Convexidad y Desigualdades en Espacios Normados

Curso Avanzado de Análisis - Universidad Autónoma de Madrid

Gonzalo Ortega Carpintero

Martes 27 de mayo de 2025

Contents

Definición (Conjunto convexo)

Un conjunto $C \subseteq X$ es **convexo** si para todo par de puntos $x, y \in C$, $t \in [0,1]$, se tiene

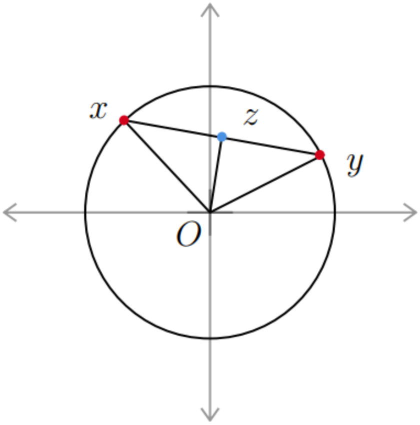
$$tx + (1-t)y \in C$$

Proposición

Sea $p\colon X \to [0,\infty)$ una función con la propiedad de que para todo $x \in X$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. Dicha función satisface la desigualdad triangular si y solo si la bola $B_p := \{x \in X\colon\, p(x) \leq 1\}$ es convexa.

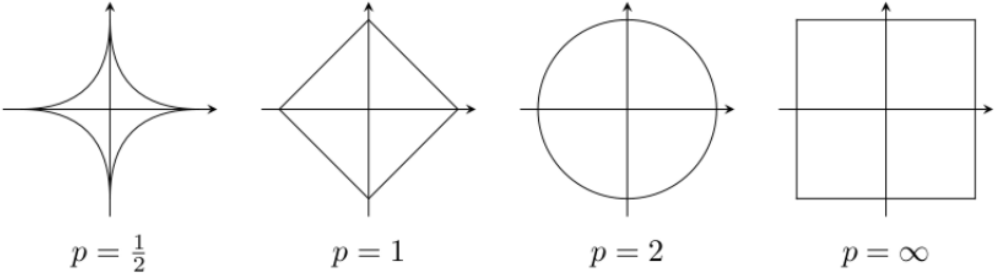
Definición (Espacio estrictamente convexo)

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **estrictamente convexo** si para todo par de puntos x e y en la esfera unidad $S(X)$ tales que el punto medio del segmento que los une esta también en la esfera unidad, i.e. $\|\frac{x+y}{2}\|$, se tiene $x = y$.



Definición (Espacio uniformemente convexo)

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es **uniformemente convexo** si para todo $\varepsilon \in (0, 2]$, existe un $\delta \in (0, 1)$ tal que para todo par $x, y \in B(X)$ con $\|x - y\| > \varepsilon$ se tiene $\|\frac{x+y}{2}\| < \delta$.



Proposición

Para cualquier $\varepsilon \in (0,2]$, existe un $\delta \in (0,1)$ tal que, para todo $x, y \in S(X)$ con $\|x-y\|_2 > \varepsilon$, se tiene que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 < \delta.$$

Corolario

Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo.

Proposición

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio dotado de un producto escalar con norma $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Entonces el espacio $(X, \| \cdot \|)$ es un espacio uniformemente convexo.

La identidad del paralelogramo para normas inducidas por un producto escalar afirma

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Sea $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$. Definimos $z = \frac{x+y}{2}$. Entonces

$$\|z\|^2 = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\|x+y\|^2.$$

Aplicando la identidad del paralelogramo tenemos

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2 = 4 - \|x-y\|^2.$$

Por lo tanto,

$$\|z\|^2 = \frac{1}{4}(4 - \|x-y\|^2) = 1 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Como $x \neq y$, tenemos que $\|x-y\| > 0$, lo cual implica $\|z\| < 1$.

Observación

La convexidad estricta no implica la convexidad uniforme.

Consideremos la norma en el espacio de sucesiones convergentes ℓ^1 dada por la suma de las normas ℓ^1 y ℓ^2, es decir, dada una sucesión $x \in \ell^1$,

$$\|x\| := \|x\|_{\ell^1} + \|x\|_{\ell^2}.$$

para todo $x \neq y \in S(\ell^2)$,

$$\|x+y\|_{\ell^2} < \|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}.$$

Por tanto, haciendo también uso de la desigualdad triangular estándar en ℓ^1 tenemos

$$\|x+y\| = \|x+y\|_{\ell^1} + \|x+y\|_{\ell^2} < (\|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1}) + (\|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}) = \|x\| + \|y\| = 2.$$

Por tanto, ℓ_1 es estrictamente convexo.

Sin embargo, definamos ahora las sucesiones

$$x_{N,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq N, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad y_{N,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } N < k \leq 2N, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por un lado tenemos que $\|x\| = \|y\| = N + \sqrt{N}$ y que $\|x_N - y_N\| = 2N + \sqrt{2N}$, ya que

$$x_{N,k} - y_N = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq N, \\ -1 & \text{si } N < k \leq 2N, \\ 0 & \text{si } k \geq 2N. \end{cases}$$

Pero tenemos también que

$$\left\| \frac{x_N + y_N}{2} \right\| = \frac{2N}{2} + \frac{\sqrt{2N}}{2}.$$

Dividiendo entre $N + \sqrt{N}$ podemos hacer $\left\| \frac{x_N + y_N}{2(N+\sqrt{N})} \right\|$ tan cercano como queramos a 1, mientras que siempre tendremos $\left\| \frac{x_N + y_N}{(N+\sqrt{N})} \right\| \geq \sqrt{2}$. Por tanto, $(\ell^1, \|\cdot\|)$ no es uniformemente convexo.

Consideremos el espacio $L^1([0,1],\lambda)$ y definamos, para $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n = \chi_{[0,1/n]}, \quad g_n = \chi_{[1-1/n,1]}.$$

Entonces:

$$\|f_n\|_1 = \|g_n\|_1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

Definiendo funciones normalizadas,

$$\tilde{f}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_1} = n\chi_{[0,1/n]}, \quad \tilde{g}_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_1} = n\chi_{[1-1/n,1]}.$$

Así

$$\|\tilde{f}_n\|_1 = \|\tilde{g}_n\|_1 = 1, \quad \|\tilde{f}_n - \tilde{g}_n\|_1 = 2,$$

pero,

$$\left\|\frac{\tilde{f}_n + \tilde{g}_n}{2}\right\|_1 = \frac{1}{2}(\|\tilde{f}_n\|_1 + \|\tilde{g}_n\|_1) = 1.$$

Consideremos el espacio $L^\infty([0,1],\lambda)$ y definamos:

$$f_n = \chi_{[0,1/2]}, \quad g_n = \chi_{[1/2+1/n,1]}.$$

Entonces:

$$\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n - g_n\|_\infty = 1.$$

Sin embargo:

$$\left\|\frac{f_n + g_n}{2}\right\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Dado que esta cota no mejora al aumentar n, no es posible encontrar un $\delta(\epsilon)$ que garantice la disminución necesaria para todo ϵ. Esto contradice la definición de convexidad uniforme. Por lo tanto, L^∞ tampoco es uniformemente convexo.

Contents

Teorema

Para $2 \leq p < \infty$, dadas $f, g \in L^p$, se verifica la desigualdad

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right). \tag{1}$$

Teorema

Sea $1 < p \leq 2$, y sea $q = \frac{p}{p-1}$. Para $f, g \in L^p$ se tiene

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{2}$$

Sean $f, g \in L^p$ con $\|f\| = \|g\| = 1$. Para $p \geq 2$, haciendo uso de (1) tenemos

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1}(1+1) = 2^p.$$

Ahora, si se tiene $\|f-g\| > \varepsilon \in (0,2]$, dividiendo entre 2^p a ambos lados y despejando adecuadamente se sigue

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq \left(1 - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} =: \delta,$$

donde $\delta \in (0,1)$ y se verifica la convexidad uniforme para $p \geq 2$.

Para $1 < p \leq 2$ usamos la desigualdad (2) para obtener

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Análogamente al procedimiento anterior, ahora con $\delta := \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$ vemos que se verifica la convexidad uniforme también para $1 < p \leq 2$.

Teorema

Sean f y g dos funciones en L^p. Para $p \geq 2$, se verifica

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left|\|f\|_p - \|g\|_p\right|^p .$$

Para $1 < p \leq 2$, la desigualdad se invierte.

Dadas $f, g \in L^p$, tomamos las funciones constantes $f' = \|f\|_p$ y $g' = \|g\|_p$ donde, naturalmente, $f', g' \in L^p$ y

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p = \left(f' + g'\right)^p = \left\|f' + g'\right\|_p^p,$$
$$|\|f\|_p - \|g\|_p|^p = \left|f' - g'\right|^p = \left\|f' - g'\right\|_p^p.$$

Así pues, utilizando tanto Clarkson como Hanner, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades, probando la mejor cota dada por Hanner:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p = \left\|f' + g'\right\|_p^p + \left\|f' - g'\right\|_p^p \\ \leq 2^{p-1}\left(\|f'\|_p^p + \|g'\|_p^p\right) = 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right).\end{aligned}$$