Universidad Autónoma de Madrid

Curso Avanzado de Análisis

Convexidad y Desigualdades en Espacios Normados

2024-2025.

Autor:
Gonzalo Ortega Carpintero

Mayo 2025

Resumen

A lo largo de este trabajo se da una breve introducción a los espacios convexos relacionándolos con la desigualdad triangular de los espacios normados. Se define la desigualdad uniforme definida por primera vez en 1936 por James A. Clarkson [2]. Así pues, se introducen las desigualdades de Clarkson y de Hanner, sustitutos débiles de la identidad del paralelogramo que son validos en L^p para todo $p \in (1, \infty)$, en lugar de únicamente para $p = 2$. Siguiendo los pasos de Clarkson, usamos sus desigualdades para probar la convexidad uniforme de dichos espacios L^p. Finalmente, concluimos comparando ambas desigualdades para observar como las desigualdades de Hanner dan una mejor acotación que las de Clarkson.

Palabras clave

Convexidad, convexidad uniforme,

desigualdades de Clarkson, desigualdades de Hanner.

Índice

1. Espacios convexos

La principal herramienta para trabajar en espacios métricos, y en particular en los espacios normados [1], es la desigualdad triangular

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Definition 1.1 (Conjunto convexo)**.** Un conjunto $C \subseteq X$ es **convexo** si para todo par de puntos $x, y \in C$, $t \in [0,1]$, se tiene $tx + (1-t)y \in C$.

Toda norma que definamos, ha de cumplir la desigualdad triangular, y una buena caracterización de esta es dada mediante sus relación con los conjuntos convexos. Esto es, un conjunto convexo es el que contiene todos los segments entre dos puntos del conjunto cualquiera. Por tanto, un conjunto es convexo si y solo si la bula unidad dada por la norma que estemos utilizando es convexa.

Proposición 1.2. *Sea $p\colon X \to [0,\infty)$ una función con la propiedad de que para todo $x \in X$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. Dicha función satisface la desigualdad triangular si y solo si la bola $B_p \coloneqq \{x \in X : p(x) \leq 1\}$ es compacto.*

Demostración. Si p satisface la desigualdad triangular, dados $x, y \in B_p$, $p(x) \leq 1$ y $p(y) \leq 1$, y tenemos que para todo $t \in [0,1]$,

$$p(tx + (1-t)y) \leq p(tx) + p((1-t)y) = tp(x) + (1-t)p(y) \leq t + (1-t) = 1.$$

Por tanto, $tx + (1-t)y \in B_p$ y B_p es convexa.

Supongamos ahora que B_p es convexa. Para todo $x, y \in X$ con $p(x), p(y) \neq 0$, definimos $t \in (0,1)$ como

$$t \coloneqq \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}, \text{ donde } 1 - t = \frac{p(y)}{p(x)+p(y)}.$$

Tenemos que $\frac{x}{p(x)}$ y $\frac{x}{p(x)}$ están contenidos en B_p ya que, tomando el primer caso como ejemplo,

$$p(\frac{x}{p(x)}) = \frac{p(x)}{p(x)} = 1.$$

Ahora bien, como B_p es convexa,

$$1 \geq p\left(t\frac{x}{p(x)} + (1-t)\frac{y}{p(y)}\right) = p\left(\frac{x}{p(x)+p(y)} + \frac{y}{p(x)+p(y)}\right).$$

Por tanto, despejando tenemos

$$p(x) + p(y) \geq p(x+y).$$

■

Vista la importancia de las bolas mediante esta caracterización, vamos a fijar notación que usaremos a lo largo del trabajo. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, por conveniencia a veces denotado simplemente X, definimos la **bola cerrada** y la **esfera unidad** en X, $B(X)$ y $S(X)$ respectivamente como

$$B(X) \coloneqq \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\},$$
$$S(X) \coloneqq \{x \in X \colon \|x\| = 1\}.$$

Vamos a fijar también la notación que para las normas L^p que serán recurrentes a lo largo del trabajo. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ (o$\mathbb{C}$) una función medible. Para $1 \leq p < \infty$, la **norma** L^p de f se define como:

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, la **norma** L^∞ se define como:

$$\|f\|_\infty \coloneqq \text{ínf}\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ para casi todo } x \in X\}.$$

El espacio $L^p(X, \mu)$ se define como el conjunto de funciones f medibles tales que $\|f\|_p < \infty$.

Para ciertos espacios (el Euclídeo por poner un ejemplo) siempre que dos puntos en la esfera unidad no sean el mismo, se tiene que la desigualdad triangular que relaciona sus normas es estricta.

Definition 1.3 (Espacio estrictamente convexo)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **estrictamente convexo** si para todo par de puntos x e y en la esfera unidad $S(X)$ tales que el punto medio del segmento que los une esta también en la esfera unidad, i.e. $\|\frac{x+y}{2}\|$, se tiene $x = y$.

Proposición 1.4. *Para cualquier $\varepsilon \in (0, 2]$, existe un $\delta \in (0, 1)$ tal que, para todo x, y en el círculo unitario con $\|x - y\|_2 > \varepsilon$, se tiene que*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 < \delta.$$

Demostración. Recordemos la generalización del teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos dada por la Ley de los Cosenos. Esta nos dice que, si a, b, c son los lados de un triangulo, y γ es el ángulo opuesto al lado c, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Tomemos ahora los triángulos $\triangle Oxy$ y $\triangle Oxz$ de vertices el origen O, x e y o z respectivamente. Sea α el ángulo asociado al vértice x. Aplicando la Ley de los Cosenos a estos triángulos tenemos que

$$\cos(\alpha) = \frac{\|x\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 - \|y\|_2^2}{2\|x\|_2\|x - y\|_2} = \frac{\|x\|_2^2 + \|x - z\|_2^2 - \|z\|_2^2}{2\|x\|_2\|x - z\|_2},$$

lo cual, observando que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ y que $x - z = \frac{x-y}{2}$, nos da

$$\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2 = 1 + \frac{1}{4}\|x-y\|_2^2 - \|z\|_2^2.$$

Por lo tanto, si $\|x-y\|_2 > \varepsilon$, entonces $\|z\|_2 < \delta$, siempre que

$$\delta > \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}.$$

■

Tomando puntos no solo en la esfera, sino en toda la bola, podemos generalizar la proposición 1.4, introduciendo así los espacios uniformemente convexos.

Definition 1.5 (Espacio uniformemente convexo)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **uniformemente convexo** si para todo $\varepsilon \in (0,2]$, existe un $\delta \in (0,1)$ tal que para todo par $x, y \in B(X)$ con $\|x-y\| < \varepsilon$ se tiene $\|\frac{x+y}{2}\| < \delta$.

La Proposición 1.4 afirma que $\mathbb{R}^2$ con la norma Euclídea es uniformemente convexo. El argumento se generaliza para $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ o para $\mathbb{R}$ de forma trivial. Por tanto, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.6. *Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo.*

Veamos ahora que todo espacio dotado de un producto escalar, verificando la regla del paralelogramo, es uniformemente, y por tanto también estrictamente, convexo. En particular, el espacio L^2, será uniformemente convexo.

Proposición 1.7. *Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio dotado de un producto escalar con norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Entonces el espacio $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio uniformemente convexo.*

Demostración. La identidad del paralelogramo para normas inducidas por un producto escalar afirma

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Sea $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$. Definimos $z = \frac{x+y}{2}$. Entonces

$$\|z\|^2 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|x+y\|^2.$$

Aplicando la identidad del paralelogramo tenemos

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2 = 4 - \|x-y\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|z\|^2 = \frac{1}{4}(4 - \|x-y\|^2) = 1 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Como $x \neq y$, tenemos que $\|x - y\| > 0$, lo cual implica

$$\|z\| < 1.$$

■

Para ver que la implicación del Corolario 1.6 no funciona en sentido contrario, el siguiente ejemplo presenta una norma estrictamente convexa, pero no uniformemente convexa, construyéndose a partir de una combinación de normas en espacios de sucesiones.

Example 1.8 (Ejemplo 7, [1])**.** Consideremos la norma en el espacio de sucesiones convergentes ℓ^1 dada por la suma de las normas ℓ^1 y ℓ^2, es decir, dada una sucesión $x \in \ell^1$,

$$\|x\| := \|x\|_{\ell^1} + \|x\|_{\ell^2}.$$

Gracias a la Proposición 1.7 sabemos que para todo $x \neq y \in S(\ell^2)$,

$$\|x + y\|_{\ell^2} < \|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}.$$

Por tanto, haciendo también uso de la desigualdad triangular estándar en ℓ^1 tenemos

$$\|x + y\| = \|x + y\|_{\ell^1} + \|x + y\|_{\ell^2} < (\|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1}) + (\|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}) = \|x\| + \|y\| = 2.$$

Por tanto, ℓ_1 es estrictamente convexo. Sin embargo, definamos ahora las sucesiones

$$x_{N,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq N, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad y_{N,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } N < k \leq 2N, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por un lado tenemos que $\|x\| = \|y\| = N + \sqrt{N}$ y que $\|x_N - y_N\| = 2N + \sqrt{2N}$, ya que

$$x_{N,k} - y_N = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq N, \\ -1 & \text{si } N < k \leq 2N, \\ 0 & \text{si } k \geq 2N. \end{cases}$$

Pero tenemos también que

$$\left\| \frac{x_N + y_N}{2} \right\| = \frac{2N}{2} + \frac{\sqrt{2N}}{2}.$$

Dividiendo entre $N + \sqrt{N}$ podemos hacer $\left\| \frac{x_N + y_N}{2(N+\sqrt{N})} \right\|$ tan cercano como queramos a 1, mientras que siempre tendremos $\left\| \frac{x_N - y_N}{(N+\sqrt{N})} \right\| \geq \sqrt{2}$. Por tanto, $(\ell^1, \| \cdot \|)$ no es uniformemente convexo.

2. Desigualdades para el estudio de la convexidad

Los espacios de funciones L^p no son por lo general espacios de Hilbert ya que, salvo para $p = 2$, no cumplen la regla del paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

A lo largo de esta sección vamos a introducir las desigualdades de Clarkson y las desigualdades de Hanner, las cuales fueron en introducidas para probar la convexidad uniforme en la mayoría de espacios L^p. Veamos con un par de ejemplos porque para los casos L^1 y L^∞, no se verifica la convexidad uniformemente

Example 2.1. Consideremos el espacio $L^1([0,1],\lambda)$ y definamos, para $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n = \chi_{[0,1/n]}, \quad g_n = \chi_{[1-1/n,1]}.$$

Entonces:

$$\|f_n\|_1 = \|g_n\|_1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

Definiendo funciones normalizadas,

$$\tilde{f}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_1} = n\chi_{[0,1/n]}, \quad \tilde{g}_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_1} = n\chi_{[1-1/n,1]}.$$

Así

$$\|\tilde{f}_n\|_1 = \|\tilde{g}_n\|_1 = 1, \quad \|\tilde{f}_n - \tilde{g}_n\|_1 = 2,$$

pero,

$$\left\|\frac{\tilde{f}_n + \tilde{g}_n}{2}\right\|_1 = \frac{1}{2}(\|\tilde{f}_n\|_1 + \|\tilde{g}_n\|_1) = 1.$$

Esto muestra que, aunque $\|\tilde{f}_n - \tilde{g}_n\|_1 = 2$, el promedio $\left\|\frac{\tilde{f}_n+\tilde{g}_n}{2}\right\|_1$ no disminuye, contradiciendo la definición de convexidad uniforme. Por lo tanto, L^1 no es uniformemente convexo.

Example 2.2. Consideremos el espacio $L^\infty([0,1],\lambda)$ y definamos:

$$f_n = \chi_{[0,1/2]}, \quad g_n = \chi_{[1/2+1/n,1]}.$$

Entonces:

$$\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n - g_n\|_\infty = 1.$$

Sin embargo:

$$\left\|\frac{f_n + g_n}{2}\right\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Dado que esta cota no mejora al aumentar n, no es posible encontrar un $\delta(\epsilon)$ que garantice la disminución necesaria para todo ϵ. Esto contradice la definición de convexidad uniforme. Por lo tanto, L^∞ tampoco es uniformemente convexo.

2.1. Desigualdades de Clarkson

En 1936, el matemático americano James A. Clarkson generalizó la regla del paralelogramo para hacerla válida para todo $1 < p < \infty$ en forma de dos nuevas desigualdades, una para $2 \geq p < \infty$ y otra para $1 < p \leq 2$, [2]. Si bien esto no permite definir un producto escalar sobre cualquier L^p, si que permite comprobar que, como veremos, L^p es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.3 (Primera desigualdad de Clarkson)**.** *Para $p \geq 2$, dadas $f, g \in L^p$, se verifica la desigualdad*

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leq 2^{p-1} \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right). \tag{1}$$

Teorema 2.4 (Segunda desigualdad de Clarkson)**.** *Sea $1 < p < 2$, y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Para $f, g \in L^p$ se tiene*

$$\|f + g\|_p^q + \|f - g\|_p^q \leq 2 \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{2}$$

En su artículo original, [2], Clarkson prueba además que estas desigualdades se invierte cuando se cambia del caso $2 \geq p < \infty$ al caso $1 < p < \infty$. Comprueba, además, que los resultados no son válidos solo para los espacios de funciones L^p, sino también para los espacios de sucesiones ℓ^p, construyendo su prueba a partir de estos. Por motivos de brevedad y simplicidad, en este trabajo nos vamos a limitar a demostrar los dos teoremas que hemos enunciado, que son suficientes para probar que L^p es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$.

Para desarrollar la demostración de ambas desigualdades hemos seguido la estructura de [4], que a su vez sigue de cerca, matizando algunos detalles, la demostración de Clarkson. El Teorema 2.7 puede demostrarse de forma sencilla con técnicas básicas de Cálculo. Empecemos probando un par de lemas auxiliares para la demostración del .

Lema 2.5 (Lema 15.3, [4])**.** *Sea $x \in [0, 1]$ y $p \geq 2$. Se verifica la desigualdad*

$$\left(\frac{1 + x}{2} \right)^p + \left(\frac{1 - x}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2}(1 + x^p).$$

Demostración. Definiendo la función

$$F(x) := \left(\frac{1 + x}{2} \right)^p + \left(\frac{1 - x}{2} \right)^p - \frac{1}{2}(1 + x^p),$$

sería suficiente probar que $F(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Para $x = 0$, como $p \geq 2$, se tiene

$$F(0) = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Para $0 < x \leq 1$ definimos

$$\Phi(x) := \frac{2^p}{x^p} F(x) = \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^p + \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^p - 2^{p-1} \left(\frac{1}{x^p} + 1 \right).$$

Para $x = 1$, $\phi(1) = 0$, luego veamos que ϕ es creciente en el intervalo $(0, 1)$. La derivada de ϕ es

$$\Phi'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}\left((1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right).$$

Definiendo ahora la función $\Psi(x)$ como la parte entre paréntesis de Phi, y calculando su derivada tenemos

$$\begin{aligned}\Psi(x) &:= \left((1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right),\\ \Psi'(x) &= (p-1)(1+x)^{p-2} - (p-1)(1-x)^{p-2}.\end{aligned}$$

Luego $\Psi'(x) \geq 0$ para $x \in (0, 1)$. Como $\Psi(1) = 0$, por el teorema del valor medio $\Psi(x) \leq 0$ para $x \in (0, 1)$. Por tanto $\Phi'(x) \geq 0$ para $x \in (0, 1)$ y como $\Phi(1) = 0$, $\Phi(x)$ es no positiva para $x \in (0, 1)$. Esto implica finalmente que $F(x) \leq 0$ para todo $x \in (0, 1)$. ■

Lema 2.6 (Lema 15.4, [4])**.** *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ dos números complejos, donde si $z = a + bi$, denotamos su módulo complejo como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dado $p \geq 2$ se verifica la desigualdad*

$$\left|\frac{1}{2}(z+w)\right|^p + \left|\frac{1}{2}(z-w)\right|^p \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p.$$

Demostración. Para el caso $w = 0$ es inmediato que se verifica la desigualdad ya que se tendría

$$\left|\frac{z}{2}\right|^p + \left|\frac{z}{2}\right|^p = 2\left|\frac{z}{2}\right|^p = \frac{2}{2^p}|z|^p = \frac{1}{2^{p-1}}|z|^p \leq \frac{1}{2}|z|^p.$$

Por tanto, y gracias a la simetría de los dos sumandos del lado derecho, podemos asumir sin pérdida de generalidad $|z| \geq |w| > 0$. Es decir, la desigualdad que queremos probar equivale, al dividir a ambos lados entre $|z|^p$, a

$$\left|\frac{1}{2}(1+\frac{w}{z})\right|^p + \left|\frac{1}{2}(1-\frac{w}{z})\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1 + \left|\frac{w}{z}\right|^p\right).$$

Por tanto, tomando exponenciales, para $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tenemos

$$\left|\frac{1 + r\exp(i\theta)}{2}\right|^p + \left|\frac{1 - r\exp(i\theta)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1 + r\exp(i\theta)^p}{2}\right).$$

Para $\theta = 0$ la desigualdad se reduce a la probada en el Lema 2.5. Veamos por tanto que dado un r fijo, se tiene un máximo en $\theta = 0$. Por la simetría del lado derecho de nuevo, podemos asumir que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Queremos por tanto probar que la función g definida por

$$g(\theta) = |1 + re^{i\theta}|^p + |1 - re^{i\theta}|^p$$

tiene un máximo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ en el punto $\theta = 0$. Desarrollando la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, y los módulos complejos tenemos

$$\begin{aligned}g(\theta) &= \left|\sqrt{(1 + r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2}\right|^p + \left|\sqrt{(1 - r\cos(\theta))^2 + (-r\sin(\theta))^2}\right|^p\\ &= (1 + r^2 + 2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}} + (1 + r^2 - 2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}}\end{aligned}$$

Tomamos ahora la derivada g' de g respecto a θ y observamos

$$\begin{aligned} g'(\theta) =& \frac{p}{2}(1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(-2r\sin(\theta)) + \frac{p}{2}(1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(2r\sin(\theta)) \\ =& -pr\sin(\theta)\left((1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1} - (1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}\right). \end{aligned}$$

Como $p \geq 2$ entonces $g'(\theta) \leq 0$. Es decir, la derivada de g no es creciente en todo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y por tanto tiene un máximo en $\theta = 0$. ■

Teorema 2.7 (Primera desigualdad de Clarkson)**.** *Para $p \geq 2$, dadas $f, g \in L^p$, se verifica la desigualdad*

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right). \tag{3}$$

Demostración. Podemos asumir que f y g toman valores complejos y que están definidas en casi todo punto. Por tanto, para todo $x \in X$, tal que $f(x)$ y $g(x)$ estén definidas, por el Lemma 2.6 tenemos

$$|z+w|^p + |z-w|^p \leq 2^{p-1}\left(|z|^p + |w|^p\right).$$

Basta con integrar a ambos lados respecto a X para la desigualdad (3). ■

Vamos ahora con la demostración del Teorema 2.10, para la cual volvemos a enunciar dos lemas auxiliares que simplificarán la prueba.

Lema 2.8 (Lema 15.6, [4])**.** *Sean $x \in [0,1]$, $1 < p \leq 2$ y $q = \frac{p}{p-1}$. Se verifica la desigualdad*

$$(1+x)^q + (1-x)^q \leq 2(1+x^p)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Demostración. Si $p = 2$, entonces $q = 2$ y basta desarrollar los cuadrados para comprobar que la desigualdad es cierta. Podemos limitarnos por tanto al caso $1 < p < 2$. Para $x = 0$ y para $x = 1$, la desigualdad se convierte en una igualdad. Podemos, por tanto, considerar solo $x \in (0,1)$. Definiendo la función

$$F(u) := \frac{1-u}{1+u},$$

tenemos que cuando u va de 0 a 1, $F(u)$ decrece estrictamente de 1 a 0. Por tanto, nuestra desigualdad equivale a

$$\left(1+\frac{1-u}{1+u}\right)^q + \left(1-\frac{1-u}{1+u}\right)^q \leq 2\left(1+\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

para $0 < u < 1$. Multiplicando ambos lados por $(1+u)^q$, obtenemos

$$2^q(1+u^q) \leq 2\left((1+u)^p + (1-u)^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Elevando ahora ambos lados a $(p-1)$, obtenemos

$$(1+u^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2}\left((1+u)^p + (1-u)^p\right),$$

para $0 < u < 1$. Como estos pasos son fácilmente reversibles, es suficiente probar esta última desigualdad. Expandiendo en series de potencias, tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left((1+u)^p + (1-u)^p\right) - (1+u^q)^{p-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}u^k + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^k\, u^k\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}u^{q\,k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{p}{2\,k}u^{2\,k} - \binom{p-1}{k}u^{q\,k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{p}{2\,k}u^{2\,k} - \binom{p-1}{2\,k-1}u^{q\,(2\,k-1)} - \binom{p-1}{2\,k}u^{q\,2\,k}\right).
\end{aligned}$$

Se puede probar que esta última serie converge absoluta y uniformemente para $u \in [0,1]$. La prueba de ello, sin embargo, conlleva lo que en [4] denomina análisis *duro*. Las cuentas no conllevan demasiada complejidad, pero debido a su extensión, vamos a omitirlas en este trabajo. La prueba detallada se puede consultar en [4][Teorema 7.25].

Veamos ahora que cda termino de esta última serie es no negativo concluyendo así nuestra prueba. El k-ésimo término de la serie se puede desarrollar como

$$\begin{aligned}
&\frac{p\,(p-1)\,(p-2)\cdots(p-(2\,k-1))}{(2\,k)!}\,u^{2\,k} \\
&\quad - \frac{(p-1)\,(p-2)\cdots(p-(2\,k-1))}{(2\,k-1)!}\,u^{q\,(2\,k-1)} \\
&\quad - \frac{(p-1)\,(p-2)\cdots(p-2\,k)}{(2\,k)!}\,u^{q\,2\,k} \\
&= \frac{p\,(p-1)\,(2-p)\cdots(2\,k-1-p)}{(2\,k)!}\,u^{2\,k} \\
&\quad - \frac{(p-1)\,(2-p)\,(3-p)\cdots(2\,k-1-p)}{(2\,k-1)!}\,u^{q\,(2\,k-1)} \\
&\quad + \frac{(p-1)\,(2-p)\cdots(2\,k-p)}{(2\,k)!}\,u^{q\,2\,k} \\
&= u^{2\,k}\frac{(2-p)\,(3-p)\cdots(2\,k-p)}{(2\,k-1)!} \\
&\quad \times\left(\frac{p\,(p-1)}{(2\,k)\,(2\,k-p)} - \frac{(p-1)}{(2\,k-p)}u^{q\,(2\,k-1)-2\,k} + \frac{(p-1)}{(2\,k)}u^{q\,2\,k-2\,k}\right).
\end{aligned}$$

Como $p < 2$, el primer factor de este producto es positivo. Si reescribimos ahora el segundo factor como

$$\left(\frac{1}{\frac{2k-p}{p-1}} - \frac{1}{\frac{2k}{p-1}} - \frac{1}{\frac{2k-p}{p-1}}u^{\frac{2k-p}{p-1}} + \frac{1}{\frac{2k}{p-1}}u^{\frac{2k}{p-1}}\right) = \left(\frac{1-u^{\frac{2k-p}{p-1}}}{\frac{2k-p}{p-1}} - \frac{1-u^{\frac{2k}{p-1}}}{\frac{2k}{p-1}}\right),$$

podemos ver que que para cualquier $u > 0$, la función con valores $\frac{1-u^t}{t}$, $0 < t < \infty$, es decreciente como función de t. Como $\frac{2k-p}{p-1} < \frac{2k}{p-1}$, este segundo factor es también positivo, concluyendo así nuestra prueba. ■

Lema 2.9 (Lema 15.7, [4]). *Dados dos números complejos $z, w \in \mathbb{C}$, si $1 < p \leq 2$ tenemos*

$$|z+w|^q + |z-w|^q \leq 2(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{4}$$

Demostración. Cuando o bien $z = 0$, o bien $w = 0$ basta sustituir para verificar la desigualdad y al igual que en el Lema 2.6 podemos suponer sin pérdida de generalidad $0 < |z| \leq |w|$. Así, dividiendo ambos lados entre $|w|^q$ obtenemos

$$\left|\frac{z}{w}+1\right|^q + \left|\frac{z}{w}-1\right|^q \leq 2\left(\left|\frac{z}{w}\right|^p + 1\right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Tomando exponenciales con $\frac{z}{w} = re^{i\theta}$ para $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tenemos

$$\left|re^{i\theta}+1\right|^q + \left|re^{i\theta}-1\right|^q \leq 2\left(r^p+1\right)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{5}$$

De forma análoga al procedimiento realizado en la demostración del Lema 2.6, basta notar que para $\theta = 0$ esta última desigualdad es la probada en el Lema 2.8. Y de igual forma, vemos que el lado izquierdo de la desigualdad (5) tiene un máximo en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en el punto $\theta = 0$. Esto prueba entonces (5) se verifica para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ probando así la desigualdad (4). ■

Teorema 2.10 (Segunda desigualdad de Clarkson). *Sea $1 < p < 2$, y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Para $f, g \in L^p$ se tiene*

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{6}$$

Demostración. Por la desigualdad Minkowski para $0 < p < 1$, tenemos

$$\||f+g|^q\|_{p-1} + \||f-g|^q\|_{p-1} \leq \||f+g|^q + |f-g|^q\|_{p-1}. \tag{7}$$

La parte izquierda de (7) es igual que la parte izquierda de (6) ya que para todo $h \in L^p(X, \mu)$ se tiene

$$\||h|^q\|_{p-1} = \left(\int_X ||h|^q|^{p-1}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \|h\|_p^q,$$

ya que $q(p-1)=p$ y $\frac{1}{p-1}=\frac{q}{p}$. Desarrollando la norma, la parte derecha verifica

$$\||f+g|^q+|f-g|^q\|_{p-1}=\left(\int_X (|f+g|^q+|f-g|^q)^{p-1}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

la cual, usando el Lema 2.9, es menor o igual que

$$\left(\int_X 2^{p-1}(|f|^p+|g|^p)d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}}=2\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

■

Corolario 2.11 (Corolario del Teorema 2, [4]). *Para $p>1$, el espacio L_p es uniformemente convexo.*

Demostración. Sean $f,g\in L^p$ con $\|f\|=\|g\|=1$. Para $p\geq 2$, haciendo uso de (3) tenemos

$$\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\leq 2^{p-1}(1+1)=2^p.$$

Ahora, si se tiene $\|f-g\|<\varepsilon\in(0,2]$, dividiendo entre 2^p a ambos lados y despejando adecuadamente se sigue

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p\leq\left(1-\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=:\delta,$$

donde $\delta\in(0,1)$ y se verifica la convexidad uniforme para $p\geq 2$. Para $1<p\leq 2$ usamos la desigualdad (6) para obtener

$$\|f+g\|_p^q+\|f-g\|_p^q\leq 2\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Análogamente al procedimiento anterior, ahora con $\delta:=\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$ vemos que se verifica la convexidad uniforme también para $1<p\leq 2$. ■

2.2. Desigualdades de Hanner

En 1955, el matemático sueco Olof Hanner simplificó la prueba de la convexidad uniforme dada por Clarkson años antes [3]. Para ello, introdujo dos nuevas desigualdades que también generalizan la regla del paralelogramo.

Teorema 2.12 (Desigualdades de Hanner, Teorema 2.5, [5]). *Sean f y g dos funciones en L^p. Para $p\geq 2$, se verifica*

$$\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\leq(\|f\|_p+\|g\|_p)^p+|\|f\|_p-\|g\|_p|^p. \tag{8}$$

Para $1<p\leq 2$, la desigualdad se invierte.

Antes de nada, notar que para $p = 2$, el lado de la derecha de (8) es

$$(\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 + |\|f\|_2 - \|g\|_2|^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\|f\|_2\|g\|_2$$

$$= 2\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\right),$$

luego efectivamente se convierte en la ley del paralelogramo, la cual se verifica para $p = 2$. Vamos a dar una prueba siguiendo la dada en [5][Teorema 2.5].

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $\|f\|_p = 1$ y definimos $M \coloneqq \|g\|_p \leq 1$. Para $0 \leq x \leq 1$, consideramos las funciones:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\coloneqq (1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1},\\ \Psi(x) &\coloneqq \left[(1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1}\right] x^{1-p},\\ F_M(x) &\coloneqq \Phi(x) + \Psi(x)M^p.\end{aligned}$$

Calculando la derivada de F_M,

$$F_M'(x) = \Phi'(x) + \Psi'(x)M^p = (p-1)\left[(1+x)^{p-2} - (1-x)^{p-2}\right]\left(1 - \left(\frac{M}{x}\right)^p\right)$$

observamos que $F_M'(x) = 0$ solo cuando $x = M$, por lo que para $p < 2$, $F_M(x)$ tiene un máximo en $x = M$, y para $p > 2$, $F_M(x)$ tiene un mínimo en $x = M$. Además, en ambos casos se cumple:

$$F_M(M) = (1+M)^p + (1-M)^p.$$

Para $p < 2$ tenemos $\Psi(x) \leq \Phi(x)$, y para $p > 2$ tenemos $\Psi(x) \geq \Phi(x)$. Esto implica que para todo $0 \leq x \leq 1$ y $A, B \geq 0$:

$$\Phi(x)|A|^p + \Psi(x)|B|^p \leq |A+B|^p + |A-B|^p \quad \text{para } p < 2$$

y la desigualdad inversa para $p > 2$. La igualdad se alcanza cuando $x = B/A \leq 1$. Esta desigualdad se puede extender a números complejos A y B. Para ver esto, consideramos $A = a$ y $B = be^{i\theta}$ con $a, b > 0$. Tenemos que

$$(a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta)^{p/2} + (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{p/2}$$

alcanza su mínimo en $\theta = 0$ para $p < 2$ (y su máximo para $p > 2$), debido a que $x \mapsto x^r$ es cóncava para $0 < r < 1$ y convexa para $r > 1$. Para completar la demostración, integramos ahora la desigualdad puntual

$$|f+g|^p + |f-g|^p \geq \Phi(x)|f|^p + \Psi(x)|g|^p \quad \text{para } p < 2$$

(con la desigualdad inversa para $p > 2$). Tomando $x = M = \|g\|_p$ (pues asumimos $\|f\|_p = 1$) obtenemos

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq (1+M)^p + (1-M)^p = (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p$$

para $1 \leq p \leq 2$, y la desigualdad inversa para $p \geq 2$, lo que completa la demostración. ■

2.3. Una pequeña comparación

Las desigualdades de Hanner dan una mejor acotación de la convexidad uniforme de L^p. Veámoslo para el caso $2 \leq p < \infty$. La desigualdad de Clarkson y la de Hanner afirman, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &\leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right), \\
\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p .
\end{aligned}$$

Por tanto, basta tomar las funciones constantes $f' = \|f\|_p$ y $g' = \|g\|_p$ donde, naturalmente, $f', g' \in L^p$ y

$$\begin{aligned}
(\|f\|_p + \|g\|_p)^p = (f' + g')^p = \|f' + g'\|_p^p, \\
|\|f\|_p - \|g\|_p|^p = |f' - g'|^p = \|f' - g'\|_p^p .
\end{aligned}$$

Así pues, utilizando aplicando tanto Clarkson como Hanner, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades, probando la mejor cota dada por Hanner:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p = \|f'+g'\|_p^p + \|f'-g'\|_p^p \\
&\leq 2^{p-1}\left(\|f'\|_p^p + \|g'\|_p^p\right) = 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right).
\end{aligned}$$

Nótese también que efectivamente las desigualdades no pueden ser estrictas ya que para el caso $\|f\| = \|g\| = 1$, tanto la desigualdad de Clarkson como la de Hanner dan la misma cota, 2^p, la cual permite probar la convexidad uniforme de L^p haciendo uso de cualquiera de las desigualdades. La prueba usando Clarkson la hemos visto en el Corolario 2.11, y la prueba análoga, aunque dando una mejor cota se puede consultar en [3].

Referencias

[1] Babb, R. L. A. Exploring convexity in normed spaces. *American Mathematical Monthly* (2014).

[2] Clarkson, J. A. Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society* (1936).

[3] Hanner, O. On the uniform convexity of l^p and ℓ^p. *Arkiv for Matematik* (1955).

[4] Hewitt, E., and Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, 1965.

[5] Lieb, W. H., and Loss, M. *Analysis second edition.* American Mathematical Society, 2001.