# Trabajo Práctico $N^o$ 4
# Análisis Matemático

Tomás Pitinari

## 1 Consignas

Dadas las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ (b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ (c) $h(x) = -\frac{x^3+1}{x^2}$

Se pide (para cada una de estas funciones):

1. Determinar el dominio.
2. Hallar las asíntotas oblicuas.
3. Determinar (justificando sus respuestas) si estas funciones tienen además asíntotas horizontales o verticales.
4. Usando algún programa o aplicación adecuada, realizar la gráfica de la función junto a la de sus respectivas asíntotas. Controle que las gráficas sean coherentes con lo calculado analíticamente en los items anteriores.

## 2 Resolución

1) Para analizar el dominio de las funciones anteriores, puedo pensarlas como funciones racionales, donde dada una función $k$, se cumple que es el resultado de la división de dos polinomios, obtiene la siguiente forma $k(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, y para calcular el dominio su formula es: $Dom(k) = Dom(p) \cap Dom(q)$.
a) Para $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \rightarrow$

$$Dom(f) = Dom(x^2) \cap (Dom(x-1) - \{x : x-1 = 0\}) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \{1\}$$
$$\therefore Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Para $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \rightarrow$

$$Dom(g) = Dom(x^2 + 1) \cap (Dom(x - 1) - \{x : x - 1 = 0\}) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \{1\}$$
$$\therefore Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

c) Para $h(x) = -\frac{x^3+1}{x^2} \rightarrow$

$Dom(h) = Dom(-x^3-1) \cap (Dom(x^2) - \{x : x^2 = 0\}) = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\therefore Dom(h) = \mathbb{R} - \{0\}$$

2) Para encontrar si hay asíntotas oblícuas tengo que hacer la división de polinomios, por lo tanto:
a)

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \cline{2-2} x & x+1 \\ 1 & \end{array}$$

$$\therefore f(x) = \underbrace{x+1}_{\text{término lineal}} + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\text{residuo}}$$

Como ser puede ver, la función $f(x)$ es una suma de 2 funciones, que voy a nombrar $j(x) = x+1$ y $k(x) = \frac{1}{x-1}$.
$k(x)$ es una función recíproca con un corrimiento hacia la derecha en una unidad, que si $x \rightarrow +\infty$, entonces k(x) tiende a 0. En base a esto puedo decir que $j(x)$ es una asíntota oblicua de $f(x)$, ya que por el residuo $k(x)$, cuando $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow +\infty$, $f(x)$ se va a acercar hacia $j(x)$ pero nunca la va a tocar.
Realizando el mismo razonamiento para las siguientes funciones, obtengo:
b)

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2} x+1 & x+1 \\ 2 & \end{array}$$

$$\therefore g(x) = \underbrace{x+1}_{\text{término lineal}} + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\text{residuo}}$$

Con el razonamiento anterior obtengo que la función que es igual que el término lineal de $g(x)$ que es igual a $(x+1)$, es una asíntota oblicua de $g(x)$ .
c)

$$\begin{array}{r|l} -x^3-1 & x^2 \\ \cline{2-2} -1 & -x \end{array}$$

$$\therefore h(x) = \underbrace{-x}_{\text{término lineal}} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{residuo}}$$

Con el razonamiento del primer ejercicio obtengo que la función que es igual que el término lineal de $h(x)$ que es igual a $-x$, es una asíntota oblicua de $h(x)$.

3) Para determinar si una función tiene alguna asíntota vertical, se debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to a} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} h(x) = -\infty$$

Mientras que para determinar si existe alguna asíntota horizontal, se debe cumplir una de estas condiciones:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = L \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = L$$

Siendo $L$ la asíntota horizontal.

a) En $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ sabemos que su dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$, porque si x fuera 1 habría una división sobre 0, sin embargo si nos acercamos a valores muy cercanos al 1, el valor de $\frac{1}{x-1}$ debería volverse muy grande. Por el razomaniento recién explicado, voy a demostrar que para una función $f'(x) = \frac{1}{x-1}$ existe el $\lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty$. Para cualquier $M > 0$ existe un $\delta < \frac{1}{M}$, que verifica:

$$0 < x - 1 < \delta \to x - 1 < \frac{1}{M} \to \frac{1}{x-1} > M$$
$$\therefore f'(x) > M.$$

Entonces si hago el $\lim_{x\to1^+} f(x)$, puedo descomponer por álgebra de límite y obtener $\lim_{x\to1^+}(x + 1) + \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1}$, como ya se que $\lim_{x\to a} m.x + h = m.a + h$, obtengo que $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2 + (+\infty) = +\infty$. Queda demostrado que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en 1.

Por otro lado podemos ver que no hay ninguna asíntota horizontal, ya que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x + 1) + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = +\infty + 0 = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x + 1) + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = -\infty - 0 = -\infty$.

b) Usando el mismo razomaniento del ejercicio anterior, voy a demostrar que para una función $g'(x) = \frac{2}{x-1}$ existe el $\lim_{x\to1^+} g'(x) = +\infty$. Para cualquier $M > 0$ existe un $\delta < \frac{2}{M}$, que verifica:

$$0 < x - 1 < \delta \to x - 1 < \frac{2}{M} \to \frac{1}{x-1} > \frac{M}{2} \to \frac{2}{x-1} > M$$
$$\therefore g'(x) > M.$$

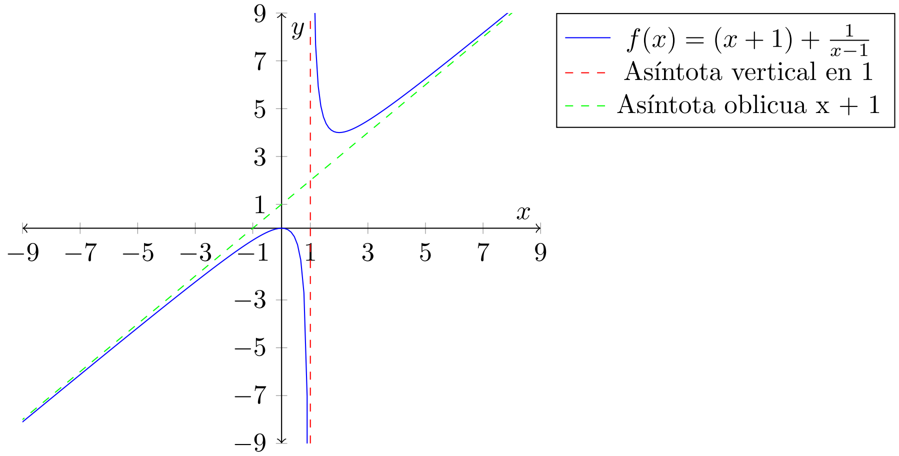
Entonces si hago el $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, puedo descomponer por álgebra de límite y obtener $\lim_{x\to 1^+}(x+1) + \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1}$, como ya se que $\lim_{x\to a} m.x+h = m.a+h$, obtengo que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 + (+\infty) = +\infty$. Queda demostrado que $g(x)$ tiene una asíntota vertical en 1.
Por otro lado podemos ver que no hay ninguna asíntota horizontal, ya que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1) + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-1} = +\infty + 0 = +\infty$ y
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x+1) + \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-1} = -\infty - 0 = -\infty$.

c) En $h(x) = -x - \frac{1}{x^2}$ sabemos que su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, porque si x fuera 0 habría una división sobre 0, sin embargo si nos acercamos a valores muy cercanos al 0, el valor de $\frac{1}{x^2}$ debería volverse muy grande. Por el razomaniento recién explicado, voy a demostrar que para una función $h'(x) = \frac{1}{x^2}$ existe el $\lim_{x\to 0} h'(x) = +\infty$. Para cualquier $M > 0$ existe un $\delta < \frac{1}{\sqrt{M}}$, que verifica:

$$0 < |x-0| < \delta \to |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \to x^2 < \frac{1}{M} \to \frac{1}{x^2} > M$$
$$\therefore h'(x) > M.$$

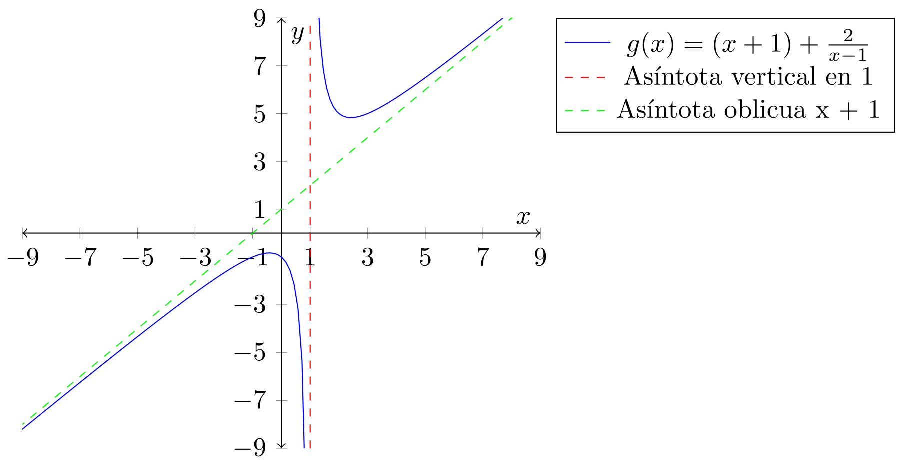
Entonces si hago el $\lim_{x\to 0} h(x)$, puedo descomponer por álgebra de límite y obtener $\lim_{x\to 0}(-x) - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$, como ya se que $\lim_{x\to a} m.x+h = m.a+h$, obtengo que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0 - (+\infty) = -\infty$. Queda demostrado que $h(x)$ tiene una asíntota vertical en 0.
Por otro lado podemos ver que no hay ninguna asíntota horizontal, ya que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x) - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = -\infty - 0 = -\infty$ y
$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x) - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty - 0 = +\infty$.

4)a)



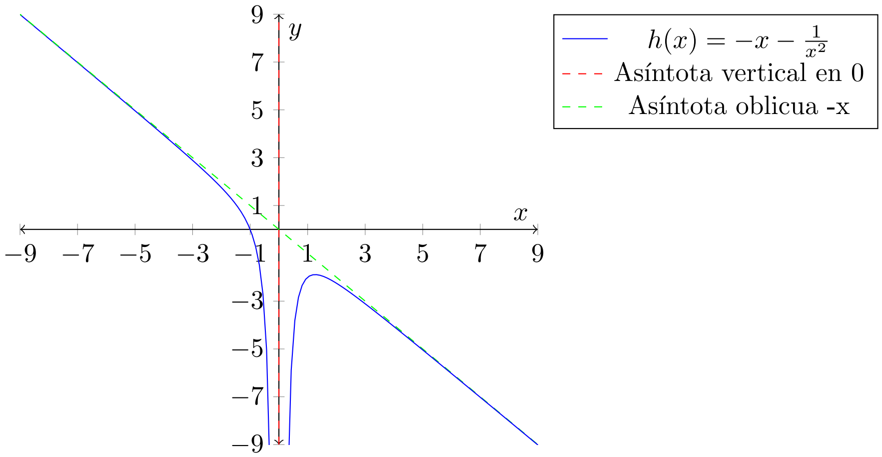
9
7
5
3
1
−9 −7 −5 −3 −1 1 3 5 7 9
−3
−5
−7
−9
y
x
$f(x) = (x+1) + \frac{1}{x-1}$
Asíntota vertical en 1
Asíntota oblicua x + 1


b)



9
7
5
3
1
−9 −7 −5 −3 −1 1 3 5 7 9
−3
−5
−7
−9
y
x
$g(x) = (x+1) + \frac{2}{x-1}$
Asíntota vertical en 1
Asíntota oblicua x + 1

c)



$y$
$x$
9
7
5
3
1
−3
−5
−7
−9
−9 −7 −5 −3 −1 1 3 5 7 9
$h(x) = -x - \frac{1}{x^2}$
Asíntota vertical en 0
Asíntota oblicua -x