TEMA 1. INTRODUCCIÓN A LA GESTIÓN DE CARTERAS

Dr. Borja Amor Tapia
borja.amor@unileon.es
Área de Economía Financiera

1.Inversiones Financieras

- Adquisición de un conjunto de activos capaces de proporcionar resultados futuros durante un cierto periodo de tiempo.

- Una inversión se compone de:
  - Flujos negativos (desembolsos o pagos)
  - Flujos positivos (rendimientos o cobros)
  - Horizonte temporal

- ¿Cómo realizar la inversión en varios activos?
  - Mediante Carteras

2. Gestión y Administración de Carteras

- **Fases de la Gestión de Carteras**
  - Análisis de los Títulos
  - Análisis de las Carteras
  - Selección de la Cartera Óptima

- **Administración de Inversiones o Administración de Carteras. Funciones:**
  1. Establecer una política de inversión, identificando las preferencias y objetivos del inversor en cuanto a la cuantía que está dispuesto a invertir, la rentabilidad esperada y el riesgo a soportar.

  2. Realizar un análisis de activos, con el fin de poder determinar sus rendimientos esperados y riesgos probables, e identificar los activos concretos en los que invertir.

  3. Formar y analizar las posibles carteras, determinando la cuantía a invertir en cada uno de los activos previamente seleccionados, así como la rentabilidad esperada y riesgo de cada cartera.

  4. Elegir la cartera óptima o cartera específica en la que invertir, de acuerdo con las preferencias del inversor en cuanto a la rentabilidad y al riesgo.

  5. Evaluación periódica del rendimiento y riesgo que corre el inversor con la cartera concreta en la que ha invertido, así como la revisión y reestructuración de la misma.

3. Carteras: Concepto y Clases

- Una cartera es una combinación de activos, cada uno de los cuales tiene una cierta ponderación, hasta agotar el presupuesto disponible.

Fases de la selección de Carteras

- **Problema:** Determinar la combinación óptima de activos a adquirir, con el objetivo de maximizar la rentabilidad esperada y minimizar el riesgo, teniendo en cuenta además, la restricción presupuestaria para invertir.

universidad de león

¿Cuáles son las características financieras de cada uno de los activos disponibles?

(¿cuál es la rentabilidad esperada, el riesgo y la covarianza con los demás?)

¿Cuáles son las características de cada una de las combinaciones posibles que se pueden formar?

(¿cuál es la rentabilidad esperada y el riesgo probable de cada una de las carteras?)

¿Cuál es la cartera o combinación óptima de activos?

De entre las infinitas carteras que se pueden formar, ¿cuál es la que un inversor concreto, de acuerdo con sus preferencias de rentabilidad-riesgo, debe elegir?

4. El Valor Temporal del Dinero

- Valor Futuro
  - V € invertidos durante n años a una tasa simple anual R
  - Los intereses se pagan al final de cada año

$$FV_n = V(1+R)^n$$

- Ejemplo
  - Consideremos un depósito de 1.000 € en una entidad financiera, que genera una rentabilidad simple anual del 3%. Calcular el valor futuro después de 1, de 5 y de 10 años.

$$FV_1 = 1000 \times (1+0,03)^1 = 1.030\ €$$

$$FV_5 = 1000 \times (1+0,03)^5 = 1.159,27\ €$$

$$FV_{10} = 1000 \times (1+0,03)^{10} = 1.343,92\ €$$

- La función FV es una relación entre cuatro variables. Dadas tres, podemos despejar la cuarta.

  - Valor Actual $$V = \frac{FV_n}{(1+R)^n}$$

  - Tasa de Interés Compuesta $$R = \left(\frac{FV_n}{V}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

  - Horizonte temporal de inversión $$n = \frac{\ln\left(\frac{FV_n}{V}\right)}{\ln(1+R)}$$

- Cuando el interés compuesto se produce m veces al año:

Tipo de interés periódico

$$\frac{R}{m}$$

$$FV_n^m = V\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n}$$

- Interés Compuesto continuamente…

$$FV_n^\infty = \lim_{m\to\infty} V\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n} = Ve^{R\cdot n}$$

$$e^1 = 2.71828...$$

- Ejemplo:
  - Para una tasa anual simple del 10%, podemos calcular el valor final, después de un año (n = 1), de 1.000 euros, para diferentes valores de m:

Frecuencia de la composición	Valor de 1.000 € al final de 1 año (R = 10%)
Anual (m = 1)	1.100,00
Trimestral (m = 4)	1.103,81
Semanal (m = 52)	1.105,06
Diaria (m = 365)	1.105,16
Continua (m = ∞)	1.105,17

4.1 Tasa Anual Efectiva

- Es la Tasa Anual, R_A, que iguala FV_n^m con FV_n

$$V\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m\cdot n}=V(1+R_A)^n$$

- Resolviendo R_A

$$\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m}=(1+R_A)$$

$$R_A=\left(1+\frac{R}{m}\right)^{m}-1$$

- Considerando rentabilidad compuesta continua:

$$Ve^{R\cdot n} = V(1+R_A)^n$$

- Resolviendo RA

$$Ve^{R\cdot n} = V(1+R_A)^n$$

$$e^{R\cdot n} = (1+R_A)^n$$

$$e^{R} = (1+R_A)$$

$$R_A = e^{R} - 1$$

- Ejemplo. Calcular la rentabilidad anual efectiva con intereses compuestos semestralmente.
  - La tasa anual efectiva asociada a una inversión con una tasa de interés simple anual R=10% y fraccionamiento semestral (m = 2) se determina resolviendo:

$$(1+R_A)=\left(1+\frac{0{,}10}{2}\right)^2$$

$$R_A=\left(1+\frac{0{,}10}{2}\right)^2-1=0{,}1025$$

- (continuación del ejemplo)
  - Para una tasa anual simple del 10%, podemos calcular el valor final, después de un año (n = 1), de 1.000 euros, para diferentes valores de m:

Frecuencia de la composición	Valor de 1.000 € al final de 1 año (R = 10%)	R_A
Anual (m = 1)	1.100,00	10,00 %
Trimestral (m = 4)	1.103,81	10,38 %
Semanal (m = 52)	1.105,06	10,51 %
Diaria (m = 365)	1.105,16	10,52 %
Continua (m = ∞)	1.105,17	10,52 %

5. El cálculo de la Rentabilidad de los Activos

- Rentabilidad Simple
  - P_t: Precio al final del mes t, de un activo que no paga dividendos
  - P_{t-1}: Precio al final del mes t-1

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad = \Delta\% P_t$$

Rentabilidad Neta Simple del mes t (net return)

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Rentabilidad Bruta Simple del mes t (gross return)

- Ejemplo. Rentabilidad de una inversión en acciones durante un mes.
  - Se compran acciones de una empresa al finalizar el mes t-1 a un precio de 85 € y se venden al final del mes siguiente a un precio de 90 €. Si la empresa no ha pagado dividendos entre t-1 y t, la rentabilidad neta simple, y la rentabilidad bruta simple:

$$R_t = \frac{90-85}{85} = \frac{90}{85} - 1 = 1{,}0588 - 1 = 0{,}0588 \rightarrow 5{,}88\%$$

$$1 + R_t = 1{,}0588$$

5.1. Rentabilidades Multiperiodo

- Rentabilidad Simple en dos periodos

$$R_t(2) = \frac{P_t - P_{t-2}}{P_{t-2}} = \frac{P_t}{P_{t-2}} - 1$$

Multiplicamos y dividimos por P_{t-1}

$$R_t(2) = \frac{P_t}{P_{t-2}} - 1 = \frac{P_t}{P_{t-2}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} - 1$$

$$= \left(1 + R_t\right)\left(1 + R_{t-1}\right) - 1$$

Media Geométrica

- Por lo tanto:

$1+R_t$ Rentabilidad Bruta Simple del periodo t (gross return)

$1+R_{t-1}$ Rentabilidad Bruta Simple del periodo t-1 (gross return)

$$\Rightarrow 1+R_t(2)=\left(1+R_t\right)\left(1+R_{t-1}\right)$$

Rentabilidad Bruta Simple de 2 periodos = El producto de dos rentabilidades brutas simples de 1 periodo

NOTA: Las rentabilidades de dos periodos NO se suman (no es aditiva)

$$R_t(2)=\left(1+R_t\right)\left(1+R_{t-1}\right)-1=R_t+R_{t-1}+R_t\cdot R_{t-1}$$

$\approx R_t+R_{t-1}$ si R_t y R_{t-1} son pequeños de modo que $R_t\cdot R_{t-1}\to 0$

- Ejemplo. Rentabilidad de una inversión en acciones durante dos meses.
  - Supongamos que el precio de las acciones al final del mes t-2 es de 80 €, y que no se pagan dividendos entre t-2 y t. La rentabilidad neta del periodo es:

$$R_t(2) = \frac{90-80}{80} = \frac{90}{80} - 1 = 1{,}1250 - 1 = 0{,}1250 \rightarrow 12{,}50\%$$

  – Es decir, con los datos que teníamos previamente del ejemplo:

$$R_{t-1} = \frac{85-80}{80} = 1{,}0625 - 1 = 0{,}0625$$

$$R_t = \frac{90-85}{85} = 1{,}0588 - 1 = 0{,}0588$$

  – Y la media geométrica de las dos rentabilidades es:

$$1 + R_t(2) = 1{,}0625 \times 1{,}0588 = 1{,}1250$$

- Generalizando a k periodos, la rentabilidad simple:

$$R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1$$

$$1 + R_t(k) = \left(1 + R_t\right) \cdot \left(1 + R_{t-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + R_{t-k-1}\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + R_{t-j}\right)$$

Nótese que las rentabilidades no son aditivas

$$R_t(k) \neq \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + R_{t-j}\right)$$

5.2. Rentabilidad de una Cartera

- Se invierten V euros en dos activos, A y B, durante 1 periodo
- X_A : Porcentaje de V invertido en A;
  $V \cdot X_A$ = cantidad monetaria invertida en A
- X_B : Porcentaje de V invertido en B;
  $V \cdot X_B$ = cantidad monetaria invertida en B
- Asumamos que $X_A + X_B = 1$
- La Cartera está definida por los porcentajes X_A y X_B

- Al final del periodo, la inversión en A y en B se ha incrementado del siguiente modo:

$$V\left(1+R_{p,t}\right)=V\left[X_A\left(1+R_{A,t}\right)+X_B\left(1+R_{B,t}\right)\right]$$

$$=V\left[X_A+X_B+X_AR_{A,t}+X_BR_{B,t}\right]$$

$$=V\left[1+X_AR_{A,t}+X_BR_{B,t}\right]$$

$$\cancel{V}\left(\cancel{1}+R_{p,t}\right)=\cancel{V}\left[\cancel{1}+X_AR_{A,t}+X_BR_{B,t}\right]$$

$$\Rightarrow R_{p,t}=X_AR_{A,t}+X_BR_{B,t}$$

La rentabilidad de una cartera es combinación lineal de las rentabilidades simples de sus activos individuales

- Ejemplo. Cartera de acciones de dos empresas.
  - Compramos 10 acciones de cada empresa al final del periodo t-1 a los siguientes precios:
    - o $P_{A,t-1}$ = 85 €
    - o $P_{B,t-1}$ = 30 €

  – El Valor inicial de la cartera será

$$V_{t-1} = (10 \times 85) + (10 \times 30) = 1.150 \text{ €}$$

  – La proporción de cada activo en la cartera es:

$$X_{A,t} = \frac{10 \times 85}{1150} = 0,7391 \qquad X_{B,t} = \frac{10 \times 30}{1150} = 0,2609$$

  – Los precios al final del periodo t son:
    - $P_{A,t}$ = 90 €
    - $P_{B,t}$ = 28 €

- Asumiendo que ambas empresas no pagan dividendos entre el periodo t-1 y el periodo t, las rentabilidades simples individuales de un periodo son:

$$R_{A,t} = \frac{90-85}{85} = 0{,}0588$$

$$R_{B,t} = \frac{28-30}{30} = -0{,}0667$$

– La rentabilidad de la cartera es:

$$R_{p,t} = (0{,}7391 \times 0{,}0588) + (0{,}2609 \times -0{,}0667) = 0{,}02609$$

– Y el valor de la cartera al final del periodo t es:

$$V_t = 1150 \times (1+0{,}02609)^1 = 1.180$$

- En general, para una cartera de *n* activos con una participación de X_i en cada uno de los activos, de tal modo que $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 1$:

$$1+R_{p,t}=\sum_{i=1}^{n}X_i\left(1+R_{i,t}\right)$$

$$R_{p,t}=\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot R_{i,t}$$

$$=X_1R_{1,t}+\ldots+X_nR_{n,t}$$

5.3. Ajuste por Dividendos

- Si llamamos Dt al pago de dividendos entre el periodo t-1 y t:

$$R_t^{total} = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

Rentabilidad Neta Simple Total del mes t (net return)

$$= \text{rentabilidad del capital + rentabilidad (bruta) por dividendo}$$

$$= \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

$$1 + R_t^{total} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}$$

Rentabilidad Bruta Simple Total del mes t (gross return)

- Ejemplo. Rentabilidad total de una inversión en acciones durante un mes.
  - Se compran acciones de una empresa al finalizar el mes t-1 a un precio de 85 € y se venden al final del mes siguiente a un precio de 90 €. Si la empresa paga unos dividendos de 1€ entre t-1 y t, la rentabilidad total neta simple:

$$R_t^{total} = \frac{90+1-85}{85} = \frac{90-85}{85} + \frac{1}{85}$$
$$= 0,0588 + 0,0118$$
$$= 0,0707 \rightarrow 7,07\%$$

La rentabilidad total de la empresa en un mes es del 7,07%. El componente rentabilidad de capital es de 5,88% mientras que el componente rentabilidad por dividendo es de 1,18%

5.4. Ajuste por Inflación

- El cálculo de la rentabilidad real de un activo es un proceso en dos etapas:
  - Deflactar el precio nominal P_t del activo con un índice general de precios.
  - Calcular la rentabilidad con los precios deflactados

$$P_t^{\text{Real}} = \frac{P_t}{IPC_t}$$

$$R_t^{\text{Real}} = \frac{P_t^{\text{Real}} - P_{t-1}^{\text{Real}}}{P_{t-1}^{\text{Real}}} = \frac{\frac{P_t}{IPC_t} - \frac{P_{t-1}}{IPC_{t-1}}}{\frac{P_{t-1}}{IPC_{t-1}}} = \frac{\frac{P_t}{IPC_t}}{\frac{P_{t-1}}{IPC_{t-1}}} - 1$$

$$= \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{IPC_{t-1}}{IPC_t} - 1$$

Alternativamente, podemos definir la inflación del siguiente modo:

$$\pi_t = \Delta\% IPC = \frac{IPC_t - IPC_{t-1}}{IPC_{t-1}}$$

Entonces: $R_t^{\text{Real}} = \dfrac{1 + R_t}{1 + \pi_t} - 1$

- Ejemplo. Rentabilidad real de una inversión en acciones durante un mes.
  - Se compran acciones de una empresa al finalizar el mes t-1 a un precio de 85 € y se venden al final del mes siguiente a un precio de 90 €. Si la empresa no paga dividendos entre t-1 y t, y el IPC es de 1 y 1,01 en t-1 y en t respectivamente, calculamos los precios reales:

$$P_{t-1}^{\text{Real}} = \frac{85}{1} = 85 \qquad P_{t}^{\text{Real}} = \frac{90}{1{,}01} = 89{,}1089$$

La rentabilidad real simple del periodo es:

$$R_{t}^{\text{Real}} = \frac{P_{t}^{\text{Real}} - P_{t-1}^{\text{Real}}}{P_{t-1}^{\text{Real}}} = \frac{89{,}10891 - 85}{85} = 0{,}0483$$

- La rentabilidad nominal y la inflación sobre el mes son:

$$R_t = \frac{90-85}{85} = 0{,}0588 \qquad \pi_t = \frac{1{,}01-1}{1} = 0{,}01$$

La rentabilidad real simple del periodo es:

$$R_t^{\text{Real}} = \frac{1+R_t}{1+\pi_t} - 1 = \frac{1+0{,}0588}{1+0{,}01} - 1 = 0{,}0483$$

Nótese que la rentabilidad real simple es una cifra próxima, pero distinta, a la rentabilidad nominal simple menos la tasa de inflación:

$$R_t^{\text{Real}} \approx R_t - \pi_t = 0{,}0588 - 0{,}01 = 0{,}0488$$

6. Anualizar Rentabilidades

- Es habitual transformar las rentabilidades periódicas en rentabilidades anuales para tener una referencia estándar de comparación.

- Ejemplo:
  - Asumiendo la misma rentabilidad mensual para cada uno de los 12 meses:

Rentabilidad Bruta Anual Compuesta (Compound annual gross return) ➡ $$1 + R_A = 1 + R_t(12) = (1 + R_m)^{12}$$

Rentabilidad Neta Anual Compuesta (Compound annual net return) ➡ $$R_A = (1 + R_m)^{12} - 1$$

- Ejemplo. Rentabilidad anual de una inversión en acciones.
  - Supongamos que la rentabilidad de la inversión en acciones de una empresa durante un mes es del 5,88%. Si asumimos que se puede obtener la misma rentabilidad durante los 12 meses del año, la rentabilidad anual compuesta es:

$$R_A = (1 + R_m)^{12} - 1 = (1{,}0588)^{12} - 1 = 1{,}9850 - 1 = 0{,}9850$$

Un 98,50% anual… *¡¡ Demasiado Buena !!*

- Ejemplo. Rentabilidad anual de una inversión en acciones durante dos años
  - Supongamos que el precio de las acciones de la empresa hace 24 meses es de $P_{t-24} = 50$ €, y el precio hoy es de $P_t = 90$ €. La rentabilidad bruta de los dos años es:

$$1 + R_t(24) = \frac{90}{50} = 1,8$$

Por tanto, la rentabilidad neta de los dos años es de $R_t(24) = 0,8 = 80\%$
La tasa anual compuesta es:

$$(1 + R_A)^2 = 1 + R_t(24) = 1,8 \Rightarrow$$

$$R_A = 1,8^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,3416 - 1 = 0,3416$$

Un 34,16% anual…

7. Rentabilidad Compuesta Continua (o instantánea)

$$r_t = \ln(1+R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Nótese que:

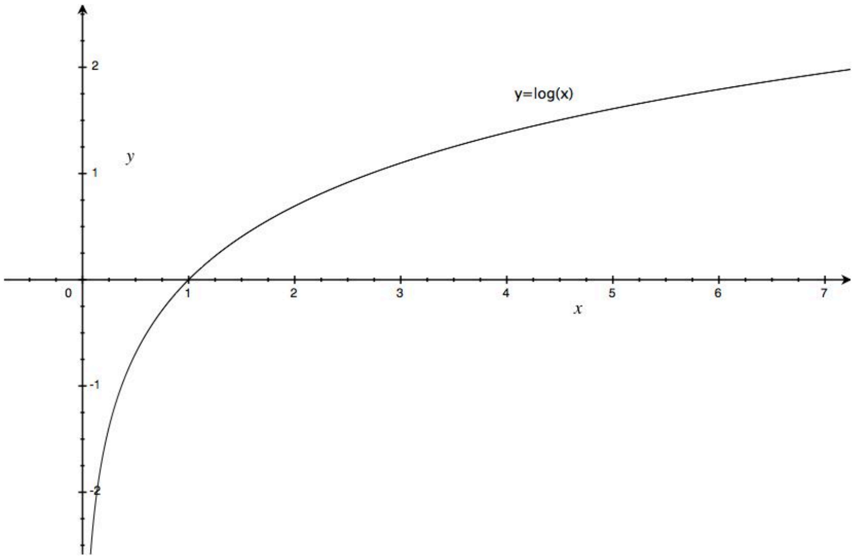
$$\ln(1+R_t) = r_t$$ Dato R_t , podemos obtener r_t

$$R_t = e^{r_t} - 1$$ Dato r_t , podemos obtener R_t

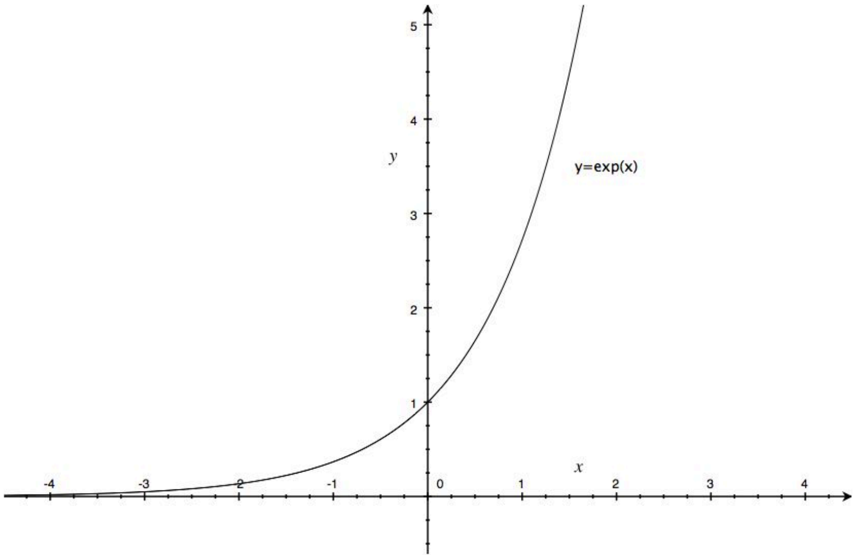
r_t siempre es más pequeño que R_t

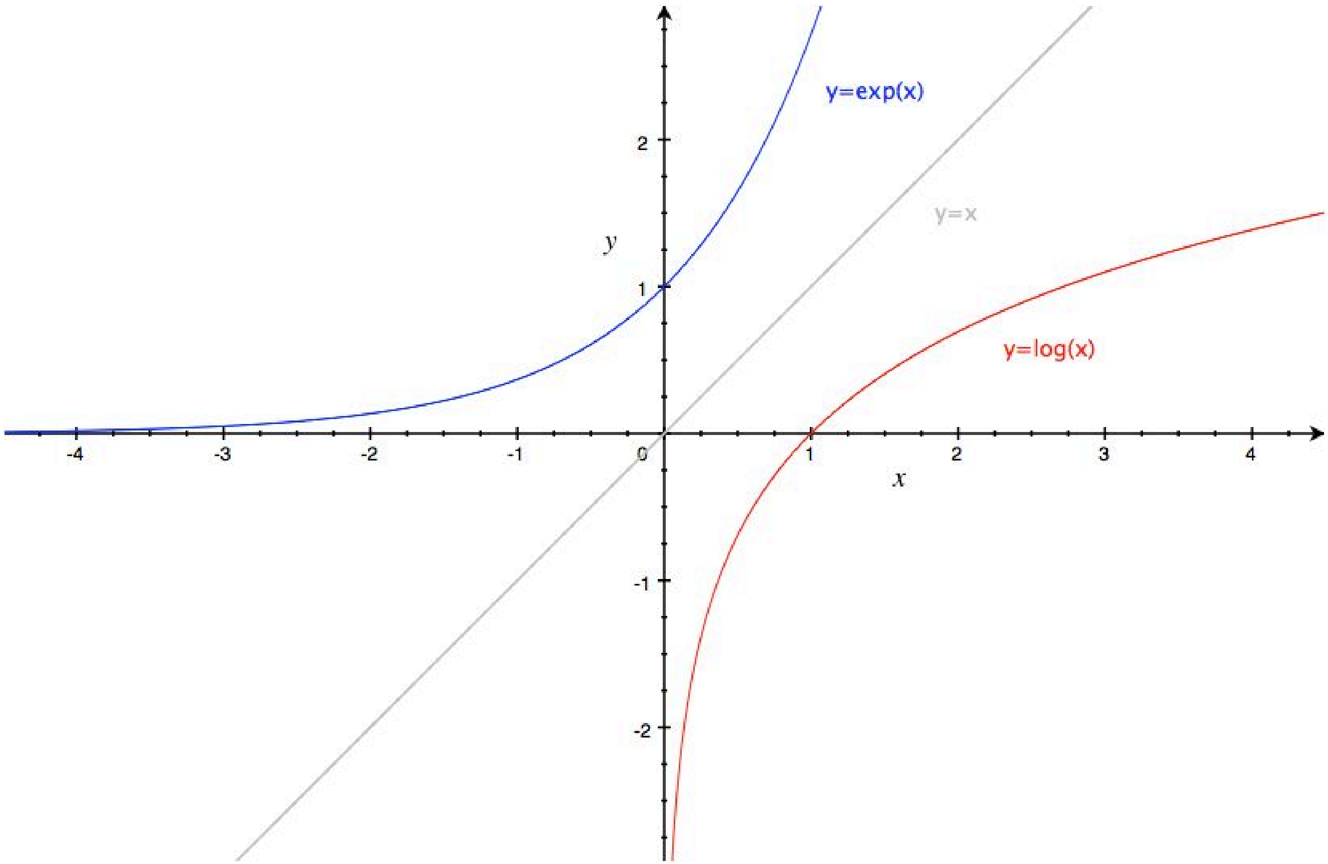
- Repasemos la función logarítmica y la exponencial:
  - $Ln(0) = -\infty$
  - $Ln(1) = 0$
  - $e^{-\infty} = 0$
  - $e^{0} = 1$
  - $e^{1} = 2{,}7183$
  - $Ln(e^{x}) = x$
  - $e^{Ln(x)} = x$
  - $Ln(x \cdot y) = Ln(x) + Ln(y)$
  - $Ln(x / y) = Ln(x) - Ln(y)$
  - $Ln(x^{y}) = y\, Ln(x)$
  - $e^{x} e^{y} = e^{x+y}$
  - $e^{x} e^{-y} = e^{x-y}$
  - $(e^{x})^{y} = e^{x y}$
  - Derivadas: $\dfrac{d\ln(x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$ $\dfrac{de^{x}}{dx} = e^{x}$

Función Logarítmica



Función Exponencial




y=exp(x)
y=x
y=log(x)
y
x
2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

El concepto de la rentabilidad compuesta continua…

$$e^{r_t} = e^{\ln(1+R_t)} = e^{\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

$$e^{r_t} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

$$e^{r_t} \cdot P_{t-1} = P_t$$

r_t es la tasa de rentabilidad compuesta continuamente que transforma los precios de t-1 en precios de t.

Si R_t es muy pequeño, entonces: $r_t = \ln(1+R_t) \approx R_t$

Justificación. Para una función f(x), la expansión de Taylor de primer orden alrededor del punto x = x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{d}{dx} f(x_0)(x - x_0) + \text{resto}$$

Asumamos que:

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x_0) = \frac{d}{dx}\ln(1+x_0) = \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Entonces: $\ln(1+x) \approx \ln(1) + 1 \cdot x = 0 + x = x$

En la práctica, solemos transformar las series de precios en logaritmos:

Si denotamos el logaritmo con una letra minúscula: $p_t \equiv \ln(P_t)$

$$
\begin{aligned}
r_t &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \\
&= \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \\
&= p_t - p_{t-1} \\
&= \text{diferencia de precios en logaritmos}
\end{aligned}
$$

- Ejemplo. Cálculo de la Rentabilidad Compuesta Continua
  - Supongamos que P_{t-1} = 85 €, P_t = 90 € y R_t = 0,0588 €. La rentabilidad compuesta continua mensual puede calcularse de dos formas:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln(1 + 0{,}0588) = 0{,}0571$$

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln(90) - \ln(85) = 4{,}4998 - 4{,}4427 = 0{,}0571$$

Nótese que r_t es ligeramente más pequeño que R_t

7.1. Rentabilidades Compuestas Continuas (CC) Multiperiodo

- Rentabilidad CC en dos periodos

$$
\begin{aligned}
r_t(2) &= \ln\left(1 + R_t(2)\right) \\
&= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right) = \\
&= p_t - p_{t-2}
\end{aligned}
$$

Nótese que:

$$
\begin{aligned}
e^{r_t(2)} &= e^{\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right)} \\
&\Rightarrow P_{t-2}e^{r_t(2)} = P_t
\end{aligned}
$$

$r_t(2)$ es la tasa de rentabilidad compuesta continuamente que transforma los precios de t-2 en precios de t.

- Resultado: **Las rentabilidades compuestas continuas son aditivas**

Multiplicamos y dividimos por P_{t-1}

$$r_t(2) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-2}}\frac{P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\right) =$$

$$= r_t + r_{t-1}$$

- Ejemplo. Cálculo de la Rentabilidad Compuesta Continua en dos meses
  - Supongamos que P_{t-2} = 80 €, P_{t-1} = 85 €, P_t = 90 €. La rentabilidad compuesta continua en dos meses puede calcularse de dos formas:

[1]. Tomando diferencias en la serie logarítmica de precios

$$r_t(2) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-2}) = \ln(90) - \ln(80) = 4{,}4998 - 4{,}3820 = 0{,}1178$$

[2]. Sumando las dos rentabilidades Continuas Compuestas mensuales

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln(90) - \ln(85) = 0{,}0571$$

$$r_{t-1} = \ln(P_{t-1}) - \ln(P_{t-2}) = \ln(85) - \ln(80) = 0{,}0607$$

$$r_t(2) = r_t + r_{t-1} = 0{,}0571 + 0{,}0607 = 0{,}1178$$

Nótese que $r_t(2)$ = 0,1178 < $R_t(2)$ = 0,1250

- Resultado General

$$
\begin{aligned}
r_t(k) &= \ln\left(1 + R_t(k)\right) \\
&= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j} \\
&= r_t + r_{t-1} + \ldots + r_{t-k+1}
\end{aligned}
$$

7.2. Rentabilidad Compuesta Continua de una Cartera

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} X_i R_{i,t}$$

$$r_{p,t} = \ln(1 + R_{p,t}) = \ln\left(1 + \sum_{i=1}^{n} X_i R_{i,t}\right) \neq \sum_{i=1}^{n} X_i r_{i,t}$$

La Rentabilidad Compuesta Continua de una cartera no tiene la propiedad aditiva

Nótese que si: $R_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} X_i R_{i,t}$ no es muy grande, entonces: $r_{p,t} \approx R_{p,t}$

De lo contrario: $r_{p,t} < R_{p,t}$

- Ejemplo. Cálculo de la rentabilidad CC de una cartera con dos empresas
  - Supongamos que R_A = 0,0588, R_B = -0,0503, X_A = 0,25, X_B = 0,75.

$$R_{p,t} = X_A R_{A,t} + X_B R_{B,t} = -0{,}02302$$

≠

La Rentabilidad Compuesta Continua de la cartera será:

$$r_{p,t} = \ln(1 + R_{p,t}) = \ln(1 - 0{,}02302) = \ln(0{,}977) = -0{,}02329$$

Nótese que

$$r_{A,t} = \ln(1 + 0{,}0588) = 0{,}05714$$

$$r_{B,t} = \ln(1 + 0{,}0503) = -0{,}05161$$

$$X_A r_{A,t} + X_B r_{B,t} = -0{,}02442 \neq r_{p,t}$$

7.3. Ajuste por inflación en la Rentabilidad Compuesta Continua

$$r_t^{\text{Real}} = \ln\left(1 + R_t^{\text{Real}}\right)$$

$$1 + R_t^{\text{Real}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{IPC_{t-1}}{IPC_t}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r_t^{\text{Real}} &= \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{IPC_{t-1}}{IPC_t}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \ln\left(\frac{IPC_{t-1}}{IPC_t}\right) \\ &= \ln\left(P_t\right) - \ln\left(P_{t-1}\right) + \ln\left(IPC_{t-1}\right) - \ln\left(IPC_t\right) \\ &= r_t - \pi_t^{cc} \end{aligned}$$

Siendo,

$$r_t = \ln\left(P_t\right) - \ln\left(P_{t-1}\right)$$ Rentabilidad Compuesta Continua Nominal

$$\pi_t^{cc} = \ln\left(IPC_t\right) - \ln\left(IPC_{t-1}\right)$$ Inflación Compuesta Continua

- Ejemplo. Cálculo de la rentabilidad CC real
  - Supongamos que R_t = 0,0588, π_t = 0,01, R_t^{Real} = 0,0483

La Rentabilidad Compuesta Continua Real es:

$$r_t^{\text{Real}} = \ln\left(1 + R_t^{\text{Real}}\right) = \ln\left(1 + 0{,}0483\right) = 0{,}047$$

O de igual forma:

$$r_t^{\text{Real}} = r_t - \pi_t^{cc} = \ln(1{,}0588) - \ln(1{,}01) = 0{,}047$$