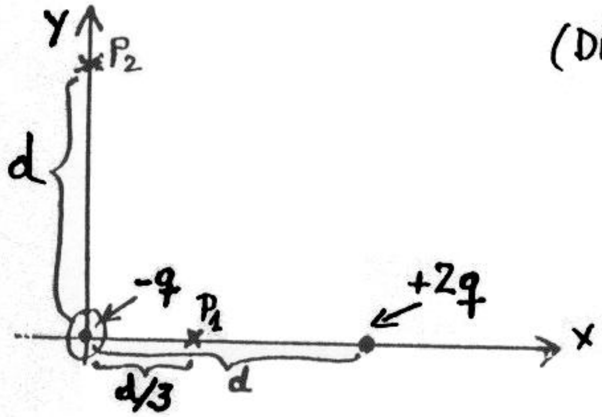
CERTAMEN 1 FIS-120 1.SEM.2004, UTFSM, 5 DE ABRIL DE 2004

NOMBRE, APELLIDO:

ROL:

PROBLEMAS 1-5 SE REFIEREN AL DIBUJO 1

Cargas eléctricas [redacted]s $-q$ y $2q$ están situadas como se ve en el dibujo ($q > 0$): la carga $-q$ en $\vec{r} = (0, 0)$; la carga $2q$ en $\vec{r} = (d, 0)$.



(DIBUJO 1)

1.) ?Cuál es el vector $\vec{E}(\vec{r})$ del campo eléctrico en el punto P_1, es decir, en el punto $\vec{r} = (d/3, 0)$? (en el sistema x-y de coordenadas del dibujo)

(a) $k(q/d^2)\,(+3, 0)$ $(k = 1/(4\pi\epsilon_0))$
(b) $k(q/d^2)\,(-3, 0)$
(c) $k(q/d^2)\,(9, 0)$
(d) $k(q/d^2)\,(-27, 0)$
(e) $k(q/d^2)\,(-27/2, 0)$

$$\vec{E}(P_1) = \left(-k\cdot\frac{q}{(\frac{d}{3})^2}, 0\right) + \left(-k\cdot\frac{2q}{(\frac{2d}{3})^2}, 0\right)$$
$$= \frac{kq}{d^2}\left(-9 - 2\cdot\frac{9}{4}, 0\right) = \frac{kq}{d^2}\left(-\frac{27}{2}, 0\right)$$

2.) En el punto P_2 $[\vec{r} = (0, d)]$ el campo $\vec{E}(\vec{r})$ es [Sugerencia: Calcule primero $\vec{E}_{-q}(\vec{r})$ y $\vec{E}_{2q}(\vec{r})$.]

(a) $k(q/d^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(b) $k(q/d^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(c) $k(q/d^2)(-1, +1)$
(d) $k(q/d^2)\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
(e) $k(q/d^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\vec{E}(P_2) = \vec{E}_{-q}(P_2) + \vec{E}_{2q}(P_2);$$
$$\vec{E}_{-q}(P_2) = \left(0, -\frac{k\cdot q}{d^2}\right); \quad |\vec{E}_{2q}(P_2)| = k\cdot\frac{2q}{(d\cdot\sqrt{2})^2} = k\cdot\frac{q}{d^2} \Rightarrow$$
$$\vec{E}_{2q}(P_2) = k\cdot\frac{q}{d^2}\cdot(-\cos 45^\circ, +\sin 45^\circ) = \frac{kq}{d^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{E}(P_2) = \frac{kq}{d^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3.) El potencial eléctrico $V(\vec{r})$ en el punto P_2 es (se toma la convención usual: V = 0 para $|\vec{r}| = \infty$)

(a) $k(q/d)(-\sqrt{2} - 1)$
(b) $k(q/d)$
(c) $k(q/d)(+\sqrt{2} - 1)$
(d) $(5/3)k(q/d)$
(e) $k(q/d)(\sqrt{2} + 1)$

$$V(P_2) = k\cdot\frac{(-q)}{d} + k\cdot\frac{(2q)}{(d\cdot\sqrt{2})} = \frac{k\cdot q}{d}(-1 + \sqrt{2})$$

(C1)

4.) ?Cuál es el trabajo W que se necesita invertir para traer una carga $4q$ desde infinidad al punto P_2 $[\vec{r} = (0, d)]$?
[Sugerencia: el potencial eléctrico del problema anterior permite obtener la energía potencial de cualquier carga en el punto P_2, causada por las cargas fijas $-q$ y $2q$ del dibujo.]

(a) $4(\sqrt{2} - 1)k(q^2/d)$

$$W = 4q\left(V(P_2) - V(\infty)\right) = 4q \cdot V(P_2) = 4q\,\frac{kq}{d} \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

(b) $-4k(q^2/d)$

(C1)

8.) El campo eléctrico $\vec{E}(r)$ (su magnitud $|\vec{E}(r)|$ y su dirección) fuera del cascarón ($r > c$) es

(a) $k(3Q/r^2)$, en dirección $\hat{r}$
(b) $k(3Q/r^2)$, en dirección $-\hat{r}$
(c) cero
(d) $k(Q/r^2)$, en dirección $\hat{r}$
(e) $k(4Q/r^2)$, en dirección $-\hat{r}$

$r > c$: $\varepsilon_0 \cdot \int \vec{E}(r)\cdot d\vec{A} = \underbrace{(+Q - 4Q)}_{q_{enc}}$

$\varepsilon_0 \, (\hat{r}\cdot\vec{E}(r)) \cdot 4\pi r^2 = -3Q$ $(= q_{enc})$

$\Rightarrow \hat{r}\cdot\vec{E}(r) = -\frac{3Q}{r^2}\cdot k$

$\Rightarrow |\vec{E}(r)| = \frac{3Q}{r^2}\cdot k$ en dirección $(-\hat{r})$

9.) ?Cuál es el potencial eléctrico $V(r)$ fuera del cascarón ($r > c$)? (Tomemos la convención que $V = 0$ para $r = \infty$.)

(a) $k(4Q/r)$
(b) $k(3Q/r)$
(c) cero
(d) $-k(3Q/r)$
(e) $-k(4Q/r)$

$\vec{E}(r)$ $(r > c)$ como para carga punto $(-3Q)$ en $r=0$

$\Rightarrow V(r) = \frac{k(-3Q)}{r}$ $(r \geq c)$

10.) ?Cuál es el potencial eléctrico $V(r)$ para r entre la bola y el cascarón ($a < r < b$)? (Tomemos la convención que $V = 0$ para $r = \infty$.)
[Sugerencia: El potencial eléctrico no tiene discontinuidades. Dentro de conductores, el potencial eléctrico es constante.]

(a) $k(Q/r)$
(b) $k(Q/r) - k(3Q/c)$
(c) $k(Q/r) - k(3Q/b)$
(d) $k(Q/r) - k(3Q/c) - k(Q/b)$
(e) $-k(Q/r)$

Por 9.) $V(r=c) = -k\frac{3Q}{c}$;

$b \leq r \leq c \Rightarrow V = cte = -k\cdot\frac{3Q}{c}$ (porque $\vec{E} = 0$) $\Rightarrow \boxed{V(r=b) = -k\frac{3Q}{c}}$

Dentro: $a \leq r \leq b$: según 6.) $\vec{E}(r)$ como de carga punto $(+Q)$ en $r=0$

$\Rightarrow V(r) = +k\cdot\frac{Q}{r} + C$; pero: $V(r=b) = -k\cdot\frac{3Q}{c} \Rightarrow$

$a \leq r \leq b$ $C = -k\cdot\frac{3Q}{c} - k\cdot\frac{Q}{b}$ $\Rightarrow \boxed{V(r) = +k\frac{Q}{r} - k\cdot\frac{3Q}{c} - k\cdot\frac{Q}{b}}$

[Fin del bloque 6-10]

11.) Tenemos un cuerpo conductor aislado, con la densidad superficial variable de la carga eléctrica. En un segmento pequeño de 10 mm^2 de la superficie, hay aproximadamente -9×10^{-20} C de carga eléctrica. ?Cuál es aproximadamente el campo eléctrico fuera del conductor cerca del segmento mencionado?

(a) 10 N/C, perpendicular a la superficie, hacia fuera
(b) 10^3 N/C, perpendicular a la superficie, hacia dentro
(c) 10^{-5} N/C, paralelo a la superficie
(d) 10^{-8} N/C, perpendicular a la superficie, hacia fuera
(e) 10^{-3} N/C, perpendicular a la superficie, hacia dentro

$|\Delta\vec{A}| = 10\, mm^2 = 10\cdot 10^{-6}\, m^2 = 10^{-5}\, m^2$

$\sigma = \frac{\Delta Q}{|\Delta\vec{A}|} = -\frac{9\cdot 10^{-20}\, C}{10^{-5}\, m^2} = -9\cdot 10^{-15}$

$\vec{E}$ tiene dirección $(-\hat{n})$ (perpendicular hacia dentro porque $\sigma < 0$)

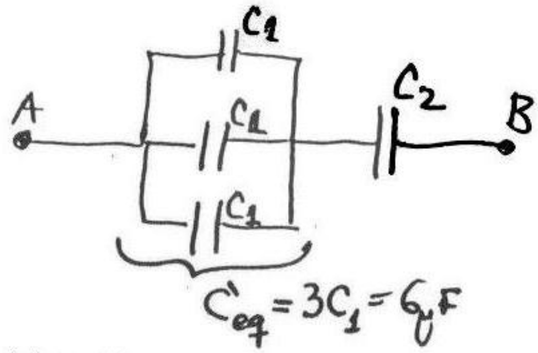
$|\vec{E}| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \approx \frac{9\cdot 10^{-15}\, \cancel{C}\, N\cancel{m^2}}{\cancel{m^2}\cdot 9\cdot 10^{-12}\, C^{\cancel{2}}} = 10^{-3}\frac{N}{C}$ $\Rightarrow$ (e)

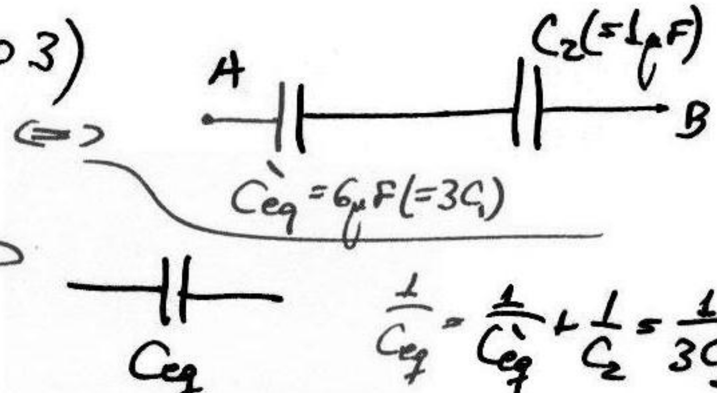
(C3+C2)

(C1)

12.) En el dibujo 3, tenemos tres condensadores en paralelo, cada uno con $C_1 = 2\mu F$; y otro en serie, con capacitancia $C_2 = 1\mu F$. La capacitancia equivalente $C_{\text{eq.}}$ entre los puntos A y B es

(DIBUJO 3)





$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C'_{eq}} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3C_1} + \frac{1}{C_2}$$

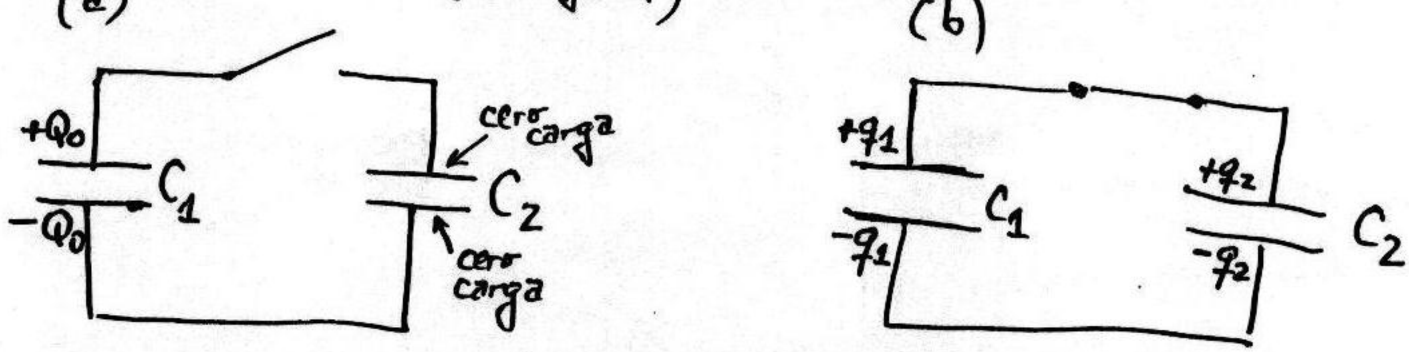
(a) 2 μF
(b) (7/6) μF
(c) 3 μF
(d) (6/7) μF
(e) 7 μF

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{(3C_1)C_2}{(3C_1 + C_2)} = \frac{6 \cdot 1}{7}\mu F = \frac{6}{7}\mu F$$

PROBLEMAS 13-15 SE REFIEREN A LOS DIBUJOS 4(a) y 4(b)

Tenemos dos condensadores, el primero con $C_1 = 5\ \mu F$ y el segundo con $C_2 = 10\ \mu F$. La situación inicial [dibujo 4(a)]: El primer condensador esta cargado con $Q_0 = 10\ \mu C\ (= 10^{-5}\ C)$; el segundo condensador no está cargado.

(DIBUJO 4)



13.) Cerramos el interruptor, y una parte de la carga se transfiere al segundo condensador [dibujo 4(b) - situación final]. ?Cuál es la carga q_1 en el primer condensador en la situación final?
[Sugerencias: Tome en cuenta la conservación de la carga en cada parte aislada del circuito; con el interruptor cerrado, las dos diferencias del potencial eléctrico (V_1, V_2) están relacionadas.]

(a) cero
(b) 3.33 μC
(c) 10 μC
(d) 6.67 μC
(e) $-6.67\ \mu C$

$$q_1 + q_2 = Q_0 \quad (1)$$

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad (2)$$

Colocando (1) en (2) $\Rightarrow$ $\frac{q_1}{C_1} = \frac{(Q_0 - q_1)}{C_2} \Rightarrow q_1 \cdot C_2 = (Q_0 - q_1) C_1$

$$\Rightarrow q_1 (C_1 + C_2) = Q_0 \cdot C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 = Q_0 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = Q_0 \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{3} Q_0 = \frac{1}{3} \cdot 10\mu F = 3.33\mu F$$

$$q_2 = Q_0 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3} Q_0 = 6.67\mu F$$

(C1)

14.) ?Cual es la razón de las energías de la configuracón, U_f/U_i? (U_i es la energía inicial, U_f la energía final del sistema de dos condensadores.)

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 1/2
(e) 1/3

$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1}$; $U_f = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\left[Q_0^2 \frac{C_1^2}{(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{1}{C_1} + Q_0^2 \frac{C_2^2}{(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{1}{C_2}\right]$ por (3)

$\Rightarrow U_f = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{C_1}{(C_1+C_2)^2} + \frac{C_2}{(C_1+C_2)^2}\right] = \frac{1}{2}Q_0^2 \cdot \frac{1}{(C_1+C_2)}$

$\Rightarrow U_f/U_i = \frac{C_1}{(C_1+C_2)} = \frac{5}{15} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

15.) Si al segundo condensador se coloca (ya en la situación inicial) un material dieléctrico con la constante dieléctrica $\kappa_e = 2$ que llena todo el espacio entre las dos placas del condensador, ?cuál es la razon U_f/U_i en este caso?

(a) 0.2
(b) 0.8
(c) 0.5
(d) 5
(e) 2

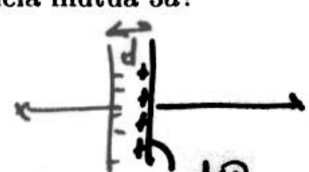
$C_2' = \kappa_e \cdot C_2 = 2 \cdot 10\,\mu F = 20\,\mu F$ $(C_1 = 5\,\mu F)$

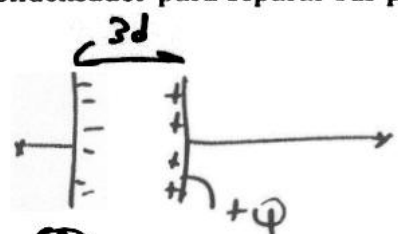
$\frac{U_f}{U_i} = \frac{C_1}{C_1+C_2'} = \frac{C_1}{C_1+\kappa_e C_2} = \frac{5}{5+20} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \underline{\underline{0.2}}$

[fin del bloque 13-15]

16.) Tenemos un condensador *aislado*, con dos placas paralelas de material conductor, con distancia entre las placas d, con área de cada una (un lado de cada una) A. Una placa tiene carga eléctrica Q y la otra $-Q$. ?Cuál es el trabajo W que se necesita invertir (desde fuera) al condensador para separar sus placas desde la distancia mutua d a la distancia mutua $3d$?

(a) $3(Q^2d)/(\epsilon_0 A)$
(b) $(Q^2d)/(\epsilon_0 A)$
(c) $4(Q^2A)/(\epsilon_0 d)$
(d) $8(Q^2A)/(\epsilon_0 d)$
(e) $2(Q^2d)/(\epsilon_0 A)$





(i)

$U_i = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_i}$

$C_i = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$

(f)

$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_f}$

$C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{3d}$

$W = U_f - U_i = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_i}\right) = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{3d}{\varepsilon_0 A} - \frac{1 \cdot d}{\varepsilon_0 A}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}Q^2 \cdot \frac{\cancel{2}d}{\varepsilon_0 A}$

$W = \underline{\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A}}$

(C1)

LISTA DE ALGUNAS FORMULAS

fis-120, 1.sem.2004, C1, UTFSM, 5 de abril de 2004

Campo eléctrico de una carga q situada en $\vec{r}=0$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad (\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}) \ , \tag{1}$$

donde

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ , \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2} \ . \tag{2}$$

Potencial eléctrico de esta carga es

$$V(r) = k\frac{q}{r} \tag{3}$$

La relación general entre V y $\vec{E}$:

$$V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{4}$$

Campo eléctrico cerca de un conductor (fuera):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \ , \tag{5}$$

donde $\sigma = dq/dA$ es densidad superficial de la carga.

Condensadores (capacitores):

$$Q = CV \quad (V = |\Delta V|) \ , \tag{6}$$

$$U_c = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \ . \tag{7}$$

$$C_{\text{eq.}} = \sum_{j=1}^{n} C_j \quad \text{(en paralelo)} \ , \tag{8}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq.}}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \quad \text{(en serie)} \ . \tag{9}$$

Condensador de placas paralelas conductoras:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \ , \quad V = Ed \ , \qquad C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \ . \tag{10}$$

Si hay material dieléctrico ($\kappa_e > 1$) entre las placas, tenemos apantallamiento de E:

$$E = \frac{\sigma}{\kappa_e \epsilon_0} \ , \quad C = \kappa_e \frac{\epsilon_0 A}{d} \ . \tag{11}$$