

TEMA 3. MODELO SIMPLIFICADO DE SHARPE

Dr. Borja Amor Tapia

borja.amor@unileon.es

Área de Economía Financiera

William F. Sharpe



- Premio Nobel de Economía en 1990 junto a Merton Miller y Harry Markowitz por sus aportaciones a la teoría de la economía financiera

1. El Modelo de Mercado: Análisis de los Activos

1.1. Rentabilidad y Riesgo

1.2. Covarianza entre Rentabilidades

1.3. Clasificación de los Activos según su Beta

- Para aplicar el modelo de Markowitz es necesario disponer de un número elevado de estimaciones.
- Con el objeto de simplificar el modelo, Sharpe publica en 1963 un nuevo modelo, denominado indistintamente “**Modelo de Mercado**”, “**Modelo de Índice único**” o “**Modelo de Sharpe**”.
- Este modelo no solo simplifica el del Markowitz, sino que se introduce una importante descomposición del riesgo total de cualquier activo y de cualquier cartera, así como una clasificación de los títulos y carteras en función del impacto que tenga sobre su rendimiento esperado una modificación en un determinado índice bursátil que se tome como referencia.

1.1. Rentabilidad y Riesgo

$$r_i = a_i + \beta_i r_M + u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- En general, para cualquier momento t del tiempo:

$$r_{it} = a_i + \beta_i r_{Mt} + u_{it} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T$$

- En el modelo se introducen un conjunto de **hipótesis**, propias del modelo de regresión lineal simple, y relacionadas con las perturbaciones aleatorias. Así, para cada título i y en cualquier período de tiempo t , tenemos:

- 1. Su **esperanza matemática** es nula, ya que se supone que en el error aleatorio se incluyen múltiples factores individualmente irrelevantes y estadísticamente independientes, que actúan de forma aditiva y compensándose unos con otros:

$$E(u_i) = 0$$

- 2. Las **perturbaciones aleatorias no dependen de la rentabilidad del mercado**, por lo que ambas variables se distribuyen de forma estadísticamente independiente, siendo, pues, su covarianza nula:

$$\text{cov}(u_i, r_M) = \sigma_{u_i M} = E[u_i(r_M - E_M)] = 0$$

- **3. Las perturbaciones aleatorias de dos activos** cualesquiera no influyen entre sí, por lo que **no están correlacionadas**. Por tanto su covarianza es nula:

$$\text{cov}(u_i, u_j) = \sigma_{u_i u_j} = E(u_i, u_j) = 0$$

Esta hipótesis implica que la única razón para que las rentabilidades de los títulos varíen conjuntamente es un movimiento conjunto con el mercado.

- **4. La perturbación aleatoria** de un período **temporal** no influye ni está influenciada por la de otro período, por lo que son **independientes**:

$$\text{cov}(u_{it}, u_{it'}) = \sigma_{u_{it} u_{it'}} = E(u_{it}, u_{it'}) = 0 \quad \forall t \neq t'$$

- **5.** La perturbación aleatoria sigue una distribución independiente de t con **varianza constante**:

$$E(u_{it})^2 = \sigma_{u_i}^2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad \forall t = 1, 2, \dots, T$$

- **6.** La perturbación aleatoria sigue una **distribución normal**:

$$u_i \rightarrow N(0, \sigma_{u_i}^2) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- Interpretación del riesgo de activo mediante su descomposición en dos sumandos:
 - riesgo de mercado, y
 - riesgo específico

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ui}^2$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_{si}^2 + \sigma_{ui}^2$$



1.2. Covarianza entre Rentabilidades

- La matriz de varianzas-covarianzas del modelo de mercado es:

$$S_M = \left\{ \left(\sigma_{ij}; \sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2, \forall i \neq j \right) \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \beta_1 \beta_2 \sigma_M^2 & \beta_1 \beta_3 \sigma_M^2 & \dots & \beta_1 \beta_n \sigma_M^2 \\ \beta_2 \beta_1 \sigma_M^2 & \sigma_2^2 & \beta_2 \beta_3 \sigma_M^2 & \dots & \beta_2 \beta_n \sigma_M^2 \\ \beta_3 \beta_1 \sigma_M^2 & \beta_3 \beta_2 \sigma_M^2 & \sigma_3^2 & \dots & \beta_3 \beta_n \sigma_M^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n \beta_1 \sigma_M^2 & \beta_n \beta_2 \sigma_M^2 & \beta_n \beta_3 \sigma_M^2 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

2. El Modelo de Mercado: Análisis de las Carteras

2.1. Rentabilidad y Riesgo

2.2. Determinación de las Carteras
Eficientes y selección de la Cartera Óptima

2.3. Las Carteras Mixtas en el Modelo de
Mercado

2.1. Rentabilidad y Riesgo

- La rentabilidad esperada de una cartera verifica:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i)$$

- En notación matricial: $E_p = X'E$

$$\sigma_p^2 = X'S_M X$$

$$S_M = \{(\sigma_{ij}; \sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2, \forall i \neq j)\}$$

- El riesgo total de una cartera, medido por la varianza, se puede descomponer en dos sumandos:
 - Riesgo sistemático o de mercado
 - Riesgo propio o específico

$$\sigma_p^2 = \sigma_{sp}^2 + \sigma_{up}^2$$

- El riesgo de mercado de una cartera, σ_{sp}^2 , mide la parte del riesgo atribuible a la incertidumbre común a todo el sistema económico y depende de la variabilidad de la rentabilidad del mercado, de la beta de cada activo y del peso del mismo en la cartera. Se trata de un riesgo presente sistemáticamente, pues no es posible su eliminación.

$$X_u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad S_u = \begin{pmatrix} \sigma_{u1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{u2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{un}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_M^2 \end{pmatrix}$$

- Por tanto, recordando la multiplicación de matrices, tenemos:

$$\sigma_p^2 = X_u' S_u X_u$$



2.2. Determinación de las Carteras Eficientes y selección de la Cartera Óptima

- En el modelo de mercado, de acuerdo con las expresiones correspondientes al mismo, relativas a la rentabilidad y al riesgo de una cartera, son aplicables los conceptos ya estudiados previamente sobre carteras eficientes y selección de la cartera óptima.
- Se denomina grado de diversificación de una cartera al porcentaje que representa su riesgo sistemático sobre el riesgo de la misma:

$$d_p = \frac{\sigma_{sp}^2}{\sigma_p^2} = \frac{\beta_p^2 \sigma_M^2}{\sigma_p^2}$$

- De acuerdo con esta definición, el grado de diversificación coincide con el coeficiente de determinación: $d_p = R^2$



2.3. Las Carteras Mixtas en el Modelo de Mercado

- El activo libre de riesgo es un título que carece de cualquier clase de riesgo, tanto sistemático como específico, por lo que, en el contexto del modelo de mercado, para un activo de rentabilidad r_f se verifica:

$$a_f = r_f$$

$$\sigma_f^2 = 0$$

$$\sigma_{uf}^2 = 0$$

$$\beta_f = 0$$

- La cartera óptima arriesgada T para combinar con el activo libre de riesgo, es la de máxima prima relativa al riesgo.

- En las carteras mixtas se verifica:

$$r_p = yr_T + (1 - y)r_f$$

- La rentabilidad de la cartera arriesgada T verifica:

$$r_T = a_T + \beta_T r_M + u_T$$

$$a_T = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

$$\beta_T = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i$$

$$u_T = \sum_{i=1}^n x_i u_i$$

- Al sustituir tenemos

$$r_p = ya_T + y\beta_T r_M + yu_T + (1-y)r_f$$

- Por tanto

$$r_p = a_p + \beta_p r_M + u_p + (1-y)r_f$$

$$a_p = ya_T$$

$$\beta_p = y\beta_T$$

$$u_p = yu_T$$

- Por tanto, la rentabilidad esperada y el riesgo de la cartera mixta p , verifican:

$$E_p = a_p + \beta_p r_M + (1 - y)r_f$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 = (y\beta_T)^2 \sigma_M^2 = y^2 \beta_T^2 \sigma_M^2 = y^2 \sigma_{sT}^2$$

$$\sigma_{up}^2 = y^2 \sigma_{uT}^2$$

- En consecuencia:

$$\sigma_p^2 = y^2 \sigma_{sp}^2 + y^2 \sigma_{up}^2 = y^2 \sigma_T^2$$