(*A entregar el 26.09.2024*)

Fundamentos de Análisis Matemático, MMA 2023-24. **Entrega 1**

Nombre y APELLIDOS:

1) Se dice que la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es Hölder de orden $\alpha > 0$ si existe una constante C de forma que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Probar que si f es Hölder de orden α, con $\alpha > N$, entonces f es constante.

2. En $\mathbb{R}^N$, si el conjunto A no es medible Lebesgue, y $s < N$, probar que $\mathcal{H}^s_*(A) = \infty$.

3. Recordamos que la medida exterior de Lebesgue se define como

$$m^*(E) = \operatorname{ínf} \left\{ \sum_{j\geq 1} \operatorname{vol}(B_j) : \{B_j\}_j \text{ cubrimiento por bolas de } A \right\}.$$

Definimos por otro lado la clase

$$\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \ \exists \mathcal{O}, \text{ abierto, tal que } \ A \subset \mathcal{O} \text{ y } \ m^*(\mathcal{O} \setminus A) < \epsilon\}.$$

Probar:

- $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$.
- $\mathcal{B}$ coincide con la σ-álgebra $\mathcal{A}$ obtenida por el teorema de Caratheodory.

SOL.: