

# TEORÍA DE CONTROL

## Tema 4. Diagramas de Bloque

### Introducción

Un diagrama de bloque es una simplificación, una representación gráfica de un sistema físico que ilustra las relaciones funcionales entre los componentes del sistema. Este nos permite evaluar las contribuciones individuales de los componentes del sistema.

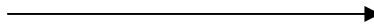
### Elementos de un diagrama de bloques

#### 1. Bloques



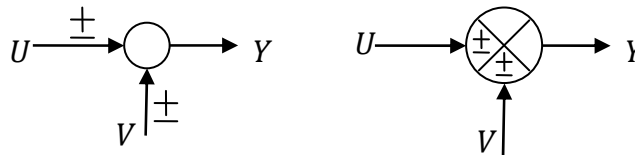
Es el elemento principal de un diagrama de bloques ya que representa los componentes del sistema. Es el elemento que contiene la relación entre la entrada y la salida del componente del sistema, ya sea con un nombre o directamente la función de transferencia del elemento.

#### 2. Líneas



Son las que representan la trayectoria de las señales que transportan la información y energía. Dicho de otra manera indican la conexión de una variable entre diversos bloques. Se usan por lo general flechas para indicar el sentido de la señal.

#### 3. Punto de suma

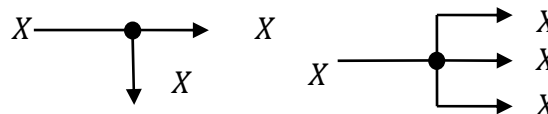


Este se representa por un círculo e indica que la salida es igual a la suma de las dos señales que entran, o la resta en caso de que aparezca el signo negativo:

$$Z = X \pm Y$$

Existen dos nomenclaturas posibles, ya sea con los signos al exterior, en cuyo caso la ausencia de signo indica una suma, o separando el círculo en segmentos mediante una X y asignando el signo dentro del segmento correspondiente.

#### 4. Punto de ramificación o de reparto



Es el lugar donde la señal se separa para seguir dos o más trayectorias. En otras palabras indican que una variable se usará en varios bloques.

## Ejemplos de diagrama de bloques

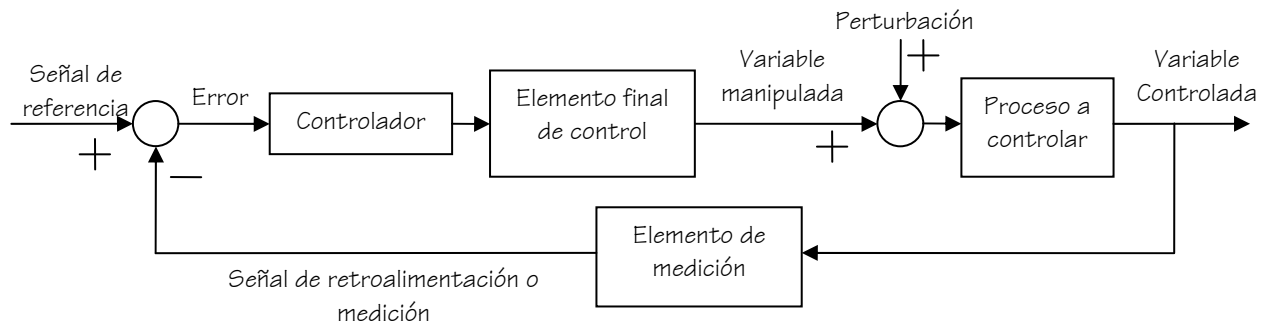


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

El cual podría también presentar la forma siguiente:

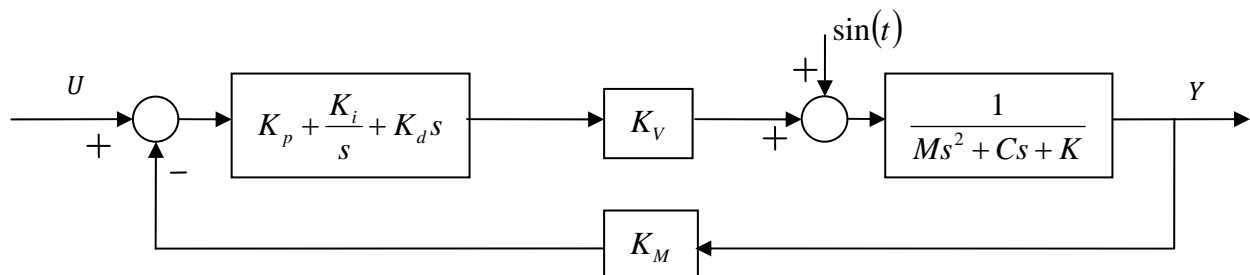
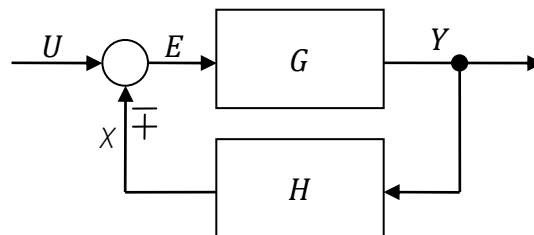


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado para un sistema mecánico

## Forma canónica de un sistema de control retroalimentado



En este diagrama se pueden definir lo siguiente:

$G$ : Función de transferencia directa

$H$ : Función de transferencia de retroalimentación

$GH$ : Función de transferencia de lazo abierto

$\frac{X}{U}$ : Razón de retroalimentación primaria

$\frac{Y}{U}$ : Función de transferencia de lazo cerrado

$\frac{E}{U}$ : Razón o señal impulsora, o razón de error

En este caso la función de transferencia se puede obtener como sigue:

$$Y = E \times G \quad (1)$$

$$X = Y \times H \quad (2)$$

$$E = U \mp X \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1)

$$Y = (U \mp X)G \quad (4)$$

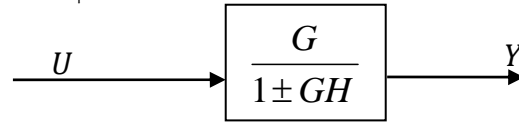
Sustituyendo (2) en (4)

$$Y = (U \mp YH)G \quad (5)$$

$$Y(1 \pm GH) = UG$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

El diagrama de bloque de este sistema puede transformarse entonces en:

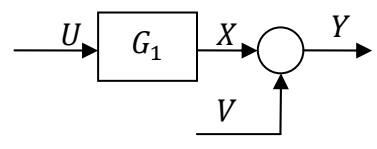
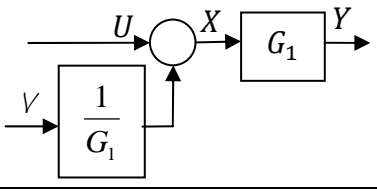
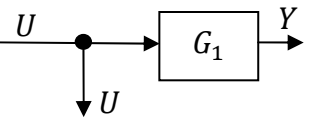
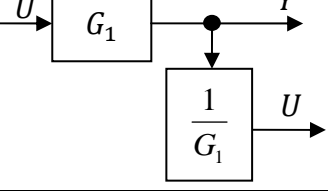
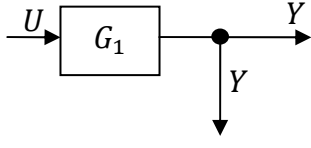
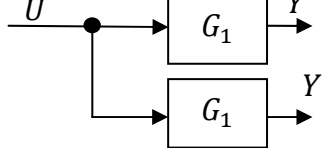
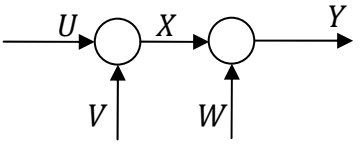
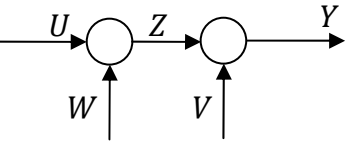
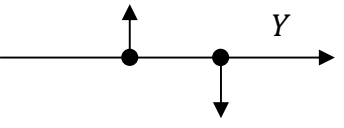
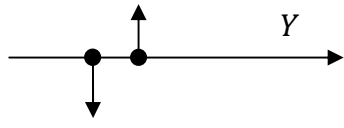
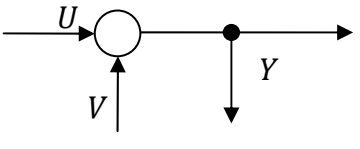
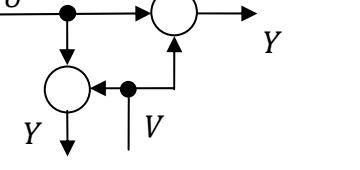
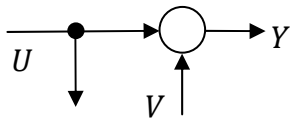
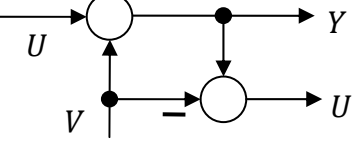


## Álgebra de bloques

Los diagramas de bloques de sistemas de control complicados se pueden simplificar usando una serie de teoremas de transformación, las cuales se obtienen fácilmente por deducción del significado de los elementos.

### Teoremas de transformación

| Diagrama de Bloque | Diagrama de bloque equivalente                      | Ecuación   |
|--------------------|---|--|
| 1                  | Combinación de bloques en cascada                   |  |
|                    |   | $V = G_1U; \quad Y = G_2V$<br>$Y = (G_1G_2)U$                              |
| 2                  | Combinación de bloques en paralelo                  |  |
|                    |   | $V = G_1U; \quad W = G_2U$<br>$Y = V \pm W$<br>$Y = (G_1 \pm G_2)U$        |
| 3                  | Retroalimentación negativa                          |  |
|                    |   | $Z = G_2Y; \quad Y = G_1X$<br>$X = U - Z$<br>$Y = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}U$ |
| 4                  | Retroalimentación positiva                          |  |
|                    |   | $Z = G_2Y; \quad Y = G_1X$<br>$X = U + Z$<br>$Y = \frac{G_1}{1 - G_1G_2}U$ |
| 5                  | Movimiento de un punto de suma después de un bloque |  |
|                    |   | $X = G_1U; \quad Z = G_1V$<br>$Y = G_1(U + V)$                             |

|   |  |  |
|---|--|--|
| 6   | Movimiento de un punto de suma antes de un bloque                                    |  |
|    |    | $X = G_1 U$ $Y = G_1 U + V$  |
| 7   | Movimiento de un punto de ramificación después de un bloque                          |  |
|    |    | $Y = G_1 U$ $U = \frac{1}{G_1} Y$  |
| 8   | Movimiento de un punto de ramificación antes de un bloque                            |  |
|    |     | $Y = G_1 U$  |
| 9   | Redistribución de puntos de suma   |  |
|   |    | $X = U + V; \quad Z = U + W$ $Y = X + W = Z + V$ $Y = U + V + W = U + W + V$ |
| 10  | Redistribución de puntos de ramificación   |  |
|  |   |  |
| 11  | Movimiento de un punto de ramificación antes de uno de suma                          |  |
|  |  | $Y = U + V$  |
| 12  | Movimiento de un punto de ramificación después de uno de suma                        |  |
|  |   | $Y = U + V$ $U = Y - V$  |

Para el enunciado de estos teoremas de transformación se utiliza la notación siguiente:

$G$ : Función de transferencia de un bloque cualquiera

$U, V, W$ : entradas del sistema

$Y$ : salida del sistema

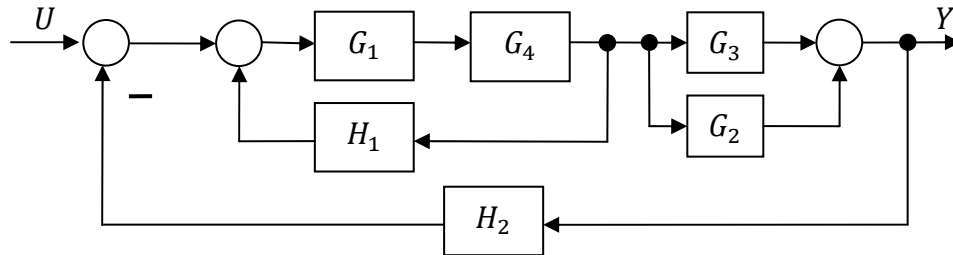
$X, Z$ : otras señales o variables del sistema

Los movimientos 11 y 12 no son de uso común, ya que suelen complicar el diagrama más que simplificarlo.

### Simplificación de diagramas de bloque

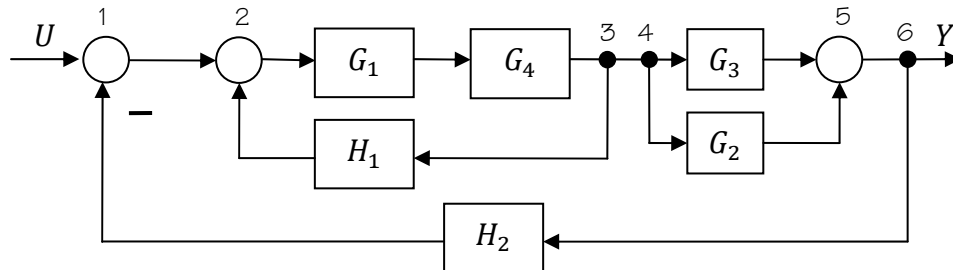
El objetivo es la reducción de un diagrama de bloques complejo a uno más sencillo.

Ejemplo 1:

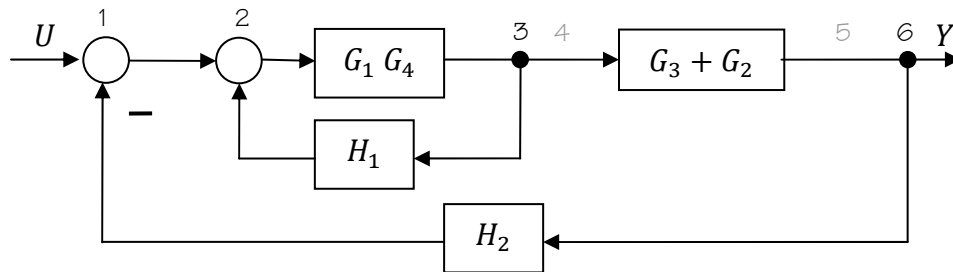


Para reducir el diagrama se pueden seguir los siguientes pasos:

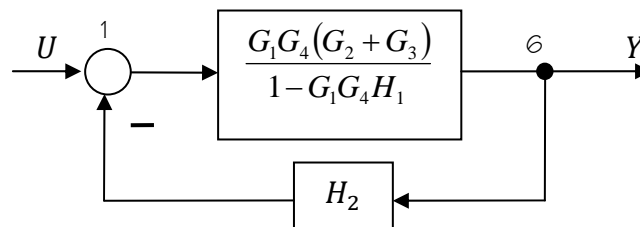
1. Numerar todos los puntos de suma y ramificación:



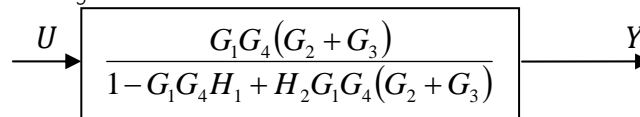
2. Reducir desde lo más interno, por ejemplo entre 2 y 3, y entre 4 y 5:



3. Llevar el diagrama a la forma canónica de un sistema de control retroalimentado:



4. Simplificar finalmente el diagrama a el de un sistema de lazo abierto

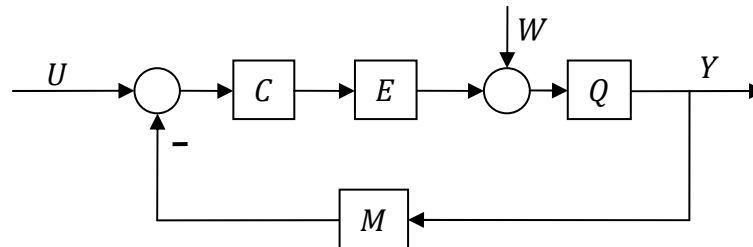


## Diagramas de bloque de varias entradas

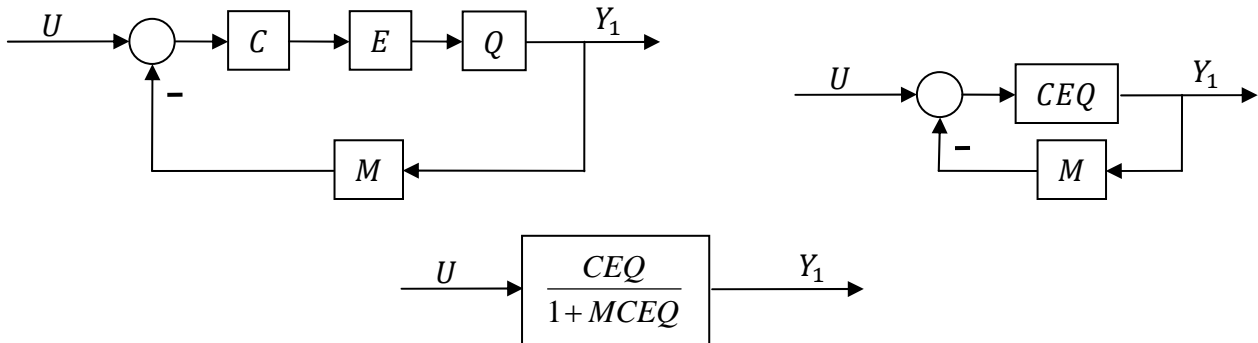
Cuando hay varias entradas se trata cada una de ellas en forma independiente de las otras y se procede según el procedimiento siguiente:

1. Igualar todas las entradas a cero excepto una.
2. Transformar el diagrama de bloque hasta obtenerlo en lazo abierto
3. Calcular la respuesta debido a la entrada actuando sola
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 para cada una de las entradas restantes
5. La salida total es la suma de todas las entradas individuales

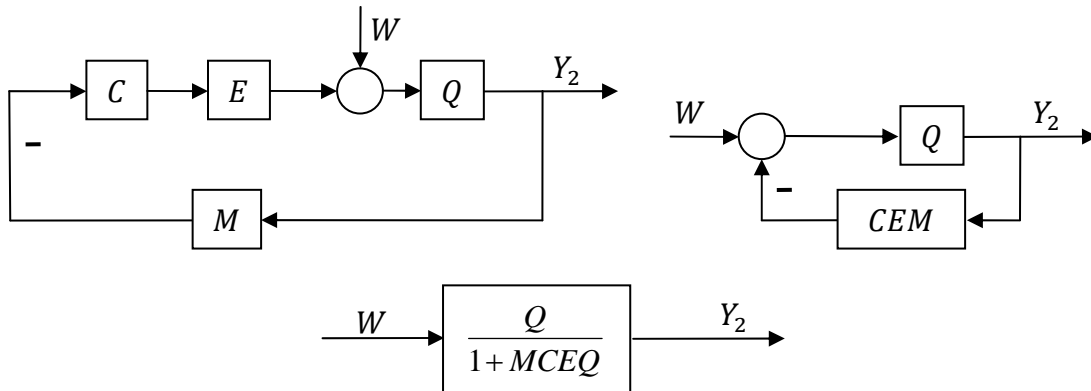
Ejemplo 2:



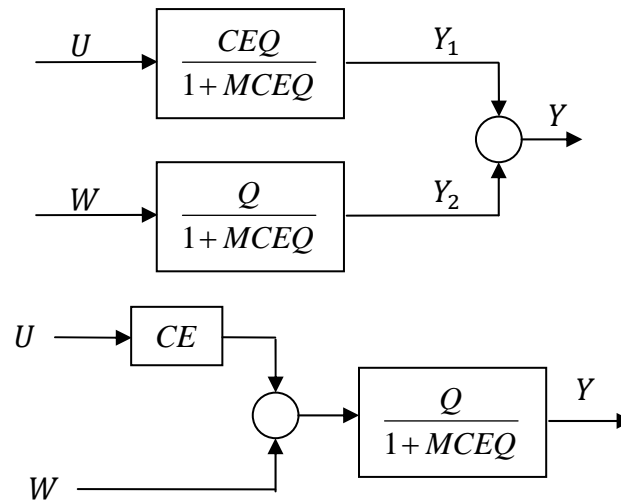
Iguualamos primero  $W = 0$  y reducimos el diagrama resultante:



Iguualamos primero  $U = 0$  y reducimos el diagrama resultante:



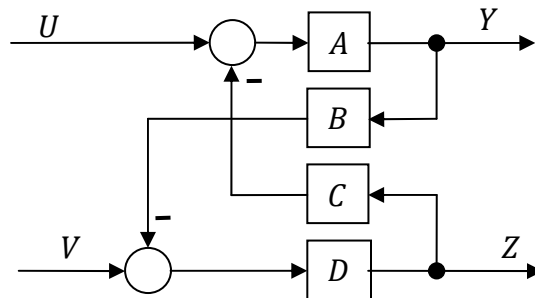
Finalmente el diagrama resultante será la suma de los dos diagramas obtenidos:



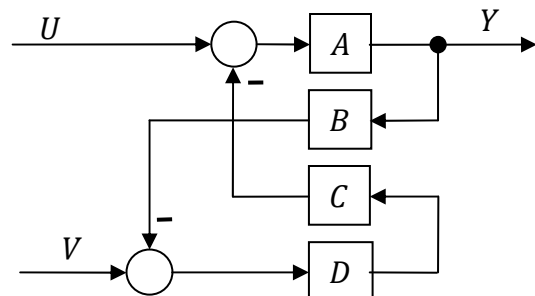
### Entradas y salidas múltiples

En este caso primero se determina una de las salidas ignorando las otras y así sucesivamente para cada una de las salidas.

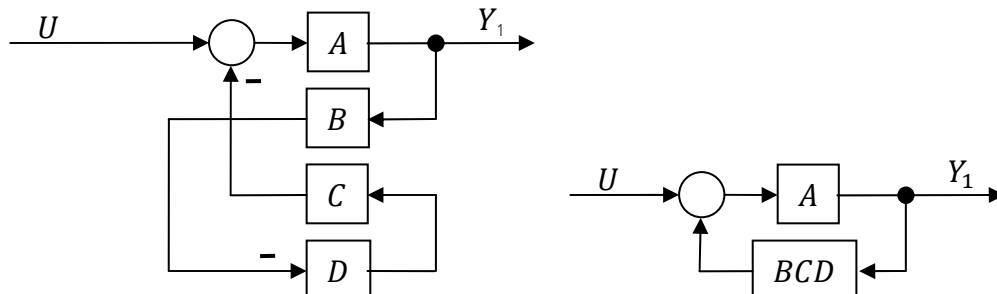
Ejemplo 3:

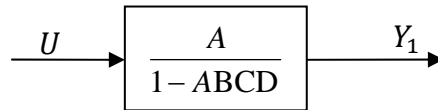


Primero determinamos a  $Y$  ignorando a  $Z$ :

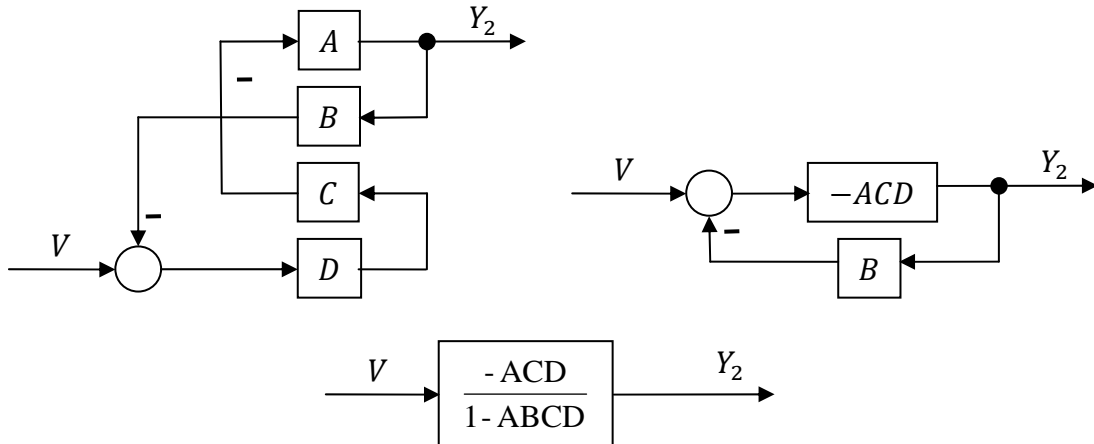


Igualemos  $V$  a cero y determinamos la función de transferencia entre  $U$  y  $Y_1$ :

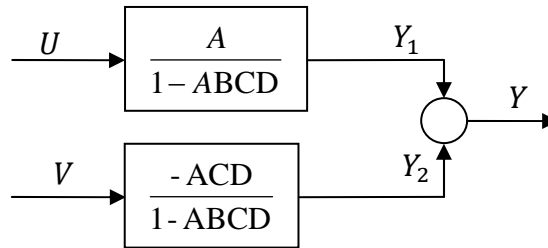




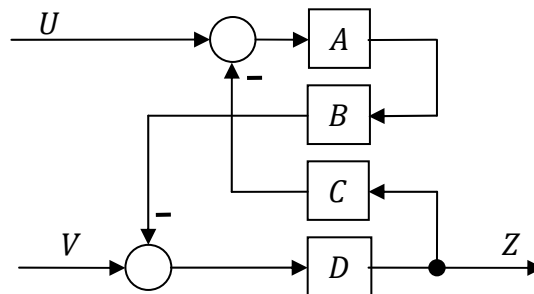
Igualemos  $U$  a cero y determinamos la función de transferencia entre  $V$  y  $Y_2$ :



Para la salida  $Y$  tenemos entonces:

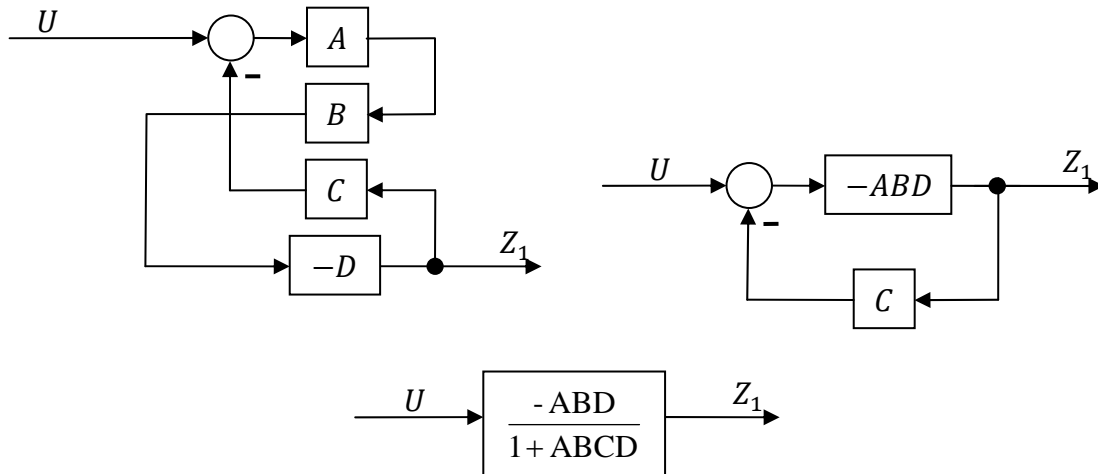


Segundo determinamos a  $Z$  ignorando a  $Y$ :

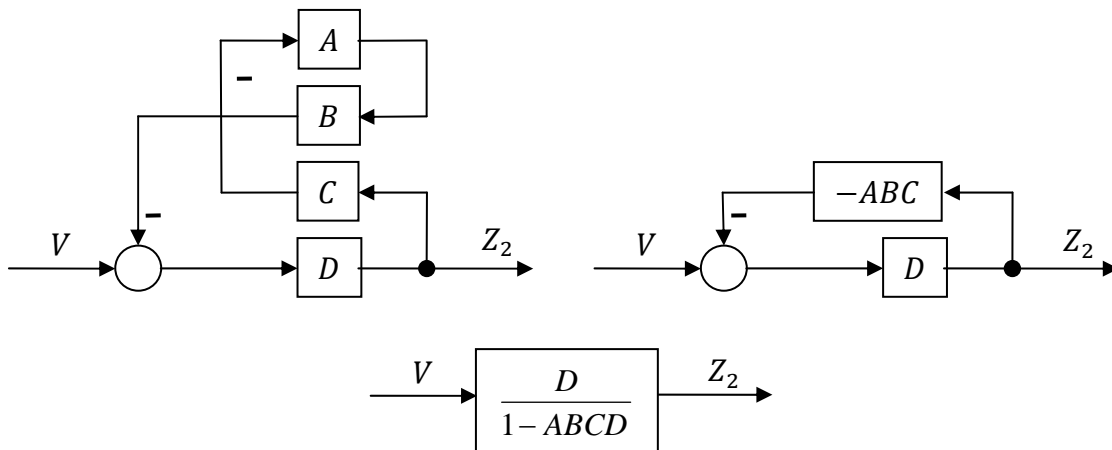


Igualemos  $V$  a cero y determinamos la función de transferencia entre  $U$  y  $Z_1$ :

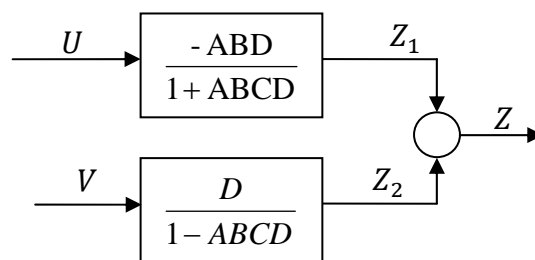




Igualemos  $U$  a cero y determinamos la función de transferencia entre  $V$  y  $Z_2$ :



Para la salida  $Z$  tenemos entonces:



### Construcción de un diagrama de bloques a partir de las funciones de transferencia de los elementos del sistema

El objetivo principal de un diagrama de bloques es representar un sistema físico gráficamente. Esta representación puede realizarse a partir de dos tipos de datos:

- El primero, que es el más común, es cuando se conocen los elementos que conforman el sistema de control, su conexión así como las funciones de transferencia de sus elementos. En este caso la construcción se hace haciendo el diagrama de bloques según la organización de los elementos y luego se coloca en cada bloque la función de transferencia correspondiente.
- La segunda forma, menos común pero no menos importante, es cuando se conocen las funciones de transferencia de los elementos sin conocer la forma como los elementos están conectados. En este caso se

deberá realizar primero un diagrama de bloques preliminar, luego se deberán identificar en este los componentes principales por ejemplo: Proceso, controlador, elemento final de control y elemento de medición. Y finalmente volver a dibujar el diagrama en forma ordenada y reducirlo para obtener la función de transferencia si esto es necesario.

Ejemplo 4. Representación en diagramas de bloque a partir del esquema del sistema de control retroalimentado.

El esquema siguiente representa un sistema de control de nivel neumático, en donde se han colocado elementos de control cuyas funciones de transferencia son:

Transmisor de presión

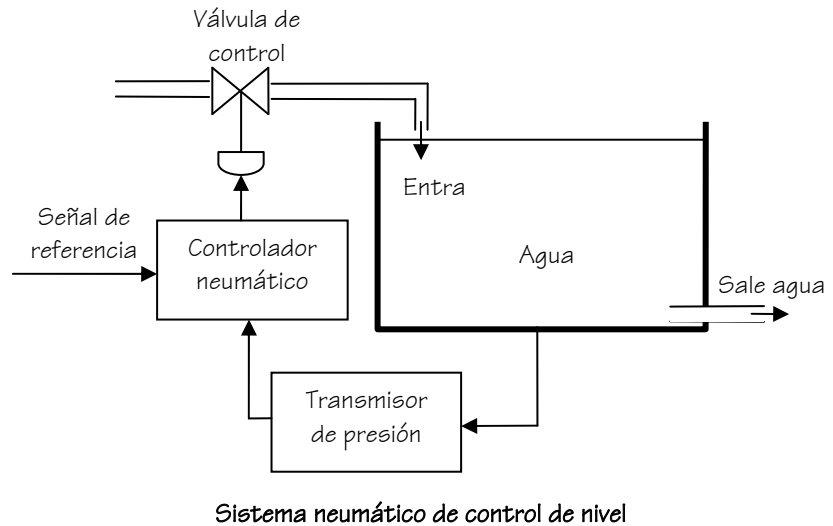
$$G(s) = \gamma_{H_2O} K_T$$

Controlador neumático:

$$G(s) = K_P$$

Válvula de control:

$$G(s) = K_V$$

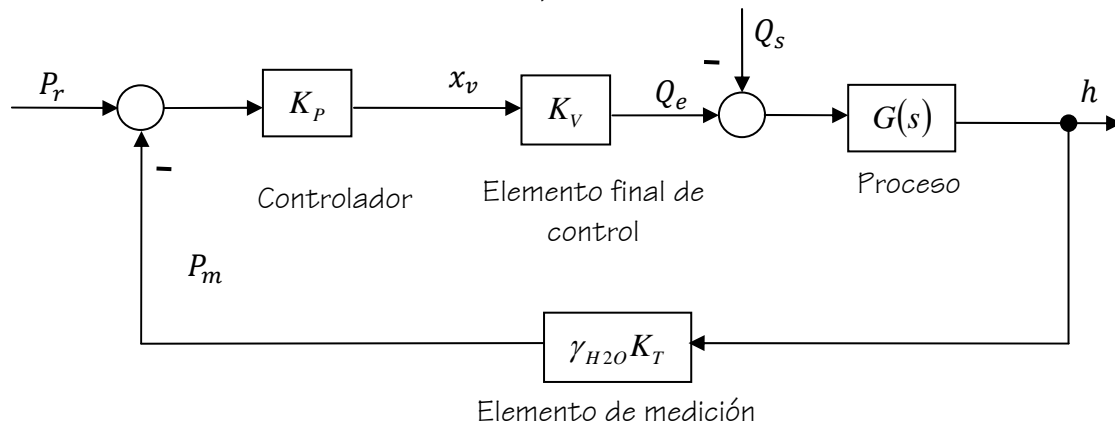


Para este sistema:

- Dibuje el diagrama de bloques completo.
- Determine la función de transferencia de lazo cerrado.
- Obtenga una representación en espacio de estado para el proceso y para el sistema completo.

Solución.

En este caso lo primero que debemos hacer es identificar los componentes, dibujar el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado y colocar en cada bloque las funciones de transferencia.



Donde:

$Q_e$ : caudal de entrada al tanque

$Q_s$ : caudal de salida del tanque

$h$ : nivel del tanque

$P_m$ : presión medida que corresponde directamente al valor del nivel

$P_r$ : presión de referencia, la deseada en el tanque, que tiene una correspondencia directa con el nivel deseado

$x_v$ : posición del vástago de la válvula que regula el paso del flujo de entrada.

Observamos aquí que necesitamos conocer la función de transferencia del proceso para completar el diagrama de bloque.

Esta función de transferencia corresponde al de un sistema hidráulico, donde la entrada corresponde a la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida ( $Q_e - Q_s$ ), y la salida del sistema será el nivel ( $h$ ).

Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$Q_e - Q_s = CDP \quad (1) \quad P = \gamma_{H_2O} h \quad (2)$$

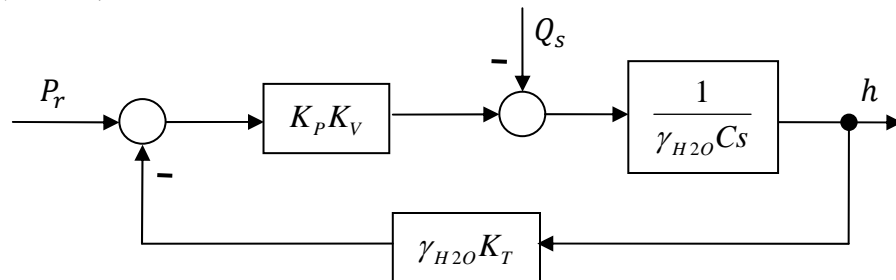
Con estas dos ecuaciones podemos obtener la ecuación de la dinámica del sistema que es:

$$Q_e - Q_s = \gamma_{H_2O} C D h$$

A partir de esta ecuación podemos obtener la función de transferencia:

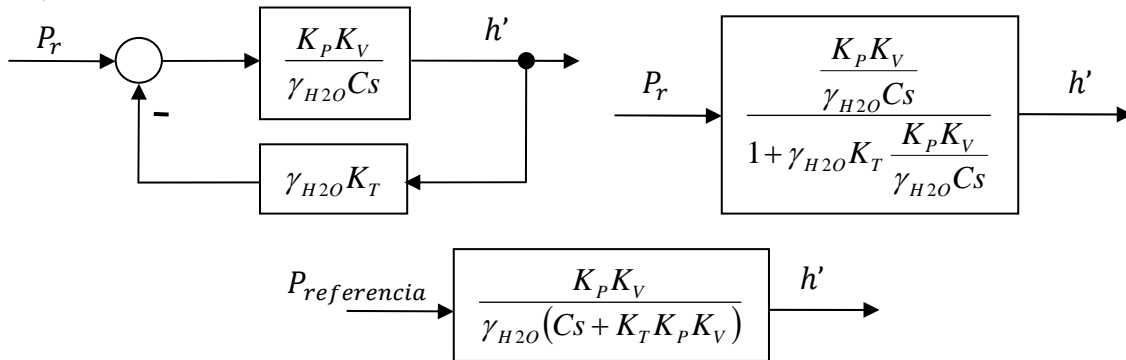
$$\frac{h(s)}{(Q_e - Q_s)(s)} = \frac{1}{\gamma_{H_2O} C s}$$

El diagrama de bloques completo del sistema será entonces:

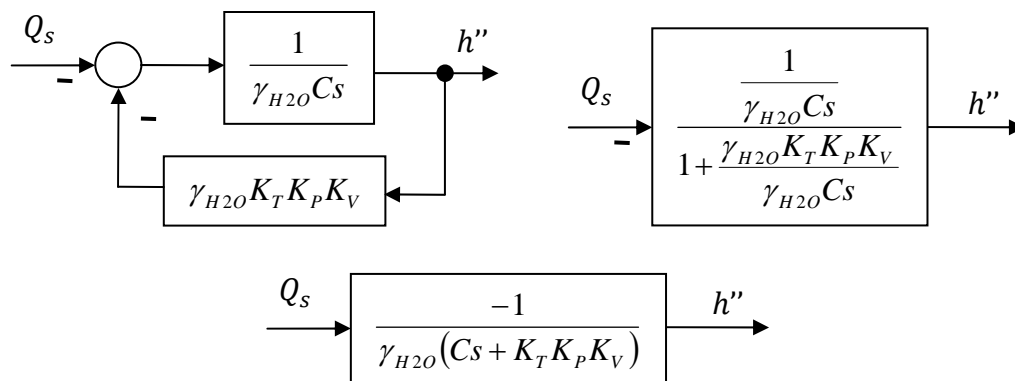


Para obtener la función de transferencia de lazo cerrado debemos reducir el diagrama de bloques del sistema, que es un diagrama de dos entradas ( $P_r, Q_s$ ) y una salida ( $h$ ).

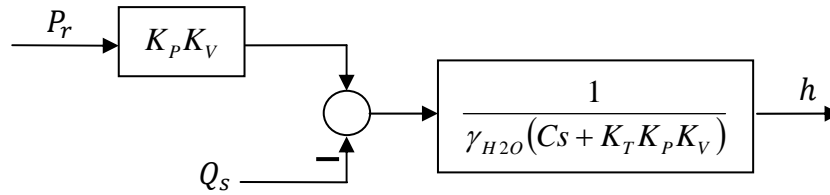
Igualemos primero  $Q_s$  a cero y obtenemos:



Igualemos luego  $P_r$  a cero y obtenemos:



El diagrama de bloques simplificado será:



Este diagrama de bloques se puede entonces expresar como una función de transferencia o ecuación en transformada de Laplace que relaciona la entrada con la salida:

$$h = \frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O}(Cs + K_T K_P K_V)} P_r - \frac{1}{\gamma_{H2O}(Cs + K_T K_P K_V)} Q_s$$

Esta ecuación expresada en tiempo sería:

$$\gamma_{H2O} C D h + \gamma_{H2O} K_T K_P K_V h = K_P K_V P_r - Q_s$$

Como es una ecuación diferencial de primer orden podemos entonces definir un solo estado, en cuyo caso lo más sencillo es:  $x = h$ , y tenemos dos entradas:  $u_1 = P_r$ ;  $u_2 = Q_s$

Obtendremos entonces una ecuación de estado y una ecuación:

$$\dot{x} = \frac{-\gamma_{H2O} K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} x + \frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} u_1 - \frac{1}{\gamma_{H2O} C} u_2$$

$$y = x$$

Esta ecuación expresada en forma vectorial sería:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \frac{-\gamma_{H2O} K_T K_P K_V}{\gamma_{H2O} C}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_P K_V}{\gamma_{H2O} C} & \frac{-1}{\gamma_{H2O} C} \end{bmatrix}; \quad C = 1$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5: Representación del diagrama de bloques a partir de las ecuaciones de los componentes

Las siguientes ecuaciones representan un sistema de control:

$$e = \frac{x-v}{2}; \quad v = \frac{C_1}{AD} e; \quad z = C_2 u; \quad x = \frac{Kz - C_4 y}{K - C_7 C_3}; \quad q = C_5 v; \quad y = \frac{C_6}{1 + \tau D} (q - C_8 w)$$

Donde:

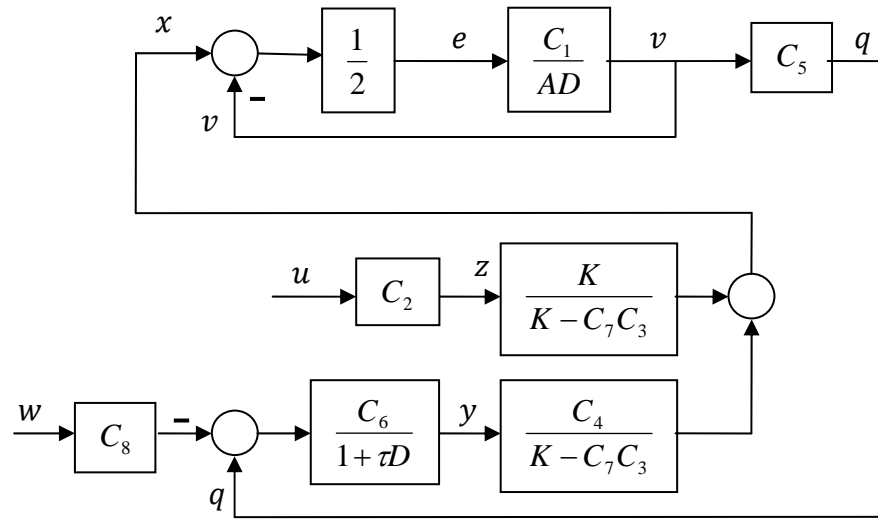
- $e, q, v, w, x, z$ : son señales
- $y$ : es la variable controlada
- $u$ : es la señal de referencia
- $D$ : es el operador diferencial (derivada respecto de  $t$ )
- $A, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, K$ : son constantes (ganancias)

Determinar la función de transferencia de:

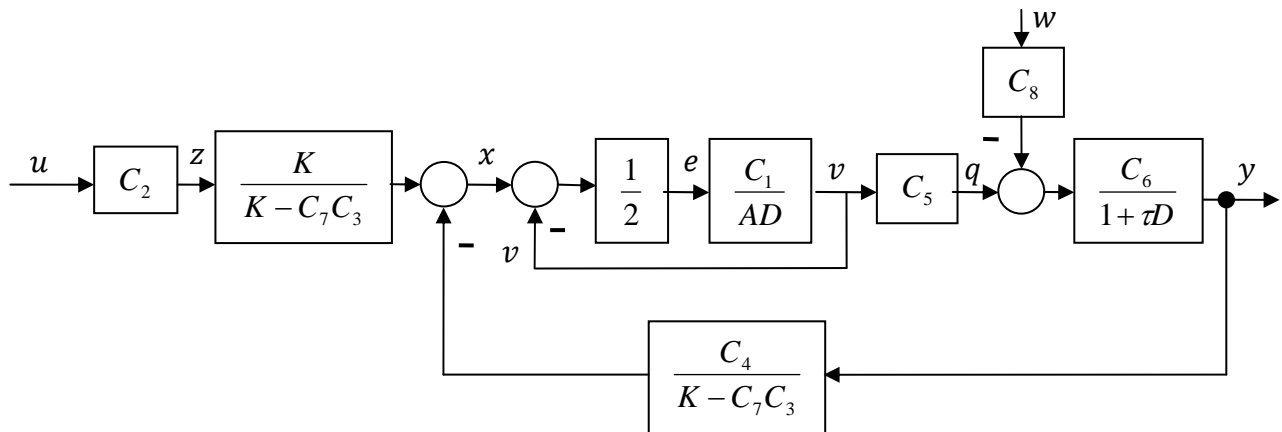
Identificar:

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Proceso</li> <li>• Controlador</li> <li>• Elemento final de control</li> <li>• Elemento de medición</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Variable manipulada</li> <li>• Perturbación</li> </ul> |
|---|---|

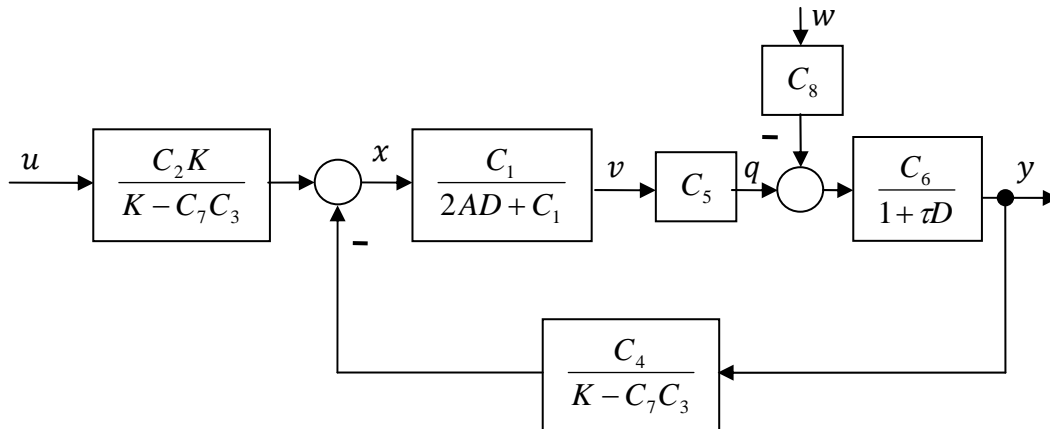
Solución: Primero se dibuja un diagrama de bloques preliminar:

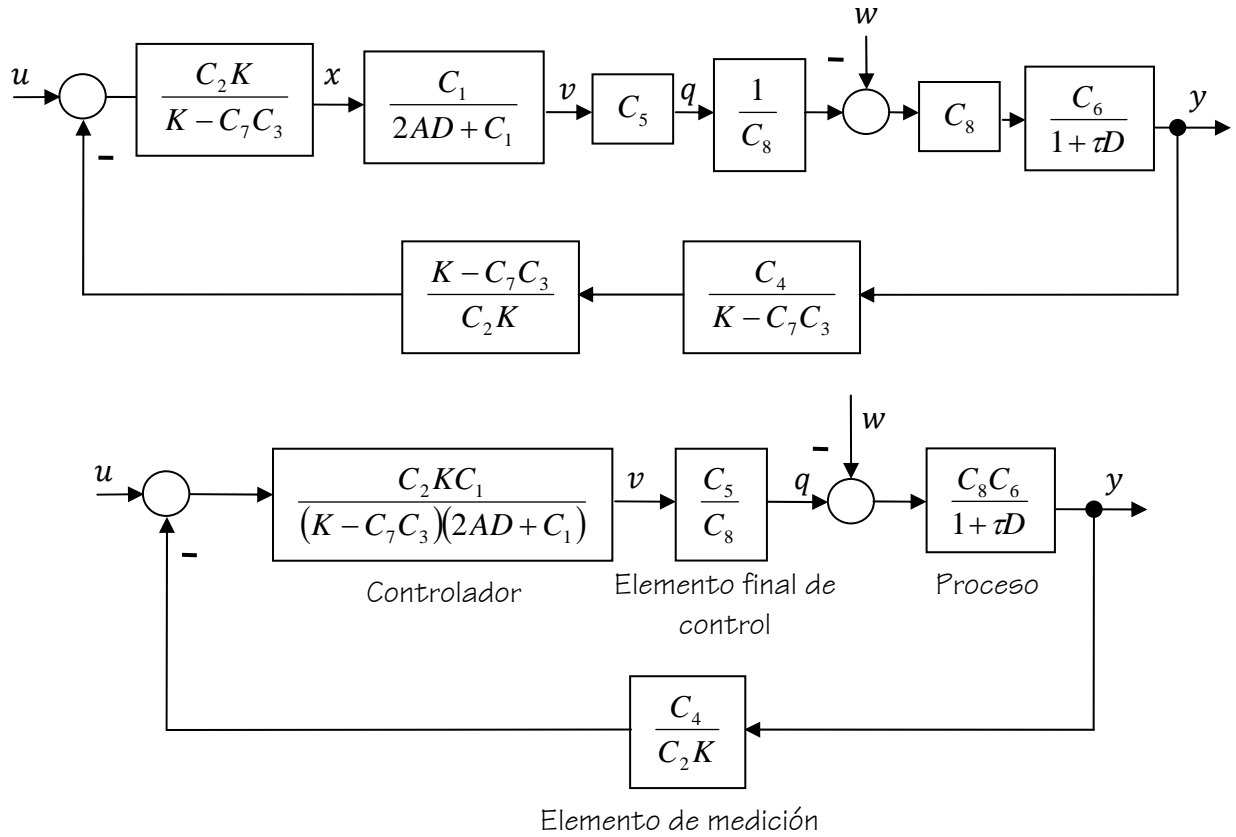


Luego se vuelve a dibujar el diagrama de bloques pero en una forma más ordenada que permita identificar más fácilmente los componentes, con  $u$  como entrada y  $y$  como salida:



Comparando con el diagrama de bloque típico de un sistema de control retroalimentado se pueden fácilmente identificar los componentes, se hacen determinan entonces las funciones de transferencia para cada uno de ellos:





De esta última forma del diagrama observamos entonces que la variable manipulada es  $q$  y que la perturbación es  $w$ .



