Trabajo Práctico N2
Análisis Matemático

Tomás Pitinari

1 Consignas

29) Dadas las funciones $f(x) = sen(x-\pi)$, $g(x) = |\frac{x}{3}|$, $h(x) = \frac{1}{x-4}$ y $k = h\ o\ g$.

(a) Indicar el dominio y el recorrido de f, g y h, justificando analíticamente.
(b) Obtener los conjuntos $g^{-1}([-2,4])$, $h([1,2])$ y $f^{-1}(\{-1\})$.
(c) Indicar el dominio de la función $k = h\ o\ g$.
(d) Dar la ley de k.
(e) Analizar la paridad de la función k.
(f) Graficar la función k.

2 Resolución

a) La función $f(x)$ tiene el mismo dominio y recorrido que la función $sen(x)$, porque al tener $sen(x-\pi)$ es igual a $sen(x)$ desplazado π unidades hacia la derecha. Por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R} \wedge Rec(f) = [-1,1]$.

Para la función $g(x) = |\frac{x}{3}|$ vamos a despejar un poco:

$$g(x) = |\tfrac{x}{3}| = \tfrac{|x|}{|3|} = |\tfrac{1}{3}|.|x| = \tfrac{1}{3}.|x|$$

Como podemos ver la función $g(x)$ es la función valor absoluto afetada por una constante, por lo que $Dom(g) = \mathbb{R}$ y tenemos que desmostrar que el $Rec(g) = \mathbb{R}_0^+$.
Para esto tenemos que demostrar que $Rec(g) \subseteq \mathbb{R}_0^+ \wedge \mathbb{R}_0^+ \subseteq Rec(g)$:
Primero probamos $Rec(g) \subseteq \mathbb{R}_0^+$: Dado $x' \epsilon Dom(g)$, resulta que:

$$g(x') = \tfrac{1}{3}.|x'| = y \geq \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow g(x') = y\ \epsilon\ \mathbb{R}_0^+ \therefore Rec(g) \subseteq \mathbb{R}_0^+$$

Despues probamos: $\mathbb{R}_0^+ \subseteq Rec(g)$: Dado $y \epsilon \mathbb{R}_0^+$, ¿$\exists x \epsilon Dom(g) / g(x) = y$?.
Consideremos $x = 3y\ \epsilon\ Dom(g) = \mathbb{R}$

$$g(x) = \tfrac{1}{3}.|x| = \tfrac{1}{3}.|3y| = \tfrac{1}{3}.|3|.|y| = \tfrac{1}{3}.3.|y| = |y| = y \Rightarrow y\ \epsilon\ Rec(g)$$
$$\therefore \mathbb{R}_0^+ \subseteq Rec(g)$$

Vamos a trabajar con la función $h(x)$ como una homográfica de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$, donde sus valores son: $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -4$, con esto podemos calcular el $Dom(h) = \mathbb{R} - (-\frac{d}{c}) = \mathbb{R} - (-\frac{-4}{1}) = \mathbb{R} - \{4\}$.
Para el recorrido tenemos que son todos los reales menos el valor de la asíntota horizontal, para esto tendremos que calcular el desplazamiento vertical de la gráfica, $Rec(h) = \mathbb{R} - \frac{a}{c} = \mathbb{R} - \frac{0}{1} = \mathbb{R} - \{0\}$. Ahora hay que justificar $Rec(h) = \mathbb{R} - \{0\} \Leftrightarrow Rec(h) \subseteq \mathbb{R} - \{0\} \wedge \mathbb{R} - \{0\} \subseteq Rec(h)$.
Primero probamos que $Rec(h) \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$: Dado $x' \epsilon Dom(h)$, resulta que:

$$h(x') = \frac{1}{x'-4} = y \Rightarrow y \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$$

(porque no existe ningún número que dividiendo a 1 de 0).

$$\therefore Rec(h) \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$$

Despues probamos que $\mathbb{R} - \{0\} \subseteq Rec(h)$:
Dado un $y \epsilon \mathbb{R} - \{0\}$, ¿$\exists x \ \epsilon \ Dom(h)/h(x) = y$?:

$$\frac{1}{x-4} = y \Rightarrow 1 = (x-4).y \Rightarrow 1 = xy - 4y \Rightarrow 1 + 4y = xy \Rightarrow$$

$$\frac{1+4y}{y} = x/(y \neq 0) \Rightarrow 4 + \frac{1}{y} = x$$

Entonces tenemos que:

$$h(x) = \frac{1}{x-4} = \frac{1}{4 + \frac{1}{y} - 4} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y \Rightarrow y \epsilon Reg(h)$$

$$\therefore \mathbb{R} - \{0\} \subseteq Rec(h).$$

b) Para $g^{-1}([-2,4]) = \{x \ \epsilon \ Dom(g) = \mathbb{R} \ / \ |\frac{x}{3}| \ \epsilon \ [-2,4]\}$

$$-2 \leq |\tfrac{x}{3}| \leq 4 \ \Rightarrow \ 0 \leq |\tfrac{x}{3}| \leq 4$$

(el valor absoluto no es negativo)

Abriendo el valor absoluto nos queda:

$$-4 \leq \tfrac{x}{3} \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq \tfrac{x}{3} \leq 4$$

$$-12 \leq x \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 12$$

$$\therefore g^{-1}([-2,4]) = [-12,12].$$

Para $h([1,2]) = \{y \ \epsilon \ \mathbb{R} - \{0\} \ / \ y = h(x) \ con \ x \ \epsilon \ [1,2]\}$. Sabiendo esto hay que determinar las imágenes de $h(x)$ con $x \epsilon [1,2]$.

$$1 \leq x \leq 2$$

$$-3 \leq x - 4 \leq -2$$

$$-\tfrac{1}{3} \geq \tfrac{1}{x-4} \geq -\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore h([1,2]) = [-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}]$$

Para $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \,\epsilon\, Dom(f) = \mathbb{R} \;/\; sen(x-\pi) \,\epsilon\, \{-1\}\}$, como el conjunto {-1} tiene un único elemento, que es -1, podemos calcular:

$$\begin{gathered} f(x) = -1 \\ sen(x-\pi) = -1 \\ arcsen(sen(x-\pi)) = arcsen(-1) \\ x - \pi = -\tfrac{\pi}{2} \\ x = \pi - \tfrac{\pi}{2} \\ x = \tfrac{\pi}{2} \end{gathered}$$

$$\therefore f^{-1}(\{-1\}) = \tfrac{\pi}{2}.2k\pi \;/\; k \,\epsilon\, Z$$

(La función seno es periódica en 2π, por lo tanto el resultado se va a repetir para cada período).

c) Dada una función k definida como la composición de las funciones $h_o g$, queremos hayar su dominio:

$$Dom(k) = Dom(h_o g) = \{x \,\epsilon\, Dom(g) \;/\; g(x) \,\epsilon\, Dom(h)\}$$

Conocemos el dominio de cada función:

$$Dom(h) = \mathbb{R} - \{4\} \wedge Dom(g) = \mathbb{R}$$

Ahora pasaremos a definir el dominio:

$$Dom(h_o g) = \{x \,\epsilon\, \mathbb{R} \;/\; g(x) \,\epsilon\, \mathbb{R} - \{4\}\}$$

Esto nos dice que dos condiciones se deben cumplir.

(1) $x \,\epsilon\, \mathbb{R}$, por lo que no tenemos limitaciones.

(2) $g(x) \,\epsilon\, \mathbb{R} - \{4\}$, que ahora tendremos que analizar:

Hay que encontrar los valores de x para cuando $g(x) = 4$:

$$|\tfrac{x}{3}| = 4$$

$$\tfrac{|x|}{|3|} = 4$$

$$\tfrac{1}{3}.|x| = 4$$

$$|x| = 12$$

$$\therefore x = 12 \vee x = -12$$

$$\Rightarrow Dom(h_o g) = \mathbb{R} - \{12, -12\} = Dom(k).$$

d)

$$k(x) = (h_o g)(x) = h(g(x)) = h(|\frac{x}{3}|) = \frac{1}{|\frac{x}{3}| - 4} = \frac{1}{\frac{|x|}{3} - 4} =$$

$$\frac{1}{\frac{|x|-12}{3}} = \frac{3}{|x| - 12}$$

e) Sabemos que el dominio de la función k es simétrico:

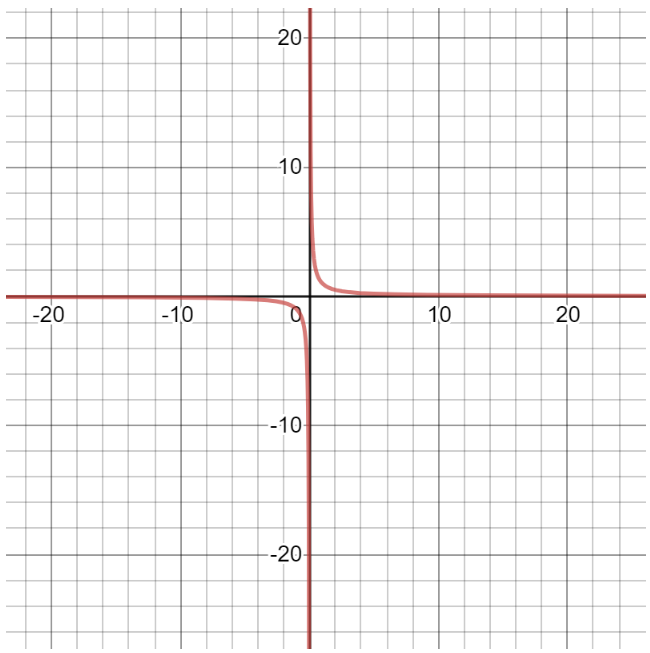
$$Dom(k) = \mathbb{R} - \{12, -12\}$$

Ahora veremos con $k(-x)$:

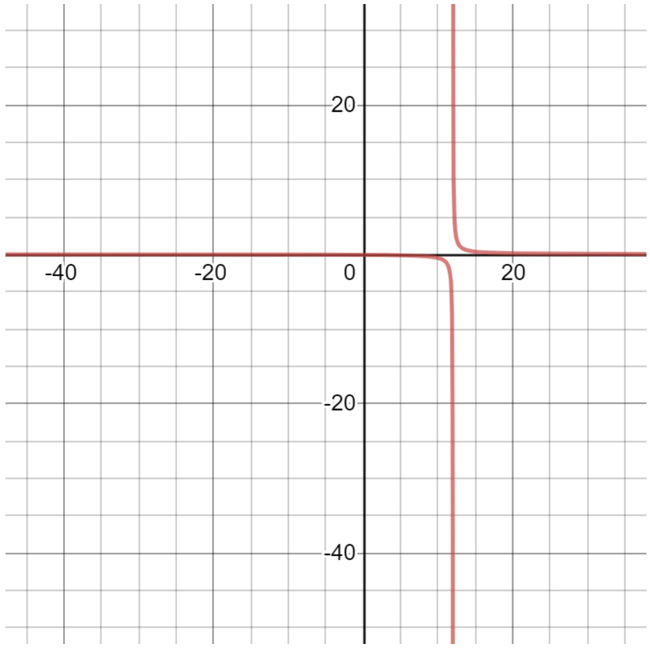
$$k(-x) = \frac{3}{|-x| - 12} = \frac{3}{|x| - 12} = k(x)$$

Por lo que la función es par.

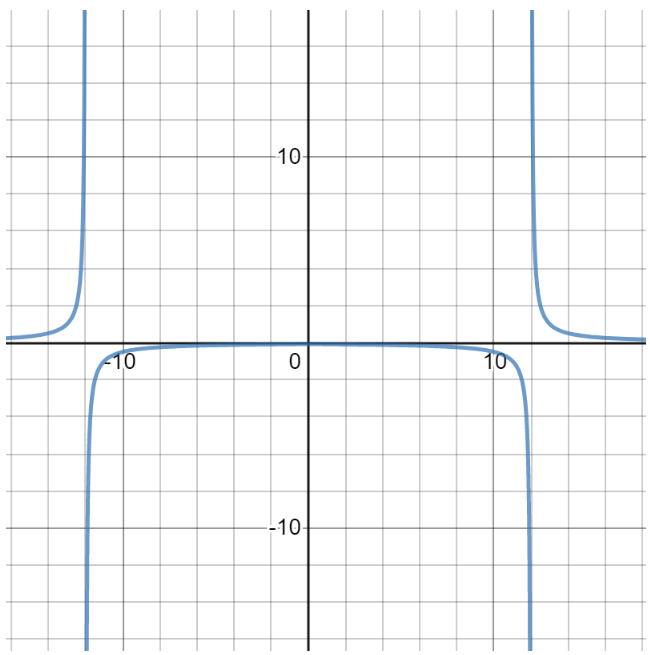
f) Haremos la gráfica paso por paso, primero empezamos con la función recíproca:



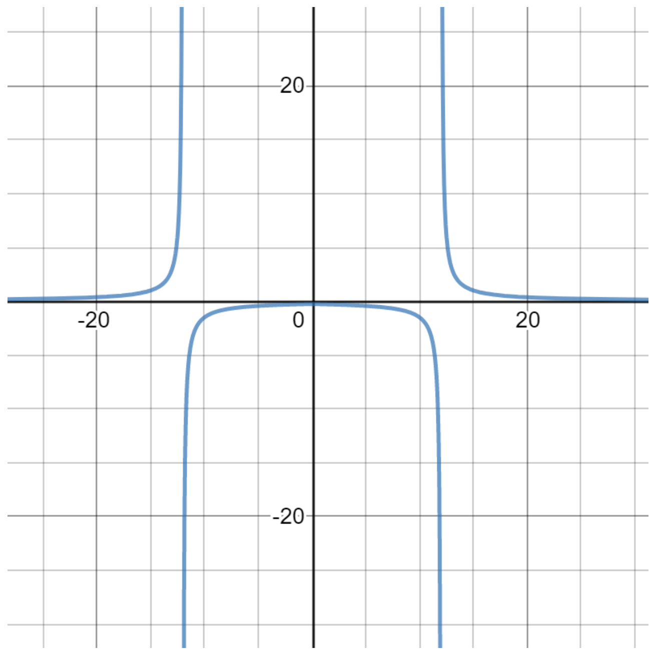
Luego desplazaremos la gráfica hacia la derecha 12 unidades:



Después aplicaremos el valor absoluto a la variable, por ser una función par, eso genera una simetría con el eje y, por lo que adopta la misma forma en las direcciones opuestas:



Finalmente multiplicamos por 3 para obtener la ecuación final, $\frac{3}{|x|-12}$:


20
-20
0
20
-20