Fundamentos de Análisis Matemático, MMA 2024-25. **ENTREGA 3**

NOMBRE: (*Para entregar el jueves, 21 de noviembre*)

1.- *Demuestra que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ y $\alpha \geqslant 0$ entonces la siguiente función pertenece a $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall p \geqslant 1$:*

$$G(x) = \left(\widehat{f}(\cdot)|\cdot|^{\alpha}\right)^{\check{}}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

Indicaciones:

1. Justifica primero por qué es suficiente probarlo para $p = 1$ y $0 < \alpha < 2$.
2. Demuestra que si $0 < \alpha < 2$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{|y|\leqslant 1} \frac{|f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y|}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>1} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^{N+\alpha}} dy \right) dx < \infty.$$

3. Lo anterior nos dice que la siguiente función pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$: [(1)]

$$F(x) = \int_{|y|\leqslant 1} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>1} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy.$$

   Prueba ahora que $\widehat{F}(\xi) = C_0\, \widehat{G}(\xi)$, para una constante $C_0 = C(N,\alpha)$ que depende solo de N y α.

SOL.:

Demostración.

Indicación 1:

Supongamos que $G(x) \in L^1$, entonces, por propiedades de la transformada de Fourier (Soria, Proposición 6.1), se tiene que $\widehat{G}(x) \in L^{\infty}$, y en particular $\widehat{G}(x) \in L^1$. Por tanto, se tiene también que $\widehat{\widehat{G}}(x) \in L^{\infty}$. Pero por el Teorema de Inversión en $\mathscr{S}$ (Soria, Teorema 6.8), $\widehat{\widehat{G}}(x) = \widehat{G}(-x)^{\check{}} = \left(\widehat{f}(\cdot)|\cdot|^{\alpha}\right)^{\check{}}(-x) = G(-x)$, donde haciendo el cambio de variable $x \sim -x$, nos queda que $G(x) \in L^{\infty}$. Con esto vemos que sería suficiente con probar el ejercicio para $p = 1$.

Si fuera $\alpha = 0$, entonces $G(x) = f(x) \in L^{\infty}$ ya que $f \in \mathscr{S}$. Si fuera $\alpha \geqslant 2$, podríamos expresar $|\xi|^{\alpha} = |\xi|^{2n+\alpha^*} = |\xi|^{2n}|\xi|^{\alpha^*}$ con $2n \in 2\mathbb{N}$ y $\alpha^* \in [0,2)$. Por la propiedad de la derivada de la transformada (Soria, Corolario 6.4), tenemos que $\widehat{D^{2n}f}(\xi) = (2\pi i\xi)^{2n}\widehat{f}(\xi) \geqslant |\xi|^{2m}\widehat{f}(\xi)$. Por tanto tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{2n}|\xi|^{\alpha^*} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{D^{2n}f}(\xi)|\xi|^{\alpha^*} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

Como $D^{2n}f \in \mathscr{S}$, para probar que esta última integral está en L^{∞} bastaría probar nuestro problema para $\alpha \in (0,2)$.

[1]Puede ser útil observar que, al ser $\nabla f(x)\cdot y$ una función impar en la variable y, se tiene

$$F(x) = \int_{|y|\leqslant R} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>R} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy, \quad \forall R > 0.$$

Indicación 2:

Indicación 3:

$\square$