Fundamentos de Análisis Matemático, MMA 2024-25. **ENTREGA 3**

NOMBRE: Gonzalo Ortega Carpintero (*Para entregar el jueves, 21 de noviembre*)

1.- *Demuestra que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ y $\alpha \geqslant 0$ entonces la siguiente función pertenece a $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall p \geqslant 1$:*

$$G(x) = \left(\widehat{f}(\cdot)|\cdot|^{\alpha}\right)^{\check{}}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

INDICACIONES:

1. Justifica primero por qué es suficiente probarlo para $p = 1$ y $0 < \alpha < 2$.
2. Demuestra que si $0 < \alpha < 2$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{|y|\leqslant 1} \frac{|f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y|}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>1} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^{N+\alpha}} dy \right) dx < \infty.$$

3. Lo anterior nos dice que la siguiente función pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$: [1]

$$F(x) = \int_{|y|\leqslant 1} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>1} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy.$$

Prueba ahora que $\widehat{F}(\xi) = C_0\,\widehat{G}(\xi)$, para una constante $C_0 = C(N,\alpha)$ que depende solo de N y α.

SOL.:

Demostración.

Indicación 1:

Supongamos que $G(x) \in L^1$, entonces, por propiedades de la transformada de Fourier ([1] Proposición 6.1), se tiene que $\widehat{G}(x) \in L^\infty$, y en particular $\widehat{G}(x) \in L^1$. Por tanto, se tiene también que $\widehat{\widehat{G}}(x) \in L^\infty$. Pero por el Teorema de Inversión en $\mathscr{S}$ ([1] Teorema 6.8), $\widehat{\widehat{G}}(x) = \widehat{G}(-x)^{\check{}} = \left(\widehat{f}(\cdot)|\cdot|^{\alpha}\right)^{\check{}}(-x) = G(-x)$, donde haciendo el cambio de variable $x = -x$, nos queda que $G(x) \in L^\infty$. Con esto vemos que sería suficiente con probar el ejercicio para $p = 1$.

Si fuera $\alpha = 0$, entonces $G(x) = f(x) \in L^\infty$ ya que $f \in \mathscr{S}$. Si fuera $\alpha \geqslant 2$, podríamos expresar $|\xi|^\alpha = |\xi|^{2n+\alpha^*} = |\xi|^{2n}|\xi|^{\alpha^*}$ con $2n \in 2\mathbb{N}$ y $\alpha^* \in [0,2)$. Por la propiedad de la derivada de la transformada ([1] Corolario 6.4), tenemos que $\widehat{D^{2n} f}(\xi) = (2\pi i\xi)^{2n}\widehat{f}(\xi) \geqslant |\xi|^{2m}\widehat{f}(\xi)$. Por tanto tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{\alpha} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)|\xi|^{2n}|\xi|^{\alpha^*} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{D^{2n} f}(\xi)|\xi|^{\alpha^*} e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

Como $D^{2n} f \in \mathscr{S}$, para probar que esta última integral está en L^∞ bastaría probar nuestro problema para $\alpha \in (0,2)$.

---

[1] Puede ser útil observar que, al ser $\nabla f(x)\cdot y$ una función impar en la variable y, se tiene

$$F(x) = \int_{|y|\leqslant R} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x)\cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy + \int_{|y|>R} \frac{f(x+y) - f(x)}{|y|^{N+\alpha}} dy, \quad \forall R > 0.$$

Indicación 2:

Veamos que cada una de las dos integrales indicadas converge. Para la primera utilizamos el desarrollo de Taylor de $f(x+y) = f(x) + \nabla f(x) \cdot y + \frac{1}{2} H_f(x)|y|^2 + \mathcal{O}(|y|^3)$. Luego

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y|\leqslant 1} \frac{|f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y|}{|y|^{N+\alpha}} dydx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y|\leqslant 1} \frac{H_f(x)|y|^2}{|y|^{N+\alpha}} dydx < \infty$$

ya que $\alpha \in (0,2)$ y $f \in \mathscr{S}$. Para la segunda integral basta con usar la forma de los elementos de $\mathscr{S}$, así

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y|>1} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^{N+\alpha}} dydx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|y|>1} \frac{|f(x+y)| + |f(x)|}{|y|^{N+\alpha}} dydx$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2}{|x|^{2N}} \int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}|x+y|^{2N}} dydx < \infty.$$

Por tanto tenemos que si $\alpha \in (2,0)$ se tiene $F(x) \in L^1$ como queríamos comprobar.

Indicación 3:

Utilizando la nota (1) observamos que la segunda integral tiende a cero cuando R tiende a infinito, por lo que podemos considerar únicamente la primera integral. Calculando su transformada aplicando el Teorema de Fubini, usando las propiedades de la transformada ([1] Prop. 6.1 *iv)*, Prop. 6.4) y sacando factor común $\widehat{f}(\xi)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\xi) &= \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{|y|\leqslant R} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y}{|y|^{N+\alpha}} dy \right) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{|y|\leqslant R} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}} \left(\int_{|y|\leqslant R} (f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \right) dy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{|y|\leqslant R} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}} \left(e^{2\pi i x \cdot |\xi|} \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi) - 2\pi i |\xi| \widehat{f}(\xi) \cdot y \right) dy \\
&= \widehat{f}(\xi) \lim_{R\to\infty} \int_{|y|\leqslant R} \frac{1}{|y|^{N+\alpha}} \left(e^{2\pi i y \cdot |\xi|} - 1 - 2\pi i |\xi| \cdot y \right) dy.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = y|\xi|$, con $dy = \frac{1}{|\xi|^N} du$ tenemos

$$\widehat{F}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \lim_{R\to\infty} \int_{|y|\leqslant R} \frac{|\xi|^{N+\alpha}}{|u|^{N+\alpha}} \left(e^{2\pi i u} - 1 - 2\pi i u \right) \frac{1}{|\xi|^N} du = \widehat{f}(\xi) |\xi|^\alpha C(N,\alpha) = \widehat{G}(\xi) C_0.$$

Por tanto, como por la **Indicación 2** $F(x) \in L^1$ para $\alpha \in (0,2)$, entonces $G(x)$ también. Con la justificación de la **Indicación 1**, esto prueba que $G(x) \in L^\infty$ como se pedía.

□

Referencias

[1] Fernando Soria, *Curso de Variable Real*, Universidad Autónoma de Madrid 2019.