

NOMBRE: Gonzalo Ortega Carpintero

(Para entregar el jueves, 21 de noviembre)

1.- Demuestra que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ y $\alpha \geq 0$ entonces la siguiente función pertenece a $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall p \geq 1$:

$$G(x) = \left(\widehat{f(\cdot)} \cdot |\cdot|^\alpha \right)^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) |\xi|^\alpha e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

INDICACIONES:

1. Justifica primero por qué es suficiente probarlo para $p = 1$ y $0 < \alpha < 2$.
2. Demuestra que si $0 < \alpha < 2$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{|y| \leq 1} \frac{|f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y|}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y| > 1} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^{N+\alpha}} dy \right) dx < \infty.$$

3. Lo anterior nos dice que la siguiente función pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$:⁽¹⁾

$$F(x) = \int_{|y| \leq 1} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y| > 1} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy.$$

Prueba ahora que $\widehat{F}(\xi) = C_0 \widehat{G}(\xi)$, para una constante $C_0 = C(N, \alpha)$ que depende solo de N y α .

SOL.:

Demostración.

Indicación 1:

Supongamos que $G(x) \in L^1$, entonces, por propiedades de la transformada de Fourier ([1] Proposición 6.1), se tiene que $\widehat{G}(x) \in L^\infty$, y en particular $\widehat{G}(x) \in L^1$. Por tanto, se tiene también que $\widehat{\widehat{G}}(x) \in L^\infty$. Pero por el Teorema de Inversión en \mathcal{S} ([1] Teorema 6.8), $\widehat{\widehat{G}}(x) = \widehat{G}(-x)^\vee = \left(\widehat{f(\cdot)} \cdot |\cdot|^\alpha \right)^\vee(-x) = G(-x)$, donde haciendo el cambio de variable $x \sim -x$, nos queda que $G(x) \in L^\infty$. Con esto vemos que sería suficiente con probar el ejercicio para $p = 1$.

Si fuera $\alpha = 0$, entonces $G(x) = f(x) \in L^\infty$ ya que $f \in \mathcal{S}$. Si fuera $\alpha \geq 2$, podríamos expresar $|\xi|^\alpha = |\xi|^{2n+\alpha^*} = |\xi|^{2n} |\xi|^{\alpha^*}$ con $2n \in 2\mathbb{N}$ y $\alpha^* \in [0, 2)$. Por la propiedad de la derivada de la transformada ([1] Corolario 6.4), tenemos que $\widehat{D^{2n}f}(\xi) = (2\pi i \xi)^{2n} \widehat{f}(\xi) \geq |\xi|^{2n} \widehat{f}(\xi)$. Por tanto tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) |\xi|^\alpha e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) |\xi|^{2n} |\xi|^{\alpha^*} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{D^{2n}f}(\xi) |\xi|^{\alpha^*} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Como $D^{2n}f \in \mathcal{S}$, para probar que esta última integral está en L^∞ bastaría probar nuestro problema para $\alpha \in (0, 2)$.

¹Puede ser útil observar que, al ser $\nabla f(x) \cdot y$ una función impar en la variable y , se tiene

$$F(x) = \int_{|y| \leq R} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y| > R} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy, \quad \forall R > 0.$$

Indicación 2:

Indicación 3:

Utilizando la nota ⁽¹⁾ observamos que la segunda integral tiende a cero cuando R tiende a infinito, por lo que podemos considerar únicamente la primera integral. Calculando su transformada aplicando el Teorema de Fubini, usando las propiedades de la transformada ([1] Prop. 6.1 *iv*), Prop. 6.4) y sacando factor común $\hat{f}(\xi)$, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{F}(\xi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{|y| \leq R} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy \right) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq R} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}} \left(\int_{|y| \leq R} (f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq R} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}} \left(e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) - 2\pi i |\xi| \hat{f}(\xi) \cdot y \right) dy \\ &= \hat{f}(\xi) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq R} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}} \left(e^{2\pi i y \cdot \xi} - 1 - 2\pi i |\xi| \cdot y \right) dy.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = y|\xi|$, con $dy = \frac{1}{|\xi|^N} du$ tenemos

$$\hat{F}(\xi) = \hat{f}(\xi) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq R} \frac{|\xi|^{N+\alpha}}{|u|^{N+\alpha}} (e^{2\pi i u} - 1 - 2\pi i u) \frac{1}{|\xi|^N} du = \hat{f}(\xi) |\xi|^\alpha C(N, \alpha) = \hat{G}(\xi) C_0.$$

Por tanto, como por la **Indicación 2** $F(x) \in L^1$ para $\alpha \in (0, 2)$, entonces $G(x)$ también. Con la justificación de la **Indicación 1**, esto prueba que $G(x) \in L^\infty$ como se pedía. □

Referencias

[1] Fernando Soria, *Curso de Variable Real*, Universidad Autónoma de Madrid 2019.