Trabajo Práctico N^o 7
Análisis Matemático

Tomás Pitinari

1 Consignas

1) Demostrar la siguiente afirmación, justificando adecuadamente, la ecuación $x^2 = cos(x)$ tiene exactamente dos soluciones reales.

2) Se define la función g como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} sen(x) & \text{si } x \leq 0, \\ x - \frac{2}{\pi^2}x^3 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Se pide:

(a) Verificar que g satisface las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial (Teorema de Lagrange) en el intervalo [-π, π].

(b) Hallar todos los valores medios de g en dicho intervalo.

(c) Determinar las ecuaciones de la recta secante que pasa por los puntos $(-\pi, g(-\pi))$ y $(\pi, g(\pi))$, y de las rectas tangentes a la gráfica de g en los puntos correspondientes a los valores medios obtenidos en el apartado anterior.

(d) Mediante algún programa o aplicación graficadora, presentar la gráfica de la función g, junto con las rectas obtenidas en el apartado anterior. ¿Qué característica en común tienen estas rectas?

(e) Calcular $\int_0^\pi g(x)dx$.

3) Dadas las funciones $f(x) = -3x + 2$ y $g(x) = cos(x)$ se pide calcular las siguientes integrales:

(a) $\int f(x)dx$.

(b) $\int f(x)g(x)dx$.

(c) $\int f(g(x))dx$.

(d) $\int g(f(x))dx$.

2 Resolución

1) Para demostrar la existencia de valores posibles para x, vamos a usar el teorema de Bolzano, para eso vamos a expresar la ecuación $x^2 = cos(x)$ como $x^2 - cos(x) = 0$ y vamos a demostrar que la función $f(x) = x^2 - cos(x)$ es continua.
Sabemos por temas anteriores que x^2 y $cos(x)$ son funciones continuas en todo su dominio, y luego por álgebra de funciones continuas, se demuestra que $f(x)$ es continua en todo su dominio.
Consideramos dos puntos del dominio de f, 0 y 1, y consideramos lo siguiente:

$$f(0) = 0^2 - cos(0) = 0 - 1 = -1 < 0$$
$$f(1) = 1^2 - cos(1) = 1 - cos(1) > 0 \text{ (ya que 1 es mayor } cos(1))$$
$$\rightarrow f(0).f(1) < 0 \therefore \exists x \in (0,1) \ / \ f(x) = 0$$

Luego debemos demostrar que en el rango $[0,1]$ nuestra función $f(x)$ es creciente o decreciente, por lo que solo existe una única $x\epsilon[0,1]/f(x) = 0$. Primero demostramos que x^2 es creciente para los $x \geq 0$, Dados $0 < x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

También podemos observar que $cos(x)$ es decreciente en $[0,\pi]$, entonces $-cos(x)$ va a ser creciente en el intervalo anterior. Por lo tanto al sumar dos funciones crecientes, obtenemos otra función creciente, queda demostrado que en el intervalo $[0,1]$ solo hay una solución. También podemos ver que para todos las $x > 1$ no va a existir ningún valor que satisfaga $f(x) = 0$, ya que $Im(cos) = [-1,1]$ y dado que x^2 es creciente en los positivos, entonces $1 < x \rightarrow 1^2 < x^2 \rightarrow 1 < x^2 \therefore \nexists\, x > 1/x^2 = cos(x)$. Finalmente hay que demostrar lo mismo para los puntos -1 y 0:

$$f(-1) = (-1)^2 - cos(-1) = 1 - cos(-1) > 0 \text{ (ya que 1 es mayor que } cos(-1))$$
$$f(0) = 0^2 - cos(0) = 0 - 1 = -1 < 0$$
$$\rightarrow f(-1).f(0) < 0 \therefore \exists x \in (-1,0) \ / \ f(x) = 0$$

Para demostrar que existe una única solución para $f(x) = 0$ en el rango $(-1,0)$, hay que probar que es creciente o decreciente en el rango, para este caso vamos a demostrar que es decreciente, iniciamos probando que x^2 es decreciente para todos los negativos, dados $x_1 < x_2 < 0$:

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

Por otro lado se puede observar que $cos(x)$ es creciente en $[-\pi,0]$, entonces $-cos(x)$ va a ser decreciente en el mismo rango por ser la función opuesta a la anterior. Teniendo esta información sabemos que la función resultante de la suma de las funciones anteriores va a ser decreciente en el rango $[-1,0]$, queda demostrada la existencia de un único valor en el intervalo $(-1,0)$.
Por último hay que demostrar que que no existe ningún $x < -1/f(x) = 0$, para eso podemos ver que $Im(cos) = [-1,1]$ y dado que x^2 es decreciente en los negativos, entonces $x < -1 \rightarrow x^2 < (-1)^2 \rightarrow x^2 < 1 \therefore \nexists\, x < -1/x^2 = cos(x)$.
Solo existen dos soluciones reales para $x^2 = cos(x)$ y están dentro del rango (-1,0) y (0,1).

2)a) Necesitamos demostrar que $g(x)$ es continua en el intervalo $[-\pi,\pi]$, sabemos que $sen(x)$ es continua, aprendido en temas anteriores, y $x - \frac{2}{\pi^2}x^3$ es continua por ser una función polinómica. Solo queda demostrar que $g(x)$ es continua en 0, por lo que se debe cumplir lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$
$$sen(0) = sen(0) = 0 - \frac{2}{\pi^2}0^3 = 0$$
$$\therefore \text{ queda demostrada la continuidad de } g(x) \text{ en todo su dominio.}$$

Una vez demostrada la continuidad, queda probar la derivabilidad en el intervalo $(-\pi,\pi)$. Si $x \leq 0$ entonces $g(x)$ es derivable ya que $sen(x)$ es derivable en todo su dominio, igualmente si $x > 0$ entonces $g(x)$ es un función polinómica, la cual también es derivable en todo su dominio.

b) Primero calculamos la derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{6}{\pi^2}x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Luego seguimos:

$$\frac{g(\pi)-g(-\pi)}{\pi-(-\pi)}=g'(x)$$

$$\frac{(\pi-\frac{2}{\pi^2}\pi^3)-(sen(-\pi))}{2\pi}=g'(x)$$

$$\frac{(\pi-2\pi)-0}{2\pi}=g'(x)$$

$$\frac{\pi(1-2)}{2\pi}=g'(x)$$

$$\frac{-1}{2}=g'(x)$$

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}=cos(x) & \vee & -\frac{1}{2}=1-\frac{6}{\pi^2}x^2 \\ cos^{-1}(-\frac{1}{2})=x & \vee & \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{6}=x^2 \\ \pm\frac{2}{3}\pi\ (*1)=x & \vee & \frac{\pi^2}{4}=x^2 \\ & & \pm\frac{\pi}{2}=x\ (*2) \end{array}$$

(*1)Al ser la función coseno simétrica respecto del eje y, podemos obtener que $cos(x)=cos(-x)$, por lo que ambas soluciones, la positiva y la negativa, serían válidas, pero al revisar $g'(x)$ observamos que la función coseno solo se aplica a los valores negativos. Entonces queda definido en el valor correspondiente a $-\frac{2}{3}\pi$.
(*2)Por otro lado, tenemos dos soluciones $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$, de estas dos solo nos quedaremos con la positiva, ya que en $g'(x)$, todos los valores que usen la parte $1-\frac{6}{\pi^2}x^2$ son los valores mayores a 0, en otras palabras, solo los positivos.
Obtuvimos que los valores medios de g que satisfacen el teorema de Lagrange, son $\{\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi\}$

c) Para determinar la fórmula de la función primero vamos a calcular los puntos de intersección:

$$\begin{array}{cc} (-\pi,g(-\pi)) & (\pi,g(\pi)) \\ (-\pi,sen(-\pi)) & (\pi,\pi-\frac{2}{\pi^2}\pi^3) \\ (-\pi,0) & (\pi,\pi-2\pi) \\ & (\pi,-\pi) \end{array}$$

Con los valores obtenidos vamos a determinar la función lineal:

$$y=\begin{cases} a.(-\pi)+b=0 \\ a.(\pi)+b=-\pi \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccc} a.(-\pi)+b=0 & \frac{b}{\pi}.\pi+b=-\pi & a=\frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi} \\ a.(-\pi)=-b & 2b=-\pi & \\ a=\frac{b}{\pi} & b=-\frac{\pi}{2} & a=-\frac{1}{2} \end{array}$$

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}$$

Para conseguir las fórmulas de las rectas tangentes en un punto x, tenemos 3 datos:
$g'(x)$ es equivalente a la pendiente en el punto que queremos analizar.
$g(x)$ es igual al desplazamiento vertical de nuestra función.
x es el punto desde donde va a partir nuestra recta tangente, por lo que es igual al desplazamiento horizontal.
Primero definimos la recta tangente en el punto $x=-\frac{2}{3}\pi$:

$$y=g'(-\frac{2}{3}\pi).(x-(-\frac{2}{3}\pi))+g(-\frac{2}{3}\pi)$$

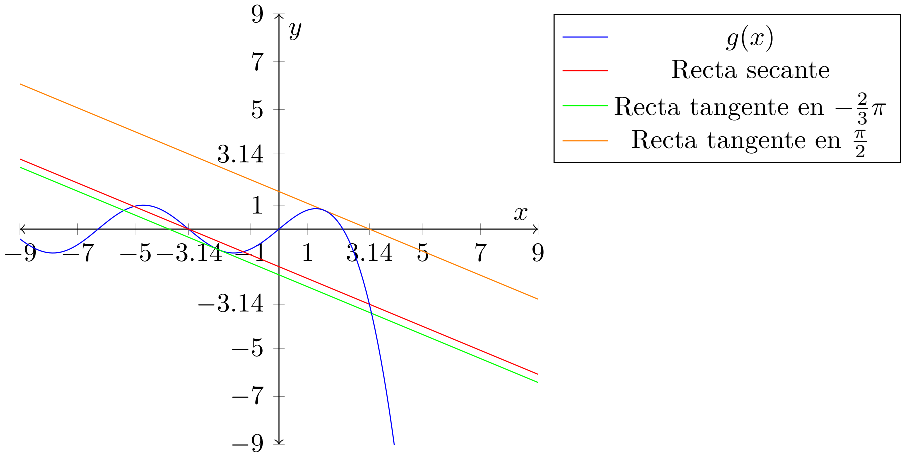
$$y=cos(-\frac{2}{3}\pi).(x-(-\frac{2}{3}\pi))+sen(-\frac{2}{3}\pi)$$

$$y=-\frac{1}{2}.(x+\frac{2}{3}\pi)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego definimos la recta tangente en el punto $x=\frac{\pi}{2}$

$$y = g'(\tfrac{\pi}{2}).(x - \tfrac{\pi}{2}) + g(\tfrac{\pi}{2})$$
$$y = 1 - \tfrac{6}{\pi^2}(\tfrac{\pi}{2})^2.(x - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2}{\pi^2}(\tfrac{\pi}{2})^3$$
$$y = -\tfrac{1}{2}.(x - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{4}$$

d)



Como se puede ver, todas las rectas son paralelas debido a que tienen la misma pendiente.
e)Para calcular $\int_0^\pi g(x)dx$, primero debemos buscar su primitiva y luego calcular el área:

$\int x - \frac{2}{\pi^2}x^3 dx$	(definición de g para los positivos)
$\int x\ dx - \int \frac{2}{\pi^2}x^3 dx$	(proposición 1 del apunte)
$\int x\ dx - \frac{2}{\pi^2}\int x^3 dx$	(proposición 1 del apunte)
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{4}x^4$	(tabla de integrales conocidas)

$$\therefore \int_0^\pi g(x)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{4}x^4\Big|_0^\pi$$

$$\rightarrow \int_0^\pi g(x)dx = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{4}\pi^4 - \frac{1}{2}0^2 - \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{4}0^4$$

$$\rightarrow \int_0^\pi g(x)dx = \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2 - (0 - 0)$$

$$\rightarrow \int_0^\pi g(x)dx = 0$$

3)a)

$\int f(x)dx = \int -3x + 2dx$	
$-3\int x\ dx + \int 2\ dx$	(por proposición 1 del apunte)
$(-3\frac{1}{2}x^2 + c) + (2x + c)$	(tabla de integrales inmediatas)
$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + c$	

b)

$\int f(x).g(x)\ dx = \int(-3x + 2).(cos(x))\ dx$	
$\int f(x).g(x)\ dx = (-3x + 2).sen(x) - \int -3.sen(x)\ dx$	(Dado el teorema 2 de la integración por partes)
$\int f(x).g(x)\ dx = (-3x + 2).sen(x) - (3cos(x) + c)$	(tabla de integrales inmediatas)

c)

$$\int f(g(x))\ dx = \int -3cos(x) + 2\ dx$$
$$\int f(g(x))\ dx = \int -3cos(x) + \int 2\ dx \qquad \text{(por proposición 1 del apunte)}$$
$$\int f(g(x))\ dx = -3sen(x) + 2x \qquad \text{(tabla de integrales inmediatas)}$$

d)

$$\int g(f(x))\ dx = \int cos(-3x+2)\ dx$$
$$\int g(f(x))\ dx = \int cos(-3x+2).\frac{-3}{-3}\ dx \qquad \text{(Multiplicamos por } \frac{f'(x)}{f'(x)} \text{ que es equivalente a 1)}$$
$$\int g(f(x))\ dx = \frac{1}{-3}\int cos(-3x+2).-3\ dx \qquad \text{(por proposición 1 del apunte)}$$
$$\int g(f(x))\ dx = -\frac{1}{3}\int cos(t)\ dt \qquad \text{(asumiendo que } t = f(x) \text{ y } dt = -3.dx\text{)}$$
$$\int g(f(x))\ dx = -\frac{1}{3}sen(t) + c \qquad \text{(tabla de integrales inmediatas)}$$
$$\int g(f(x))\ dx = -\frac{1}{3}sen(-3x+2) + c \qquad \text{(reemplazamos t)}$$