Capítulo 3

Memoria detallada: muelle

3.1. Objetivos e introducción

Cuando estiramos un muelle, la fuerza que debemos ejercer sobre este para que se deforme no es constante. Esto es lo que afirma la ley de Hooke. Su expresión matemática es la siguiente:

$$F = k\Delta x \tag{3.1}$$

Donde k es una constante característica asociada a cada muelle.

La ley de Hooke, aún así, no es válida para cualquier situación. Esta se cumple hasta el denominado límite proporcional. Una vez superado el límite proporcional, la ley de Hooke ya no es válida. Si al aplicarle una fuerza el muelle queda deformado permanentemente decimos que este superó su límite elástico.

Para la realización de la práctica disponemos de un muelle elástico del que despreciaremos la masa. Este lo colgaremos verticalmente y colgaremos de él una masa dejando que alcance un estado de equilibrio, permitiendo así que la ley de Hooke se iguale al peso del muelle.

$$mg = k\Delta x \tag{3.2}$$

En la segunda parte de la práctica, utilizaremos un método dinámico. Dejaremos que las masas del muelle oscilen en un movimiento armónico simple. En un M.A.S. se cumple la siguiente igualdad:

$$a = -\omega^2 x \tag{3.3}$$

Cuando aplicamos la ley de Hooke a la fuerza recuperadora de un muelle obtenemos:

$$F_{rec} = -k\Delta x \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta estas dos ecuaciones y la segunda ley de Newton:

$$m\omega^2 = k \tag{3.5}$$

Debemos tener en cuenta las dos ecuaciones siguientes:

$$\omega = \sqrt{\tfrac{k}{m}}$$

$$\omega = \tfrac{2\pi}{T}$$

Por lo tanto deducimos la siguiente igualdad:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.6}$$

Por lo tanto, elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos:

$$T^2 = \frac{1}{k}4\pi^2 m \tag{3.7}$$

Contamos ahora con una ecuación, apta para nuestro estudio dinámico, de una recta donde $\frac{1}{k}$ es la pendiente de la misma.
La siguiente parte de la práctica consiste en sumergir unos sólidos en agua, de la cual supondremos que supondremos $\rho_{agua} = 1\ g \cdot cm^{-3}$, para hallar su densidad, la cual desconocemos. Utilizamos la siguiente ecuación para un sólido:

$$m_s g = \rho_s V_s g = k\Delta x \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta que sumergimos el sólido en agua, este sufre un empuje dirigido hacia arriba. Restando vectorialmente las dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo, tanto el peso como el empuje, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\rho_s V_s g - \rho_{agua} V_s g = k\Delta x' \tag{3.9}$$

Esta vez tenemos $\Delta x'$ debido a que estando el sólido sumergido, el muelle sufre una deformación distinta. Restando las dos igualdades anteriores:

$$\rho_{agua} V_s g = k(\Delta x - \Delta x') \tag{3.10}$$

Multiplicando la ecuación (3.8) por la inversa de la anterior (3.10) llegamos a la siguiente igualdad:

$$\rho_s = \rho_{agua}\frac{\Delta x}{\Delta x - \Delta x'} \tag{3.11}$$

También calcularemos la densidad de un líquido, por lo que despejando la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$\rho_L = \rho_s\frac{\Delta x - \Delta x'}{\Delta x} \tag{3.12}$$

En la última parte de la práctica determinaremos la gravedad mediante la caída libre de un objeto. Para estos casos se cumple la siguiente ecuación:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{3.13}$$

De ese modo podemos ajustar los datos a la ecuación de una recta despejando la ecuación anterior. Según la siguiente ecuación:

$$2h = gt^2 \tag{3.14}$$

La pendiente de esa recta es la constante g, que es el dato que queremos hallar.

Las incertidumbres asociadas a cada magnitud serán indicadas específicamente para cada caso a lo largo del apartado (3.3)

3.2. Montaje y procedimiento

Para realizar esta práctica disponemos de un soporte del que colgaremos el muelle a estudiar. Del muelle colgaremos pesas de distintas masas, medidas mediante una balanza, que harán que se estire. Para medir la diferencia de elongación disponemos de una regla vertical con una solapa que nos ayuda a marcar bien las distancias. Esta la usaremos para hallar k mediante el modo estático. Para el dinámico contamos con un cronómetro con el que mediremos $10T$ por comodidad para tomar los datos.

Para el caso de las densidades, Montaremos una placa en el soporte con un recipiente de un líquido de densidad conocida (agua) para medir experimentalmente la densidad de los distintos sólidos. Para calcular la densidad de in líquido, intercambiaremos los papeles, introduciendo en un líquido de densidad desconocida un sólido de densidad conocida.

Por último, para hallar la constante g disponemos de un dispositivo capaz de medir los tiempos que tarda una bola en caer desde una distancia que se nos indica en el propio aparato. La bola metálica se adhiere mediante un imán que se desactiva en el momento en el que un cronómetro empieza a contar. Obtenemos así una medida de un tiempo asociada a una altura. Para realizar las medidas solo debemos colocar la bola metálica en el imán y darle al botón que acciona el mecanismo. Esto será lo que hagamos primero debido a que necesitamos la constante g para realizar las otras dos secciones de la práctica.

3.3. Resultados experimentales y análisis

A lo largo de este apartado elaboraremos una discusión de los datos obtenidos en el laboratorio, teniendo en cuenta el análisis de incertidumbres. Primero hallaremos g, constante necesaria para la práctica. Nuestro objetivo es obtener un cálculo experimental de la constante del muelle k, distintas densidades de varios cuerpos y fluídos.

3.3.1. Determinación de la constante g

Los datos tomados se presentan a continuación:

$h \pm 0,2\ (cm)$	$t \pm 0,0001\ (s)$
20,0	0,2047
25,0	0,2285
30,0	0,2498
35,0	0,2694
40,1	0,2884
45,0	0,3059
50,0	0,3226
55,0	0,3375
60,1	0,3530
65,1	0,3668

La incertidumbre escogida para la altura don 0,2 cm debido a que el soporte que medía la distancia estaba un poco suelto, por lo que era difícil ajustar de forma precisa la altura a la que dejamos caer la bola.

Según la ecuación (3.13) podemos realizar un ajuste mediante mínimos cuadrados donde la gravedad es la pendiente. Debemos aún así tener en cuenta los cálculos necesarios previos a este para realizar el ajuste.

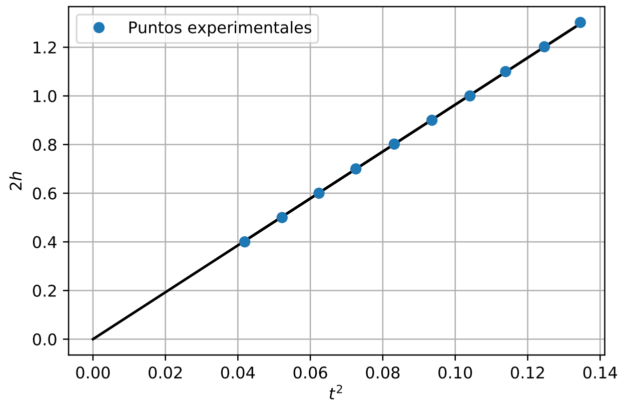
$2h\ (cm)$	$s(2h)\ (cm)$	$t^2\ (s)$	$s(t^2)\ (s)$
40,0	0,4	0,041902	0,000041
50,0	0,4	0,052212	0,000046
60,0	0,4	0,062400	0,000050
70,0	0,4	0,072576	0,000054
80,2	0,4	0,083175	0,000058
90,0	0,4	0,093575	0,000061
100,0	0,4	0,104071	0,000065
110,0	0,4	0,113906	0,000068
120,2	0,4	0,124609	0,000071
130,2	0,4	0,134542	0,000073

Las incertidumbres fueron calculadas mediante propagación de incertidumbres siguiendo las siguientes ecuaciones:

$$s(2h) = 2 \cdot s(h)$$

$$s(t^2) = 2t \cdot s(t)$$

Estas varían, por lo que podríamos plantearnos hacer un ajuste ponderado, pero las incertidumbres que varían son las del eje x, y además no hay entre ellas un cambio de orden. Un ajuste lineal simple en este caso es una aproximación lo suficientemente acertada. Mediante mínimos cuadrados obtenemos la siguiente recta:



Para la que obtenemos los siguientes parámetros:

$g\ (m \cdot s^{-2})$	$s(g)\ (m \cdot s^{-2})$	r
9,6408	0,0096	0,999995

Como podemos comprobar, r presenta cinco nueves, por lo que podemos concluir que el cálculo es bastante representativo. Por lo que el valor experimental para la gravedad sobre la superficie terrestre es la siguiente:

$$\boxed{g = (9,6408 \pm 0,0096)(m \cdot s^{-2})}$$

Usaremos este dato a lo largo de la práctica.

3.3.2. Determinación de la constante k (método estático)

Los datos tomados en el laboratorio son los siguientes:

m (g)	Δx (cm)
40,08	13,2
60,06	19,2
79,9	25,4
95,08	30,3
19,81	6,4
70,13	22,7
109,97	35,4
135	43,4
125,25	40,5
114,99	37,2
29,95	10,0

Podemos realizar un ajuste mediante mínimos cuadrados de una recta siguiendo la ecuación (3.2). Usaremos el valor experimental de la gravedad calculado anteriormente. Presento en la siguiente tabla los datos necesarios para realizar el ajuste:

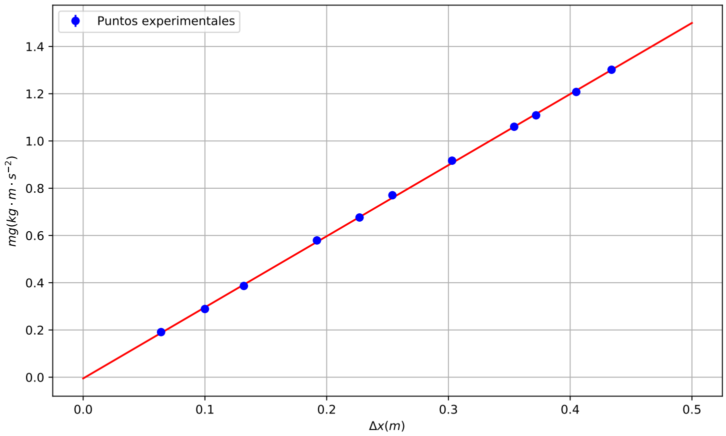
mg $(kg \cdot m \cdot s^{-2})$	$s(mg)$ $(kg \cdot m \cdot s^{-2})$	Δx (m)	$s(\Delta x)$ (m)
0,38640	0,00040	0,132	0,001
0,57903	0,00058	0,192	0,001
0,77030	0,00077	0,254	0,001
0,91665	0,00092	0,303	0,001
0,19098	0,00021	0,064	0,001
0,67611	0,00068	0,227	0,001
1,0602	0,0011	0,354	0,001
1,3015	0,0013	0,434	0,001
1,2075	0,0012	0,405	0,001
1,1086	0,0011	0,372	0,001
0,28874	0,00030	0,100	0,001

Donde $s(mg)$ fue calculado siguiendo la siguiente ecuación:

$$s(mg) = \sqrt{g^2 s^2(m) + m^2 s^2(g)}$$

Podemos ver que en el eje y varían las incertidumbres, por lo que debemos realizar un ajuste ponderado.

Obtenemos la siguiente recta (sin término independiente):



De la que obtenemos los siguientes parámetros:

$k\ (N \cdot m^{-1})$	$s(k)\ (N \cdot m^{-1})$	r
3,0094	0,0016	0,9998

Como nuestro parámetro de fiabilidad r presenta tres nueves podemos concluir que el cálculo es fiable. Por lo que el valor experimental (estático) de la contante del muelle k es el siguiente:

$$\boxed{(3,0094 \pm 0,0016)(N \cdot m^{-1})}$$

3.3.3. Determinación de la constante k (método dinámico)

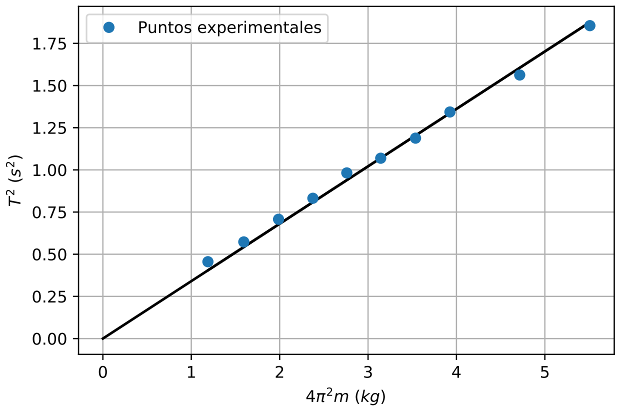
Los datos tomados en el laboratorio son los siguientes:

$m \pm 0,01\ (g)$	$10T \pm 0,01\ (s)$
30,10	6,75
40,38	7,57
50,34	8,41
60,18	9,12
69,90	9,91
79,62	10,34
89,60	10,90
99,45	11,59
119,45	12,50
139,56	13,62

Debemos realizar un ajuste lineal de los datos según la ecuación (3.7). Obtendríamos una recta de pendiente k^{-1}.

T^2 (s^2)	$s(T^2)$ (s^2)	$4\pi^2 m$ (kg)	$s(4\pi^2 m)$ (kg)
0,46	0,14	1,18830	0,00039
0,57	0,15	1,59414	0,00039
0,71	0,17	1,98734	0,00039
0,83	0,18	2,37581	0,00039
0,98	0,20	2,75954	0,00039
1,07	0,21	3,14327	0,00039
1,19	0,22	3,53727	0,00039
1,34	0,23	3,92613	0,00039
1,56	0,25	4,71570	0,00039
1,86	0,27	5,50961	0,00039

Como podemos ver, las incertidumbres del eje y varían, por lo que podríamos plantearnos hacer una regresión ponderada. Yo haré una regresión simple debido a que estas casi no varían, ni siquiera llegan a cambiar de orden. Obtenemos la siguiente recta (sin término independiente): De la que obtenemos los siguientes coeficientes:



k^{-1} $(N \cdot m^{-1})$	$s(k^{-1})$ $(N \cdot m^{-1})$	r
0,3404	0,0031	0,9996

Según r, el ajuste es fiable, pues presenta tres nueves. Calculamos ahora k simplemente haciendo la inversa de nuestra pendiente. La incertidumbre de k se halla mediante propagación de incertidumbres. La calculamos siguiendo la siguiente expresión:

$$s(k) = k \cdot s(\tfrac{1}{k})$$

Nuestro valor experimental para k es el siguiente:

$$\boxed{k = (2,9377 \pm 0,0091)(N \cdot m^{-1})}$$

Como podemos ver, este valor encaja bastante bien con el resultado obtenido en el apartado anterior.

3.3.4. Densidades

Las incertidumbres elegidas para las elongaciones son de $0,2\ cm$ debido a la dificultad que suponía realizar medidas con la regla vertical.

Sólidos

Aplicamos la fórmula (3.11) para obtener cálculos experimentales de las densidades de los distintos sólidos utilizados. Vemos los resultados en la siguiente tabla:

	$\Delta x_0 \pm 0,2\ (cm)$	$\Delta x_{agua} \pm 0,2\ (cm)$	$\rho\ (g \cdot cm^{-3})$	$s(\rho)\ (g \cdot cm^{-3})$
Sólido 1	47,2	42,4	9,83	0,47
Sólido 2	16,1	10,7	2,98	0,17
Sólido 3	39,4	33,8	7,04	0,31

Las incertidumbres fueron calculadas mediante propagación de incertidumbres siguiendo la siguiente ecuación:

$$s(\rho) = \sqrt{\frac{\Delta x_{agua}^2}{(\Delta x_0 - \Delta x_{agua})^4} s^2(\Delta x_0) + \frac{\Delta x_0^2}{(\Delta x_0 - \Delta x_{agua})^4} s^2(\Delta x_{agua})}$$

Líquido

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, calculamos ahora la densidad experimental del alcohol según la ecuación (3.12). En la siguiente tabla podemos ver los resultados:

	$\Delta x_0 \pm 0,2\ (cm)$	$\Delta x_{alcohol} \pm 0,2\ (cm)$	$\rho\ (g \cdot cm^{-3})$	$s(\rho)\ (g \cdot cm^{-3})$	$\rho_{alcohol}\ g \cdot cm^{-3}$	$s(\rho_{alcohol})\ g \cdot cm^{-3}$
Sólido 1	47,2	43,1	9,83	0,47	0,85	0,10
Sólido 2	16,1	11,2	2,98	0,17	0,907	0,095
Sólido 3	39,4	35,0	7,04	0,31	0,786	0,094

La incertidumbre de la densidad del líquido fue calculada mediante propagación de incertidumbres siguiendo la siguiente ecuación:

$$s(\rho_{alcohol}) = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_0 - \Delta x_{alcohol}}{\Delta x_0}\right)^2 s^2(\rho_s) + \left(\frac{\rho_s}{\Delta x_0}\right)^2 s^2(\Delta x_{alcohol}) + \left(\frac{\rho_s \Delta x_{alcohol}}{\Delta x_0^2}\right)^2 s^2(\Delta x_0)}$$

3.4. Conclusiones

En cuanto al cálculo de la constante del muelle k podemos observar un gran parecido entre los dos resultados obtenidos. Debido a que no disponemos de un valor real para compararlo debemos asumir que nuestros resultados son parcialmente acertados o, cuanto menos, fiables.

En el apartado de la densidad, obtuvimos tres densidades, una por cada sólido. La densidad del sólido 1 es la que más me descoloca. Esta no se parece a ninguna densidad de un elemento metálico puro. Los más parecidos y razonables son la plata ($\rho = 10,5\ g \cdot cm^{-3}$) o el cobre ($\rho = 8,96\ g \cdot cm^{-3}$). Debemos considerar también la posibilidad de que haya impurezas. La densidad del sólido 2 se parece bastante a la del aluminio ($\rho = 2,70\ g \cdot cm^{-3}$) y la densidad del sólido 3 es equiparable a la del zinc ($\rho = 7,13\ g \cdot cm^{-3}$), cromo ($\rho = 7,19\ g \cdot cm^{-3}$) o manganeso ($\rho = 7,43\ g \cdot cm^{-3}$). Debemos considerar también la opción del hierro ($\rho = 7,87\ g \cdot cm^{-3}$) o acero ($\rho = 7,85\ g \cdot cm^{-3}$), debido a que son materiales bastante comunes. La densidad teórica del alcohol es $\rho = 789\ g \cdot cm^{-3}$, la cual se ajusta bastante bien a los resultados obtenidos. Pese a eso observamos una diferencia que puede haber sido causada por varios factores. Pueden haber sido errores en la medida, impurezas en el alcohol o incluso que la concentración de este no era todo lo pura que podría haber sido.

Para la gravedad tenemos un resultado muy semejante al dato teórico para esta constante ($g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$).

Pese a que los resultados no fueron los mejores estos fueron bastante próximos a los valores correspondientes para cada dato experimental. Podemos concluir así que nuestros resultados fueron satisfactorios.