TEMA 5. MODELOS APT

Dr. Borja Amor Tapia
borja.amor@unileon.es
Área de Economía Financiera

1. LOS MODELOS FACTORIALES

- Mediante un modelo factorial se introduce un proceso de generación de rendimientos, entendiendo por tal un modelo estadístico que describe cómo se produce el rendimiento de un valor

1.1. Análisis de los Activos

$$r_{it} = a_i + \beta_{i1}F_{1t} + \beta_{i2}F_{2t} + \ldots + \beta_{ik}F_{kt} + u_{it}$$

$$r_{it} = a_i + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}F_{ht} + u_{it}$$

- Se aceptan las siguientes hipótesis:
    - El error aleatorio tiene media cero y está incorrelacionado con cualquier factor
    - Los errores aleatorios de dos títulos cualesquiera no están correlacionados
    - Los rendimientos de dos activos financieros cualesquiera sólo están correlacionados a través de las respuestas comunes a los factores

- Bajo estas condiciones, la variable aleatoria rentabilidad del activo i tiene la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
r_i &= a_i + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \ldots + \beta_{ik}F_k + u_i \\
&= a_i + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}F_h + u_i
\end{aligned}
$$

- Denominando $E(F_h) = E_{Fh}$, al valor esperado del factor h, la rentabilidad esperada del activo i viene dada por la expresión

$$E_i = a_i + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih} E_{Fh}$$

Nótese que el modelo de mercado es un caso particular con un único factor

- Es posible utilizar diversos métodos para estimar modelos factoriales. En resumen:
  - a) métodos de series temporales
  - b) métodos de corte transversal
  - c) métodos de factor analítico

- Para n activos, la matriz de sensibilidades o de las *betas* de tales activos es:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \cdots & \beta_{2k} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \cdots & \cdots & \beta_{3k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \cdots & \beta_{nk} \end{pmatrix}$$

- Para n activos, la matriz de varianzas-covarianzas entre los factores es:

$$S_F = \begin{pmatrix} \sigma_{F1}^2 & \sigma_{F1F2} & \sigma_{F1F3} & \dots & \sigma_{F1Fk} \\ \sigma_{F2F1} & \sigma_{F2}^2 & \sigma_{F2F3} & \dots & \sigma_{F2Fk} \\ \sigma_{F3F1} & \sigma_{F3F2} & \sigma_{F3}^2 & \dots & \sigma_{F3Fk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{FkF1} & \sigma_{FkF2} & \sigma_{FkF3} & \dots & \sigma_{Fk}^2 \end{pmatrix}$$

- En la hipótesis de que los factores estén incorrelacionados entre sí, por lo que sus covarianzas son nulas, el riesgo verifica:

$$\sigma_i^2 = \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}^2 \sigma_{Fh}^2 + \sigma_{ui}^2$$

$$\sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}^2 \sigma_{Fh}^2 = \sigma_{si}^2$$

indica la parte del riesgo total (varianza) del título i que depende de los k factores. Se le denomina riesgo atribuible a factores o riesgo sistemático.

$$\sigma_{ui}^2$$

indica el riesgo del activo no atribuible a los factores, riesgo específico, riesgo propio o único del título i.

- En el **caso general** de **k factores correlacionados**, el riesgo total de un activo verifica:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(a_i + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \ldots + \beta_{ik}F_k + u_i) =$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}^2 \sigma_{Fh}^2 + 2\sum_{h<m} \beta_{ih}\beta_{im}\sigma_{FhFm} + \sigma_{ui}^2 =$$

$$= \sigma_{si}^2 + \sigma_{ui}^2$$

- El riesgo sistemático verifica:

$$\sigma_{si}^2 = \sigma^2(a_i + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \ldots + \beta_{ik}F_k + u_i) =$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}^2 \sigma_{Fh}^2 + 2\sum_{h<m} \beta_{ih}\beta_{im}\sigma_{FhFm}$$

- Si denominamos b_{iF} al vector fila de las betas del activo i con respecto a los factores, $b_{iF} = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}, \ldots, \beta_{ik})$, la expresión anterior del riesgo sistemático (varianza) es una forma cuadrática del vector traspuesto del b_{iF}, asociada a la matriz simétrica S_F de varianzas-covarianzas entre los factores. Por tanto, se puede determinar mediante la multiplicación de matrices:

$$\sigma_{si}^2 = b_{iF} S_F b'_{iF}$$

1.2. Análisis de las Carteras

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(a_i + \beta_{i1} F_1 + \beta_{i2} F_2 + \ldots + \beta_{ik} F_k + u_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{i1} F_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{i2} F_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{ik} F_k \right) + \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

- Si denominamos:

$$a_p = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

$$\beta_{p1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{i1}$$

$$\beta_{p2} = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{i2}$$

...

$$\beta_{pk} = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{ik}$$

$$u_p = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

- Tenemos que:

$$r_p = a_p + \beta_{p1}F_1 + \beta_{p2}F_2 + \ldots + \beta_{pk}F_k + u_p$$

- Además, siendo X' el vector fila, traspuesto del vector columna de pesos, y β_{Fh} el vector columna de las betas de los activos con respecto al factor *h*, se verifica:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X' = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \qquad \beta_{Fh} = \begin{pmatrix} \beta_{1h} \\ \beta_{2h} \\ \beta_{3h} \\ \dots \\ \beta_{nh} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{ph} = \sum_{h=1}^{n} x_i \beta_{ih} = X' \beta_{Fh}$$

$$\forall h = 1,2,\dots.,k$$

$$E_p = a_p + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ph} E_{Fh} = X'E$$

$$\sigma_p^2 = X'SX$$

$$\sigma_{up}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ui}^2$$

$$\sigma_{sp}^2 = \sigma_p^2 - \sigma_{up}^2$$

$$\sigma_{sp}^2 = b_{pF} S_F b'_{pF}$$

A) Carteras Réplica

- En general, supongamos que existe una cartera *p* de la que se sabe que su proceso generador de rendimientos está vinculado a un cierto número k de factores conocidos, verificándose:

$$r_p = a_p + \beta_{p1}F_1 + \beta_{p2}F_2 + \ldots + \beta_{pk}F_k + u_p$$

- Si existen n activos o carteras cuyos rendimientos también estén vinculados a los mismos k factores anteriores, es posible formar una cartera *q* que tenga el mismo riesgo sistemático que la cartera *p*, constituyendo dicha cartera *q* una cartera réplica de la cartera *p*.

- Para que las carteras *p* y *q* tengan el mismo riesgo sistemático , como ambas están influenciadas por los mismos factores, la cartera réplica q debe tener un vector de proporciones *X* tal que las betas de la misma coincidan con las betas de la cartera *p*:

$$\beta_{qh} = X'\beta_{Fh} = \beta_{ph} \qquad \forall h = 1,2,....,k$$

- Para determinar los valores del vector X se forma el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&\beta_{q1} = X'\beta_{F1} \;\; = \beta_{p1} \\
&\beta_{q2} = X'\beta_{F2} \;\; = \beta_{p2} \\
&\beta_{q3} = X'\beta_{F3} \;\; = \beta_{p3} \\
&\ldots \\
&\beta_{qk} = X'\beta_{Fk} \;\; = \beta_{pk} \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1
\end{aligned}
$$

- Tiene sentido formar una cartera réplica si el número de activos de la misma es sensiblemente inferior al número de activos de la cartera a replicar.

- Como existen $k+1$ ecuaciones, el sistema anterior tendrá solución si existe, al menos, el mismo número de incógnitas, por lo que es preciso que el número n de activos verifique: $n \geq k+1$.

B) Carteras Básicas

- S**e define una cartera básica** asociada a un determinado factor de riesgo sistemático, o cartera factorial o cartera réplica de un determinado factor, como **aquella cartera cuya beta con respecto a dicho factor es la unidad, y cero con respecto a los demás factores**.

- En consecuencia, la rentabilidad esperada de una cartera básica únicamente es sensible a las variaciones del factor al que va asociada

2. EL MODELO APT

- El Modelo de Valoración por Arbitraje, o APT *(Arbitrage Pricing Theory)*, fue formulado por Stephen A. Ross (1976).

- Es un modelo factorial en el que los diversos factores del mismo están incorrelacionados y no son especificados a priori. Además, se acepta la hipótesis de que existe un gran número de activos individuales, de forma que la diversificación permite eliminar el riesgo no atribuible a los factores, por lo que el riesgo específico es nulo.

$$r_{it} = a_i + \beta_{i1}F_{1t} + \beta_{i2}F_{2t} + \ldots + \beta_{ik}F_{kt} + u_{it}$$

$$r_{it} = a_i + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}F_{ht} + u_{it}$$

El modelo APT se basa en la hipótesis de ausencia de arbitraje.

- La ausencia de arbitraje, implica que no hay posibilidades de encontrar carteras de arbitraje cuando todos los activos están correctamente valorados y sus rendimientos verifican la siguiente ecuación, en la que los coeficientes λ son los parámetros del modelo:

$$E_i = \lambda_0 + \beta_{i1}\lambda_1 + \beta_{i2}\lambda_2 + \ldots + \beta_{ik}\lambda_k$$
$$= \lambda_0 + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\lambda_h$$

Los parámetros λ pueden obtenerse por regresión del vector de rentabilidades esperadas de los activos sobre los coeficientes de volatilidad

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i = 0$$

$$\beta_{qh} = w_1\beta_{1h} + w_2\beta_{2h} + w_3\beta_{3h} + \ldots + w_n\beta_{nh} = \sum_{i=1}^{n} w_i\beta_{ih} = 0$$

$$\forall h = 1,2,3,\ldots,\mathrm{k}$$

$$E_q = w_1E_1 + w_2E_2 + w_3E_3 + \ldots + w_nE_n = \sum_{i=1}^{n} w_iE_i > 0$$

- Si consideramos el vector *W* de pesos, el vector *U* de unos, los de sensibilidades de los activos con respecto a cada uno de los k factores y el de rendimientos esperados *E* de los activos, tenemos:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta_{Fh} = \begin{pmatrix} \beta_{1h} \\ \beta_{2h} \\ \beta_{3h} \\ \dots \\ \beta_{nh} \end{pmatrix} \quad \forall h = 1,2,3,\dots,k \qquad E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}$$

$$W'U = 0$$

$$W'\beta_{Fh} = 0$$

$$W'E > 0$$

- El modelo se fundamenta en la hipótesis de que el mercado estará en equilibrio y los activos correctamente valorados cuando no se puedan formar carteras de arbitraje con rendimiento distinto de cero (por tanto, un inversor no puede obtener una rentabilidad adicional si no realiza aportación de recursos financieros y/o acepta incrementar su riesgo), debiéndose verificar, en consecuencia, $E_q = 0$.

- Además, tal y como hemos señalado, las carteras de arbitraje carecen de riesgo, por lo que el riesgo específico también ha de ser nulo, para lo cual es preciso que se verifique:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i u_i = 0$$

- Por tanto, las ecuaciones del modelo son :

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = 0$$

$$\beta_{q1} = w_1\beta_{11} + w_2\beta_{21} + w_3\beta_{31} + \ldots + w_n\beta_{n1} = 0$$

$$\beta_{q2} = w_1\beta_{12} + w_2\beta_{22} + w_3\beta_{32} + \ldots + w_n\beta_{n2} = 0$$

$$\ldots$$

$$\beta_{qh} = w_1\beta_{1h} + w_2\beta_{2h} + w_3\beta_{3h} + \ldots + w_n\beta_{nh} = 0$$

$$E_q = w_1E_1 + w_2E_2 + w_3E_3 + \ldots + w_nE_n = 0$$

- O bien, expresado en forma matricial:

$$W'U = 0$$
$$W'\beta_{F1} = 0$$
$$W'\beta_{F2} = 0$$
$$\dots$$
$$W'\beta_{Fh} = 0$$
$$W'E = 0$$

- Las expresiones anteriores constituyen un sistema homogéneo de $k+2$ ecuaciones con *n* incógnitas, en el que se verifica que el vector W es ortogonal al vector unitario *U* y a los *k* vectores columna β_F. Por tanto, el vector *E* es combinación lineal de los $k+1$ vectores precedentes, por lo que existen $k+1$ coeficientes λ que verifican:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \\ \dots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \beta_{32} \\ \dots \\ \beta_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_K \begin{pmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \beta_{3k} \\ \dots \\ \beta_{nk} \end{pmatrix}$$

- En consecuencia, para cualquier activo *i* la ecuación general del modelo APT es:

$$E_i = \lambda_0 + \beta_{i1}\lambda_1 + \beta_{i2}\lambda_2 + \beta_{i3}\lambda_3 + \ldots + \beta_{ik}\lambda_k$$

$$= \lambda_0 + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\lambda_h$$

- Supongamos la existencia de un activo libre de riesgo con rentabilidad r_f.
  - Como dicho activo tiene sensibilidad nula con respecto a todos los factores, se verifica: $\lambda_0 = r_f$.

- Por otra parte, supongamos un activo *j* (o una cartera básica, factorial o cartera réplica de dicho factor, tal y como la hemos definido con anterioridad) con sensibilidad unitaria a un solo factor *h* y nula con respecto a los demás.

- Según la ecuación del APT, su rentabilidad esperada verifica:

$$\begin{aligned} E_j &= \lambda_0 + \beta_{jh}\lambda_h \\ &= \lambda_0 + \lambda_h \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lambda_h = E_j - \lambda_0$$

- Como la rentabilidad esperada del título j sólo depende del factor h, dicha rentabilidad ha de coincidir con el valor esperado del citado factor, verificándose: $E_j = E_{Fh}$.

- Por tanto:

$$\lambda_h = E_{Fh} - \lambda_0 \qquad \forall h = 1,2,\dots,k$$

- Podemos entender λ_h como la prima de riesgo asociada al factor *h*

- Así pues, los coeficientes λ son las primas por unidad de riesgo sistemático con respecto a cada factor , pudiéndose expresar la ecuación del APT de la forma siguiente:

$$E_i = r_f + \beta_{i1}\left(E_{F1} - r_f\right) + \beta_{i2}\left(E_{F2} - r_f\right) + \beta_{i3}\left(E_{F3} - r_f\right) + \ldots + \beta_{ik}\left(E_{Fk} - r_f\right)$$

$$= r_f + \sum_{h=1}^{k} \beta_{ih}\left(E_{Fh} - r_f\right)$$

- Si existiese únicamente un factor de riesgo k, la ecuación anterior quedaría:

$$E_i = r_f + \beta_{ik}\left(E_{Fk} - r_f\right)$$

- Si ese único factor es la cartera de mercado, la ecuación anterior es la correspondiente a la SML.

- Por tanto, el CAPM es un caso particular del APT en el que sólo existe un factor de riesgo.