¿½½2½TS1TS1½∆0á ¿½½2½TS1TS1½∆0é ¿½½2½TS1TS1½∆0í ¿½½2½TS1TS1½∆0ó ¿½½2½TS1TS1½∆0ú ¿½½2½TS1TS1½∆0ñ

Fundamentos de Análisis Matemático, MMA 2024-25. **ENTREGA 3**

NOMBRE: (*Para entregar el jueves, 21 de noviembre*)

1.- *Demuestra que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ y $\alpha \geqslant 0$ entonces la siguiente funciï¿½n pertenece a $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\quad \forall p \geqslant 1$:*

$$G(x) = \left(\widehat{f}(\cdot)|\cdot|^{\alpha}\right)^{\check{}}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

Indicaciones:

1. Justifica primero por quï¿½ es suficiente probarlo para $p = 1$ y $0 < \alpha < 2$.
2. Demuestra que si $0 < \alpha < 2$
$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{|y|\leqslant 1} \frac{|f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y|}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>1} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^{N+\alpha}} dy\right) dx < \infty.$$
3. Lo anterior nos dice que la siguiente funciï¿½n pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$: [1]
$$F(x) = \int_{|y|\leqslant 1} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>1} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy.$$
Prueba ahora que $\widehat{F}(\xi) = C_0\,\widehat{G}(\xi)$, para una constante $C_0 = C(N,\alpha)$ que depende solo de N y α.

SOL.:

[1]Puede ser ï¿½til observar que, al ser $\nabla f(x)\cdot y$ una funciï¿½n impar en la variable y, se tiene

$$F(x) = \int_{|y|\leqslant R} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>R} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy, \quad \forall R > 0.$$