas dados anteriormente que $\lim_{x\to a} m.x+h = m.a+h$, por lo tanto $\lim_{x\to 0^+} x+b = 0+b = b = -1$.
Con eso demostramos que la que función es derivable en 0, ahora hay que demostrar que las dos partes de $h(x)$ son derivables en todo su dominio. Inicio buscando la derivada para $h(x)$ con $x \leq 0$:

$$\begin{array}{cc} (x^3-x)' & \text{(por álgebra de derivadas)} \\ (x^3)'-(x)' & \text{(por proposiciones 1 y 2 del apunte)} \\ 3x^2-1 & \end{array}$$

Se puede ver que $h(x)$ es derivable en el rango $(-\infty, 0]$. Solo queda demostrar que $h(x)$ también es derivable para todo $x > 0$:

$$\begin{array}{cc} (x^2-x)' & \text{(por álgebra de derivadas)} \\ (x^2)'-(x)' & \text{(por proposiciones 1 y 2 del apunte)} \\ 2x-1 & \end{array}$$

Finalmente se demostró que $h(x)$ también es derivable en el rango $(0, \infty)$, por lo ya está demostrado que $h(x)$ es derivable para todo $x \epsilon \mathbb{R}$.
b)