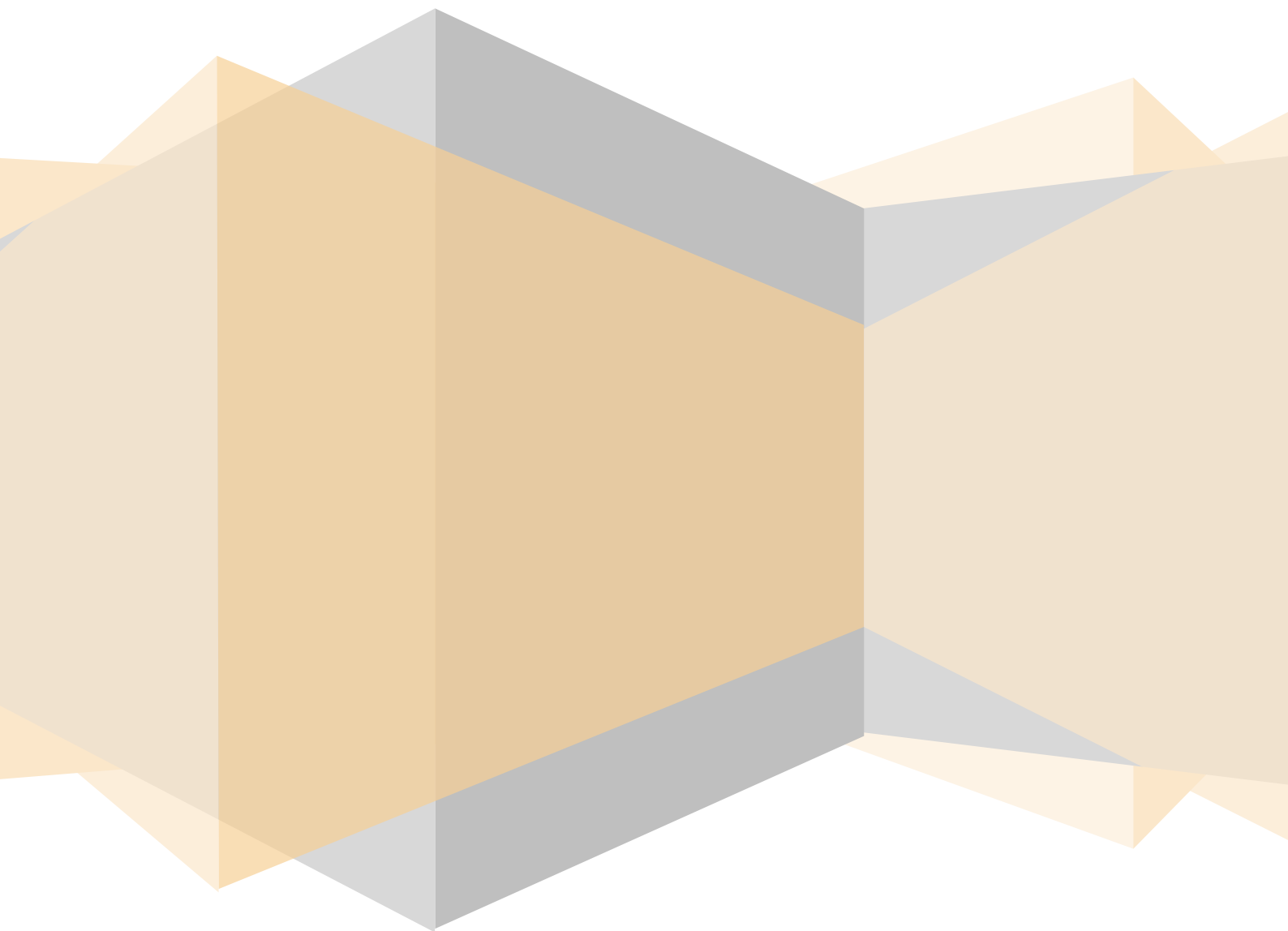


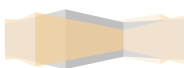
Grado de física curso 2021-2022
Técnicas experimentales I:
Laboratorio básico de física general:
momento de inercia. Práctica borrador

Souto Parga, Hugo
Grupo 6, pareja 3



Índice:

1. Objetivo e introducción teórica.....	3
2. Material utilizado.	4
3. Montaje y procedimiento experimental.	5
4. Resultado experimentales.	6
4.1. Cálculo de la constante del muelle:	6
4.2. Medida del momento de inercia de diferentes sólidos.	7
4.2.1. Esfera	7
4.2.2. Cilindro.....	10
4.2.3. Disco perforado	12
4.3. Medida del momento de inercia de diferentes sólidos.	14
4.3.1. Disco perforado	14
4.3.2. Barra.....	17
5. Conclusión.	21
6. Bibliografía	21



1. Objetivo e introducción teórica.

Los objetivos de esta práctica son:

1. Medir los momentos de inercia experimentalmente de diferentes cuerpos: un disco, un cilindro y una esfera.
2. Demostrar el teorema de Steiner, mediante el uso de dos cuerpos: un disco y una barra.

Antes de proceder con la realización de la práctica y el cumplimiento de estos objetivos, hay que tener como trasfondo una breve introducción teórica para facilitar la adquisición, comprensión e interpretación de los datos obtenidos durante la práctica.

El momento de inercia es una medida de como se distribuye la masa alrededor del elemento en torno al cual rota, dependiendo así de la geometría del objeto y no de las fuerzas que actúan sobre este. Matemáticamente, el momento de inercia de un sólido rígido respecto a un punto, recta o plano se rige por la siguiente ecuación, donde r es la distancia del diferencial de masa a un punto, recta o plano:

$$I = \int r^2 dm \quad (kg \cdot m^2)$$

Ec. 2.1

Integrando esta expresión, hayamos las diferentes expresiones que adopta el momento de inercia para los distintos cuerpos geométricos con los que trabajaremos a lo largo de la práctica:

Momentos de inercia	
Esfera maciza	$I = \frac{2 \cdot M \cdot R^2}{5}$
Cilindro macizo	$I = \frac{M \cdot R^2}{2}$
Disco	$I = \frac{M \cdot R^2}{2}$
Barra	$I = \frac{M \cdot L^2}{12}$

Tabla 2.1: Valores de los momentos de inercia de distintos cuerpos geométricos.

Además, el momento de inercia desempeña un papel análogo al de la masa en el movimiento de rotación o armónico simple ordinario.

Un factor muy importante a tener en cuenta es que el momento de inercia se relaciona con los movimientos de rotación, cuya ecuación fundamental es:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ec. 2.2

Siendo \vec{M} el momento de las fuerzas que actúan sobre el sistema y \vec{L} el momento angular y que es igual a:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Ec. 2.3

En nuestro caso, haremos girar los cuerpos sobre su eje principal, por lo que nos será válida la relación escalar.

También conviene recalcar que:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ec. 2.4

Como mediremos el momento de inercia a partir del periodo de oscilación de nuestros cuerpos sometidos a la fuerza recuperadora de un resorte se cumple la siguiente ecuación:

$$M = -D \cdot \phi$$

Ec. 2.5

Aplicando las ecuaciones 2.2 y 2.3 llegamos a la igualdad:

$$\frac{d(I \cdot \omega)}{dt} = -D \cdot \phi \rightarrow \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{-D \cdot \phi}{I}$$

Ec. 2.6

Al resolver la ecuación diferencial resultante (Ec. 2.6), llegamos a la expresión:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I}} t + \phi_0\right)$$

Ec. 2.7

Lo cual podemos relacionar con un movimiento armónico. Teniendo todo esto en cuenta y que en la práctica vamos a medir los semiperiodos, trabajaremos con ellos para la memoria, concluyendo así que:

$$T_{1/2} = \tau = \pi \sqrt{\frac{I}{D}} \rightarrow I = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 D$$

Ec. 2.8

Esta última expresión es en la que se fundamenta esta memoria.

Con respecto al teorema de Steiner, este afirma que:

“el momento de inercia de un sólido rígido respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto a otro eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del sólido por el cuadrado de la distancia que separa a ambos ejes”

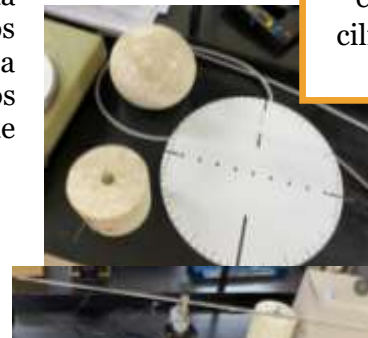
$$I = I_0 + md^2$$

Ec. 2.9

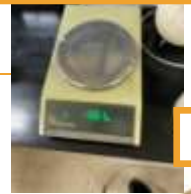
Este teorema nos resulta muy útil para medir los momentos de inercia de sólidos rígidos sobre cualquier eje, dado el momento de inercia del objeto sobre el eje paralelo que pasa a través del centro de masa y de la distancia perpendicular entre ejes.

2. Material utilizado.

1. Cuatro cuerpos: que tienen una varilla incrustada horizontal que hará a veces de diafragma y que nos servirá para medir los semiperiodos con el detector de la barrera fotoeléctrica con contador de tiempo. Los cuerpos utilizados con sus respectivos momentos de inercia son
 - Disco perforado.
 - Esfera maciza
 - Cilindro macizo.
 - Barra rígida.



Disco perforado,
esfera maciza,
cilindro macizo y
barra rígida



- Balanza analógica: con la que mediremos las masas de los cuerpos y cuya incertidumbre es de $\pm 0,01\text{g} = \pm 0,00001\text{kg}$.
- Regla: con la que mediremos las dimensiones de los cuerpos y cuya incertidumbre es de $\pm 1\text{mm} = 0,001\text{m}$
- Soporte giratorio: que cuenta con un muelle en espiral que nos proporcionará el par recuperador.
- Detector de la barrera fotoeléctrica con contador de tiempo: Con el que mediremos los semiperiodos de los cuerpos y cuya incertidumbre es de $\pm 0,001\text{s}$.
- Dinamómetro: con el que mediremos la fuerza que debemos ejercer para desplazar el disco a distintos ángulos y cuya incertidumbre es de $\pm 0,02\text{N}$.

3. Montaje y procedimiento experimental.

Para la realización de esta práctica, antes de todo debemos empezar por medir la constante de recuperación del muelle mediante un ajuste lineal por mínimos cuadrados si término independiente. Para calcularlo, ajustaremos el disco al soporte y lo desplazaremos con diez ángulos distintos (nosotros lo hicimos de quince en quince grados) con un dinamómetro, para que este nos indique la fuerza ejercida para ello. Tener en cuenta que a la hora de utilizar el dinamómetro este debe estar en todo momento perpendicular al radio del disco. Una vez realizado el ajuste, la pendiente se corresponderá con nuestra constante de recuperación del muelle.

Ya calculada la constante de recuperación del muelle, ya podemos empezar la primera parte de la práctica, que consistía en calcular los momentos de inercia de los cuerpos (disco, esfera y cilindro). Esta consistirá básicamente en hallar los semiperiodos de los cuerpos mediante el detector de la barrera fotoeléctrica con contador de tiempo (20 medidas), asegurándonos de que el diafragma se encuentre justo de la barrera (sino no estaríamos midiendo los semiperiodos), para luego aplicar las expresiones presentadas anteriormente para a obtener así el momento de inercia de forma experimental. Una vez calculados, los compararemos con los valores medidos de forma directa. Destacar que habrá que medir la masa y las dimensiones de los cuerpos de forma directa para realizar estos cálculos.



Por último, para la segunda parte, que consistía en demostrar el teorema de Steiner, utilizaremos el disco perforado y la barra. Determinaremos los momentos de inercia del disco perforado y la barra en el centro de masas y a diferentes distancias de el, utilizando el mismo procedimiento que el descrito en la primera parte. Una vez hecho esto, comprobaremos su validez aplicando la expresión del teorema de Steiner y comparándolos con el momento de inercia medido de forma directa.



4. Resultado experimentales.

4.1. Cálculo de la constante del muelle:

Empezaremos calculando la constante del muelle. Primero anclamos el disco de radio conocido ($R=0,150\pm0,001\text{m}$ medido de forma directa) al muelle y colocamos el dinamómetro perpendicularmente al radio con ($\sin\theta = 1$). Procederemos ahora a realizar diez medidas que consisten en girar el disco con distinto ángulos, nosotros lo hicimos de 15 en 15°, y después vamos anotando los valores de la fuerza ejercida en cada caso. Luego calculamos el momento de la fuerza (M) mediante la ecuación 2.4. Hay que tener en cuenta que las incertidumbres de las medidas son la última cifra que indique nuestro aparato de medición salvo la del momento, que es por propagación de incertidumbres (ec.2.10):

$$s(M) = \sqrt{F^2 \cdot s(R)^2 + R^2 \cdot s(F)^2}$$

Ec. 2.10

Medidas	$\theta \pm 5^\circ$	$\theta \pm 0,087$ (rad)	Fuerza $\pm 0,02$ (N)	$M = R \cdot F$ (N*m)	$s(M)$ (N*m)
1	90	1,571	0,22	0,033	0,0030
2	105	1,833	0,28	0,042	0,0030
3	120	2,094	0,30	0,045	0,0030
4	135	2,356	0,36	0,054	0,0030
5	150	2,618	0,38	0,057	0,0030
6	165	2,880	0,42	0,063	0,0030
7	180	3,142	0,48	0,072	0,0030
8	195	3,403	0,52	0,078	0,0030
9	210	3,665	0,56	0,084	0,0031
10	225	3,927	0,60	0,090	0,0031

Tabla 2.2: Valores de los ángulos, fuerza y momento de la fuerza con sus respectivas incertidumbres.

Una vez obtenidos ya todos estos datos, procedemos a representar gráficamente el ángulo en radianes ($\theta(\text{rad})$) frente al momento de la fuerza (M). Haremos un ajuste lineal simple sin término independiente de estos puntos, lineal porque la representación de los puntos en una gráfica de dispersión forman una figura parecida a una recta, simple porque la incertidumbre en los ejes es despreciable y sin término independiente para que la recta quede sin término independiente como la ecuación 2.4:

$$M = R \cdot F \cdot \sin\theta = R \cdot F \cdot 1 = R \cdot F$$

Obtendremos así la recta de regresión que será de la forma $y=bx$, cuya pendiente b será la constante del muelle (D):

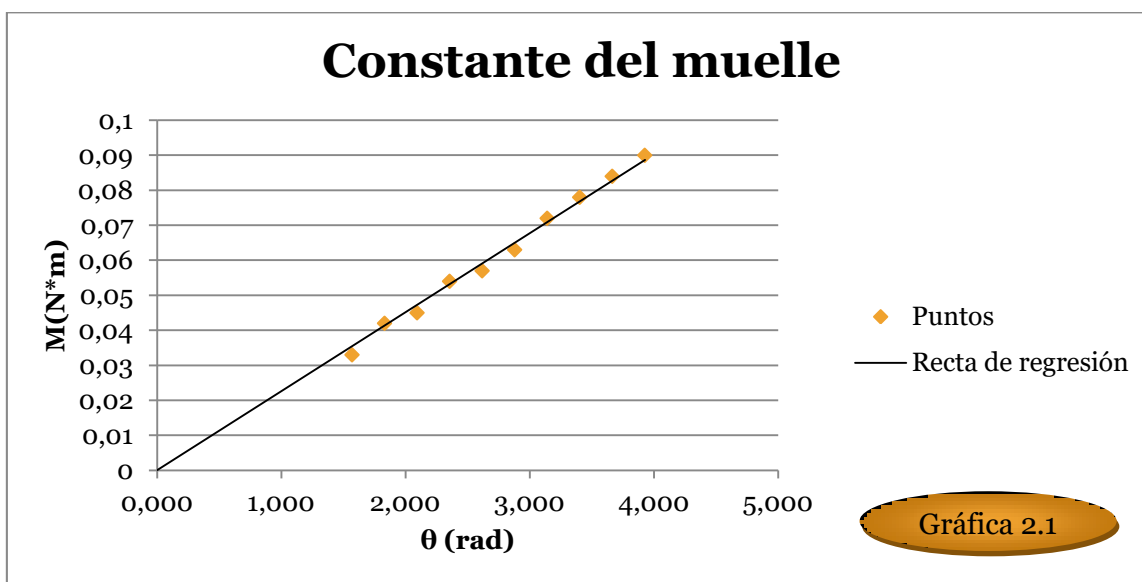
$b \text{ (N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}\text{)}$	$s(b) \text{ (N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}\text{)}$	r
225,8E-04	1,9E-04	0,9996

Tabla 2.3: Valores del ajuste lineal sin término independiente.

Por lo tanto nos queda que:

$$D = 0,02258 \pm 0,00019 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

Cabe destacar el valor de r que se aproxima al uno con tres nueves lo que nos indica que la medida es fiable y aceptable.



4.2. Medida del momento de inercia de diferentes sólidos.

4.2.1. Esfera

Empezamos a calcular el momento de inercia de la esfera cuyas dimensiones y masa son:



$$d = 130\text{mm} = 0,130\text{m} \rightarrow s(d) = 0,001\text{m} \Rightarrow$$

$$r = \frac{0,130}{2} = 0,065\text{m} \rightarrow s(r) = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial r}\right)^2 \cdot s(d)^2} = \frac{1}{2} \cdot s(d) = \frac{1}{2} \cdot 0,001 = 0,0005\text{m}$$

$$M = 860,95\text{g} = 0,86095\text{kg} \rightarrow s(M) = 0,01\text{g} = 0,00001\text{kg}$$

Una vez conocidas estas características, procedemos a realizar 20 medidas de los semiperiodos con el objetivo de calcular el momento a partir de la ecuación 2.8:

Medidas	$\tau \pm 0,001\text{ (s)}$
1	0,695
2	0,557
3	0,690
4	0,644
5	0,702
6	0,668
7	0,697
8	0,686
9	0,700
10	0,701
11	0,703
12	0,652
13	0,614
14	0,676
15	0,710
16	0,676
17	0,703
18	0,603
19	0,675
20	0,686
Media ($\bar{\tau}$)	0,6719

Tabla 2.4: Valores de los semiperiodos de la esfera.

Ahora empezaremos con el protocolo de las medidas directas: calculamos la desviación típica de la muestra ($s_A(\tau)$):

$$s_A(\tau) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau})^2}{n-1}} = 4,0 \cdot 10^{-2}\text{s}$$

Ec. 2.11

Determinamos el intervalo de confianza, con $k=2$, es:

$$\bar{\tau} - k \cdot s_A(\tau) \leq \tau_i(s) \leq \bar{\tau} + k \cdot s_A(\tau)$$

Ec. 2.12

$$0,592\text{s} \leq \tau_i(s) \leq 0,752\text{s}$$

Observamos que todos los valores menos uno (0,557s) entran en este intervalo de confianza, por lo que lo eliminamos. Ya no repetiremos el cálculo del intervalo de confianza ya que este proceso solo se debe hacer una vez. Por lo tanto, volvemos a calcular la desviación típica de la muestra ($s_A(\tau)$) y, a mayores, la de la media ($s_A(\bar{\tau})$), la incertidumbre combinada ($s_c(\bar{\tau})$) y el número de los grados de libertad (ϕ):

Medidas	$\tau \pm 0,001$ (s)
1	0,695
2	0,690
3	0,644
4	0,702
5	0,668
6	0,697
7	0,686
8	0,700
9	0,701
10	0,703
11	0,652
12	0,614
13	0,676
14	0,710
15	0,676
16	0,703
17	0,603
18	0,675
19	0,686
Media ($\bar{\tau}$)	0,677947

Tabla 2.5: Valores de los semiperiodos de la esfera pertenecientes al intervalo de confianza.

$$s_A(\tau) = 3,0 \cdot 10^{-2} s$$

$$s_A(\bar{\tau}) = \frac{s_A(\tau)}{\sqrt{n}} = 7,0 \cdot 10^{-3} s$$

$$s(\bar{\tau}) = s_C(\tau) = \sqrt{[s_A(\bar{\tau})]^2 + [s_B(\tau)]^2} = 7,0 \cdot 10^{-3} s$$

$$\phi = n - 1 = 19 - 1 = 18$$

Ec. 2.13

Ec. 2.14

Ec. 2.15

Por tanto, nos queda que:

$$\bar{\tau} = 0,677947 \pm 0,0070 s$$

Una vez terminados estos cálculos, procedemos a calcular el momento de inercia (Ec. 2.8) con su incertidumbre:

$$I_{Esfera.exp.} = D \frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2} = 0,00105151 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{Esfera.exp.}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial D}\right)^2 \cdot s(D)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 \cdot s(\bar{\tau})^2} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2}\right)^2 \cdot s(D)^2 + \left(\frac{2D\bar{\tau}}{\pi^2}\right)^2 \cdot s(\bar{\tau})^2}$$

Ec. 2.16

$$s(I_{Esfera.exp.}) = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto nos queda que:

$$I_{Esfera.exp.} = 0,001052 \pm 0,000023 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$



Una vez obtenidos los valores experimentales, procedemos a calcular el valor medido de forma directa del momento de inercia de la esfera (tabla 2.1):

$$I_{Esfera.m.d.} = \frac{2}{5} MR^2 = 0,001455006 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{Esfera.m.d.}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5} R^2\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{4}{5} MR\right)^2 \cdot s(R)^2} \quad \text{Ec. 2.17}$$

$$s(I_{Esfera.m.d.}) = 2,24 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto nos queda que:

$$I_{Esfera.m.d.} = 0,001455 \pm 0,000022 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Como podemos observar el valor experimental y el medido de forma directa se parecen entre sí a pesar de que no se incluyen en sus respectivos intervalos de tolerancia. Las razones que pudieron causar esto son: El mal estado del muelle, (provocando una variación en los resultados a lo largo de la práctica) o una mala colocación en la posición de los materiales.

4.2.2. Cilindro

Seguidamente calculamos el momento de inercia del cilindro cuyas dimensiones y masa son:

$$d = 98\text{mm} = 0,098\text{m} \rightarrow s(d) = 0,001\text{m} \Rightarrow$$

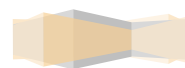
$$r = \frac{0,098}{2} = 0,049\text{m} \rightarrow s(r) = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial r}\right)^2 \cdot s(d)^2} = \frac{1}{2} \cdot s(d) = \frac{1}{2} \cdot 0,001 = 0,0005\text{m}$$

$$h = 98\text{mm} = 0,098\text{m} \rightarrow s(d) = 0,001\text{m}$$

$$M = 384,31\text{g} = 0,38431\text{kg} \rightarrow s(M) = 0,00001\text{kg}$$

Una vez conocidas estas características, procedemos a realizar 20 medidas de los semiperiodos con el objetivo de calcular el momento a partir de la ecuación 2.8.

Medidas	$\tau \pm 0,001 \text{ (s)}$
1	0,408
2	0,383
3	0,387
4	0,407
5	0,403
6	0,409
7	0,406
8	0,396
9	0,407
10	0,407
11	0,408



12	0,408
13	0,404
14	0,408
15	0,406
16	0,400
17	0,404
18	0,406
19	0,407
20	0,402
Media ($\bar{\tau}$)	0,4033

Tabla 2.6: Valores de los semiperiodos del cilindro.

Ahora empezaremos con el protocolo de las medidas directas tal y como hicimos con la esfera. Calculamos la desviación típica de la muestra ($s_A(\tau)$):

$$s_A(\tau) = 7,0 \cdot 10^{-3} s$$

Determinamos el intervalo de confianza, con $k=2$, es:

$$0,3892s \leq t_i(s) \leq 0,417s$$

Observamos que todos los valores menos dos (0,383s y 0,387s) entran en este intervalo de confianza, por lo que los eliminamos. Ya no repetiremos el cálculo del intervalo de confianza ya que este proceso solo se debe hacer una vez. Por lo tanto, volvemos a calcular la desviación típica de la muestra ($s_A(\tau)$) y, a mayores, la de la media ($s_A(\bar{\tau})$), la incertidumbre combinada ($s_C(\bar{\tau})$) y el número de los grados de libertad (ϕ):

Medidas	$\tau \pm 0,001 (s)$
1	0,408
2	0,407
3	0,403
4	0,409
5	0,406
6	0,396
7	0,407
8	0,407
9	0,408
10	0,408
11	0,404
12	0,408
13	0,406
14	0,400
15	0,404
16	0,406
17	0,407
18	0,402
Media ($\bar{\tau}$)	0,4033

Tabla 2.7: Valores de los semiperiodos del cilindro pertenecientes al intervalo de confianza.



$s_A(\tau)$ (s)	$s_A(\bar{\tau})$ (s)	$s_C(\bar{\tau})$ (s)	ϕ
3,3E-03	7,9E-04	1,3E-03	17

Tabla 2.8: Valores de la desviación típica de la muestra y de la media, la incertidumbre combinada y los grados de libertad.

Por tanto, nos queda que:

$$\bar{\tau} = 0,4033 \pm 0,0013s$$

Una vez terminados estos cálculos, procedemos a calcular el momento de inercia (Ec 2.8) con su incertidumbre:

$$I_{\text{cilindro.exp.}} = D \frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2} = 0,000375877 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{\text{cilindro.exp.}}) = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto nos queda que:

$$I_{\text{cilindro.exp.}} = 0,0003759 \pm 0,0000040 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Una vez obtenidos los valores experimentales, procedemos a calcular el valor medido de forma directa del momento de inercia del cilindro (tabla 2.1):

$$I_{\text{cilindro.m.d.}} = \frac{1}{2}MR^2 = 0,000461364 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{\text{cilindro.m.d.}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R^2\right)^2 \cdot s(M)^2 + (MR)^2 \cdot s(R)^2} \quad \text{Ec. 2.18}$$

$$s(I_{\text{cilindro.m.d.}}) = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto nos queda que:

$$I_{\text{cilindro.m.d.}} = 0,0004614 \pm 0,0000094 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Como podemos observar el valor experimental y el medido de forma directa se parecen entre sí a pesar de que no se incluyen en sus respectivos intervalos de tolerancia. Las razones que pudieron causar esto son: El mal estado del muelle, (provocando una variación en los resultados a lo largo de la práctica) o una mala colocación en la posición de los materiales.

4.2.3. Disco perforado

Por último calculamos el momento de inercia del disco perforado cuyas dimensiones y masa son (medidas de forma directa):

$$r = 150\text{mm} = 0,150\text{m} \rightarrow s(r) = 0,001\text{m}$$

$$m = 382,83\text{g} = 0,38283\text{kg} \rightarrow s(m) = 0,00001\text{kg}$$



Una vez conocidas estas características, procedemos a realizar 20 medidas de los semiperiodos con el objetivo de calcular el momento a partir de la ecuación 2.8.

Medidas	$\tau \pm 0,001 \text{ (s)}$
1	1,309
2	1,295
3	1,316
4	1,307
5	1,311
6	1,268
7	1,298
8	1,315
9	1,310
10	1,268
11	1,327
12	1,297
13	1,291
14	1,324
15	1,272
16	1,289
17	1,296
18	1,282
19	1,307
20	1,311
Media ($\bar{\tau}$)	1,29965

Tabla 2.8: Valores de los semiperiodos del disco perforado.

Ahora empezaremos con el protocolo de las medidas directas tal y como hicimos con la esfera. Calculamos la desviación típica de la muestra ($s_A(\tau)$):

$$s_A(\tau) = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

Determinamos el intervalo de confianza, con $k=2$, es:

$$1,265 \text{ s} \leq t_i(\text{s}) \leq 1,334 \text{ s}$$

Observamos que todos los valores entran en este intervalo de confianza. Por lo tanto, calculamos directamente la desviación típica de la media ($s_A(\bar{\tau})$), la incertidumbre combinada ($s_C(\bar{\tau})$) y el número de los grados de libertad (ϕ):

$s_A(\bar{\tau}) \text{ (s)}$	$s_C(\bar{\tau}) \text{ (s)}$	ϕ
3,9E-03	4,0E-03	19

Tabla 2.9: Valores de la desviación típica de la muestra y de la media, la incertidumbre combinada y los grados de libertad.

Por tanto, nos queda que:

$$\bar{\tau} = 1,2996 \pm 0,0039 \text{ s}$$

Una vez terminados estos cálculos, procedemos a calcular el momento de inercia con su incertidumbre (Ec 2.8):



$$I_{disco.exp} = D \frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2} = 0,00386433 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{disco.exp.}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial D}\right)^2 \cdot s(D)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 \cdot s(\bar{\tau})^2} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2}\right)^2 \cdot s(D)^2 + \left(\frac{2D\bar{\tau}}{\pi^2}\right)^2 \cdot s(\bar{\tau})^2}$$

$$s(I_{disco.exp.}) = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto nos queda que:

$$I_{disco.exp.} = 0,003864 \pm 0,000040 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Una vez obtenidos los valores experimentales, procedemos a calcular el valor medido de forma directa (*m. d.*) del momento de inercia del disco (tabla 2.1):

$$I_{disco.m.d.} = \frac{1}{2}MR^2 = 0,004306838 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{disco.m.d.}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R^2\right)^2 \cdot s(M)^2 + (MR)^2 \cdot s(R)^2} \quad \text{Ec. 2.19}$$

$$s(I_{disco.m.d.}) = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto nos queda que:

$$I_{disco.m.d.} = 0,004307 \pm 0,000057 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Como podemos observar el valor experimental y el medido de forma directa se parecen entre sí a pesar de que no se incluyen en sus respectivos intervalos de tolerancia. Las razones que pudieron causar esto son: El mal estado del muelle, (provocando una variación en los resultados a lo largo de la práctica) o una mala colocación en la posición de los materiales.

4.3. Medida del momento de inercia de diferentes sólidos.

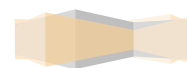
Para la comprobación del momento de inercia realizaremos diferentes medidas del momento de inercia a una distancia variable del centro de masas de las figuras utilizadas (disco y barra). Mediremos el semiperiodo de rotación como hemos hecho anteriormente.

4.3.1. Disco perforado

Empezamos primero con el disco perforado, cuyo radio y masa (medidas de forma directa) son:

$$r = 150\text{mm} = 0,150\text{m} \rightarrow s(r) = 0,001\text{m}$$

$$m = 382,83\text{g} = 0,38283\text{kg} \rightarrow s(m) = 0,00001\text{kg}$$

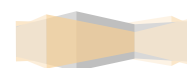


Una vez conocidas estas características, procedemos a realizar 20 medidas de los semiperiodos con el objetivo de calcular el momento a partir de la ecuación 2.8. También recogeremos en esta tabla el protocolo de medidas directas, donde los valores que están en rojo fueron descartados al no pertenecer al intervalo de confianza:

Medidas/Distancia del c.m	0m	0,03cm	0,06m	0,09m	0,12m
τ (s)					
1	1,309	1,222	1,483	1,678	1,985
2	1,295	1,200	1,400	1,680	1,984
3	1,316	1,225	1,351	1,686	1,988
4	1,307	1,103	1,323	1,689	1,960
5	1,311	1,243	1,309	1,689	1,935
6	1,268	1,169	1,298	1,676	1,961
7	1,298	1,262	1,323	1,666	1,974
8	1,315	1,116	1,341	1,681	1,972
9	1,310	1,234	1,346	1,688	1,984
10	1,268	1,249	1,293	1,674	1,948
11	1,327	1,250	1,154	1,667	1,971
12	1,297	1,253	1,297	1,683	1,956
13	1,291	1,211	1,294	1,676	1,964
14	1,324	1,255	1,328	1,677	1,977
15	1,272	1,261	1,328	1,688	1,950
16	1,289	1,250	1,344	1,677	1,972
17	1,296	1,182	1,342	1,658	1,984
18	1,282	1,230	1,303	1,675	1,984
19	1,307	1,274	1,298	1,691	1,967
20	1,311	1,234	1,281	1,669	1,955
$\bar{\tau}$ (s)	1,29965	1,22115	1,3218	1,6784	1,96855
$s_A(\tau)$ (s)	1,7E-02	4,7 E-02	6,0E-02	8,9E-03	1,5E-02
Intervalo de confianza (s)	1,265< t_i <1,334	1,128< t_i <1,314	1,202< t_i <1,442	1,661< t_i <1,696	1,939< t_i <1,998
$\bar{\tau}$ (s)	1,29965	1,23356	1,322167	1,679474	1,970316
$s_A(\tau)$ (s)	1,7E-02	2,8E-02	2,9E-02	7,6E-03	1,3E-02
$s_A(\bar{\tau})$ (s)	3,9E-03	6,7E-03	6,9E-03	1,8E-03	2,9E-03
$s_C(\bar{\tau}) = s(\bar{\tau})$ (s)	4,0E-03	6,7E-03	6,9E-03	2,0E-03	3,1E-03
ϕ	19	17	17	18	18
$\bar{\tau} \pm s(\bar{\tau})$ (s)	1,2996±0,0040	1,234±0,0067	1,313±0,011	1,679±0,020	1,9703±0,0031

Tabla 2.10: Valores de los semiperiodos del disco perforado a diferentes distancias del centro de masas (los rojos no pertenecen al intervalo de confianza) y valores de la desviación típica de la muestra y de la media, la incertidumbre combinada y los grados de libertad de cada respectiva distancia.

Ya calculado todo esto, procedemos a calcular el momento de inercia de cada una de las distancias del centro de masas junto con su respectiva incertidumbre (con las Ec. 2.8 y 2.16). Basándonos en la fórmula de teorema de Steiner, vamos a representar I frente a d^2 a través de una regresión lineal simple con termino independiente (lineal porque la representación de los puntos en un gráfica de dispersión forman una figura parecida a una recta, simple porque la variación de la incertidumbre de los ejes es despreciable y con término independiente para que se parezca al teorema de Steiner), de forma que la recta resultante, cuya pendiente es la masa y la ordenada en el origen el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masas, sea:



$$y = bx + a \rightarrow I = md^2 + I_0$$

Para ello recogemos en la siguiente tabla los datos necesarios para esta representación, para los que hemos utilizado estas fórmulas:

$$s(d^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial d^2}{\partial d}\right)^2 \cdot s(d)^2} = 2d \cdot 0,001$$

Ec. 2.20

$$I = D \frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2} \rightarrow s(I) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial D}\right)^2 \cdot s(D)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 \cdot s(\bar{\tau})^2} = \sqrt{\left(\frac{\bar{\tau}^2}{\pi^2}\right)^2 \cdot s(D)^2 + \left(\frac{2D\bar{\tau}}{\pi^2}\right)^2 \cdot s(\bar{\tau})^2}$$

Ec. 2.21

$d \pm 0,001$ (m)	d^2 (m ²)	$s(d^2)$ (m ²)	I (Kg · m ²)	$s(I)$ (Kg · m ²)
0	0	0	386,4E-05	4,0E-05
0,030	0,00090	0,00006	348,1E-05	4,8E-05
0,060	0,00360	0,00012	399,9E-05	5,4E-05
0,090	0,00810	0,00018	645,3E-05	5,7E-05
0,120	0,01440	0,00024	888,2E-05	8,0E-05

Tabla 2.11: Valores de la distancia, distancia al cuadrado y del momento de inercia con sus respectivas incertidumbres.

Destacar antes de hacer el ajuste que cuatro datos no son suficientes para poder realizar un buen ajuste, por lo que no vamos a obtener resultados muy fiables:

b (Kg)	s(b) (Kg)	a (Kg·m ²)	s(a) (Kg·m ²)	r
38,0E-02	4,4E-02	32,8E-04	3,3E-04	0,98

Tabla 2.12: Valores de la regresión lineal con término independiente.

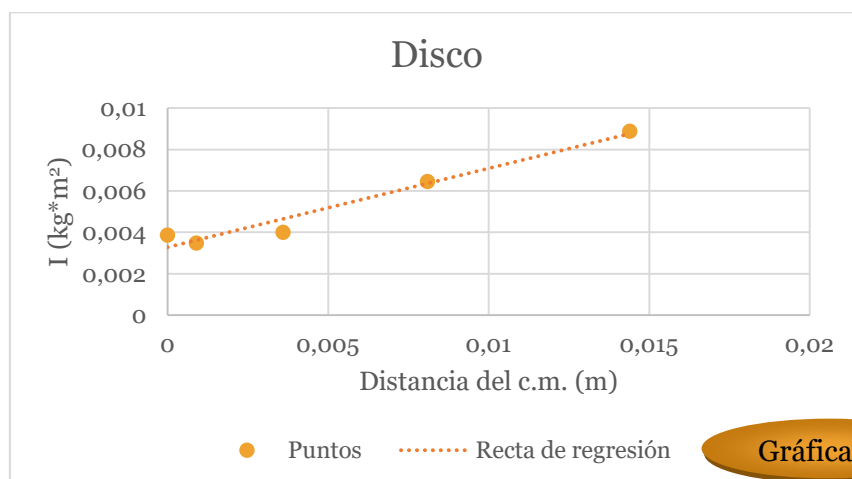
Como podemos comprobar por el valor del coeficiente de regresión lineal, el ajuste ha sido poco satisfactorio, aunque esto era previsible. Por lo tanto la masa, momento de inercia y recta de regresión nos dan:

$$I_0 = 0,000328 \pm 0,00033 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m = 0,380 \pm 0,044 \text{ kg}$$

$$y = bx + a \rightarrow I = md^2 + I_0 \rightarrow I = 0,38d^2 + 0,0033$$

La representación gráfica nos queda de la siguiente forma:



Gráfica 2.2

Ya obtenidos estos datos experimentales, vamos a calcular el valor medido de forma directa (*m. d.*) del momento de inercia (tabla 2.1):

$$I_{CDM \text{ m.d.}} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}0,38283 \cdot 0,150^2 = 0,0043068375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{CDM \text{ m.d.}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \cdot s(R)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}R^2\right)^2 \cdot s(M)^2 + (MR)^2 \cdot s(R)^2}$$

Ec. 2.22

$$s(I_{CDM \text{ m.d.}}) = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto:

$$I_{CDM \text{ m.d.}} = 0,004307 \pm 0,000057 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Vamos a comparar ahora los valores que hemos obtenido:

	Valor experimental	Valor medido de forma directa
m (kg)	0,380 ± 0,044	0,38283 ± 0,00001
I (kg · m ²)	0,00328 ± 0,00033	0,004307 ± 0,000057

Tabla 2.13: Comparación con los valores experimentales y los medidos de forma directa de la masa y el momento de inercia.

Como podemos observar, los valores de la masa sí que son muy parecidos entre sí e incluso el valor experimental incluye al medido de forma directa en su intervalo de tolerancia. Sin embargo los valores del momento de inercia distan bastante entre sí y no se incluyen en ninguno de sus intervalos de tolerancia. Las razones a las que se puede deber esto pueden ser:

- El mal estado del muelle, provocando una variación en los resultados a lo largo de la práctica.
- Puede no estar bien centrado el eje de giro de la barra por culpa del soporte.
- Para distancias grandes el centro de masas de la barra no está perfectamente recto.

A pesar de todo, podemos comprobar que hemos conseguido una aproximación aceptable aunque no del todo satisfactoria.

4.3.2. Barra

Por último nos queda la barra, cuya longitud y masa (medidas de forma directa) son:

$$L = 600\text{mm} = 0,600\text{m} \rightarrow s(r) = 0,001\text{m}$$

$$m = 143,76\text{g} = 0,14376\text{kg} \rightarrow s(m) = 0,00001\text{kg}$$

Una vez conocidas estas características, procedemos a realizar 20 medidas de los semiperiodos con el objetivo de calcular el momento a partir de la ecuación 2,8. También recogeremos en esta tabla el protocolo de medidas directas, donde los valores que están en rojo fueron descartados al no pertenecer al intervalo de confianza:



Medidas/Distancias del cm	0cm	2cm	4cm	6cm	8cm	10cm
τ (s)						
1	1,030	1,219	1,243	1,289	1,303	1,317
2	1,197	1,247	1,154	1,315	1,302	1,238
3	1,136	1,127	1,261	1,275	1,304	1,301
4	1,022	1,212	1,241	1,334	1,258	1,253
5	1,198	1,174	1,256	1,327	1,322	1,297
6	1,072	1,214	1,281	1,319	1,341	1,302
7	1,167	1,193	1,275	1,306	1,331	1,366
8	1,174	1,216	1,248	1,293	1,327	1,246
9	1,158	1,238	1,276	1,337	1,267	1,268
10	1,190	1,261	1,271	1,262	1,254	1,383
11	1,182	1,264	1,275	1,272	1,201	1,344
12	1,097	1,210	1,274	1,319	1,325	1,371
13	1,168	1,212	1,274	1,258	1,323	1,291
14	1,186	1,189	1,271	1,208	1,298	1,365
15	1,127	1,254	1,255	1,284	1,209	1,369
16	1,218	1,206	1,193	1,245	1,297	1,356
17	1,187	1,189	1,259	1,268	1,263	1,390
18	1,165	1,202	1,253	1,288	1,240	1,301
19	1,129	1,127	1,287	1,310	1,262	1,322
20	1,185	1,187	1,263	1,312	1,159	1,278
$\bar{\tau}$ (s)	1,1494	1,20705	1,2555	1,29105	1,2793	1,3179
$s_A(\tau)$	5,5E-02	3,7E-02	3,1E-02	3,3E-02	4,9E-02	4,8E-02
Intervalo de confianza (s)	$1,039 < t_i < 1,260$	$1,132 < t_i < 1,282$	$1,193 < t_i < 1,318$	$1,225 < t_i < 1,357$	$1,181 < t_i < 1,378$	$1,222 < t_i < 1,413$
$\bar{\tau}$ (s)	1,163111	1,215944	1,260842	1,295421	1,285632	1,3179
$s_A(\tau)$ (s)	3,8E-02	2,7E-02	2,1E-02	2,7E-02	4,1E-02	4,8E-02
$s_A(\bar{\tau})$ (s)	8,9E-03	6,3E-03	4,8E-03	6,2E-03	9,5E-03	1,1E-02
$s_C(\bar{\tau}) = s(\bar{\tau})$ (s)	8,9E-03	6,4E-03	4,9E-03	6,3E-03	9,5E-03	1,1E-02
ϕ	17	17	18	18	18	19
$\bar{\tau} \pm s(\bar{\tau})$ (s)	$1,1631 \pm 0,0089$	$1,2159 \pm 0,0064$	$1,2608 \pm 0,0049$	$1,2954 \pm 0,0063$	$1,2856 \pm 0,0095$	$1,318 \pm 0,011$

Tabla 2.14: Valores de los semiperiodos de la barra a diferentes distancias del centro de masas (los rojos no pertenecen al intervalo de confianza) y valores de la desviación típica de la muestra y de la media, la incertidumbre combinada y los grados de libertad de cada respectiva distancia.

Medidas/Distancias del cm	12cm	14cm	16cm	18cm	20cm
τ (s)					
1	1,327	1,393	1,382	1,494	1,637
2	1,356	1,212	1,360	1,420	1,609
3	1,370	1,365	1,303	1,509	1,539
4	1,281	1,333	1,430	1,669	1,708
5	1,300	1,380	1,334	1,517	1,679
6	1,396	1,263	1,401	1,558	1,672
7	1,310	1,307	1,449	1,645	1,752
8	1,304	1,373	1,512	1,631	1,610
9	1,328	1,298	1,451	1,619	1,662
10	1,320	1,387	1,262	1,666	1,450
11	1,339	1,367	1,298	1,490	1,563
12	1,317	1,367	1,310	1,636	1,607
13	1,338	1,347	1,512	1,551	1,650
14	1,217	1,346	1,325	1,641	1,636

15	1,280	1,301	1,435	1,478	1,651
16	1,338	1,235	1,508	1,454	1,479
17	1,313	1,313	1,46	1,636	1,718
18	1,279	1,390	1,425	1,566	1,656
19	1,278	1,342	1,267	1,628	1,767
20	1,278	1,268	1,475	1,505	1,798
$\bar{\tau}$ (s)	1,31345	1,32935	1,39495	1,56565	1,64215
$s_A(\tau)$ (s)	3,9E-02	5,3E-02	8,3E-02	7,8E-02	8,9E-02
Intervalo de confianza (s)	1,235<t _i <1,392	1,223<t _i <1,436	1,230<t _i <1,560	1,410<t _i <1,722	1,465<t _i <1,819
$\bar{\tau}$ (s)	1,314222	1,335526	1,39495	1,56565	1,652263
$s_A(\tau)$ (s)	2,8E-02	4,7E-02	8,3E-02	7,8E-02	7,8E-02
$s_A(\bar{\tau})$ (s)	6,6E-03	1,1E-02	1,8E-02	1,7E-02	1,8E-02
$s_c(\bar{\tau}) = s(\bar{\tau})$ (s)	6,7E.03	1,1E-02	1,9E-02	1,7E-02	1,8E-02
ϕ	17	18	19	19	18
$\bar{\tau} \pm s(\bar{\tau})$ (s)	1,3142±0,0067	1,336±0,011	1,395±0,019	1,566±0,017	1,652±0,018

Tabla 2.15: Valores de los semiperiodos de la barra a diferentes distancias del centro de masas (los rojos no pertenecen al intervalo de confianza) y valores de la desviación típica de la muestra y de la media, la incertidumbre combinada y los grados de libertad de cada respectiva distancia.

Ya calculado todo esto, procedemos a calcular el momento de inercia de cada una de las distancias del centro de masas junto con su respectiva incertidumbre (con las Ec. 2.8 y 2.16). Basándonos en la fórmula de teorema de Steiner, vamos a representar I frente a d^2 a través de una regresión lineal simple independiente (lineal porque la representación de los puntos en un gráfica de dispersión forman una figura parecida a una recta, simple porque la variación de la incertidumbre de los ejes es despreciable y con término independiente para que se parezca al teorema de Steiner), de forma que la recta resultante, cuya pendiente es la masa y la ordenada en el origen el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masas, sea:

$$y = bx + a \rightarrow I = md^2 + I_0$$

Para ello recogemos en la siguiente tabla los datos necesarios para esta representación, para los que hemos utilizado las ecuaciones 2.20 y 2.21:

$d \pm 0,001$ (m)	d^2 (m ²)	$s(d^2)$ (m ²)	I (Kg · m ²)	$s(I)$ (Kg · m ²)
0	0	0	309,5 E-05	5,4E-05
0,02	0,0004	0,00004	338,3 E-05	4,6E-05
0,04	0,0016	0,00008	363,7 E-05	4,2E-05
0,06	0,0036	0,00012	383,9 E-05	5,0E-05
0,08	0,0064	0,00016	378,1 E-05	6,3E-05
0,10	0,0100	0,00020	397,4 E-05	7,3E-05
0,12	0,0144	0,00024	395,1 E-05	5,2E-05
0,14	0,0196	0,00028	408,1 E-05	7,4E-05
0,16	0,0256	0,00032	445,2 E-05	1,2E-04
0,18	0,0324	0,00036	560,8 E-05	1,3E-04
0,20	0,0400	0,00040	624,6 E-05	1,5E-04

Tabla 2.16: Valores de la distancia, distancia al cuadrado y del momento de inercia con sus respectivas incertidumbres.

Los resultados del ajuste son:



b (Kg)	s(b) (Kg)	a (Kg·m ²)	s(a) (Kg·m ²)	r
64,6E-03	7,4E-03	32,8E-04	1,4E-04	0,98

Tabla 2.17: Valores de la regresión lineal con término independiente.

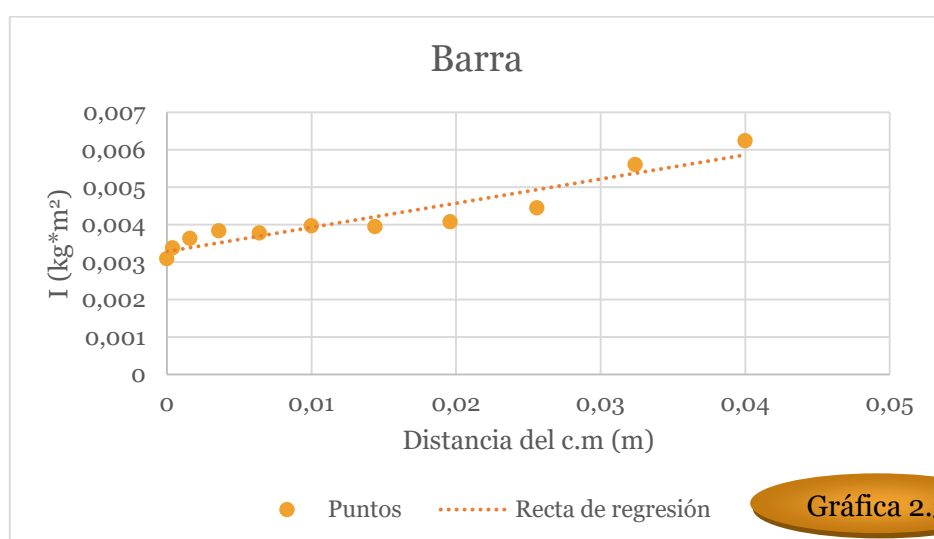
Como podemos comprobar por el valor del coeficiente de regresión lineal, el ajuste ha sido poco satisfactorio, aunque esto era previsible. Por lo tanto la masa, momento de inercia y la recta de regresión nos dan:

$$I_0 = 0,00328 \pm 0,00014 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m = 0,0646 \pm 0,0074 \text{ kg}$$

$$y = bx + a \rightarrow I = md^2 + I_0 \rightarrow I = 0,0646d^2 + 0,00328$$

La representación gráfica nos queda de la siguiente forma:



Ya obtenidos estos datos experimentales, vamos a calcular el valor medido de forma directa (m.d) del momento de inercia (tabla 2.1):

$$I_{CDM \text{ m.d.}} = \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12} 0,14376 \cdot 0,600^2 = 0,004313 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_{CDM \text{ m.d.}}) = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial M}\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial L}\right)^2 \cdot s(L)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{12} L^2\right)^2 \cdot s(M)^2 + \left(\frac{1}{6} ML\right)^2 \cdot s(L)^2}$$

Ec. 2.23

$$s(I_{CDM \text{ m.d.}}) = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto:

$$I_{CDM \text{ m.d.}} = 0,004313 \pm 0,000014 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Vamos a comparar ahora los valores que hemos obtenido:

	Valor experimental	Valor medido de forma directa
m (kg)	$0,0646 \pm 0,0074$	$0,14376 \pm 0,00001$
I (kg · m ²)	$0,00328 \pm 0,00014$	$0,004313 \pm 0,000014$

Tabla 2.18: comparación con los valores experimentales y los medidos de forma directa de la masa y el momento de inercia.

Como podemos observar, los valores de la masa, al contrario que con el disco, no se parecen entre sí y los valores del momento de inercia distan bastante entre sí. Además, ninguno de los valores obtenidos se incluyen entre sí en su intervalo de tolerancia. Las razones a las que se puede deber esto pueden ser:

- El mal estado del muelle, provocando una variación en los resultados a lo largo de la práctica.
- Puede no estar bien centrado el eje de giro de la barra por culpa del soporte.
- Para distancias grandes el centro de masas de la barra no está perfectamente recto.

A pesar de todo, podemos comprobar que hemos conseguido una aproximación aceptable aunque no del todo satisfactoria.

5. Conclusión.

Mediante la realización de esta práctica, hemos podido comprobar los efectos que tienen sobre un objeto en rotación el momento de inercia y su variación según la geometría del objeto y de la distancia del eje de rotación al centro de masas. Por lo tanto, hemos profundizado a cerca del momento de inercia y del teorema de Steiner y también hemos comprendido la relación entre el semiperíodo y el momento de inercia.

En cuanto a los datos obtenidos, como ya hemos dicho a lo largo de la memoria, han sido un tanto deficientes probablemente debido al mal estado del muelle.

En general, hemos cumplido los objetivos marcados al principio de la práctica a pesar de los datos poco satisfactorios. Además hemos aprendido a familiarizarnos con los materiales utilizados y con los conceptos con los que hemos trabajado, que al principio parecían un tanto abstractos y nos sonaban a la asignatura de física general I.

6. Bibliografía

1. Moodle USC técnicas experimentales I: Análisis de incertidumbres.
2. Moodle USC técnicas experimentales I: Guión de laboratorio básico de momento de inercia.
3. https://es.wikipedia.org/wiki/Momento_de_inercia
4. Apuntes de física general I Tema 7: Dinámica del sólido rígido.

