PROGRAMACION LINEAL ENTERA

EN MUCHOS CASOS NO ES PERMITIDO EL USO DE DECIMALES EN LOS RESULTADOS, COMO POR EJEMPLO EN LA ASIGNACIÓN DE PERSONAS, FABRICACIÓN DE ARTEFACTOS, ENVIOS DE PAQUETES, ETC.

TIPOS DE MODELOS

Programación Lineal Entera

Modelos Puros
- Todas las variables son enteras

Modelos Mixtos
- Existen variables enteras y continuas

Modelos Binarios
- Las variables solo toman valores 0 o 1

Métodos de Solución

- Método Gráfico
- Algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound)
- Algoritmos de Planos de Corte
- Enumeración Implícita (Balas)

PROGRAMACIÓN ENTERA PURA Y MIXTA

La única diferencia entre los problemas estudiados en PL es que se requiere que una o más variables sean enteras. Si se necesita que todas las variables sean enteras, tenemos un programa lineal sólo con enteros. Si se requiere que algunas de las variables, pero no necesariamente todas, sean enteras, tenemos un programa lineal entero mixto

PLE Puro

- Max $2 x1 + 3 x2$
- s.a.
- $3 x1 + 3x2 \leq 12$
- $2/3 x1 + 1 x2 \leq 4$
- $1 x1 + 2 x2 \leq 6$
- $x1, x2 \geq 0$ y enteras

PLE Mixto

- Max $3 x1 + 4 x2$
  - s.a.
- $- x1 + 2 x2 \leq 8$
  - $x1 + 2 x2 \leq 12$
  - $2 x1 + x2 \leq 16$
  - $x1, x2 \geq 0$ y $x2$ entero

El programa lineal que resulta de omitir los requerimientos de enteros se llama PL relajado. Veamos un ejemplo

Eastborne Realty tiene $2 millones disponibles para la compra de una nueva propiedad para alquiler. Después de una investigación inicial, Eastborne redujo las alternativas de inversión a viviendas urbanas y edificios de departamentos. Cada vivienda puede comprarse por $282,000 y hay cinco disponibles. Cada edificio de departamentos puede comprarse por $400,000 y el desarrollador construirá tantos edificios como Eastborne quiera comprar. El gerente de propiedades de Eastborne puede dedicar hasta 140 horas por mes a estas nuevas propiedades; se espera que cada vivienda requiera 4 horas por mes y cada edificio de departamentos, 40 horas por mes. Se estima que el flujo de efectivo anual, después de deducir los pagos hipotecarios y los gastos de operación, sea de $10,000 por vivienda y $15,000 por edificio de departamentos. Al propietario de Eastborne le gustaría determinar el número de viviendas y de edificios de departamentos a comprar para maximizar el flujo de efectivo anual. Comenzamos por definir las variables de decisión como sigue:

T = número de viviendas

A = número de edificios de departamentos

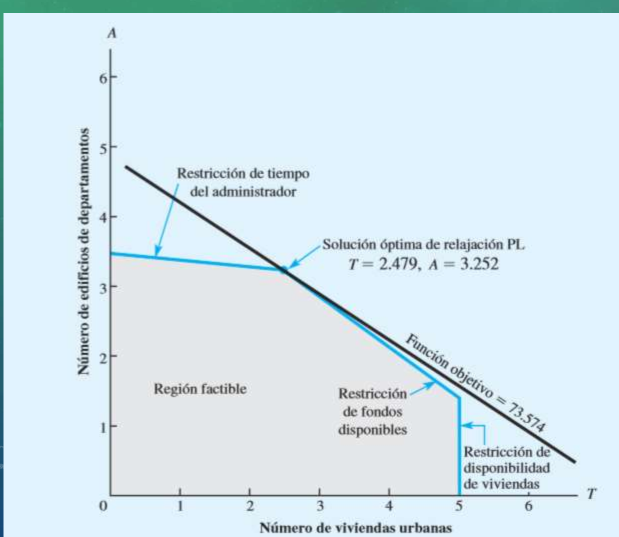
Max 10T + 15A

s.a.

282T + 400A <= 2 000	Fondos disponibles (miles de dólares)
4 T + 40A <= 140	Tiempo del administrador (horas)
T <= 5	Viviendas disponibles
T, A >= 0 y enteras	No se puede comprar una fracción de departamentos.

SOLUCIÓN GRAFICA

- Lo primero será evaluar el PL relajado, es decir no considerando que sean enteras T y A

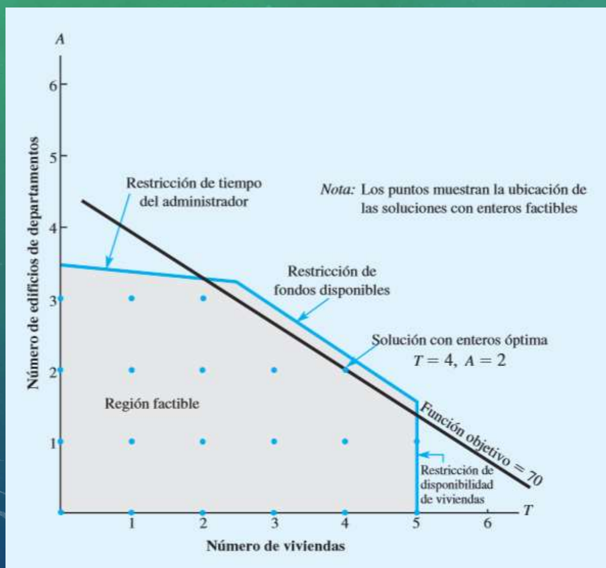


Max 10T + 15A

s.a.

282T + 400A <= 2 000	Fondos disponibles (miles de dólares)
4 T + 40A <= 140	Tiempo del administrador (horas)
T <= 5	Viviendas disponibles
T, A >= 0 y enteras	

Es T = 2,48 viviendas y A = 3,25 edificios de departamentos. El valor óptimo de la función objetivo es 73,57, lo cual indica un flujo de efectivo anual de $73,57



Marcamos los puntos que indicarían soluciones enteras y de todas ellas la que toca en el punto mas alto de la línea de Isoutilidad es A= 2 y T=4 → Z= 70.

Es importante destacar que quizás la primera tentativa hubiera sido redondear la solución obtenida, si lo hiciéramos A= 3 y T=2 → Z= 65 siendo una solución menos optima.

SOLUCION CON SOFTWARE LINDO

Max 10T + 15A

st

282T + 400 A <= 2000

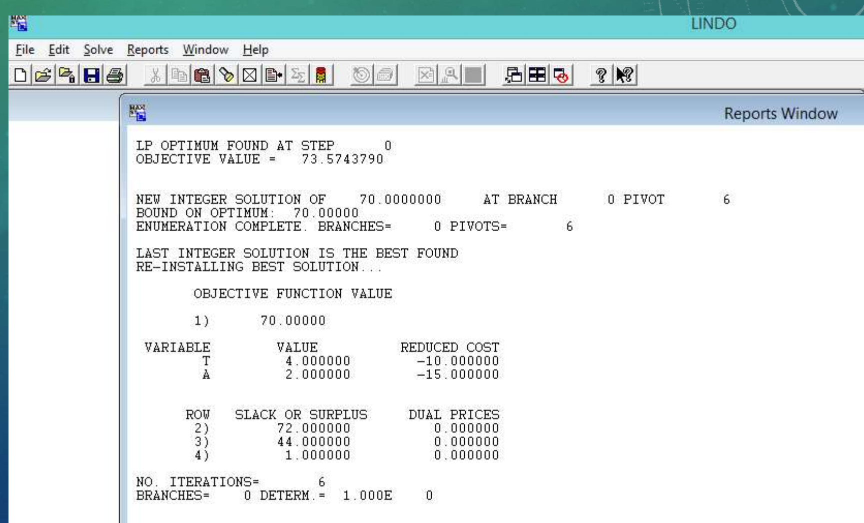
4 T + 40 A <= 140

T <= 5

END

GIN T

GIN A




```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
OBJECTIVE VALUE =   73.5743790

NEW INTEGER SOLUTION OF    70.0000000     AT BRANCH      0 PIVOT      6
BOUND ON OPTIMUM:  70.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=      6

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      70.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        T         4.000000        -10.000000
        A         2.000000        -15.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)        72.000000         0.000000
       3)        44.000000         0.000000
       4)         1.000000         0.000000

NO. ITERATIONS=       6
BRANCHES=     0 DETERM.=  1.000E    0
```

P. LINEAL ENTERA BINARIAS (0 – 1)

Estas variables son muy útiles para modelar situaciones de tipo on-off, si o no, selecciones u opciones de valor.

Veamos este ejemplo extraído de Anderson (2011)

<u>En este ejemplo TODAS las variables son binarias</u>

Ice-Cold Refrigerator Company considera invertir en varios proyectos que tienen requerimientos variables de capital durante los próximos cuatro años. Como se enfrenta a un capital limitado cada año, a la gerencia le gustaría seleccionar los proyectos más rentables. El valor presente neto estimado para cada proyecto, los requerimientos de capital y el capital disponible durante el periodo de cuatro años

TABLA 11.1 VALOR PRESENTE NETO DEL PROYECTO, REQUERIMIENTOS DE CAPITAL Y CAPITAL DISPONIBLE PARA ICE-COLD REFRIGERATOR COMPANY

	Proyecto				
Valor presente	Expansión de la planta	Expansión de almacenes	Maquinaria nueva	Investigación de nuevos productos	Capital total disponible
	\$90,000	\$40,000	\$10,000	\$37,000	
Req. Cap. Año 1	\$15,000	\$10,000	\$10,000	\$15,000	\$40,000
Req. Cap. Año 2	\$20,000	\$15,000		\$10,000	\$50,000
Req. Cap. Año 3	\$20,000	\$20,000		\$10,000	\$40,000
Req. Cap. Año 4	\$15,000	\$ 5,000	\$ 4,000	\$10,000	\$35,000

LAS VARIABLES

Las cuatro variables de decisión 0-1 son las siguientes:

P 1 si se acepta el proyecto de expansión de la planta; 0 si se rechaza
W 1 si se acepta el proyecto de expansión de almacenes; 0 si se rechaza
M 1 si se acepta el proyecto de maquinaria; 0 si se rechaza
R 1 si se acepta el proyecto de investigación de productos nuevos; 0 si se rechaza

EL MODELO

Max $90P + 40W + 10M + 37R$

s.a.

$15P + 10W + 10M + 15R <= 40$ (capital disponible para el año 1)

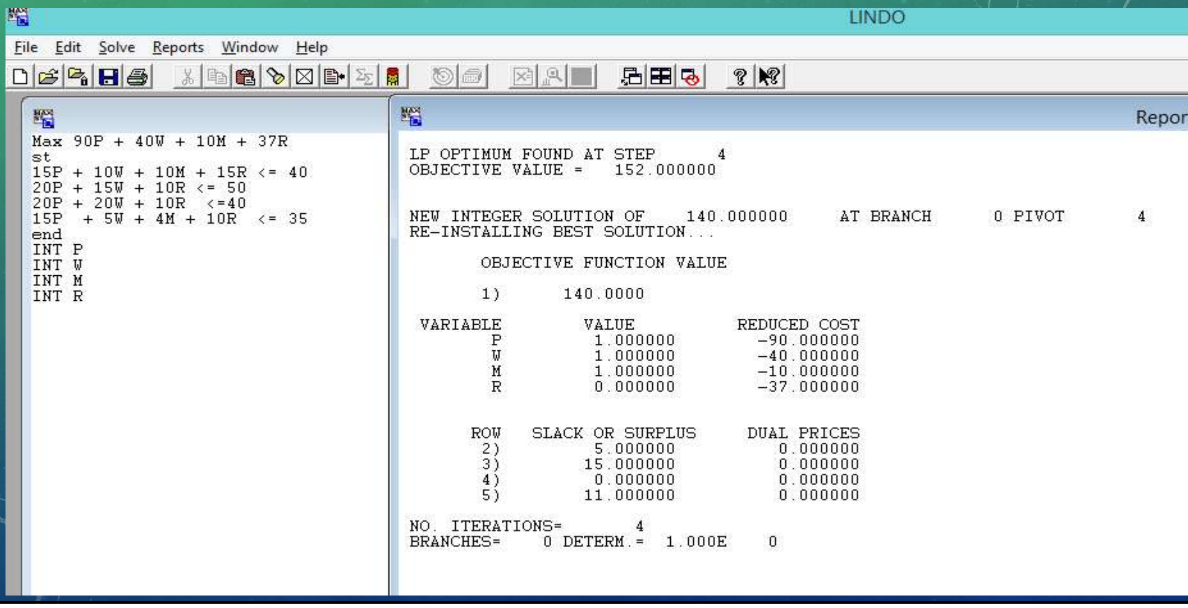
$20P + 15W + 10R <= 50$ (capital disponible para el año 2)

$20P + 20W + 10R <= 40$ (capital disponible para el año 3)

$15P + 5W + 4M + 10R <= 35$ (capital disponible para el año 4)

P, W, M, R 0, 1

EN SOFTWARE LINDO



VEAMOS OTRO EJEMPLO DONDE NO TODAS LAS VARIABLES SON BINARIAS, CONOCIDO COMO DE COSTO FIJO

Las tres materias primas se usan para producir tres productos: un aditivo para combustible, una base para solvente y un líquido limpiador de alfombras. Se utilizan las siguientes variables de decisión:

- *F* toneladas producidas de aditivo para combustible
- *S* toneladas producidas de base para solvente
- *C* toneladas producidas de limpiador de alfombras

Las contribuciones a las utilidades son $40 por tonelada para el aditivo para combustible, $30 por tonelada para la base para solvente y $50 por tonelada para el limpiador de alfombras. Cada tonelada de aditivo para combustible es una mezcla de 0.4 ton de material 1 y 0.6 ton de material 3. Cada tonelada de base para solvente requiere 0.5 ton de material 1, 0.2 ton de material 2 y 0.3 ton de material 3. Cada tonelada de limpiador de alfombras es una mezcla de 0.6 ton de material 1, 0.1 ton de material 2 y 0.3 ton de material 3. RMC tiene 20 ton de material 1, 5 ton de material 2 y 21 ton de material 3, y está interesada en determinar las cantidades óptimas de producción para el siguiente periodo de planeación.

Un modelado de este problema sin variables binarias sería

Max 40F + 30S + 50C
s.a.
0.4 F + 0.5 S + 0.6 C <= 20 Material 1
0.2 S + 0.1 C <= 5 Material 2
0.6 F + 0.3 S + 0.3 C <= 21 Material 3
F, S, C >= 0

En esta solución no se incluye el costo fijo de preparación de maquinas para producción y la producción máxima.

Una solución modelado sin variables binarias sería

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      1850.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        F        27.500000          0.000000
        S         0.000000         12.500000
        C        15.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         75.000000
       3)         3.500000          0.000000
       4)         0.000000         16.666666

NO. ITERATIONS=       2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE         DECREASE
       F        40.000000       60.000000         6.666667
       S        30.000000       12.500000         INFINITY
       C        50.000000       10.000000        16.666666

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                  RHS           INCREASE         DECREASE
       2        20.000000       14.000000         6.000000
       3         5.000000        INFINITY         3.500000
       4        21.000000        9.000000        11.000000
```

Producto	Costo de preparación	Producción máxima
Aditivo para combustible	$200	50 tons
Base para solvente	$ 50	25 tons
Limpiador de alfombras	$400	40 tons

Las variables 0-1 se definen como sigue:
***SF* = 1** si se produce el aditivo para combustible; 0 si no se produce
***SS* = 1** si se produce la base para solvente; 0 si no se produce
***SC* = 1** si se produce el limpiador de alfombras; 0 si no se produce

Al utilizar estas variables de preparación, el costo total de preparación es 200*SF* + 50*SS* + 400*SC*

La nueva Función Objetivo será:

Max 40F + 30S + 50C – 200 SF – 50 SS – 400 SC

A continuación debemos escribir las restricciones de la capacidad de producción, de manera que si una variable de preparación es igual a 0, no se permite la fabricación del producto correspondiente y, si una variable de preparación es igual a 1, se permite la producción hasta la cantidad máxima. Para el aditivo para combustible, hacemos esto al añadir la restricción siguiente:

F <= 50 SF

Observamos que si SF=0 no hay producción y si SF=1 permite producir hasta 50

ASI PROCEDEMOS CON TODAS Y NOS QUEDA:

F <= 50 SF
S <= 25 SS
C <= 40 SC

```
Max 40F + 30S + 50C - 200SF - 50SS
st
0.4 F + 0.5 S + 0.6 C <= 20
0.2 S + 0.1 C <= 5
0.6 F + 0.3 S + 0.3 C <= 21
F - 50SF <= 0
S - 25SS <= 0
C - 400SC <= 0
END
INT SF
INT SS
INT SC
```

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1350.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        SF        1.000000        200.000000
        SS        1.000000         50.000000
        SC        0.000000      -6266.666504
         F       25.000000          0.000000
         S       20.000000          0.000000
         C        0.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)        0.000000         33.333332
        3)        1.000000          0.000000
        4)        0.000000         44.444443
        5)       25.000000          0.000000
        6)        5.000000          0.000000
        7)        0.000000         16.666666

 NO. ITERATIONS=      64
 BRANCHES=    5 DETERM.=  1.000E    0
```

TE PROPONGO UN PROBLEMA DE DISEÑO DE SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN PARA ANALIZAR

Martin-Beck Company opera una planta en St. Louis con una capacidad anual de 30.000 unidades. El producto se envía a centros de distribución regionales localizados en Boston, Atlanta y Houston. Debido a que se espera un incremento en la demanda, Martin-Beck planea aumentar su capacidad al construir una planta nueva en una o más de las ciudades siguientes: Detroit, Toledo, Denver o Kansas City. El costo fijo anual estimado y la capacidad anual para las plantas propuestas son los siguientes:

Planta propuesta	Costo anual fijo	Capacidad anual
Detroit	$175.000	10.000
Toledo	$300.000	20.000
Denver	$375.000	30.000
Kansas City	$500.000	40.000

Centro de distribución	Demanda anual
Boston	30.000
Atlanta	20.000
Houston	20.000

Costos de envío

	Centros de distribución		
Ubicación de la planta	Boston	Atlanta	Houston
Detroit	5	2	3
Toledo	4	3	4
Denver	9	7	5
Kansas City	10	4	2
St. Louis	8	4	3

Elabora un modelo que permita elegir las mejores ubicaciones para la planta y determinar cuánto enviar desde cada planta a cada centro de distribución. Podemos utilizar las variables 0-1 para representar la decisión de construcción

SOLUCION

VARIABLES

y_1 =1 si se construye una planta en Detroit; 0 si no se construye
y_2 =1 si se construye una planta en Toledo; 0 si no se construye
y_3 =1 si se construye una planta en Denver; 0 si no se construye
y_4 =1 si se construye una planta en Kansas City; 0 si no se construye

x_{ij} las unidades enviadas en miles desde la planta *i* al centro de distribución *j*
i 1, 2, 3, 4, 5 y *j* 1, 2, 3

- El costo de transporte anual en miles de dólares se escribe como
$5x11 +2\ x12 +3\ x13 +4\ x21 +3\ x22 +4\ x23 +9\ x31 +7\ x32 +5\ x33 +10\ x41 +4\ x42 +2\ x43 +8\ x51 +4\ x52 +3\ x53$
- El costo fijo anual de operación de la planta nueva en miles de dólares se escribe como
$175y1 + 300\ y2 +375\ y3 + 500\ y4$

MODELO COMPLETO

$$\begin{aligned}\text{Min}\quad & 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 9x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 10x_{41} + 4x_{42} \\ & + 2x_{43} + 8x_{51} + 4x_{52} + 3x_{53} + 175y_1 + 300y_2 + 375y_3 + 500y_4\end{aligned}$$

s.a.

$x_{11} + x_{12} + x_{13}$	$- 10y_1$	≤ 0	Capacidad de Detroit
$x_{21} + x_{22} + x_{23}$	$- 20y_2$	≤ 0	Capacidad de Toledo
$x_{31} + x_{32} + x_{33}$	$- 30y_3$	≤ 0	Capacidad de Denver
$x_{41} + x_{42} + x_{43}$	$- 40y_4$	≤ 0	Capacidad de Kansas City
$x_{51} + x_{52} + x_{53}$		≤ 30	Capacidad de St. Louis
$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}$		$= 30$	Demanda de Boston
$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52}$		$= 20$	Demanda de Atlanta
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53}$		$= 20$	Demanda de Houston

$x_{ij} \geq$ para toda *i* y *j*; $y_1, y_2, y_3, y_4 = 0, 1$

Solución por el Método de Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound)

1. Comienza con la relajación del problema no considerando que las variables deban ser enteras y se busca la solución optima.

Supongamos el siguiente modelo:

$$\text{Max } z = 3\,x_1 + 4\,x_2$$

s.a.

$$2\,x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2\,x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0\text{, enteras}$$

Entonces tenemos la solución de este problema relajado → $x_1 = \frac{9}{4} = 2,25$, $x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$

2) Para comenzar la ramificación del problema se elige al azar una variable no entera. En este caso X_1.

Se ramifica agregándole una restricción al modelo original, tomando x1 en sus dos valores enteros más próximos, o dicho de otra manera al valor entero de su solución y al valor entero de la solución +1.

En este caso x1=2 y x1=3. Nunca se mezclan en un solo modelo.

Luego que la variables asume el valor de la restricción, se recalculan las demás variables en cada restricción

Solución Inicial= S0
X1= 2,25
X2 = 1,5
Z= 12,75

Elegimos comenzar por x1 ramificamos con los enteros más próximos

X1<=2

Max $3x1+4x2$
s.a.
$2\,x1+x2 \leq 6$
$2x1+3x2 \leq 9$
$x1 \leq 2$
$x1,x2 \geq 0$

Si x1 =2
X2 podrá ser:
X2≤2 ó x2 ≤1,666...
Elegimos la menor

X1 >=3

Max $3x1+4x2$
s.a.
$2\,x1+x2 \leq 6$
$2x1+3x2 \leq 9$
$x1 \geq 3$
$x1,x2 \geq 0$

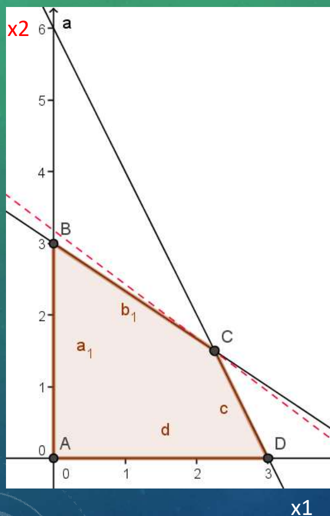
Si x1 =3
X2 podrá ser:
X2≤0 ó x2 ≤1.
Elegimos la menor

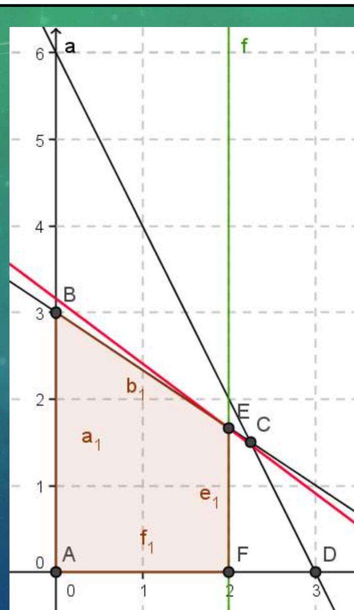
Si el valor es posible, se debe ramificar considerando la otra variable hasta llegar a una variable entera. Notese que al ramificar vamos disminuyendo el valor de la FO en caso de Max y aumentando el valor de FO en caso de Min

Miremos gráficamente lo que pasa con estas ramas

SOLUCION DEL PL RELAJADO

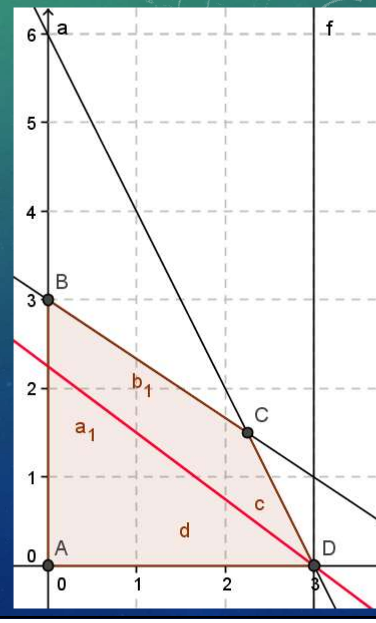
Estamos en el punto C que es
S1 con X1=2,25 y X2=1,5 → z= 12,75





Generamos el punto E que es
S1 con X1=2 y X2=1,67 → z= 12,64

Estariamos en el punto D que es
S2 con X1=3 y X2=0 → z= 9



Solución Inicial= S0
X1= 2,25
X2 = 1,5
Z= 12,75

Elegimos comenzar por x1 ramificamos con los enteros más próximos

X1<=2

X1 >=3

Si x1 =2
X2 podrá ser:
X2≤2 ó x2 ≤1,666...
Elegimos la menor

Max $3x1+4x2$
s.a.
$2x1+x2\leq6$
$2x1+3x2\leq9$
$x1\leq2$
$x1,x2\geq0$

Max $3x1+4x2$
s.a.
$2x1+x2\leq6$
$2x1+3x2\leq9$
$x1\geq3$
$x1,x2\geq0$

Si x1 =3
X2 podrá ser:
X2≤0 ó x2 ≤1.
Elegimos la menor

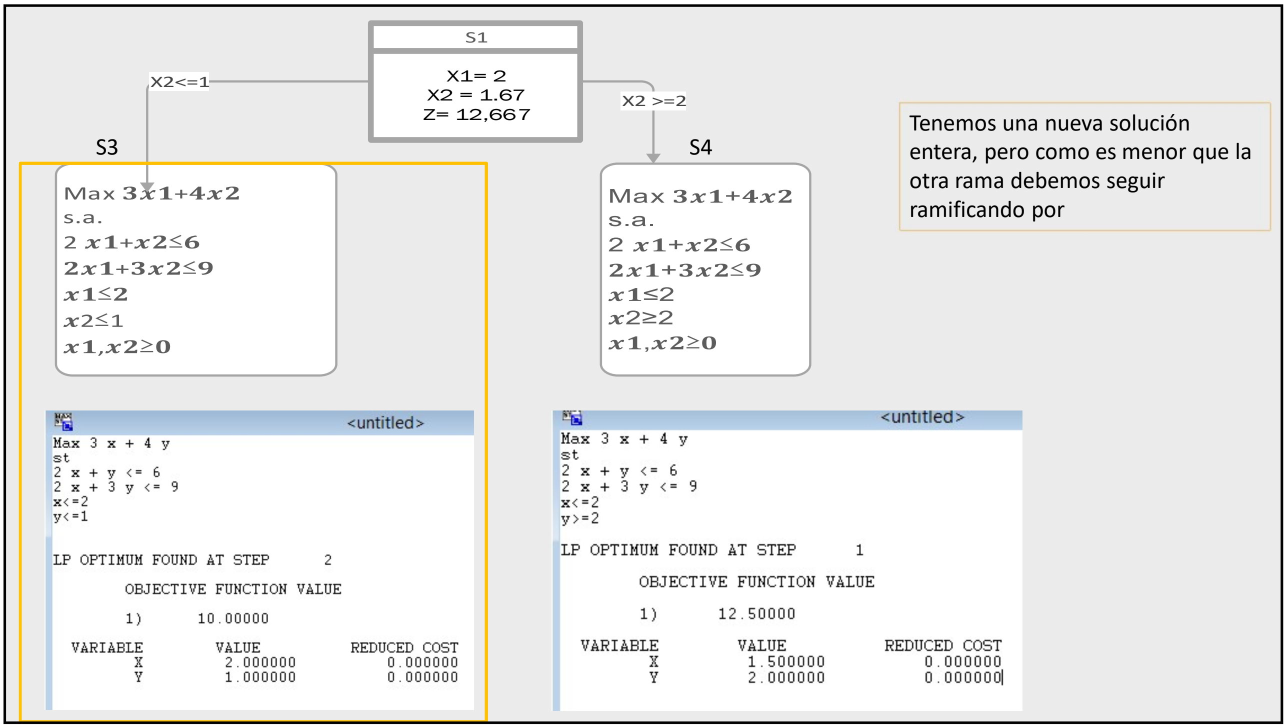
S1
X1= 2
X2 = 1.666
Z= 12,667

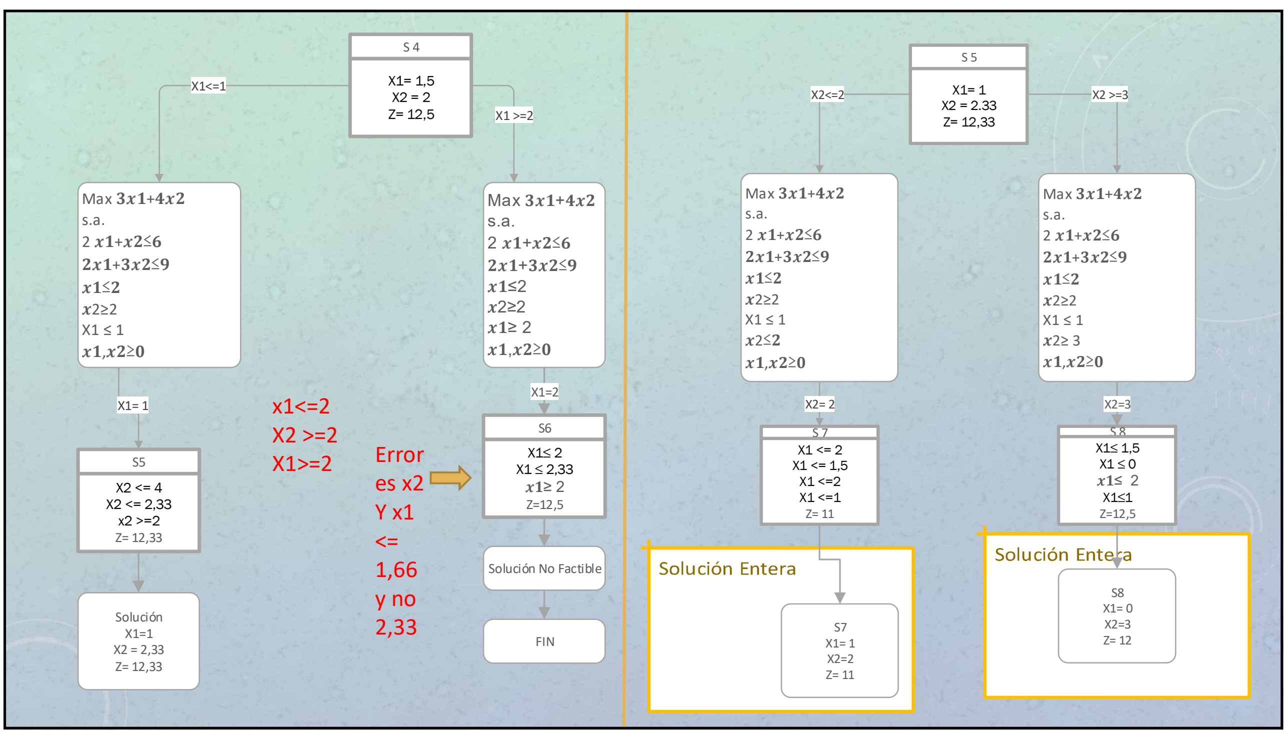
Solución Entera

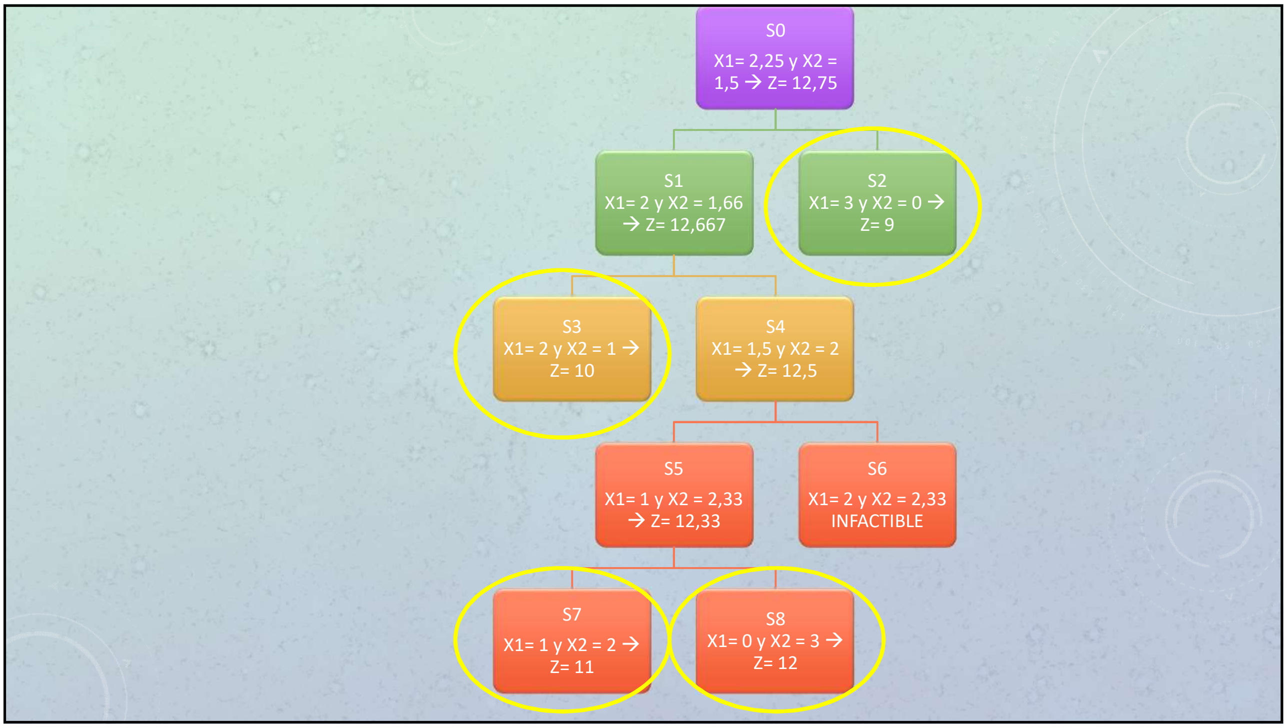
S2
X1= 3
X2 = 0
Z= 9

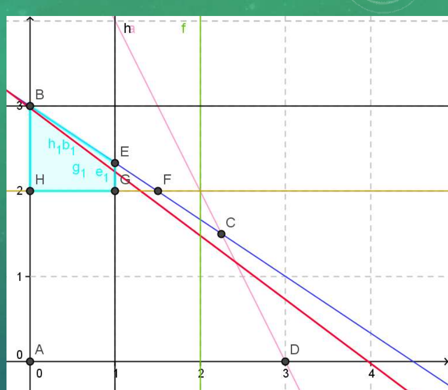
Pero no podemos tomarla porque es menor el valor de z que en la otra rama

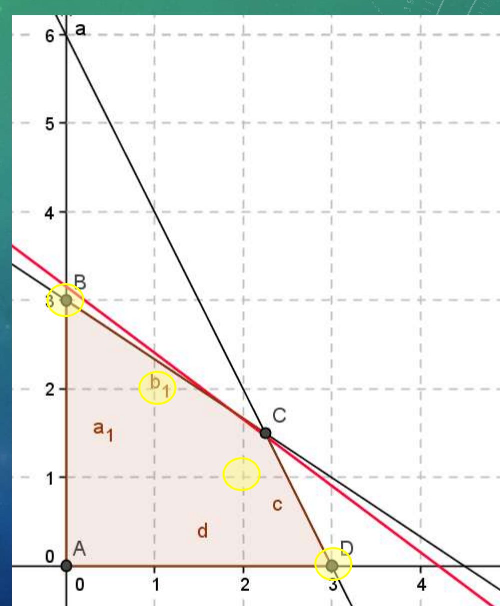
Continuamos ramificando por S1


S1
X1= 2
X2 = 1.67
Z= 12,667
X2<=1
X2 >=2
S3
S4
Max 3x1+4x2
s.a.
2 x1+x2≤6
2x1+3x2≤9
x1≤2
x2≤1
x1,x2≥0
Max 3x1+4x2
s.a.
2 x1+x2≤6
2x1+3x2≤9
x1≤2
x2≥2
x1,x2≥0
Tenemos una nueva solución entera, pero como es menor que la otra rama debemos seguir ramificando por
<untitled>
Max 3 x + 4 y
st
2 x + y <= 6
2 x + 3 y <= 9
x<=2
y<=1
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 10.00000
VARIABLE VALUE REDUCED COST
X 2.000000 0.000000
Y 1.000000 0.000000
<untitled>
Max 3 x + 4 y
st
2 x + y <= 6
2 x + 3 y <= 9
x<=2
y>=2
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 12.50000
VARIABLE VALUE REDUCED COST
X 1.500000 0.000000
Y 2.000000 0.000000


S 4
X1= 1,5
X2 = 2
Z= 12,5
X1<=1
X1 >=2
Max 3x1+4x2
s.a.
2 x1+x2≤6
2x1+3x2≤9
x1≤2
x2≥2
X1 ≤ 1
x1,x2≥0
Max 3x1+4x2
s.a.
2 x1+x2≤6
2x1+3x2≤9
x1≤2
x2≥2
x1≥ 2
x1,x2≥0
X1= 1
S5
X2 <= 4
X2 <= 2,33
x2 >=2
Z= 12,33
Solución
X1=1
X2 = 2,33
Z= 12,33
x1<=2
X2 >=2
X1>=2
Error es x2 Y x1 <= 1,66 y no 2,33
X1=2
S6
X1≤ 2
X1 ≤ 2,33
x1≥ 2
Z=12,5
Solución No Factible
FIN
S 5
X1= 1
X2 = 2.33
Z= 12,33
X2<=2
X2 >=3
Max 3x1+4x2
s.a.
2 x1+x2≤6
2x1+3x2≤9
x1≤2
x2≥2
X1 ≤ 1
x2≤2
x1,x2≥0
Max 3x1+4x2
s.a.
2 x1+x2≤6
2x1+3x2≤9
x1≤2
x2≥2
X1 ≤ 1
x2≥ 3
x1,x2≥0
X2= 2
S 7
X1 <= 2
X1 <= 1,5
X1 <=2
X1 <=1
Z= 11
X2=3
S 8
X1≤ 1,5
X1 ≤ 0
x1≤ 2
X1≤1
Z=12,5
Solución Entera
S7
X1= 1
X2=2
Z= 11
Solución Entera
S8
X1= 0
X2=3
Z= 12







Se han marcado en amarillo las soluciones
Enteras que se analizaron hasta arribar a la (0,3)
Como solución optima entera

En LINDO hubiésemos escrito este
Modelo y obtendríamos esta salida

```
Max 3 x + 4 y
st
2 x + y <= 6
2 x + 3 y <= 9
END
GIN X
GIN Y
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
 OBJECTIVE VALUE =   12.7500000

 SET       Y TO >=     2 AT    1, BND=   12.50    TWIN=  11.50        7
 SET       X TO <=     1 AT    2, BND=   12.33    TWIN=-0.1000E+31      9
 SET       Y TO >=     3 AT    3, BND=   12.00    TWIN=  11.00        12

 NEW INTEGER SOLUTION OF    12.0000000     AT BRANCH      3 PIVOT      12
 BOUND ON OPTIMUM:  12.00000
 DELETE       Y AT LEVEL    3
 DELETE       X AT LEVEL    2
 DELETE       Y AT LEVEL    1
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     3 PIVOTS=      12

 LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)      12.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X        0.000000        -3.000000
        Y        3.000000        -4.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)       3.000000         0.000000
       3)       0.000000         0.000000

 NO. ITERATIONS=      12
 BRANCHES=    3 DETERM.=  1.000E    0
```