Universidad Autónoma de Madrid

Curso Avanzado de Análisis

Convexidad y Desigualdades en Espacios Normados

2024-2025.

Autor:
Gonzalo Ortega Carpintero

Mayo 2025

Resumen

Palabras clave

Índice

1. Desigualdades de Clarkson

Vamos a empezar probando un par de lemas auxiliares.

Lema 1.1. *Sea $x \in [0,1]$ y $p \geq 2$. Se verifica la desigualdad*

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(1+x^p).$$

Demostración. Definiendo la función

$$F(x) := \left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \frac{1}{2}(1+x^p),$$

sería suficiente probar que $F(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Para $x = 0$, como $p \geq 2$, se tiene

$$F(0) = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Para $0 < x \leq 1$ definimos

$$\Phi(x) := \frac{2^p}{x^p} F(x) = \left(\frac{1}{x}+1\right)^p + \left(\frac{1}{x}-1\right)^p - 2^{p-1}\left(\frac{1}{x^p}+1\right).$$

Para $x = 1$, $\phi(1) = 0$, luego veamos que ϕ es creciente en el intervalo $(0,1)$. La derivada de ϕ es

$$\Phi'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}\left((1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right).$$

Definiendo ahora la función $\Psi(x)$ como la parte entre paréntesis de Phi, y calculando su derivada tenemos

$$\Psi(x) := \left((1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right),$$
$$\Psi'(x) = (p-1)(1+x)^{p-2} - (p-1)(1-x)^{p-2}.$$

Luego $\Psi'(x) \geq 0$ para $x \in (0,1)$. Como $\Psi(1) = 0$, por el teorema del valor medio $\Psi(x) \leq 0$ para $x \in (0,1)$. Por tanto $\Phi'(x) \geq 0$ para $x \in (0,1)$ y como $\Phi(1) = 0$, $\Phi(x)$ es no positiva para $x \in (0,1)$. Esto implica finalmente que $F(x) \leq 0$ para todo $x \in (0,1)$. □

Lema 1.2. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ dos números complejos, donde si $z = a+bi$, denotamos su módulo complejo como $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Dado $p \geq 2$ se verifica la desigualdad*

$$\left|\frac{1}{2}(z+w)\right|^p + \left|\frac{1}{2}(z-w)\right|^p \leq \frac{1}{2}|z|^p + \frac{1}{2}|w|^p.$$

Demostración. Para el caso $w = 0$ es inmediato que se verifica la desigualdad ya que se tendría

$$\left|\frac{z}{2}\right|^p + \left|\frac{z}{2}\right|^p = 2\left|\frac{z}{2}\right|^p = \frac{2}{2^p}|z|^p = \frac{1}{2^{p-1}}|z|^p \leq \frac{1}{2}|z|^p.$$

Por tanto, y gracias a la simetría de los dos sumandos del lado derecho, podemos asumir sin pérdida de generalidad $|z| \geq |w| > 0$. Es decir, la desigualdad que queremos probar equivale, al dividir a ambos lados entre $|z|^p$, a

$$\left|\frac{1}{2}(1+\frac{w}{z})\right|^p + \left|\frac{1}{2}(1-\frac{w}{z})\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{w}{z}\right|^p\right).$$

Por tanto, tomando exponenciales, para $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ tenemos

$$\left|\frac{1+r\exp(i\theta)}{2}\right|^p + \left|\frac{1-r\exp(i\theta)}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1+r\exp(i\theta)^p}{2}\right).$$

Para $\theta = 0$ la desigualdad se reduce a la probada en el Lema 1.1. Veamos por tanto que dado un r fijo, se tiene un máximo en $\theta = 0$. Por la simetría del lado derecho de nuevo, podemos asumir que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Queremos por tanto probar que la función g definida por

$$g(\theta) = |1+re^{i\theta}|^p + |1-re^{i\theta}|^p$$

tiene un máximo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ en el punto $\theta = 0$. Desarrollando la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$, y los módulos complejos tenemos

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left|\sqrt{(1+r\cos(\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2}\right|^p + \left|\sqrt{(1-r\cos(\theta))^2 + (-r\,\mathrm{sen}(\theta))^2}\right|^p \\ &= (1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}} + (1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

Tomamos ahora la derivada g' de g respecto a θ y observamos

$$\begin{aligned} g'(\theta) =& \frac{p}{2}(1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(-2r\,\mathrm{sen}(\theta)) + \\ & \frac{p}{2}(1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}(2r\,\mathrm{sen}(\theta)) \\ =& -pr\,\mathrm{sen}(\theta)\left((1+r^2+2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1} - (1+r^2-2r\cos(\theta))^{\frac{p}{2}-1}\right). \end{aligned}$$

Como $p \geq 2$ entonces $g'(\theta) \leq 0$. Es decir, la derivada de g no es creciente en todo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y por tanto tiene un máximo en $\theta = 0$. □

Teorema 1.3. *Dado $p \geq q$, sean $f, g \in L^p$, se verifica entonces la desigualdad*

$$\left\|\frac{1}{2}f+g\right\|_p^p + \left\|\frac{1}{2}f-g\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p.$$

Teorema 1.4. *Sea* $1 < p < 2$, *y sea* $q = \frac{p-1}{p}$. *Para* $f, g \in L^p$ *se tiene*

$$\left\|\frac{1}{2}f + g\right\|_p^q + \left\|\frac{1}{2}f - g\right\|_p^q \leq$$

Referencias