Fundamentos de Análisis Matemático, MMA 2024-25. **ENTREGA 3**

NOMBRE: Gonzalo Ortega Carpintero (*Para entregar el jueves, 5 de diciembre*)

1.- (Lema de Van der Corput) Sea $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ una función a valores reales, donde $\Phi'(x)$ es monótona y cumple $|\Phi'(x)| \geqslant 1$ en el intervalo $[a,b]$. Demuestra que

$$\left|\int_a^b e^{i\Phi(x)}dx\right| \leqslant 4.$$

INDICACIONES: Escribe $e^{i\Phi(x)} = \Phi'(x)e^{i\Phi(x)}\frac{1}{\Phi'(x)}$ y usa integración por partes. Luego observa que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Phi'(x)}\right)$ no cambia de signo por ser $\Phi'(x)$ monótona.

2.- Demuestra que existe una constante $C > 0$, finita, de forma que $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall a < b$ se tiene

$$\left|\int_a^b e^{i(\lambda x^2+x)}\frac{dx}{|x|^{1/2}}\right| \leqslant C$$

INDICACIONES: Podemos suponer que $0 \leqslant a < b$. Haz un cambio de variables para que la integral quede de la forma $\displaystyle\int_{a'}^{b'} e^{i\Phi(y)}dy$. Finalmente, encuentra las regiones de monotonía de $\Phi'(x)$ y donde, además, $|\Phi'(x)| \geqslant 1$. Deberás considerar los casos $\lambda > 0$ (fácil) y $\lambda < 0$ por separado.

SOL.:

1.

Demostración. Siguiendo la indicación e integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b e^{i\Phi(x)}\ dx\right| &= \left|\int_a^b i\Phi'(x)e^{i\Phi(x)}\frac{1}{i\Phi'(x)}\ dx\right| = \left|\left[\frac{-i}{\Phi'(x)}e^{i\Phi(x)}\right]_a^b - \int_a^b e^{i\Phi(x)}\frac{i\Phi'(x)}{\Phi''(x)^2}\ dx\right| \\
&= \left|\frac{-i}{\Phi'(b)}e^{i\Phi(b)} - \frac{-i}{\Phi'(a)}e^{i\Phi(a)} - \int_a^b e^{i\Phi(x)}\frac{-i\Phi''(x)}{\Phi'(x)^2}\ dx\right| \\
&\leqslant \left|\frac{-i}{\Phi'(b)}e^{i\Phi(b)}\right| + \left|\frac{-i}{\Phi'(a)}e^{i\Phi(a)}\right| + \left|\int_a^b e^{i\Phi(x)}\frac{-i\Phi''(x)}{\Phi'(x)^2}\ dx\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\Phi'(b)}\right| + \left|\frac{1}{\Phi'(a)}\right| + \int_a^b \left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)^2}\right|\ dx \leqslant 1 + 1 + \int_a^b |\Phi''(x)|\ dx \\
&\leqslant 2 + |\Phi'(b)| + |\Phi'(a)| \leqslant 2 + 1 + 1 = 4,
\end{aligned}$$

usando, en las dos últimas desigualdades, el hecho de $|\Phi'(x)| \geqslant 1$ y que $\Phi'(x)$ no cambia de signo. □

2.

Demostración. Para $0 \leqslant a \leqslant b$, podemos tomar $|x| = x$ haciendo el cambio de variable $y = x^{\frac{1}{2}}$, tenemos $x = y^2$ nos queda $\Phi(y) = \lambda y^4 + y^2$, con $dx = 2y\ dy$. Luego

$$\left|\int_a^b e^{i(\lambda x^2+x)} \frac{dx}{|x|^{1/2}}\right| = \left|\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{i(\lambda y^4+y^2)} dy\right|.$$

Basta por tanto acotar la integral cuando $\Phi(y)$ no cumple las hipótesis del Ejercicio 1. Tenemos $\Phi'(y) = 4\lambda y^3 + 2y$ y $\Phi''(y) = 12\lambda y^2 + 2$.

Para $\lambda > 0$, $\Phi''(y)$ es siempre positiva y por tanto $\Phi'(y)$ siempre monótona al ser creciente. En caso de que $|\Phi'(y)| \geqslant 1$ la integral estaría acotada por el ejercicio anterior. Para $y > 1$ se cumple dicha desigualdad, y basta ver que $|e^{i\Phi(y)}| = 1$, luego el tramo $\int_0^1 |e^{i\Phi(y)}|\ dy$ está acotado también. Faltaría evaluar el caso $\lambda < 0$.

$\square$