Trabajo Práctico N^o 5
Análisis Matemático

Tomás Pitinari

1 Consignas

1) Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x > 3. \end{cases} \tag{1}$$

Se pide:

(a) Indicar el dominio de f y determinar (justificando adecuadamente) los puntos de continuidad de f. Clasificar los puntos de discontinuidad.

(b) Demostrar que f es estrictamente monótona en su dominio.

(c) Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar los puntos de continuidad de la inversa.

(d) Graficar en un mismo sistema de coordenadas la función f y su inversa.

2) Un punto fijo de una función f es un número $c \,\epsilon\, Dom(f)$ tal que $f(c) = c$. Demostrar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, tal que $Rec(f) \subseteq [0,1]$, entonces f tiene un punto fijo en $[0,1]$.

2 Resolución

1) a) Primero, vemos que en la definición de $f(x)$, no hay ningun intervalo de x que no pertenezca a los $\mathbb{R}$, ya que es la union entre los siguientes conjuntos, $(-\infty, 1]$, $(1, 3]$ y $(3, \infty)$, lo cual es igual a $\mathbb{R}$.

Para determinar si existe alguna restricción para x en su dominio vamos a determinar los dominios de sus partes. Para la primera parte, $\frac{1}{2}x - 1$, tengo una función lineal, por lo que su dominio son los $\mathbb{R}$. Por otro lado, tengo x^2, por lo que su dominio son los $\mathbb{R}$. Finalmente tengo $3\sqrt{3x}$, la cual por ser una raíz cuadrada su dominio no puede ser negativo, por lo tanto su dominio son los $\mathbb{R}_0^+$.

Analizando todos los dominios de las funciones, podemos ver que $Dom(f) = \mathbb{R}$, ya que el unico dominio que no es igual a los otros dominios es el de $3\sqrt{3x}$, la cual es igual a los reales positivo más el 0, pero como esa función solo se cumple si $x > 3$, podemos ver que $Dom(x) = \mathbb{R}$.

Para demostrar la continuidad de $f(x)$, vamos a demostrar la continuidad de los intervalos de las distintas partes de la función y en la intersección entre estas.

Dada la definición de continuidad:

$$|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Demostramos la continuidad de $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$ si se cumple: Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta < |2|\varepsilon$ que verifica:

$$|x - a| < \delta < |2|\varepsilon \to |(\tfrac{1}{2}x - 1) - (\tfrac{1}{2}a - 1)| < \varepsilon$$
$$\to |\tfrac{1}{2}x - 1 - \tfrac{1}{2}a + 1| < \varepsilon \to |\tfrac{1}{2}||x - a| < \varepsilon \to |x - a| < |2|\varepsilon$$

Queda demostrado que para cualquier numero del dominio de $\frac{1}{2}x - 1$ es continuo.

Luego demostramos la continuidad de x^2. En el tema anterior vimos que: $\forall\ a \ \epsilon\ \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$. Tambien sabemos que para todo x del dominio existe un $x^2 \ \epsilon\ Rec(x^2)$. Ya aclarado todo esto, sabemos que:

$\forall\ a \ \epsilon\ \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2 \wedge f(a) = a^2$, por lo que se ve que para todo $a \ \epsilon\ \mathbb{R}$, x^2 es continua, y como $Dom(x^2) = \mathbb{R}$, puedo afirmar que x^2 es continua en todo su dominio.

Tambien debemos demostrar que $3\sqrt{3x}$ es continua en todo su dominio. Primero sabemos que x^2 es continuia en $\mathbb{R}_0^+$, ya que sabia por el párrafo anterior que es continua en todo $\mathbb{R}$, ahora demostramos que es creciente en ese dominio, lo cual veo al tomar:

$$x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}_0^+ / x_1 < x_2 \to x_1^2 < x_2^2$$

(como ambas x son positivas podemos despejar los cuadrados sin problemas)

$$\therefore x_1 < x_2.$$

Al ser x^2 creciente y continua en $\mathbb{R}_0^+$, su inversa tambien lo será, por lo que solo queda demostrar que dado un:

$$f'(x) = x^2 \to f'^{-1}(x) = \sqrt{x} \to f'^{-1}(f(x)) = x \to \sqrt{x^2} = x \to x = x$$

Vemos que $\sqrt{x}$ es continua y creciente en su dominio, y que al multiplicarla por $3\sqrt{3}$, que es una constante, da otra función continua.

Finalmente hay que evaluar la continuidad en los puntos de intersección de las partes de $f(x)$. Primero observamos en 1, para que sea continua se deben cumplir los siguientes requisitos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$
$$\to \tfrac{1}{2}.1 - 1 = \tfrac{1}{2}.1 - 1 = 1^2$$
$$\to -\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} = 1$$
$$\therefore f(x) \text{ es discontinua inevitable de salto finito en 1.}$$

Luego me fijo en 3, por lo que se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$
$$\to 3^2 = 3^2 = 3\sqrt{3x}$$
$$\to 9 = 9 = 9$$
$$\therefore f(x) \text{ es continua en 3.}$$

b) Para demostrar la monotonía de $f(x)$, vamos a trabajar como el ejercicio anterior. Primero vamos a demostrar que $\frac{1}{2}x - 1$ creciente en todo su dominio:

$$x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R} / x_1 < x_2 \to \tfrac{1}{2}x_1 - 1 < \tfrac{1}{2}x_2 - 1 \to \tfrac{1}{2}x_1 < \tfrac{1}{2}x_2 \to x_1 < x_2.$$
$$\tfrac{1}{2}x - 1 \text{ es creciente en su dominio} \therefore f(x) \text{ es creciente en el rango } (-\infty, 1]$$

Luego veremos si es creciente en el entorno de 1:

$$f(1) \leq \lim_{x\to 1^+} f(x) \to -\tfrac{1}{2} \leq 1$$
$$\therefore \text{ se mantiene el crecimiento en } x = 1$$

Como en el ejercicio anterior demostré que x^2 es creciente en $\mathbb{R}_0^+$, entonces $f(x)$ es creciente en el rango $(1, 3]$.
Despues demostramos que en la intersección de las partes de la función $f(x)$ en $x = 3$ se mantiene la monotonía creciente:

$$f(3) \leq \lim_{x\to 3^+} f(x) \to 9 \leq 9$$
$$\therefore \text{ se mantiene el crecimiento en } x = 3.$$

Finalmente demostramos que $3\sqrt{3x}$ es creciente en su dominio:

$$x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}_0^+ / x_1 < x_2 \to 3\sqrt{3x_1} < 3\sqrt{3x_2} \to \sqrt{3x_1} < \sqrt{3x_2} \to 3x_1 < 3x_2$$
(No hay cambio de signos ya que el dominio son los reales positivos)$\to x_1 < x_2$.
$$3\sqrt{3x} \text{ es creciente en su dominio} \therefore f(x) \text{ es creciente en el rango } (3, \infty)$$

Queda demostrado que $f(x)$ es continua en todo su dominio.

c) Al igual que los ejercicios anteriores vamos a encontrar las leyes para las inversas de cada una de las partes de $f(x)$. Primero calculamos la inversa de $\frac{1}{2}x - 1$:

$$f(x) = y \to \tfrac{1}{2}x - 1 = y \to \tfrac{1}{2}x = y + 1 \to x = 2y + 2$$
$$\therefore f^{-1}(x) = 2x + 2 \text{ para } x \leq -\tfrac{1}{2}$$

Luego para x^2 su función inversa es $\sqrt{2}$, lo cual fue demostrado en un ejercicio anterior.

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \text{ para } 1 < x \leq 9$$

Finalmente para $3\sqrt{3x}$ su función inversa es:

$$f(x) = y \rightarrow 3\sqrt{3x} = y \rightarrow \sqrt{3x} = \tfrac{1}{3}y \rightarrow 3x = \tfrac{1}{9}y^2 \rightarrow x = \tfrac{1}{27}y^2$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \tfrac{1}{27}x^2 \text{ para x} > 9.$$

Como todas las partes de la función $f(x)$ son crecientes y continuas, eso quiere decir que sus inversas también lo son. Solo queda verificar su continuidad en los puntos de intersección. Primero lo probaré para $x = -\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(-\tfrac{1}{2}) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f^{-1}(x)$$
$\rightarrow$ al no existir el límite lateral por derecha, $f^{-1}(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = -\frac{1}{2}$

Luego verifico la continuidad en $x = 1$:

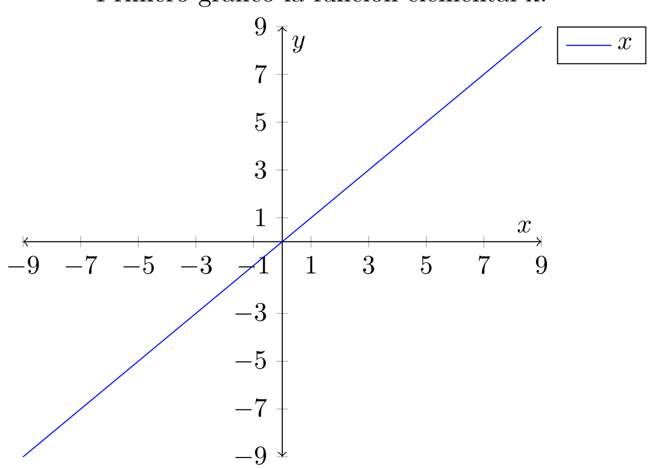
$$\lim_{x \to 1^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(1) = \lim_{x \to 1^+} f^{-1}(x)$$
$\rightarrow$ al no existir el límite lateral por izquierda, $f^{-1}(x)$ presenta una discontinuidad esencial en $x = 1$

Por último verifico la continuidad en el punto $x = 9$:

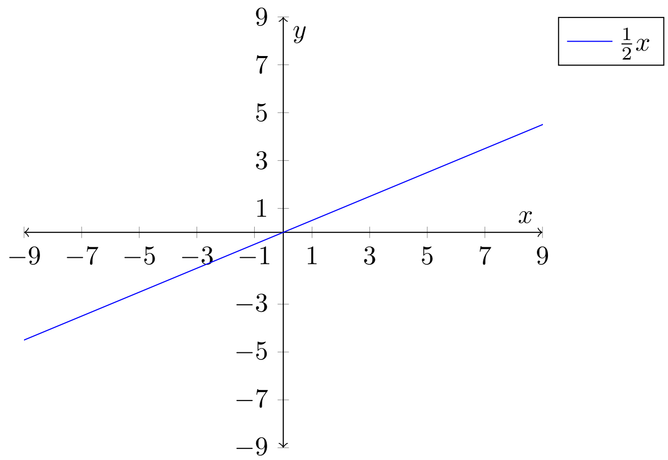
$$\lim_{x \to 9^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(9) = \lim_{x \to 9^+} f^{-1}(x)$$
$$\rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{9} = \tfrac{1}{27}9^2 \rightarrow 3 = 3 = 3$$
$$\therefore f^{-1}(x) \text{ en } x = 1 \text{ es continua}$$

d) Primero voy a graficar por corrimientos las diferentes funciones de $f(x)$ y luego limitaré los diminios de las mismas y graficaré $f(x)$ completa:

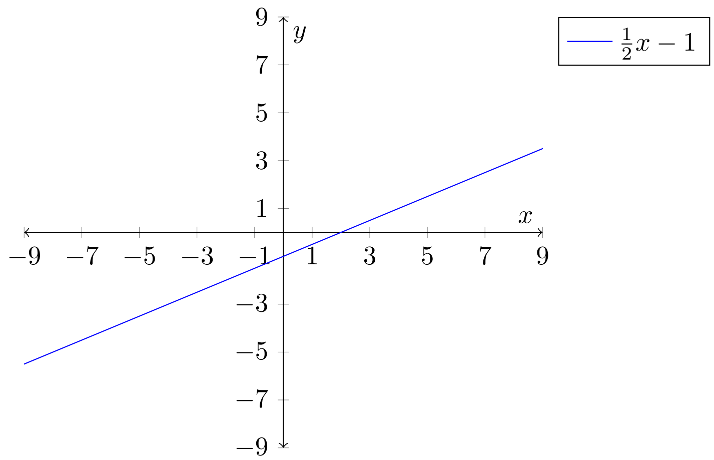
Primero grafico la función elemental x:



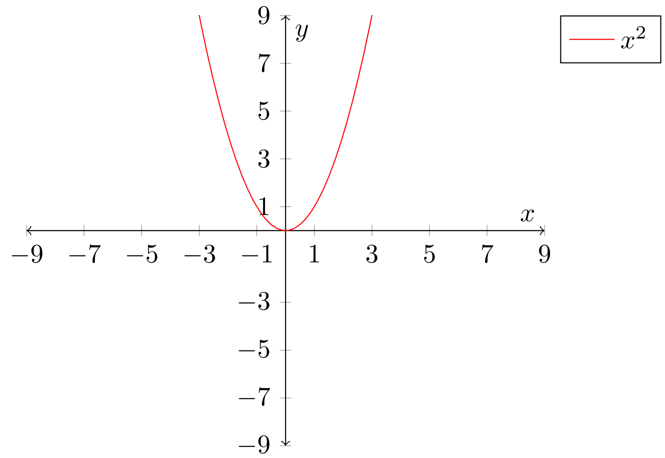
Luego grafico la función lineal $\frac{1}{2}x$, que inclina la grafica hacia abajo:



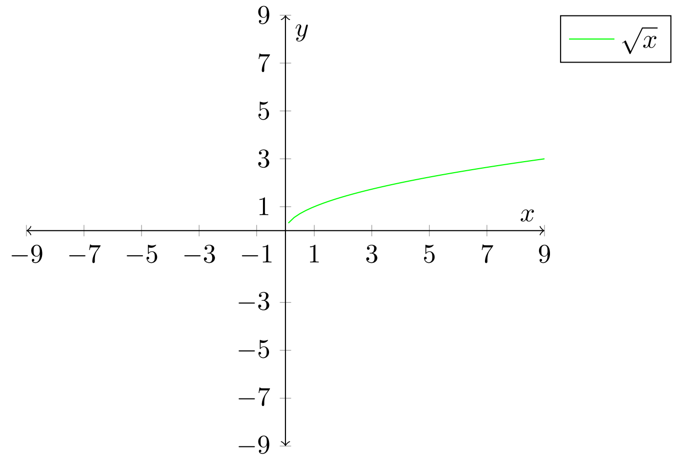
Finalmente grafico la función $\frac{1}{2}x - 1$, que desplaza la grafica una unidad hacia abajo:



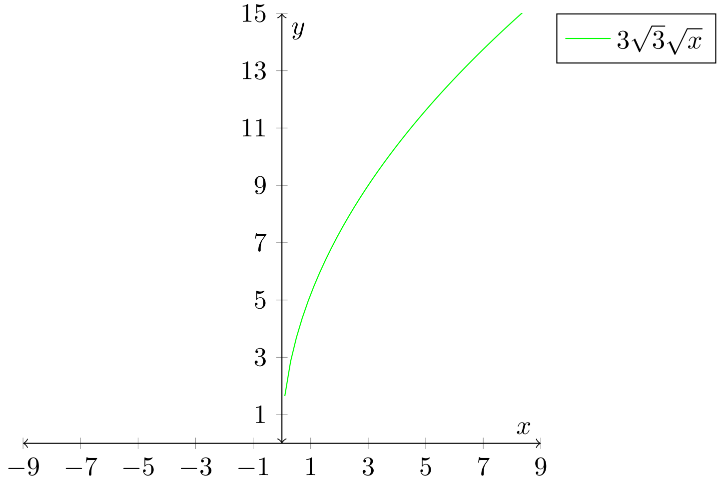
La siguiente función elemental a graficar, x^2



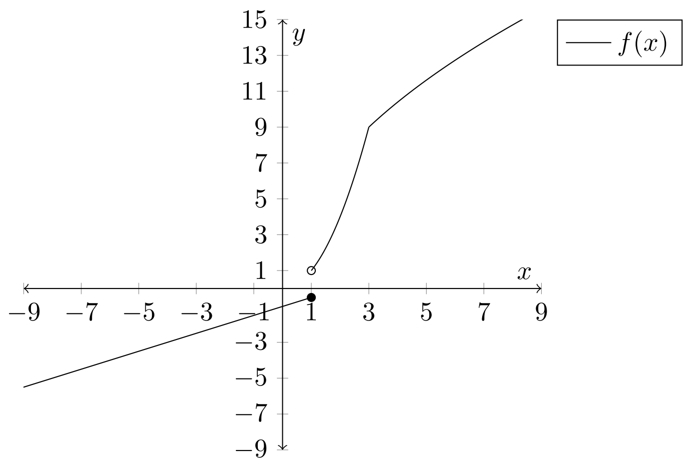
Para la tercera parte de $f(x)$, podemos ver que $3\sqrt{3x} = 3\sqrt{3}\sqrt{x}$, por lo que inicialmente grafico la función elemental $\sqrt{x}$:



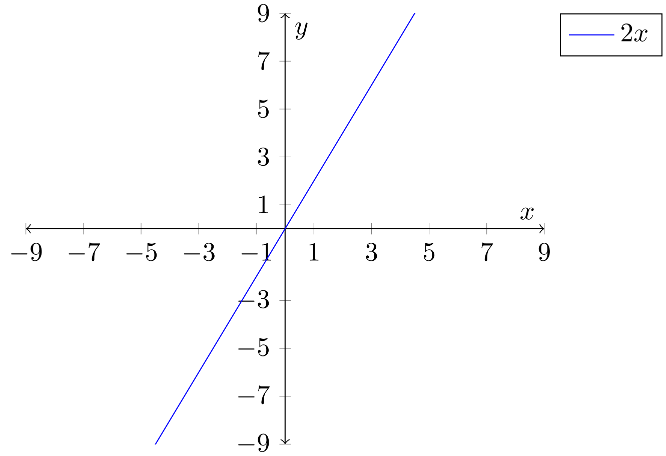
Luego multiplico la función anterior por $3\sqrt{3}$ y quedaría:



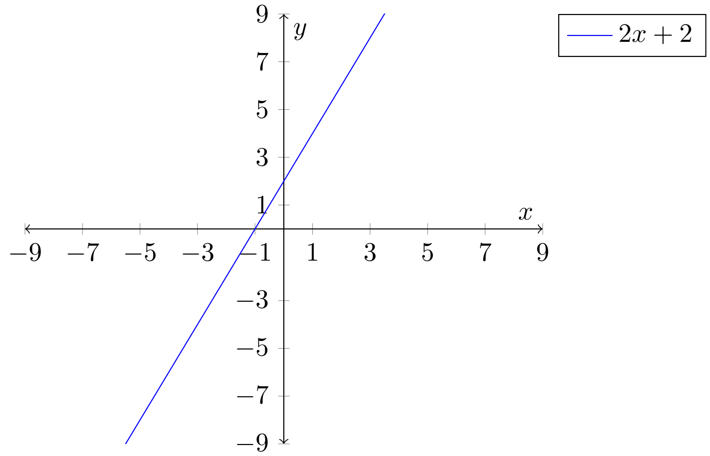
Finalmente, tomando todas las funciones, limito el dominio de todas y las grafico:



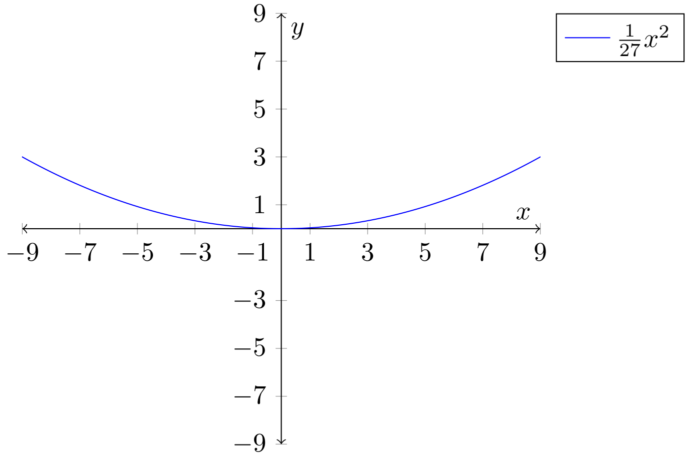
Para graficar la función inversa comenzaremos graficando $2x + 2$ como la función elemental x, inclinada hacia arriba



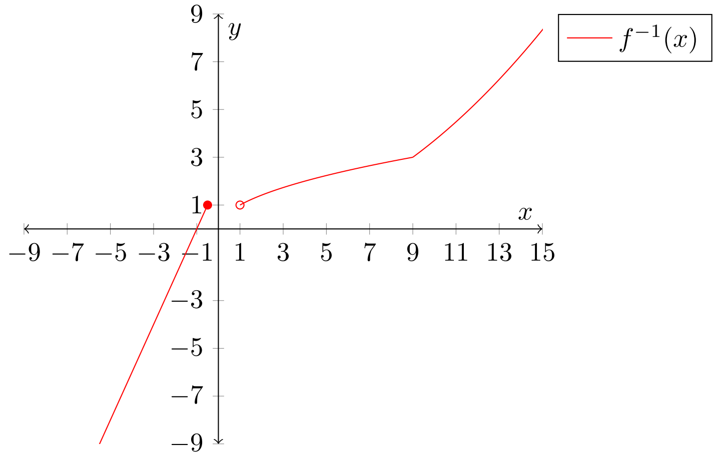
Seguimos con $2x + 2$ desplazando la grafica 2 unidades hacia arriba



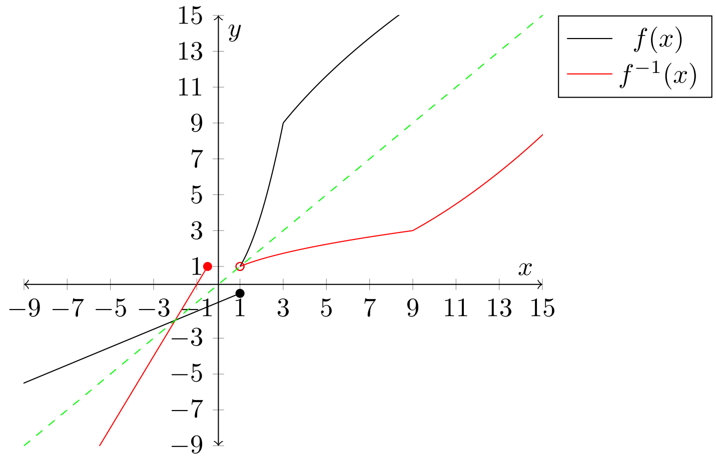
Como ya esta graficada arriba $\sqrt{x}$ y x^2, voy a multiplicar $\frac{1}{27}x^2$, lo que va a "abrir" pico de la gráfica:



Una vez identificadas todas las partes, grafico f^{-1}:



Finalmente grafico ambas funciones juntas:



2) Dada una función f, dado un número $c \epsilon Dom(f)$ tal que $f(c) = c$. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y el $Rec(f)[0, 1]$. Para demostrar que hay un punto fijo, primero hay que ver:

Si $f(0) = 0 \rightarrow 0$ es un punto fijo de f.

Por otro lado si $f(1) = 1 \rightarrow 1$ es un punto fijo de f. Si $f(1) \neq 1 \wedge f(0) \neq 0$ entonces:

Definimos un $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/g(x) = f(x) - x$ entonces si $g(x) = 0$ significa que x es un punto fijo de f. Podemos ver que $0 < f(x) < 1$, entonces si $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$ se puede considerar que $g(0) > 0$. Por otro lado, si $g(1) = f(1) - 1 \wedge f(1) < 1 \rightarrow g(1) < 0$. Por el teorema de Bolzano, si $g(0) > 0 \wedge g(1) < 0$ y g es continua, ya que f es continua por definición y x es continua por se función identidad, por lo que por álgebra de continuidad $g(x)$ es continua. El teorema de Bolzano dice que g en algun momento pasará por el eje x, osea que se demuestra que f tiene un punto fijo.