Problemas de transporte, asignación y trasbordo

1. Plantear un problema de transporte

- Tiene como objetivo encontrar el mejor plan de distribución, generalmente minimizando el coste.
- Un problema está *equilibrado* o balanceado si la oferta es igual a la demanda. En ese caso, en las restricciones se cumplirán las igualdades correspondientes.
- Para aplicar el simplex de transporte necesitamos que el problema esté equilibrado. Si no lo está, añadiremos una demanda ficticia con costes nulos o una oferta ficticia con costes de penalización.
- En una tabla representaremos el coste que supone transportar cada unidad desde i hasta j.

1. Plantear un problema de transporte

Demandantes / Oferentes	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Oferta kWh ($\cdot 10^6$)
Planta 1	8	6	10	9	35
Planta 2	9	12	13	7	50
Planta 3	14	9	16	5	40
Demanda	45	20	30	30	

1. Plantear un problema de transporte

Modelo matemático.

x_{ij} representa la energía transportada desde la planta i hasta la ciudad j

- Función a optimizar:

  $\text{Min } w = 8x_{11}+6x_{12}+10x_{13}+9x_{14}+9x_{21}+12x_{22}+13x_{23}+7x_{24}+14x_{31}+ 9x_{32}+16x_{33}+5x_{34}$

- Restricciones de demanda

  $x_{11}+x_{21}+x_{31} \geq 45$

  $x_{12}+x_{22}+x_{32} \geq 20$

  $x_{13}+x_{23}+x_{33} \geq 30$

  $x_{14}+x_{24}+x_{34} \geq 30$

- Restricciones de oferta

  $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \leq 35$

  $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \leq 50$

  $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \leq 40$

1. Plantear un problema de transporte

Las soluciones del problema las representamos en un *Cuadro de Transporte*:

8	6 10	10 25	9
9 45	12	13 5	7
14	9 10	16	5 30

2. El método simplex para el transporte

- Para resolver un problema de transporte mediante el simplex, debemos seguir los siguientes pasos:
  - **Equilibrar** el problema
  - Hallar una **solución inicial**
  - Realizar las **iteraciones** o pivoteos necesarios hasta llegar a la solución final

Equilibrado del problema

- Un problema está equilibrado si la demanda es igual a la oferta.
- Si en un problema equilibrado todas las variables cumplen todas las restricciones menos una, la restante también se cumple.
- Circuito cerrado. Para que un circuito sea cerrado se debe cumplir que:
  - La trazada sea cerrada
  - Dos celdas consecutivas siempre están en la misma fila o columna
  - Tres celdas consecutivas no pueden estar en la misma fila o columna

Cálculo de una solución inicial

- Existen tres métodos para calcular una solución inicial:
  - **Esquina Noroeste**. Es el más simple, pero proporciona una primera solución no muy buena. No tiene en cuenta los costes.
  - **Mínimo coste**. La aproximación es mejor que en el caso anterior.
  - **Método de Vogel.** Proporciona la mejor solución inicial, aunque es el más tedioso y requiere calcular multas.

Cálculo de una solución inicial: esquina NO

- Método:
  - Empezando en la celda situada en la esquina superior izquierda escribimos el número menor entre el correspondiente a la fila o a la columna.
  - Si hemos empleado el número de la fila, debemos tachar dicha fila y restar dicho número del número correspondiente a la columna, y viceversa.
  - Nos volvemos a situar en la esquina superior izquierda y repetimos el procedimiento.
  - Al finalizar, el número de celdas rellenadas debe ser igual al numero de filas más el número de columnas menos uno.
  - Nota: cuando solo quede una fila/columna podemos escribir directamente los números.

Cálculo de una solución inicial: esquina NO

2				3 ~~5~~
				1
				3
~~2~~	4	2	1	

Cálculo de una solución inicial: esquina NO

2	3			~~3~~
				1
				3
~~2~~	~~4~~	2	1	
	1			

Cálculo de una solución inicial: esquina NO

2	3			~~3~~
	1			~~1~~
				3
~~2~~	~~1~~	2	1	

Cálculo de una solución inicial: esquina NO

2	3			3
	1			1
	0	2	1	3
2	1	2	1	$f+c-1=6$

Cálculo de una solución inicial: mínimo coste

- Método:
  - Nos situamos en la celda que tenga el mínimo coste.
  - Realizamos el mismo proceso que en el método anterior de escribir el número y tachar la fila o columna correspondiente.
  - Volvemos a colocarnos en la celda de mínimo coste y continuamos hasta llegar a la solución.

Cálculo de una solución inicial: mínimo coste

8	6	10	9	35
9	12	13	7	50
14	9	16	5 30	10 40
45	20	30	30	

Cálculo de una solución inicial: mínimo coste

8	6 20	10	9	15 ~~35~~
9	12	13	7	50
14	9	16	5 30	10
45	~~20~~	30	~~30~~	

Cálculo de una solución inicial: mínimo coste

8 15	6 20	10	9	~~15~~
9	12	13	7	50
14	9	16	5 30	10
~~45~~ 30	~~20~~	30	~~30~~	

Cálculo de una solución inicial: mínimo coste

8 15	6 20	10	9	~~15~~
9 30	12	13	7 	20 ~~50~~
14	9	16	5 30	10
~~30~~	~~20~~	30	~~30~~	

Cálculo de una solución inicial: mínimo coste

8 15	6 20	10	9	~~35~~
9 30	12	13 20	7	20 ~~50~~
14	9	16 10	5 30	~~40~~
~~45~~	~~20~~	30	~~30~~	$f+c-1=6$

Cálculo de una solución inicial: método de Vogel

- Método:
  - La multa de cada fila o columna es la diferencia entre los dos menores costes de las celdas de dicha fila/columna.
  - Calculamos las multas de cada fila y de cada columna.
  - Escogemos la fila o columna de mayor multa.
  - Escogemos la columna o fila de menor coste.
  - Procedemos como en los casos anteriores.
  - Habrá que recalcular las multas después de tachar celdas.

Cálculo de una solución inicial: método de Vogel

6	7	8	10	1
15	80	78	15	63
15	5	5		
9	73	70		

Cálculo de una solución inicial: método de Vogel

6	7 5	8	5 ~~10~~	2 ~~1~~
15	80	78	15	63
15	~~5~~	5		
9	~~73~~	70		

Cálculo de una solución inicial: método de Vogel

6	7 5	8 5	0 ~~5~~	2
15	80	78	15	63
15	~~5~~	~~5~~		
9	~~73~~	70		

Cálculo de una solución inicial: método de Vogel

0 (6)	5 (7)	5 (8)	0	
15 (15)	(80)	(78)	15	63
15	~~5~~	~~5~~		
9	73	70		

Resolución iterativa del problema

Partiremos de una solución inicial:

8 35	6	10	9
9 10	12 20	13 20	7
14	9	16 10	5 30

Resolución iterativa del problema

VB		VNB
$c_{11}=0=u_1+v_1-8$	$u_1=0$	$c_{12}=u_1+v_2-6=5$
$c_{21}=0=u_2+v_1-9$	$u_2=1$	$c_{13}=u_1+v_3-10=2$
$c_{22}=0=u_2+v_2-12$	$u_3=4$	$c_{14}=u_1+v_4-9=-8$
$c_{23}=0=u_2+v_3-13$	$v_1=8$	$c_{24}=u_2+v_4-7=-5$
$c_{33}=0=u_3+v_3-16$	$v_2=11$	$c_{31}=u_3+v_1-14=-2$
$c_{34}=0=u_3+v_4-5$	$v_3=12$	$c_{32}=u_3+v_2-9=6$
	$v_4=1$	

Como estamos minimizando, la condición de parada es que $c_{ij} \leq 0$

Resolución iterativa del problema

- Entra la VNB más positiva (c_{32}). Para hallar la nueva iteración seguiremos los siguientes pasos:
  - Hacemos un circuito cerrado con la variable que entra
  - Nombramos alternativamente par e impar a las celdas
  - Tomamos como valor de λ el de la celda impar más pequeña, en este caso λ=10
  - Sumamos λ a las celdas pares y restamos λ de las impares

Resolución iterativa del problema

10 20	I -10	30 20	P +10
10	P +10	10	I -10

En caso de existir dos celdas de valor mínimo, una de ellas conservará el valor cero

Resolución iterativa del problema

[8] 35	[6]	[10]	[9]
[9] 10	[12] 10	[13] 30	[7]
[14]	[9] 10	[16]	[5] 30

Resolución iterativa del problema

VB		VNB
$c_{11}=0=u_1+v_1-8$	$u_1=0$	$c_{12}=u_1+v_2-6=5$
$c_{21}=0=u_2+v_1-9$	$u_2=1$	$c_{13}=u_1+v_3-10=2$
$c_{22}=0=u_2+v_2-12$	$u_3=-2$	$c_{14}=u_1+v_4-9=-2$
$c_{23}=0=u_2+v_3-13$	$v_1=8$	$c_{24}=u_2+v_4-7=1$
$c_{32}=0=u_3+v_2-9$	$v_2=11$	$c_{31}=u_3+v_1-14=-8$
$c_{34}=0=u_3+v_4-5$	$v_3=12$	$c_{33}=u_3+v_3-16=-6$
	$v_4=7$	

Entra la variable c_{12}

Resolución iterativa del problema

25 35	I -10	10	P +10
20 10	P +10	10	I -10

Resolución iterativa del problema

8 25	6 10	10	9
9 20	12	13 30	7
14	9 10	16	5 30

Resolución iterativa del problema

VB		VNB
$c_{11}=0=u_1+v_1-8$	$u_1=0$	$c_{13}=u_1+v_3-10=2$
$c_{12}=0=u_1+v_2-6$	$u_2=1$	$c_{14}=u_1+v_4-9=-7$
$c_{21}=0=u_2+v_1-9$	$u_3=3$	$c_{22}=u_2+v_2-12=-5$
$c_{23}=0=u_2+v_3-13$	$v_1=8$	$c_{24}=u_2+v_4-7=-4$
$c_{32}=0=u_3+v_2-9$	$v_2=6$	$c_{31}=u_3+v_1-14=-3$
$c_{34}=0=u_3+v_4-5$	$v_3=12$	$c_{33}=u_3+v_3-16=-1$
	$v_4=2$	

Entra la variable c_{13}

Resolución iterativa del problema

En este caso las celdas escogidas para el circuito cerrado no son contiguas. El circuito será un rectángulo:

~~25~~	I	10	25	P
	-25			+25
45 20	P		5 30	I
	+25			-25

Resolución iterativa del problema

- Con lo que ya tenemos:

	8	10	6	25	10		9
45	9		12	5	13		7
	14	10	9		16	30	5

Resolución iterativa del problema

Donde:

<u>VB</u>		<u>VNB</u>
$c_{12}=0=u_1+v_2-6$	$u_1=0$	$c_{11}=u_1+v_1-8=-2$
$c_{13}=0=u_2+v_1-10$	$u_2=3$	$c_{14}=u_1+v_4-9=-7$
$c_{21}=0=u_2+v_1-9$	$u_3=3$	$c_{22}=u_2+v_2-12=-3$
$c_{23}=0=u_2+v_3-13$	$v_1=6$	$c_{24}=u_2+v_4-7=-2$
$c_{32}=0=u_3+v_2-9$	$v_2=6$	$c_{31}=u_3+v_1-14=-5$
$c_{34}=0=u_3+v_4-5$	$v_3=10$	$c_{33}=u_3+v_3-16=-3$
	$v_4=2$	

Dado que todas las $c_{ij} \leq 0$ hemos llegado a la solución óptima

3. Problemas de asignación

- En este tipo de problemas cada trabajo se asocia por completo a una máquina. La variable x_{ij} toma los valores 1 si se asigna la máquina i al trabajo j y 0, en caso contrario.

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3	Trabajo 4
Máquina 1	14	5	8	7
Máquina 2	2	12	6	5
Máquina 3	7	8	3	9
Máquina 4	2	4	6	10

3. Problemas de asignación

Modelo matemático

- Función a optimizar:

  $\text{Min } w = 14x_{11}+5x_{12}+8x_{13}+7x_{14}+2x_{21}+12x_{22}+6x_{23}+$
  $5x_{24}+7x_{31}+8x_{32}+3x_{33}+9x_{34}+2x_{41}+4x_{42}+6x_{43}+10x_{44}$

Restricciones de la máquina:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$

Restricciones del trabajo:

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$

3. Problemas de asignación

- Método Húngaro.
  - En una matriz de costes hallamos el mínimo de cada fila
  - Se resta el mínimo de cada fila.
  - Repetimos el procedimiento para las columnas

14	5	8	7	5
2	12	6	5	2
7	8	3	9	3
2	4	6	10	2

3. Problemas de asignación

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

0 0 0 2

→

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

3. Problemas de asignación

- Ahora debemos cubrir todos los ceros con el mínimo número "m" posible de líneas.
  - Si n=dimensión de la matriz, se termina el algoritmo
  - Si n<dimensión, necesitaremos un paso adicional
  - En este caso n=3<4

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

3. Problemas de asignación

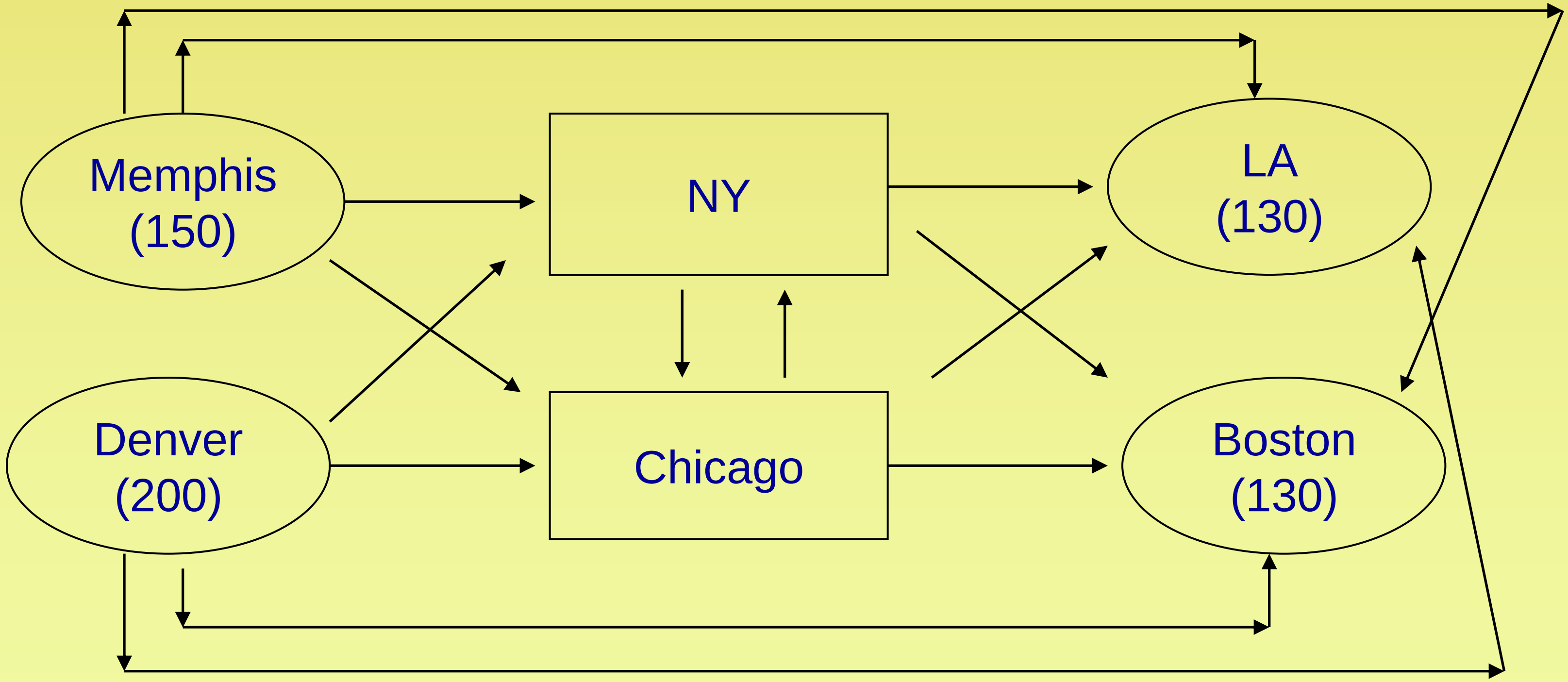
- Al menor de los números no cubiertos lo denominamos k (k=1).
- Restamos k de los números no cubiertos y lo sumamos a los que estén cubiertos por dos líneas, y repito el paso anterior.
- Como n=4=dimensión de la matriz finaliza el algoritmo.
- Ahora escojo 4 ceros de manera que tenga un cero por fila y columna. Dichas celdas corresponden a las x_{ij} de valor unitario.

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

$$x_{12}=x_{24}=x_{33}=x_{41}=1$$

4. Problemas de trasbordo

- En los problemas de trasbordo las unidades pueden pasar por lugares intermedios antes de llegar a su destino.



4. Problemas de trasbordo

Destino / Origen	Memphis	Denver	NY	Chicago	LA	Boston
Memphis	0	-	8	13	25	28
Denver	-	0	15	12	26	25
NY	-	-	0	6	16	17
Chicago	-	-	6	0	14	16
LA	-	-	-	-	0	-
Boston	-	-	-	-	-	0

4. Problemas de trasbordo

- Memphis y Denver son ciudades origen.
- LA y Boston son ciudades destino.
- NY y Chicago son ciudades de trasbordo: son tanto origen como destino.
- Como la oferta es superior a la demanda incluimos un demandante ficticio con costes nulos.
- La máxima cantidad que puede pasar (entrar o salir) por cada punto de trasbordo es igual a la suma de las ofertas.

4. Problemas de trasbordo

Destino / Origen	NY	Chicago	LA	Boston	Ciudad Ficticia
Memphis	8 130	13	25	28	0 20
Denver	15	12	26	25 130	0 70
NY	0 220	6	16 130	17	0
Chicago	6	0 350	14 0	16	0