Trabajo Práctico N^o 3
Análisis Matemático

Tomás Pitinari

1 Enunciados

1) Dados $a \epsilon \mathbb{R}$ y $b \epsilon \mathbb{R}$ se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida entre:

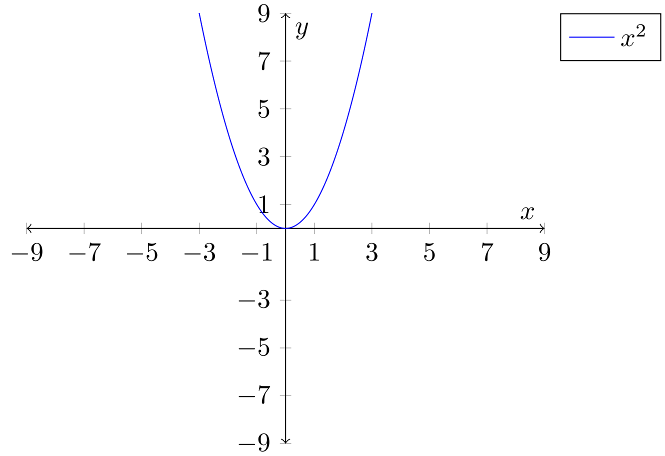
$$h(x) = \begin{cases} \text{x}^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1 \\ \text{ax + b} & \text{si } |x| \leq 1 \\ \text{-x}^2 + 4x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{1}$$

a) Representar gráficamente la función h para $x < 1$ y $x > 1$.
b) A partir de la gráfica obtenida, determinar a y b de manera que existan $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.
c) Con los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, realizar la gráfica de la función h.

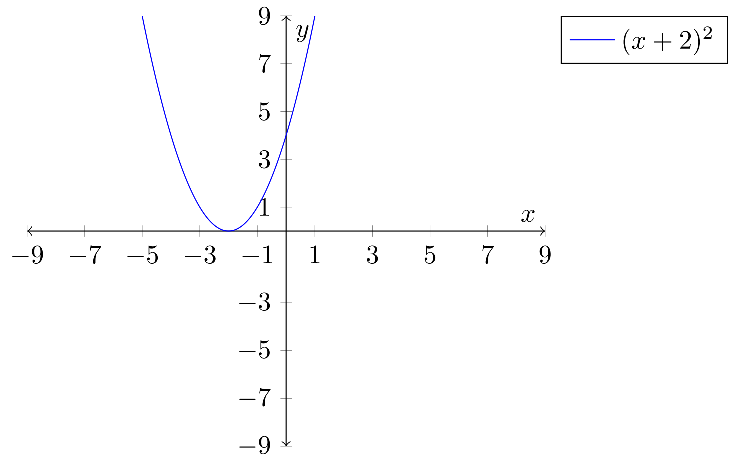
2) Utilizando la definición de límite finito en un punto, demostrar el límite $\lim\limits_{x \to 4}(18 - 2x) = 10$.

2 Resolución

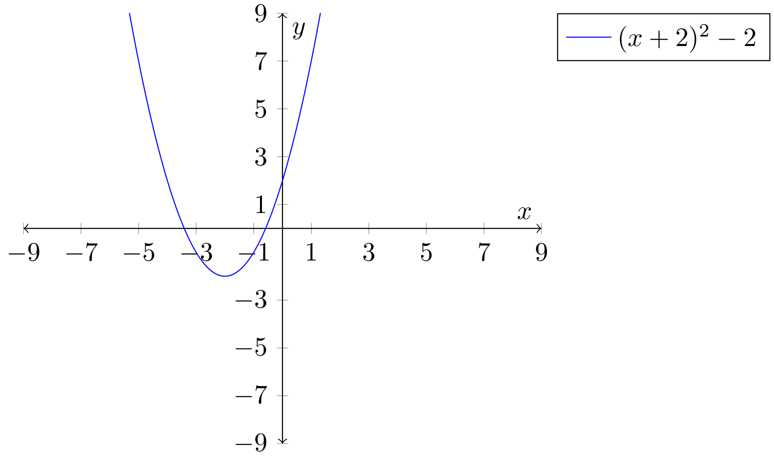
1) a) Si analizo $x^2 + 4x + 2$, puedo llegar a que:
$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 2 + 0$ (elemento neutro de la suma)
$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 2 + (2 - 2)$ (suma del opuesto)
$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + (2 + 2) - 2$ (asociativa)
$x^2 + 4x + 2 = (x^2 + 4x + 4) - 2$ (trinomio cuadrado perfecto)
$x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2$
Inicio graficando x^2:



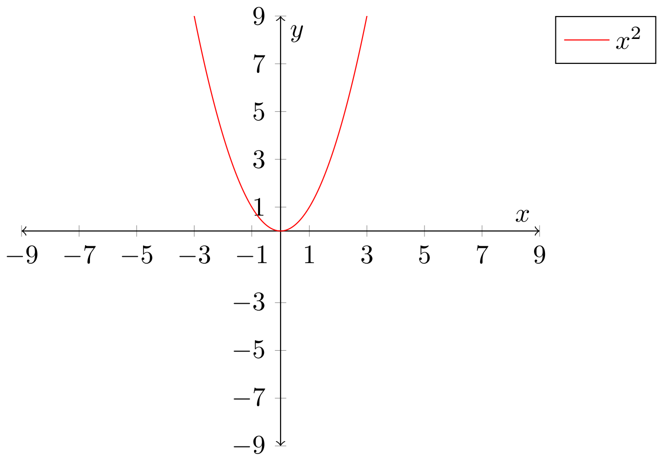
Luego grafico $(x + 2)^2$, lo que produce un corrimiento hacia la izquierda en 2 unidades:



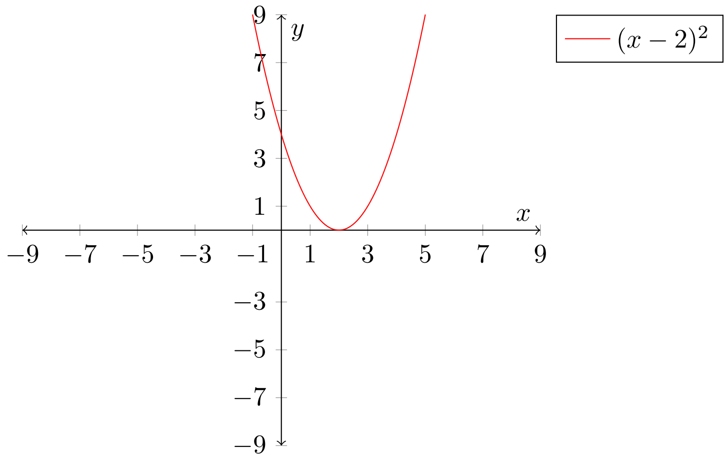
Finalmente grafico $(x + 2)^2 - 2$, que genera un corrimiento hacia abajo en 2 unidades:



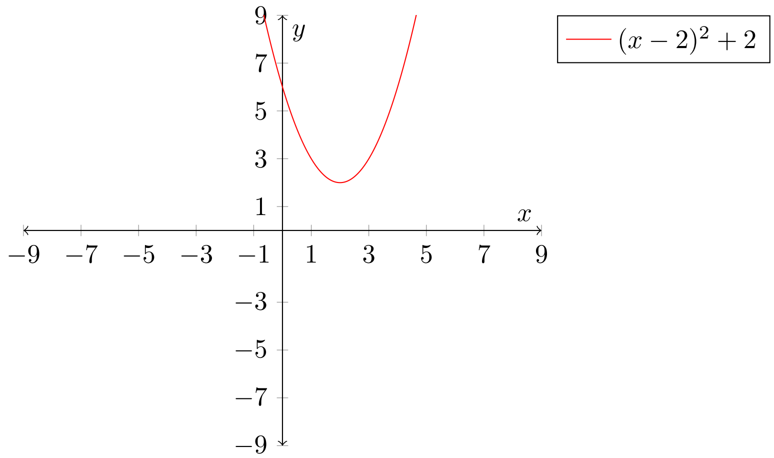
Ahora busco una función equivalente a $-(x^2)+4*x-6$:
$-(x^2)+4x-6=(-1).(x^2-4x+6)$
$-(x^2)+4x-6=-(x^2-4x+6+0)$ (elemento neutro de la suma)
$-(x^2)+4x-6=-(x^2-4x+6+(2-2))$ (opuesto de la suma)
$-(x^2)+4x-6=-(x^2-4x+(6-2)+2)$ (asociativa)
$-(x^2)+4x-6=-((x^2-4x+4)+2)$ (trinomio cuadrado perfecto)
$-(x^2)+4x-6=-((x-2)^2+2))$
Inicio graficando x^2:



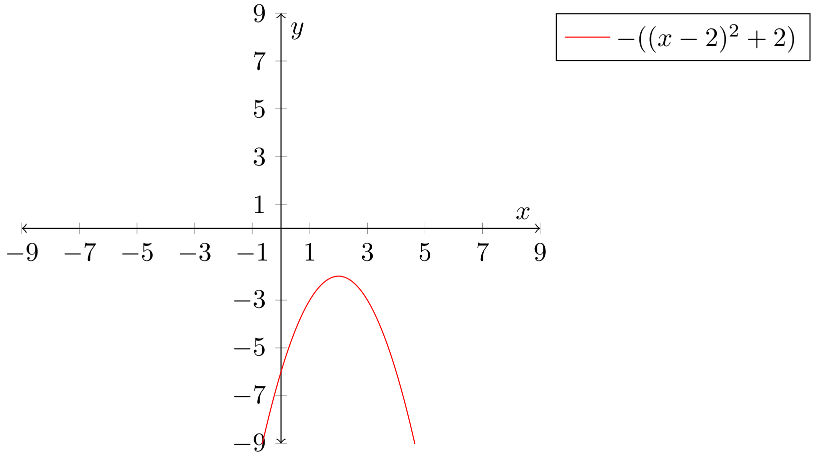
Después grafico $(x-2)^2$, lo que provoca un desplazamiento hacia la derecha de la gráfica anterior:



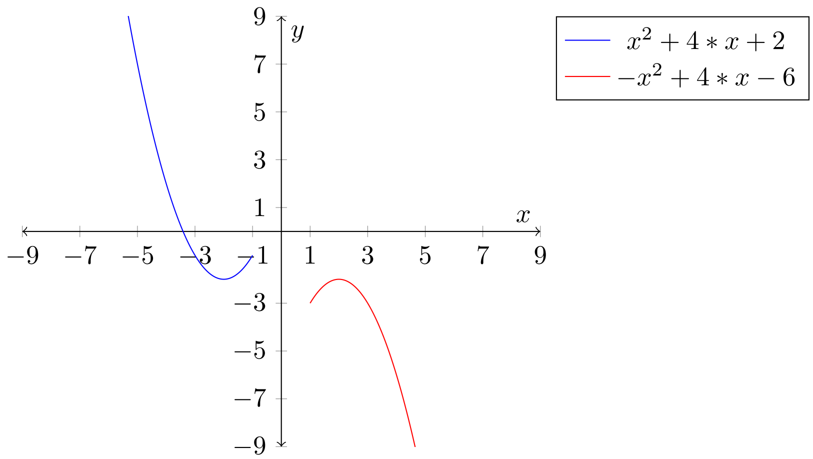
Luego, grafico $(x-2)^2+2$, que produce un desplazamiento hacia arriba de dos unidades:



Finalmente grafico $-((x-2)^2+2)$, que es el opuesto de la función anterior:



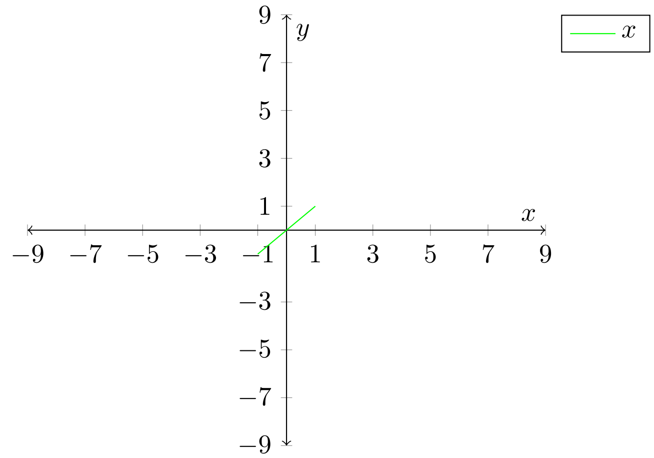
Una vez que explicado como conseguí cada función, sólo queda limitar los dominios de ambas funciones y graficarlas juntas, lo que da por resultado lo siguiente:



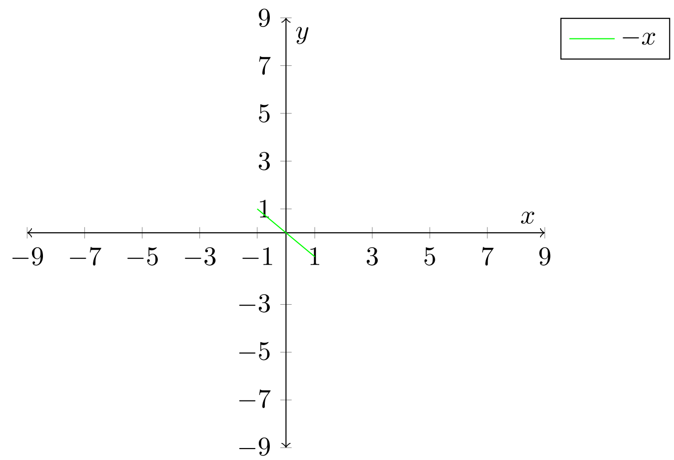
b) Hay que determinar los valores a y b de la función $h(x) = ax + b/x\epsilon[-1, 1]$ de manera que existan los límites $\lim_{x\to-1} h(x)$ y $\lim_{x\to 1} h(x)$.
Entonces debo encontrar el a y b de la función lineal que de -1 para una x igual a -1 y -3 para una x igual a 1.

$$\begin{cases} a.(-1) + b = -1 \\ a.1 + b = -3 \end{cases} \rightarrow a = -1 \wedge b = -2$$

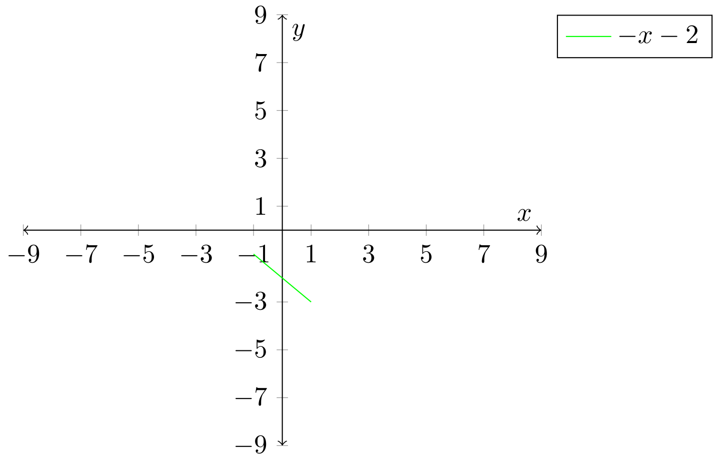
c) Teniendo $a = -1$ y $b = -2$ puedo saber que $h(x) = -x - 2/\ x\ \epsilon\ [-1, 1]$.
Primero grafico x:



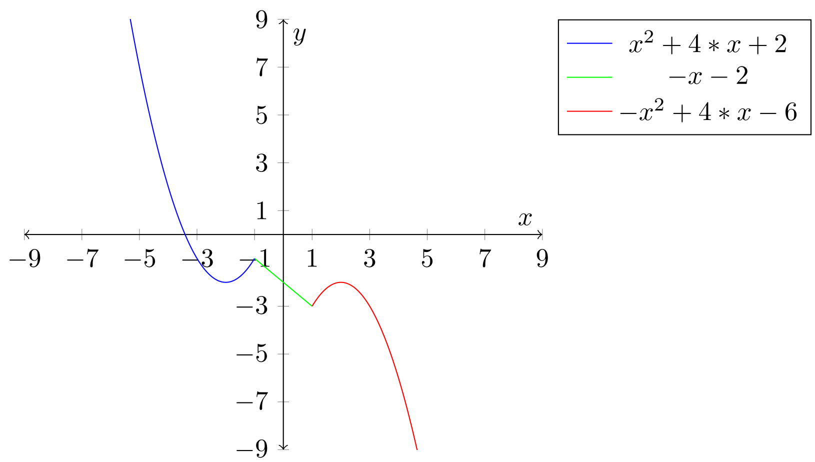
Luego grafico -x :



Finalmente grafico $-x-2$, lo que desplaza la gráfica 2 unidades hacia abajo:



Una vez que ya tengo a $h([-1,1])$, la grafico en todo su dominio:



2) Asumo un $f(x) = 18 - 2x$ y dado el ejercicio tengo que $\lim_{x\to 4} f(x) = 10$. Entonces tengo que:
$|f(x)-10| = |(18-2x)-10| = |-2x+(18-10)| = |-2x+8| = |(-2).(x-4)| = 2.|x-4|$
Entonces $\forall\varepsilon > 0$, puedo un elegir un $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y un x tal que $0 < |x-4| < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, será

$$|(18-2x)-10| = 2.|x-4| < 2.\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Con eso llegamos a la definición de límite finito, que es $|f(x) - l| < \varepsilon / l = \lim_{x\to 4} f(x)$. Por lo que queda demostrado que el límite de $\lim_{x\to 4} 18 - 2x = 10$.