Universidad Autónoma de Madrid

Curso Avanzado de Análisis

Convexidad y Desigualdades en Espacios Normados

2024-2025.

Autor:
Gonzalo Ortega Carpintero

Mayo 2025

Resumen

Palabras clave

Índice

1. Espacios convexos

La principal herramienta para trabajar en espacios métricos, y en particular en los espacios normados [1], es la desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Definition 1.1 (Conjunto convexo)**.** Un conjunto $C \subseteq X$ es **convexo** si para todo par de puntos $x, y \in C$, $t \in [0, 1]$, se tiene $tx + (1 - t)y \in C$.

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, por conveniencia a veces denotado simplemente X, definimos la bola cerrada y la esfera unidad en X, $B(X)$ y $S(X)$ respectivamente como

$$B(X) \coloneqq \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\},$$
$$S(X) \coloneqq \{x \in X \colon \|x\| = 1\}.$$

Definition 1.2 (Espacio estrictamente convexo)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **estrictamente convexo** si para todo par de puntos x e y en la esfera unidad $S(X)$ tales que el punto medio del segmento que los une esta también en la esfera unidad, i.e. $\|\frac{x+y}{2}\|$, se tiene $x = y$.

Definition 1.3 (Espacio uniformemente convexo)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **uniformemente convexo** si para todo $\varepsilon \in (0, 2]$, existe un $\delta \in (0, 1)$ tal que para todo par $x, y \in B(X)$ con $\|x - y\| < \varepsilon$ se tiene $\|\frac{x+y}{2}\| < \delta$.

Proposición 1.4. *Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio dotado de un producto escalar con norma $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Entonces el espacio $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio uniformemente, y por tanto también estrictamente, convexo.*

Example 1.5 (Norma estrictamente convexa, pero no uniformemente convexa)**.** Consideremos la norma en el espacio de sucesiones convergentes ℓ^1 dada por la suma de las normas ℓ^1 y ℓ^2, es decir, dada una sucesión $x \in \ell^1$,

$$\|x\| \coloneqq \|x\|_{\ell^1} + \|x\|_{\ell^2}.$$

Gracias a la Proposición 1.4 sabemos que para todo $x \neq y \in S(\ell^2)$,

$$\|x + y\|_{\ell^2} < \|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}.$$

Por tanto, haciendo también uso de la desigualdad triangular estándar en ℓ^1 tenemos

$$\|x + y\| = \|x + y\|_{\ell^1} + \|x + y\|_{\ell^2} < (\|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1}) + (\|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}) = \|x\| + \|y\| = 2.$$

Por tanto, ℓ_1 es estrictamente convexo. Sin embargo, definamos ahora las sucesiones

$$x_{N,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq N, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad y_{N,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } N < k \leq 2N, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por un lado tenemos que $\|x\| = \|y\| = N + \sqrt{N}$ y que $\|x_N - y_N\| = 2N + \sqrt{2N}$, ya que

$$x_{N,k} - y_N = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq N, \\ -1 & \text{si } N < k \leq 2N, \\ 0 & \text{si } k \geq 2N. \end{cases}$$

Pero tenemos también que

$$\left\| \frac{x_N + y_N}{2} \right\| = \frac{2N}{2} + \frac{\sqrt{2N}}{2}.$$

Dividiendo entre $N + \sqrt{N}$ podemos hacer $\left\| \frac{x_N + y_N}{2(N+\sqrt{N})} \right\|$ tan cercano como queramos a 1, mientras que siempre tendremos $\left\| \frac{x_N + y_N}{(N+\sqrt{N})} \right\| \geq \sqrt{2}$. Por tanto, $(\ell^1, \|\cdot\|)$ no es uniformemente convexo.

2. Desigualdades de Clarkson

Los espacios de funciones L^p no son por lo general espacios de Hilbert ya que, salvo para $p = 2$, no cumplen la regla del paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

En 1936, el matemático americano James A. Clarkson generalizó la regla del paralelogramo para hacerla válida para todo $p \geq 1$ en forma de dos nuevas desigualdades, una para $p \geq 2$ y otra para $1 \leq p \leq 2$, [2]. Si bien esto no permite definir un producto escalar sobre cualquier L^p, si que permite comprobar que, como veremos, L^p es uniformemente convexo para $p \geq 1$.

Teorema 2.1 (Primera desigualdad de Clarkson)**.** *Para $p \geq 2$, dadas $f, g \in L^p$, se verifica la desigualdad*

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right). \tag{1}$$

Teorema 2.2 (Segunda desigualdad de Clarkson)**.** *Sea $1 < p < 2$, y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Para $f, g \in L^p$ se tiene*

$$\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{2}$$

Para desarrollar la demostración de ambas desigualdades hemos seguido la estructura de [4]. Empecemos probando un par de lemas auxiliares.

Lema 2.3. *Sea $x \in [0, 1]$ y $p \geq 2$. Se verifica la desigualdad*

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(1 + x^p).$$

Demostración. Definiendo la función

$$F(x) := \left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \frac{1}{2}(1 + x^p),$$

sería suficiente probar que $F(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Para $x = 0$, como $p \geq 2$, se tiene

$$F(0) = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Para $0 < x \leq 1$ definimos

$$\Phi(x) := \frac{2^p}{x^p}F(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^p + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^p - 2^{p-1}\left(\frac{1}{x^p} + 1\right).$$

Para $x = 1$, $\phi(1) = 0$, luego veamos que ϕ es creciente en el intervalo $(0, 1)$. La derivada de ϕ es

$$\Phi'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}\left((1 + x)^{p-1} + (1 - x)^{p-1} - 2^{p-1}\right).$$

Definiendo ahora la función $\Psi(x)$ como la parte entre paréntesis de Phi, y calculando su derivada tenemos

$$\Psi(x) := \left((1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right),$$
$$\Psi'(x) = (p-1)(1+x)^{p-2} - (p-1)(1-x)^{p-2}.$$

Luego $\Psi'(x) \geq 0$ para $x \in (0,1)$. Como $\Psi(1) = 0$, por el teorema del valor medio $\Psi(x) \leq 0$ para $x \in (0,1)$. Por tanto $\Phi'(x) \geq 0$ para $x \in (0,1)$ y como $\Phi(1) = 0$, $\Phi(x)$ es no positiva para $x \in (0,1)$. Esto implica finalmente que $F(x) \leq 0$ para todo $x \in (0,1)$. ■

Lema 2.4. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ dos números complejos, donde si $z = a + bi$, denotamos su módulo complejo como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dado $p \geq 2$ se verifica la desigualdad*

$$\left|\frac{1}{2}(z+w)\right|^p + \left|\frac{1}{2}(z-w)\right|^p \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p.$$

Demostración. Para el caso $w = 0$ es inmediato que se verifica la desigualdad ya que se tendría

$$\left|\frac{z}{2}\right|^p + \left|\frac{z}{2}\right|^p = 2\left|\frac{z}{2}\right|^p = \frac{2}{2^p}\left|z\right|^p = \frac{1}{2^{p-1}}\left|z\right|^p \leq \frac{1}{2}\left|z\right|^p.$$

Por tanto, y gracias a la simetría de los dos sumandos del lado derecho, podemos asumir sin pérdida de generalidad $|z| \geq |w| > 0$. Es decir, la desigualdad que queremos probar equivale, al dividir a ambos lados entre $|z|^p$, a

$$\left|\frac{1}{2}(1+\frac{w}{z})\right|^p + \left|\frac{1}{2}(1-\frac{w}{z})\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1 + \left|\frac{w}{z}\right|^p\right).$$

Por tanto, tomando exponenciales, para $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tenemos

$$\left|\frac{1 + r\exp(i\theta)}{2}\right|^p + \left|\frac{1 - r\exp(i\theta)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 + r\exp(i\theta)^p}{2}\right).$$

Para $\theta = 0$ la desigualdad se reduce a la probada en el Lema 2.3. Veamos por tanto que dado un r fijo, se tiene un máximo en $\theta = 0$. Por la simetría del lado derecho de nuevo, podemos asumir que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Queremos por tanto probar que la función g definida por

$$g(\theta) = |1 + re^{i\theta}|^p + |1 - re^{i\theta}|^p$$

tiene un máximo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ en el punto $\theta = 0$. Desarrollando la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, y los módulos complejos tenemos

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left|\sqrt{(1 + r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}\right|^p + \left|\sqrt{(1 - r\cos(\theta))^2 + (-r\sin(\theta))^2}\right|^p \\ &= (1 + r^2 + 2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}} + (1 + r^2 - 2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Tomamos ahora la derivada g' de g respecto a θ y observamos

$$\begin{aligned} g'(\theta) =& \frac{p}{2}(1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(-2r\sin(\theta)) + \frac{p}{2}(1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(2r\sin(\theta)) \\ =& -pr\sin(\theta)\left((1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1} - (1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}\right). \end{aligned}$$

Como $p \geq 2$ entonces $g'(\theta) \leq 0$. Es decir, la derivada de g no es creciente en todo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y por tanto tiene un máximo en $\theta = 0$. ■

Teorema 2.5 (Primera desigualdad de Clarkson)**.** *Para $p \geq 2$, dadas $f, g \in L^p$, se verifica la desigualdad*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right). \tag{3}$$

Demostración. Podemos asumir que f y g toman valores complejos y que están definidas en casi todo punto. Por tanto, para todo $x \in X$, tal que $f(x)$ y $g(x)$ estén definidas, por el Lemma 2.4 tenemos

$$|z+w|^p + |z-w|^p \leq 2^{p-1}\left(|z|^p + |w|^p\right).$$

Basta con integrar a ambos lados respecto a X para la desigualdad (3). ■

Lema 2.6. *Sean $x \in [0,1]$, $1 < p \leq 2$ y $q = \frac{p}{p-1}$. Se verifica la desigualdad*

$$(1+x)^q + (1-x)^q \leq 2(1+x^p)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4}$$

Demostración. Si $p = 2$, entonces $q = 2$ y basta desarrollar los cuadrados para comprobar que la desigualdad es cierta. Podemos limitarnos por tanto al caso $1 < p < 2$. Para $x = 0$ y para $x = 1$, (4) se convierte en una igualdad. Podemos, por tanto, considerar solo $x \in (0,1)$. Definiendo la función $F(u) = \frac{1-u}{1+u}$, tenemos que cuando u va de 0 a 1, $F(u)$ decrece estrictamente de 1 a 0. Por tanto, (4) equivale a

$$\left(1+\frac{1-u}{1+u}\right)^q + \left(1-\frac{1-u}{1+u}\right)^q \leq 2\left(1+\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

para $0 < u < 1$. Multiplicando ambos lados por $(1+u)^q$, obtenemos

$$2^q(1+u^q) \leq 2\left((1+u)^p + (1-u)^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Elevando ahora ambos lados a $(p-1)$, obtenemos

$$(1+u^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2}\left((1+u)^p + (1-u)^p\right),$$

para $0 < u < 1$. Como estos pasos son fácilmente reversibles, es suficiente probar esta última desigualdad. Expandiendo en series de potencias, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left((1+u)^p+(1-u)^p\right)-(1+u^q)^{p-1}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}u^k+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^k\,u^k\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}u^{q\,k}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{p}{2\,k}u^{2\,k}-\binom{p-1}{k}u^{q\,k}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{p}{2\,k}u^{2\,k}-\binom{p-1}{2\,k-1}u^{q\,(2\,k-1)}-\binom{p-1}{2\,k}u^{q\,2\,k}\right).
\end{aligned}$$

Se puede probar que esta última serie converge absoluta y uniformemente para $u \in [0, 1]$. La prueba de ello, sin embargo, conlleva lo que en [4] denomina análisis *duro*. Las cuentas no conllevan demasiada complejidad, pero debido a su extensión, vamos a omitirlas en este trabajo. La prueba detallada se puede consultar en [4][Teorema 7.25].

Demostraremos que cada término $[\cdots]$ en esta serie es no negativo. Claramente, esto probará (3). El k-ésimo término es

$$\begin{aligned}
&\frac{p\,(p-1)\,(p-2)\cdots(p-(2\,k-1))}{(2\,k)!}\,u^{2\,k}\\
&\qquad-\frac{(p-1)\,(p-2)\cdots(p-(2\,k-1))}{(2\,k-1)!}\,u^{q\,(2\,k-1)}\\
&\qquad-\frac{(p-1)\,(p-2)\cdots(p-2\,k)}{(2\,k)!}\,u^{q\,2\,k}\\
&=\frac{p\,(p-1)\,(2-p)\cdots(2\,k-1-p)}{(2\,k)!}\,u^{2\,k}\\
&\qquad-\frac{(p-1)\,(2-p)\,(3-p)\cdots(2\,k-1-p)}{(2\,k-1)!}\,u^{q\,(2\,k-1)}\\
&\qquad+\frac{(p-1)\,(2-p)\cdots(2\,k-p)}{(2\,k)!}\,u^{q\,2\,k}\\
&=u^{2\,k}\,\frac{(2-p)\,(3-p)\cdots(2\,k-p)}{(2\,k-1)!}\\
&\qquad\times\left(\frac{p\,(p-1)}{(2\,k)\,(2\,k-p)}-\frac{(p-1)}{(2\,k-p)}u^{q\,(2\,k-1)-2\,k}+\frac{(p-1)}{(2\,k)}u^{q\,2\,k-2\,k}\right).
\end{aligned}$$

El primer factor aquí es obviamente positivo. Reescribimos la expresión entre corchetes como

$$\left[\frac{1}{\frac{2\,k-p}{p-1}}-\frac{1}{\frac{2\,k}{p-1}}-\frac{1}{\frac{2\,k-p}{p-1}}u^{\frac{2\,k-p}{p-1}}+\frac{1}{\frac{2\,k}{p-1}}u^{\frac{2\,k}{p-1}}\right]=\left[\frac{1-u^{\frac{2\,k-p}{p-1}}}{\frac{2\,k-p}{p-1}}-\frac{1-u^{\frac{2\,k}{p-1}}}{\frac{2\,k}{p-1}}\right].$$

Un argumento elemental [que el lector deberá realizar] muestra que para cualquier $u > 0$ la función con valores $\frac{1-u^t}{t}$, $0 < t < \infty$, es decreciente como función de t. Como $\frac{2k-p}{p-1} < \frac{2k}{p-1}$, se sigue que (5) es positivo. ■

Lema 2.7. *Dados dos números complejos $z, w \in \mathbb{C}$, si $1 < p \leq 2$ tenemos*

$$|z+w|^q + |z-w|^q \leq 2(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{5}$$

Demostración. Cuando o bien $z = 0$, o bien $w = 0$ basta sustituir para verificar la desigualdad y al igual que en el Lema 2.4 podemos suponer sin pérdida de generalidad $0 < |z| \leq |w|$. Así, dividiendo ambos lados entre $|w|^q$ obtenemos

$$\left|\frac{z}{w} + 1\right|^q + \left|\frac{z}{w} - 1\right|^q \leq 2\left(\left|\frac{z}{w}\right|^p + 1\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Tomando exponenciales con $\frac{z}{w} = re^{i\theta}$ para $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tenemos

$$\left|re^{i\theta} + 1\right|^q + \left|re^{i\theta} - 1\right|^q \leq 2\left(r^p + 1\right)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{6}$$

De forma análoga al procedimiento realizado en la demostración del Lema 2.4, basta notar que para $\theta = 0$ esta última desigualdad es la probada en el Lema 2.6. Y de igual forma, vemos que el lado izquierdo de la desigualdad (6) tiene un máximo en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en el punto $\theta = 0$. Esto prueba entonces (6) se verifica para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ probando así la desigualdad (5). ■

Teorema 2.8 (Segunda desigualdad de Clarkson)**.** *Sea $1 < p < 2$, y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Para $f, g \in L^p$ se tiene*

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{7}$$

Demostración. Por la desigualdad Minkowski para $0 < p < 1$, tenemos

$$\||f+g|^q\|_{p-1} + \||f-g|^q\|_{p-1} \leq \||f+g|^q + |f-g|^q\|_{p-1}. \tag{8}$$

La parte izquierda de (8) es igual que la parte izquierda de (7) ya que para todo $h \in L^p(X, \mu)$ se tiene

$$\||h|^q\|_{p-1} = \left(\int_X ||h|^q|^{p-1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \|h\|_p^q,$$

ya que $q(p-1) = p$ y $\frac{1}{p-1} = \frac{q}{p}$. Desarrollando la norma, la parte derecha verifica

$$\||f+g|^q + |f-g|^q\|_{p-1} = \left(\int_X (|f+g|^q + |f-g|^q)^{p-1}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

la cual, usando el Lema 2.7, es menor o igual que

$$\left(\int_X 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

■

Corolario 2.9. *Para $p > 1$, el espacio L_p es uniformemente convexo.*

Demostración. Sean $f, g \in L^p$ con $\|f\| = \|g\| = 1$. Para $p \geq 2$, haciendo uso de (3) tenemos

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(1+1) = 2^p.$$

Ahora, si se tiene $\|f-g\| < \varepsilon \in (0, 2]$, dividiendo entre 2^p a ambos lados y despejando adecuadamente se sigue

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq \left(1 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} =: \delta,$$

donde $\delta \in (0,1)$ y se verifica la convexidad uniforme para $p \geq 2$. Para $1 < p \leq 2$ usamos la desigualdad (7) para obtener

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Análogamente al procedimiento anterior, ahora con $\delta := \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$ vemos que se verifica la convexidad uniforme también para $1 < p \leq 2$. ■

3. Desigualdades de Hanner

En 1955, el matemático sueco Olof Hanner simplificó la prueba de la convexidad uniforme dada por Clarkson años antes [3]. Para ello, introdujo dos nuevas desigualdades que también generalizan la regla del paralelogramo.

Teorema 3.1 (Desigualdades de Hanner)**.** *Sean f y g dos funciones en L^p. Para $p \geq 2$, se verifica*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \,. \tag{9}$$

Para $1 < p \leq 2$, la desigualdad se invierte.

Antes de nada, notar que para $p = 2$, el lado de la derecha de (9) es

$$\begin{aligned}(\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 + |\|f\|_2 - \|g\|_2|^2 &= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\|f\|_2\|g\|_2 \\ &= 2\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right),\end{aligned}$$

luego efectivamente se convierte en la ley del paralelogramo, la cual se verifica para $p = 2$.

Referencias

[1] Babb, R. L. A. Exploring convexity in normed spaces. *American Mathematical Monthly* (2014).

[2] Clarkson, J. A. Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society* (1936).

[3] Hanner, O. On the uniform convexity of l^p and ℓ^p. *Arkiv for Matematik* (1955).

[4] Hewitt, E., and Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, 1965.