(*A entregar el 26.09.2024*)

Fundamentos de Análisis Matemático, MMA 2023-24. **Entrega 1**

Nombre y apellidos: Gonzalo Ortega Carpintero

---

1. Se dice que la función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es Hölder de orden $\alpha > 0$ si existe una constante C de forma que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Probar que si f es Hölder de orden α, con $\alpha > 1$, entonces f es constante.

2. En $\mathbb{R}^N$, si el conjunto A no es medible Lebesgue, y $s < N$, probar que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

3. Recordamos que la medida exterior de Lebesgue se define como

$$m^*(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j\geq 1} \text{vol}(B_j) : \{B_j\}_j \text{ cubrimiento por bolas de } A \right\}.$$

Definimos por otro lado la clase

$$\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R}^N : \forall \epsilon > 0, \ \exists \mathcal{O}, \text{ abierto, tal que } \ A \subset \mathcal{O} \text{ y } \ m^*(\mathcal{O} \setminus A) < \epsilon\}.$$

Probar:

- $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$.
- $\mathcal{B}$ coincide con la σ-álgebra $\mathcal{A}$ obtenida por el teorema de Caratheodory.

SOL.:

1.

Demostración. Dados $x, y \in \mathbb{R}^N$ cualesquiera consideramos el segmento $[xy] \subset \mathbb{R}^N$. Podemos dividir dicho segmento en n subsegmentos de la forma $[x_{i-1}x_i]$ con $i \in [1, n]$ y $x_0 = x$, $x_n = y$, que cumplan

$$|x_i - x_{i-1}| = \frac{|x - y|}{n}.$$

Para cada subsegmento se tiene que verificar la propiedad de ser Hölder, luego

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |(f(x_i) - f(x_{i-1}))| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} C|x_i - x_{i-1}|^\alpha = nC\frac{|x - y|^\alpha}{n^\alpha} = C\frac{|x - y|^\alpha}{n^{\alpha-1}} \underset{\substack{n\to\infty \\ \alpha>1}}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Por tanto $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, f(x) = f(y)$, teniendo que ser f una función constante. $\square$

2.

Demostración. Supongamos que la medida de Hausdorff es finita $\mathcal{H}^s < \infty$, $s < N$. Si desarrollamos ahora tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^N(A) &= \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_j (\operatorname{diam} E_j)^N : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ \operatorname{diam} E_j \leq \delta,\ \forall j \right\} \\
&= \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_j (\operatorname{diam} E_j)^{s+\epsilon} : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ \operatorname{diam} E_j \leq \delta,\ \forall j\ \epsilon > 0 \right\} \\
&\leq \lim_{\delta \to 0^+} C\delta^\epsilon * \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_j (\operatorname{diam} E_j)^{s} : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ \operatorname{diam} E_j \leq \delta,\ \forall j \right\} \\
&= \lim_{\delta \to 0^+} C\delta^\epsilon * \mathcal{H}^s(A) = 0
\end{aligned}$$

para alguna constante C. Pero sabemos de clase que $\mathcal{H}^N(A) = C_n m^*(A)$ con $C_n \in \mathbb{R}^N$ constante y $m^*(A)$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Por tanto se tendría $m^*(A) = 0$ y A sería medible Lebesgue, entrando en contradicción. Por tanto, tiene que ser $\mathcal{H}^s = \infty$. □

3.

Demostración. Para probar que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra, basta comprobar que coincide con la σ-álgebra $\mathcal{A}$ obtenida por el teorema de Caratheodory.

Para ello, empezamos tomando $A \in \mathcal{A}$, por lo que $\forall E \in \mathbb{R}^N, m^*(E \cap A) + m^*(E \cup A^c)$. Definimos $\mathcal{O}_\epsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : d(x, A) < \epsilon \right\}$, conjunto abierto que satisface $A \subset \mathcal{O}_\epsilon$. Se tiene entonces que

$$m^*(\mathcal{O}_\epsilon) = m^*(\mathcal{O}_\epsilon \cap A) + m^*(\mathcal{O}_\epsilon \cup A^c) = m^*(A) + m^*(\mathcal{O}_\epsilon \setminus A).$$

Despejando obtenemos $m^*(\mathcal{O}_\epsilon \setminus A) = m^*(\mathcal{O}_\epsilon) - m^*(A) \underset{\epsilon \to 0}{=} 0$. Luego $A \in \mathcal{B}$.

Tomando ahora $B \in \mathcal{B}$, se tiene entonces que $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathcal{O},$ abierto, tal que $B \subset \mathcal{O}$ y $m^*(\mathcal{O} \setminus B) < \epsilon$, y tomando un conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ cualquiera y usando que la medida de Lebesgue es una medida exterior tenemos

$$\begin{aligned}
m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c) &= m^*(E \cap B) + m^*((E \cap \mathcal{O}^c) \cup (E \cap (\mathcal{O} \setminus B)) \\
&\leq m^*(E \cap \mathcal{O}) + m^*(E \cap \mathcal{O}^c) + m^*(E \cap (\mathcal{O} \setminus B)) \\
&\leq m^*(E \cap \mathcal{O}) + m^*(E \cap \mathcal{O}^c) + \epsilon \leq m^*(E) + \epsilon,
\end{aligned}$$

puesto que al ser $\mathcal{O}$ abierto, $m^*(E \cap \mathcal{O}) + m^*(E \cap \mathcal{O}^c) = m^*((E \cap \mathcal{O}) \cup (E \cap \mathcal{O}^c))$. Como ϵ puede ser tan pequeño como se quiera se tiene entonces la condición suficiente para que ser medible Lebesgue $m^*(E) = m^*(E \cap B) + m^*(E \cap B^c)$, y por tanto $B \in \mathcal{A}$.

□