1- Constante elástica de un muelle. Determinación de densidades.

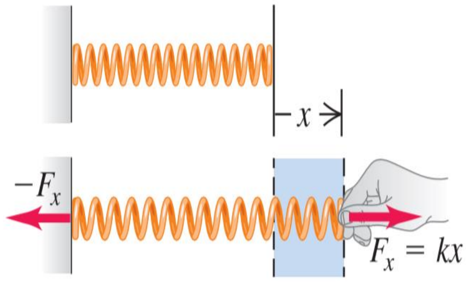
(Memoria detallada)

1. Introducción y objetivos:

La fuerza ejercida cuando estiramos un resorte no es constante. A medida que aumentamos el estiramiento debemos incrementar también la fuerza con la que tiramos de él. Pero, ¿cuál es la relación entre esta fuerza y lo que se estira el muelle?

En 1678 el físico inglés Robert Hooke observó que el alargamiento (deformación) de los resortes es proporcional a la fuerza que actúa sobre ellos. Esta relación es conocida como ley de Hooke en su honor.

Para mantener un muelle estirado una distancia Δx más allá de su longitud sin seguir estirándolo, deben ser aplicadas dos fuerzas de igual magnitud, una en cada extremo, como se puede ver en el dibujo.



Si con el alargamiento Δx no excedemos el límite de elasticidad del muelle, la componente en la dirección del resorte de la fuerza aplicada al extremo móvil es directamente proporcional a Δx:

$\boldsymbol{F = k\,\Delta x}$ Fuerza requerida para estirar un resorte según la ley de Hooke.

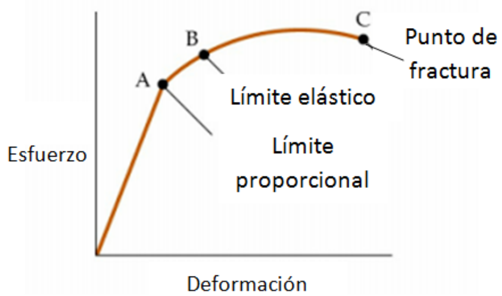
"**k**" es una constante característica de cada resorte, llamada constante de fuerza. Se mide en N/m. Cuanto mayor es la k del muelle, más fuerza es necesaria para conseguir estirarlo. Su valor puede variar mucho: la constante de un muelle blando de un juguete rondará 1 N/m, mientras que la de los resortes de la suspensión de un automóvil es 100 veces mayor o incluso más.

Según el principio de acción-reacción (tercera ley de Newton) en toda interacción existen dos fuerzas. Si ejercemos una fuerza sobre el muelle, él también ejerce una fuerza de igual módulo en la misma dirección y con sentido opuesto sobre nosotros. Esta última se denomina fuerza elástica o restauradora.

$\boldsymbol{F = -k\Delta x}$ Fuerza recuperadora que aparece en el muelle al separarlo de su posición de equilibrio.

Esta es la fuerza ejercida por un muelle que no ha superado su límite elástico y sufre una fuerza que lo deforma temporalmente. Si al aplicarle una fuerza lo deformamos permanentemente, decimos que hemos superado su límite de elasticidad (B).

No obstante, la ley de Hooke no es válida hasta alcanzar dicho límite, sino solamente hasta un punto previo que se conoce como límite proporcional (A).



Entre el límite proporcional y el límite elástico la deformación producida no es directamente proporcional al esfuerzo al que se somete el resorte. Sin embargo el comportamiento del mismo sigue siendo elástico: si se retira gradualmente la fuerza, el muelle recupera su longitud original, siguiendo la curva en recorrido inverso.

En nuestra práctica dispondremos de un muelle elástico (cuya masa suponemos despreciable) en posición vertical, sujeto por su extremo superior a un soporte fijo.

Cuando colgamos de su extremo inferior una masa ***m***, el resorte experimenta una deformación $\boldsymbol{\Delta x_e}$, que según la ley de Hooke es directamente proporcional al peso ***P*** de dicha masa:

$$\boldsymbol{P = mg = k\Delta x_e}$$

El muelle se deforma con cada masa hasta alcanzar la posición de equilibrio estático, en la que la fuerza elástica (ascendente) iguala al peso (descendente), siendo la fuerza neta nula.

Usaremos esta igualdad para determinar el valor de la constante elástica del muelle. Con este fin variaremos la masa que pende de él, midiendo cuánto se estira para cada una de ellas. El valor de ***k*** será el de la pendiente de la recta que resulte de representar los valores de ***P***, la fuerza aplicada al muelle, frente a $\boldsymbol{\Delta x_e}$. Esta forma de calcular ***k*** es la que se conoce como método estático.

No obstante, no es la única estrategia que emplearemos. Suspendida una masa ***m***, si la separamos una distancia $\boldsymbol{\Delta x_d}$ de su posición de equilibrio, aparece como reacción una fuerza recuperadora $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{k\Delta x_d}$ sobre el muelle. En el momento en que soltamos el muelle, esta última provoca en la masa una aceleración ***a***, que según la segunda ley de Newton es inversamente proporcional a ***m***.

Esto hace que la masa comience a oscilar en torno a su posición de equilibrio. Dicha oscilación es prácticamente un movimiento armónico simple (M.A.S.), ya que la fuerza de restitución es en cada instante directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio. (A partir de aquí designaremos a este desplazamiento como ***x*** en lugar de ***Δx*** para simplificar la notación).

Combinando la ley de Hooke y ley fundamental de la dinámica ya mencionadas obtenemos el valor del período del M.A.S.:

$$\text{En un M.A.S.}\quad \begin{cases} x = A\cos(\varphi - \omega t) \\ v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\varphi - \omega t) \\ a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\varphi - \omega t) = -\omega^2 x \end{cases}$$

Ecuación general del M.A.S.: $\boldsymbol{a = -\omega^2 x}$

2ª Ley de Newton $F = ma$

Ley de Hooke $F = -kx$

$$\left.\begin{array}{l} F = ma \\ F = -kx \end{array}\right\} \quad ma = -kx \;; \quad m\overbrace{(-\omega^2 x)}^{a} = -kx \;; \; m\omega^2 = k$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

La aplicación de esta ecuación para determinar la constante de fuerza es lo que se conoce como método dinámico. Para poder llevarlo acabo necesitaremos tomar medidas de los períodos de las oscilaciones descritas por distintas masas.

Al elevar al cuadrado la expresión anterior obtenemos:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \longrightarrow \boldsymbol{T^2 = \frac{1}{k}(4\pi^2 m)}$$

"k" es la inversa de la pendiente de la recta que resulta de representar el cuadrado del período de la oscilación frente a **$4\pi^2$m**.

El objetivo fundamental de la primera parte de esta práctica es la comprobación de la proporcionalidad entre la fuerza aplicada al muelle y la deformación del mismo (ley de Hooke), así como el cálculo de la constante de proporcionalidad mediante los dos métodos descritos a fin de comparar los dos valores obtenidos.

La segunda parte consiste en la determinación de densidades de sólidos usando un líquido de densidad conocida (y viceversa). Para esto es necesario combinar la ley de Hooke con el principio de Arquímedes, según el cual todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido que desaloja.

La densidad es la relación entre la masa y el volumen de una determinada sustancia. Cuando colgamos del muelle un sólido de masa $\boldsymbol{m_s}$ y volumen $\boldsymbol{V_s}$ (densidad $\boldsymbol{\rho_s} = {}^{\boldsymbol{m_s}}/_{\boldsymbol{V_s}}$) este experimenta un estiramiento que como ya hemos visto podemos expresar como:

$$P = m_s g = \rho_s V_s g = k\Delta x \;\textbf{(A)}$$

Si introducimos el sólido (ya colgado del muelle) en un recipiente con un líquido (de densidad conocida $\boldsymbol{\rho_L}$), por el principio de Arquímedes aparece sobre él un empuje $E = \rho_L V_L g$ dirigido hacia arriba, que debemos sumar vectorialmente al peso para obtener la fuerza realizada sobre el resorte. Ahora el alargamiento del muelle es $\boldsymbol{\Delta x'}$:

$$\rho_s V_s g - \rho_L V_s g = k\Delta x' \;\textbf{(B)}$$

Si la restamos a la ecuación anterior (A-B):

$$\rho_L V_s g = k(\Delta x - \Delta x') \textbf{ (C)}$$

Y ahora dividimos la ecuación A entre esta última para llegar a la expresión de la densidad del sólido:

$$\frac{\rho_s V_s g}{\rho_L V_s g} = \frac{k\Delta x}{k(\Delta x - \Delta x')}$$

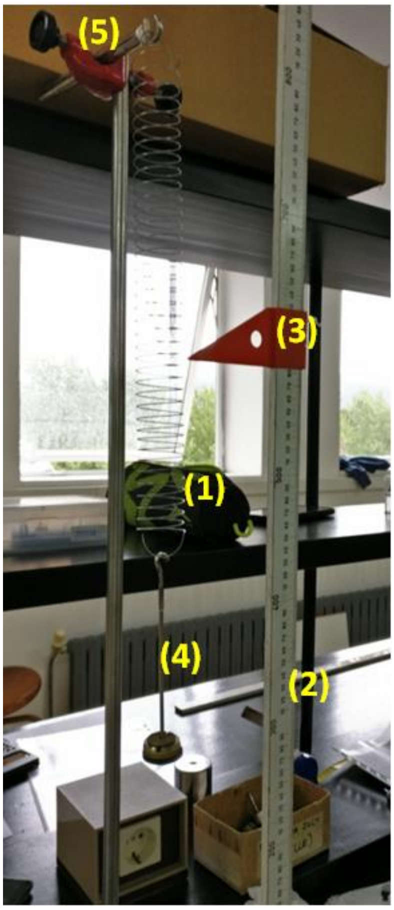
$$\boldsymbol{\rho_s = \rho_L \frac{\Delta x}{\Delta x - \Delta x'}}$$

Si la densidad desconocida es la del líquido, para calcularla solo necesitamos despejarla en la ecuación:

$$\boldsymbol{\rho_L = \rho_s \frac{\Delta x - \Delta x'}{\Delta x}}$$

2. Montaje experimental y procedimiento de medida:

Como ya hemos dicho, el muelle **(1)** se coloca en posición vertical y colgando por su extremo superior de un vástago fijo **(5)**, situado a una altura adecuada para poder estirarlo lo suficiente. El extremo inferior se deja listo para poder colgar de él los distintos pesos.



Para la determinación de ***k*** necesitaremos conocer de modo preciso las masas a colgar del muelle. Usaremos una balanza con precisión instrumental 0,01 gramos, valor que tomado como incertidumbre de las medidas de las masas.

La masa del resorte debe ser despreciable frente a las masas suspendidas, ya que para obtener las ecuaciones mencionadas se ha hecho esa suposición.

Para colgar las masas del resorte jugaremos a combinar pesas de distintos valores **(B)** sobre la base de un portapesas **(A, 4)**, cuya masa ronda los diez gramos. Mediremos directamente sobre la balanza las masas de los conjuntos “pesas + portapesas”, en vez de tomar medidas de las masas por separado y sumarlas. Además de más sencillo, resulta más preciso (la incertidumbre de una medida es menor que la propagación para la suma de varias) y ayuda a evitar posibles errores ilegítimos por confundir unas pesas con otras.

Tanto en la determinación de “***k***” por el método estático como en la segunda parte de la práctica necesitamos medir la longitud del muelle en distintos instantes, con el objetivo de determinar las deformaciones que experimenta (***Δx***).

Para esto usamos una regla **(2)** colocada en vertical al lado del resorte, paralela a él. Para ayudarnos en la medida disponemos de dos piezas con forma trapezoidal **(3)** acopladas a dicho instrumento, que nos permiten medir desde una posición más cercana al muelle.

Pese a esto, la incertidumbre de las medidas que consideramos es mayor que la precisión instrumental de la regla (1 mm). Tomaremos como incertidumbre de la medida de la posición de un punto determinado dos milímetros: 1 mm precisión instrumental + 1 mm precisión de nuestro ojo (por no estar el muelle en contacto con la regla).

Pero los valores que necesitamos para nuestros cálculos son variaciones en la longitud, calculadas como $\Delta x = x_2 - x_1$. Por lo tanto, la incertidumbre considerada en las medidas del estiramiento del muelle es (aplicando la fórmula de propagación de incertidumbres):

$$s(\Delta x) = \sqrt{(1)^2 s^2(x_2) + (-1)^2 s^2(x_1)} = \sqrt{(2mm)^2 + (2mm)^2} = \sqrt{8mm^2} = 2\sqrt{2}\, mm \approx 2{,}8\, mm$$

Para medir el estiramiento del resorte es necesario tomar primero una longitud de referencia con el muelle en reposo (sin añadir ningún peso) y repetir luego la medida de la distancia entre los mismos puntos del muelle colgada cada masa. Los puntos elegidos como referencia para la medida deben ser tales que el muelle se estire en su totalidad entre ellos (por ejemplo los extremos).

En nuestro caso, al estar fijo el muelle en su extremo superior y fija la regla paralela a él, lo que haremos será tomar como referencia el punto de la regla que coincide en altura con el extremo inferior del resorte antes de colgar ninguna masa (***x_1=583mm***). De esta forma, cada vez que colgamos el portapesas observamos qué punto de la regla está a la misma altura que el punto más bajo del muelle (***x_2***). Así la deformación producida en el muelle al colgar la masa ***m_i*** es $\Delta x_i = 583\, mm - x_{2_i}$.

Sería aconsejable repetir cada medida al menos unas tres o cuatro veces, para poder obtener una media de los datos. Si nuestra medición de las longitudes fuese muy precisa, observaríamos ligeras variaciones en la longitud del resorte según cómo se cuelgue la carga. Esto se debe a la rigidez del propio sólido, que no le permite ajustarse a pequeños incrementos de fuerza recibidos. No lo hicimos así porque no nos fue indicado, probablemente porque la incertidumbre experimental de nuestras longitudes es mayor que las posibles variaciones descritas.

Como ya hemos visto, para el cálculo de "***k***" mediante el método dinámico tenemos que medir el período con el que oscila el muelle tras separarlo del punto de equilibrio colgadas distintas masas. Para medir los tiempos empleamos un cronómetro. La precisión instrumental que dicho aparato muestra en pantalla es de 0,01 s. No obstante, se produce un retardo en la medida, debido al tiempo transcurrido entre que la persona ve el suceso que concluye el intervalo de tiempo y su dedo acciona el botón del cronómetro. Supondremos por ello una incertidumbre de 0,3 s en cada tiempo cronometrado.

Esta incertidumbre es muy grande si la comparamos con el valor del período del movimiento oscilatorio. Para que la incertidumbre de estas mediciones no sea excesiva, se mide el tiempo que tarda el objeto en realizar entre 10 y 20 oscilaciones (nosotros hemos elegido 15) y luego se divide el valor obtenido entre el número escogido. La precisión final aumenta con el número de oscilaciones medidas. Sin embargo, este número tampoco debe ser muy elevado, ya que la amplitud del movimiento se va amortiguando. Aunque el amortiguamiento no afecta al período, un menor recorrido de la masa dificulta el control del número de oscilaciones que medimos.

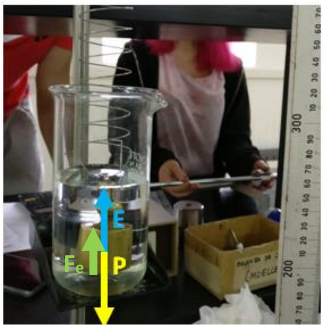
Esta amortiguación es prácticamente inapreciable para masas grandes, ya que se produce como consecuencia del peso del propio resorte. La masa debajo de cada punto del muelle contribuye al período de la parte que está por encima de ella. En consecuencia, las diferentes partes del resorte oscilan con períodos ligeramente diferentes, destruyendo con el tiempo la vibración.

Otra consideración a tener en cuenta es una buena elección del punto donde nos fijamos para contar las oscilaciones. Si estuviera señalado o lo pudiéramos apreciar con total acierto, se mediría con más precisión el tiempo tomando como referencia el paso de la masa por el centro (ya que la velocidad en ese instante es mayor). Pero en las condiciones en las que realizamos nuestra experiencia, resulta más exacto contabilizar las veces que llega a uno de los extremos, porque nos da más tiempo a comparar la posición. Es aconsejable no empezar a contabilizar desde la primera oscilación realizada, sino hacerlo con la segunda o la tercera.

Por último, aunque en la práctica resulta imposible conseguirlo estrictamente, debemos intentar que las oscilaciones sean aproximadamente lineales, minimizando las componentes pendulares o giratorias que puedan aparecer.

Para la determinación de densidades volvemos a utilizar el mismo material que para el método estático. A mayores necesitaremos un vaso de precipitados para introducir en él los líquidos.

En primer lugar tomaremos medidas del alargamiento del muelle al suspender cada uno de los sólidos cuyas densidades queremos determinar en el aire (***Δx***) y luego sumergidos en agua (***Δx'***). La incertidumbre considerada para estas medidas es, como ya hemos calculado, $s(\Delta x_i) = s(\Delta x_i') = 2{,}8$.



$\boldsymbol{F_e = P - E}$

Una vez hecho esto, usaremos las fórmulas ya mencionadas para determinar sus densidades a partir de la del agua, conocida ($\rho_{agua} = 1 g/cm^3$).

Conocidas las densidades de los sólidos, cambiaremos el agua del vaso de precipitados por acetona y repetiremos las medidas, para determinar ahora la densidad de la acetona a partir de las de cada uno de los metales.

Algunas de las pesas de densidades desconocidas disponibles en el laboratorio

Una consideración importante a tener en cuenta para la realización de esta parte de la experiencia es que debemos lavar cuidadosamente el vaso de precipitados cada vez que cambiemos el líquido que contiene.

3. Resultados experimentales y análisis:

a) Determinación de la constante elástica del muelle.

I. Método estático.

En la siguiente tabla se recogen los valores de las masas que se cuelgan del muelle (de menor a mayor), junto con sus pesos ($P = mg$; tomamos g=9,8, considerando la gravedad como una constante conocida y sin incertidumbre) y junto a las correspondientes medidas del estiramiento del muelle. La columna x_2 representa, como ya hemos explicado, el punto de la regla que coincide en altura con el extremo inferior del resorte. Cada valor se indica acompañado de su respectiva incertidumbre (las de las medidas directas ya han sido especificadas).

A las medidas indirectas se les aplica la fórmula de propagación de incertidumbres (apéndice). Aplicada a nuestras magnitudes obtenemos:

$$s(P) = \sqrt{\left(9{,}8 \, {}^{m}/_{s^2}\right)^2 s^2(m)} = 9{,}8 \, {}^{m}/_{s^2} \times 0{,}00001 \, Kg = 0{,}000098 \, N$$

$$s(\Delta x) = \sqrt{(1)^2 s^2(x_2) + (-1)^2 s^2(x_1)} = \sqrt{(2mm)^2 + (2mm)^2} = \sqrt{8mm^2} = 2\sqrt{2} \, mm = 2{,}8 \, mm$$

Masa (±0,01) (g)	Masa (±0,00001)(Kg)	Peso (±0,000098)(N)	x_2 (±2)(mm)	Δx (±2,8)(mm)	Δx (±0,0028)(m)
10,64	0,01064	0,104272	550	33,0	0,0330
20,50	0,02050	0,200900	520	63,0	0,0630
25,52	0,02552	0,250096	502	81,0	0,0810
27,13	0,02713	0,265874	498	85,0	0,0850
30,62	0,03062	0,300076	486	97,0	0,0970
40,51	0,04051	0,396998	455	128,0	0,1280
45,52	0,04552	0,446096	439	144,0	0,1440
50,61	0,05061	0,495978	426	157,0	0,1570
55,50	0,05550	0,543900	407	176,0	0,1760
64,44	0,06444	0,631512	380	203,0	0,2030
73,40	0,07340	0,719320	349	234,0	0,2340
75,58	0,07558	0,740684	346	237,0	0,2370
80,13	0,08013	0,785274	329	254,0	0,2540

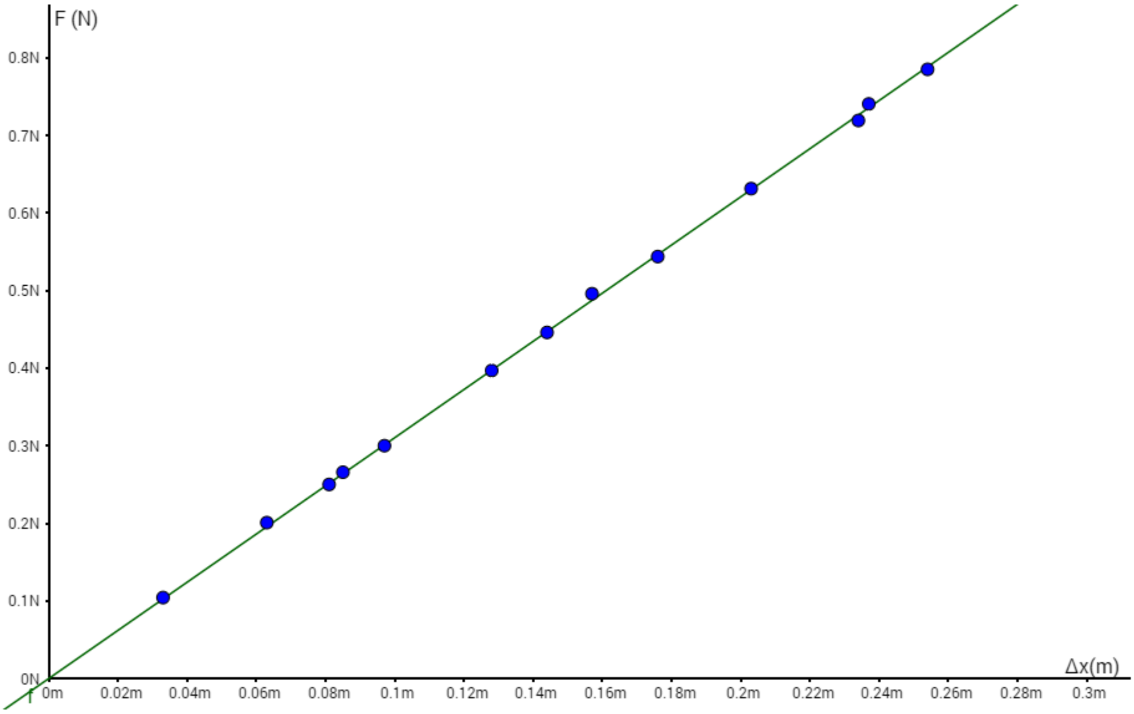
A continuación representamos gráficamente los valores de P frente a los de Δx y realizamos un ajuste por mínimos cuadrados usando las fórmulas que se recogen en el apéndice. Se trata de una regresión lineal simple (incertidumbres constantes en ambos ejes) sin término independiente (recta $y = bx$, ya que en $F = k\Delta x$ si no hay fuerza no hay estiramiento).

Al realizar el ajuste obtenemos:

$$b = k = 3{,}1045 \frac{N}{m} \qquad s(b) = s(k) = 0{,}0071 \frac{N}{m}$$

$$r \approx 0{,}99997$$

$$F = (3{,}1045 \pm 0{,}071)\,{}^{N}/_{m} \times \Delta x$$



II. Método dinámico.

En las siguientes tablas se recogen las medidas de las masas que se cuelgan sucesivamente del muelle, junto a los tiempos medidos para quince oscilaciones de cada una de ellas, así como los períodos calculados a partir de estos. Cada una de las medidas se presenta acompañada de su respectiva incertidumbre.

Aplicando las fórmulas de propagación de incertidumbres:

$$s(T) = \sqrt{\left(\frac{1}{15}\right)^2 s^2(t)} = \frac{0{,}3s}{15} = 0{,}02\ s$$

$$s(4\pi^2 m) = \sqrt{(4\pi^2)^2 s^2(m)} = 4\pi^2(0{,}00001\ Kg) = 0{,}00039\ Kg$$

$$s(T^2) = \sqrt{(2T)^2 s^2(T)} = 0{,}04 \times T$$

Masa (±0,01)(g)	Masa (±0,00001)(Kg)	$4\pi^2 m$ (±0,00039)(Kg)
27,13	0,02713	1,07105
30,47	0,03047	1,20291
35,66	0,03566	1,40780
40,34	0,04034	1,59256
45,33	0,04533	1,78956
50,27	0,05027	1,98458
55,35	0,05535	2,18513
60,37	0,06037	2,38331
64,44	0,06444	2,54399
70,16	0,07016	2,76981
73,39	0,07339	2,89732
114,85	0,11485	4,53410

t (±0,3)(15T) (s)	T (±0,02)(s)	T^2 (s^2)	$s(T^2)$ (s^2)
9,7	0,65	0,420	0,052
10,2	0,68	0,461	0,054
10,8	0,72	0,516	0,057
11,4	0,76	0,575	0,061
12,0	0,80	0,643	0,064
12,6	0,84	0,704	0,067
13,2	0,88	0,770	0,070
13,6	0,91	0,824	0,073
14,1	0,94	0,882	0,075
14,6	0,97	0,950	0,078
15,0	1,00	1,000	0,080
18,4	1,23	1,505	0,098

Llevamos a cabo un ajuste de los datos a una recta mediante una regresión lineal ponderada, siguiendo los pasos indicados a continuación. El ajuste se hace ponderado porque la incertidumbre en el eje X es constante y resulta despreciable frente a las incertidumbres variables que existen en el eje Y. La recta carece de término independiente, ya que lo que se representa es la relación $\underbrace{T^2}_{y} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{b}\underbrace{(4\pi^2 m)}_{x}$.

$$y = b\ x$$

$$\omega_i = \frac{1}{s^2(y_i)} = \frac{1}{s^2(T^2)}$$ (peso estadístico de cada dato)

*Para ver más sobre el ajuste por mínimos cuadrados consúltese el apéndice.

ω_i (s^{-4})	**$\omega_i x_i y_i$ (Kg/s^2)**	**$\omega_i x_i^2$ (Kg^2/s^4)**	**$\omega_i y_i^2$ (sin unidad)**
372,1089	167,3515	426,8636	65,6100
338,5744	187,9543	489,9125	72,1084
302,5276	219,9688	599,5800	80,7003
271,9453	248,8374	689,7201	89,7756
242,9245	279,6182	777,9688	100,5006
221,7947	310,0906	873,5511	110,0751
202,9975	341,4266	969,2716	120,2678
189,5171	372,3925	1076,4904	128,8225
177,0845	397,4983	1146,0699	137,8667
164,4780	432,7822	1261,8462	148,4336
156,2500	452,7064	1311,6358	156,2500
103,8405	708,4525	2134,7566	235,1111
$\sum\omega_i$= 2744,0430	**$\sum\omega_i x_i y_i$=4119,0794**	**$\sum\omega_i x_i^2$=11757,6667**	**$\sum\omega_i y_i^2$=1445,5217**

$$b = \frac{\sum_i \omega_i x_i y_i}{\sum_i \omega_i x_i^2} = \frac{\sum_i \omega_i (4\pi^2 m_i) T_i^2}{\sum_i \omega_i (4\pi^2 m_i)^2}\ ;\ \ b = \frac{4119{,}0794\ {}^{Kg}/_{s^2}}{11757{,}6667\ {}^{Kg^2}/_{s^4}} \approx 0{,}3503\ {}^{s^2}/_{Kg}$$

$$s(b) = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \omega_i x_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \omega_i (4\pi^2 m_i)^2}}\ ; \qquad s(b) = \frac{1}{\sqrt{11757{,}6667\ {}^{Kg^2}/_{s^4}}} \approx 0{,}0092\ {}^{s^2}/_{Kg}$$

$$r = \frac{\sum_i \omega_i x_i y_i}{\sqrt{\left(\sum_i \omega_i x_i^2\right)\left(\sum_i \omega_i y_i^2\right)}} = \frac{\sum_i \omega_i (4\pi^2 m_i) T_i^2}{\sqrt{\left(\sum_i \omega_i (4\pi^2 m_i)^2\right)\left(\sum_i \omega_i (T_i^2)^2\right.}}$$

$$r = \frac{4119{,}0794\ {}^{Kg}/_{s^2}}{\sqrt{\left(11757{,}6667\ {}^{Kg^2}/_{s^4}\right)(1445{,}5217)}} \approx 0{,}9991$$

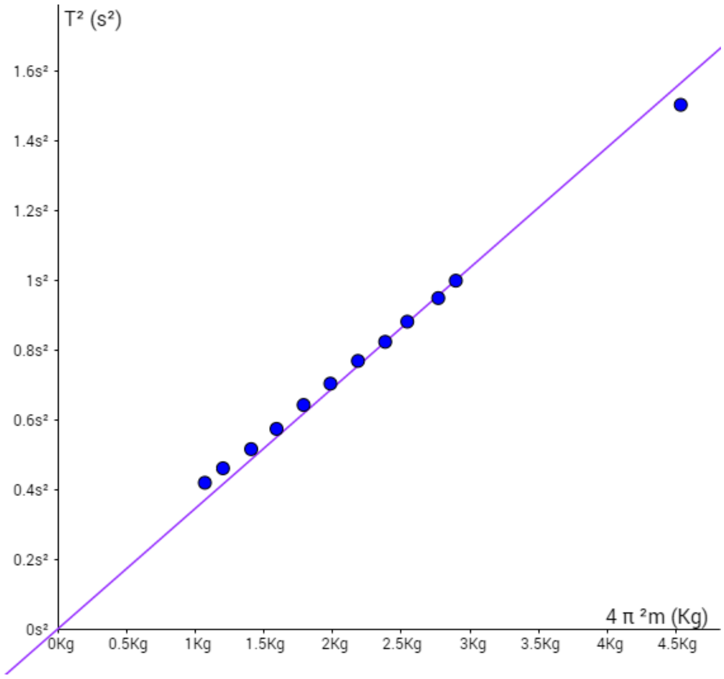
El valor de la pendiente de la recta es $b = 0{,}3503\ {}^{s^2}/_{Kg}$, con $s(b) = 0{,}0092\ {}^{s^2}/_{Kg}$. Obtenemos un coeficiente de regresión lineal de $r = 0{,}9991$. El hecho de que *r* tenga tres nueves nos confirma haber logrado un buen ajuste.

Como ya sabíamos, dicha pendiente es $b = \frac{1}{k}$. Calculamos ***k*** y su incertidumbre y representamos gráficamente la recta obtenida.

$$s(k) = \sqrt{\left(-\frac{1}{b^2}\right)^2 s^2(b)} = \frac{s(b)}{b^2} = \frac{0{,}0092\ {}^{s^2}/_{Kg}}{(0{,}3503\ {}^{s^2}/_{Kg})^2} \approx 0{,}075\ {}^{Kg}/_{s^2} = 0{,}075\ {}^{N}/_{m}$$

$$k = \frac{1}{b} = \frac{1}{0{,}3503\ {}^{s^2}/_{Kg}} = 2{,}855\ {}^{N}/_{m}$$

$$F = (2{,}855 \pm 0{,}075)\ {}^{N}/_{m} \times \Delta x$$



Conclusión:

Podemos ver que los valores de k obtenidos por ambos métodos se parecen, siendo válidas ambas vías y rondando la constante del resorte los 3 N/m. Probablemente el resultado obtenido mediante el método estático esté más cerca de la realidad, por la dificultad de lograr precisión en las medidas de los tiempos. Efectivamente, la incertidumbre final es mayor con el método dinámico.

$$\boldsymbol{k_e = (3,1045 \pm 0,0071)\,{}^{N}\!/_{m} \qquad k_d = (2,855 \pm 0,075)\,{}^{N}\!/_{m}}$$

Si no hubiéramos usado las fórmulas de ajuste a una recta que pasa por el origen, parece probable (a la vista de las gráficas) que hubiéramos obtenido una relación de la forma $F = k\Delta x + C$, con una pequeña ordenada en el origen. Esta desviación (además de a pequeños errores inevitables en la medida) es debida a la propia masa del resorte, que tendríamos que considerar para un cálculo realmente preciso.

Podemos decir que hemos comprobado satisfactoriamente la ley de Hooke.

b) Determinación de densidades.

I. Densidad de sólidos.

Se sigue el método descrito anteriormente, midiendo las deformaciones del muelle primero al colgar cada uno de los objetos y luego al sumergirlos en agua. La densidad del agua se toma constante y de valor 1 g/cm^3.

Se aplica la fórmula antes mencionada para calcular la densidad de cada uno:

$$\boldsymbol{\rho_s = \rho_L \frac{\Delta x}{\Delta x - \Delta x'}}$$

Aplicamos a esta la fórmula de propagación de incertidumbres para obtener:

$$s(\rho_s) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_s}{\partial \Delta x}\right)^2 s^2(\Delta x) + \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial \Delta x'}\right)^2 s^2(\Delta x')} =$$

$$= \rho_L \sqrt{\left(\frac{-\Delta x'}{(\Delta x - \Delta x')^2}\right)^2 s^2(\Delta x) + \left(\frac{\Delta x}{(\Delta x - \Delta x')^2}\right)^2 s^2(\Delta x')}$$

En la siguiente tabla se indican los valores medidos y los resultados obtenidos:

	x_2 (±2)(mm)	Δx (±2,8)(mm)	x_2' (±2)(mm)	Δx' (±2,8)(mm)	ρ_s (g/cm^3)	s(ρ_s) (g/cm^3)
sólido 1	221	362,0	265	318,0	8,23	0,70
sólido 2	350	233,0	383	200,0	7,06	0,79
sólido 3	380	203,0	458	125,0	2,60	0,11
sólido 4	498	85,0	526	57,0	3,04	0,37

II. Densidad de un líquido.

Repetimos la experiencia con acetona en vez de agua para calcular la densidad de la acetona a partir de las densidades de los cuatro sólidos.

Recordemos la fórmula a usar y apliquémosle la propagación de incertidumbres:

$$\boldsymbol{\rho_L = \rho_s \frac{\Delta x - \Delta x'}{\Delta x}}$$

$$\boldsymbol{s(\rho_L) = \sqrt{\left(\rho_s \frac{\Delta x'}{\Delta x^2}\right)^2 s^2(\Delta x) + \left(-\frac{\rho_s}{\Delta x}\right)^2 s^2(\Delta x') + \left(\frac{\Delta x - \Delta x'}{\Delta x}\right)^2 s^2(\rho_s)}}$$

En la siguiente tabla se muestran los estiramientos medidos y las densidades de la acetona calculadas con cada sólido:

	x_2 (±2)(mm)	Δx (±2,8)(mm)	x_2' (±2)(mm)	Δx' (±2,8)(mm)
sólido 1	221	362,0	256	327,0
sólido 2	350	233,0	375	208,0
sólido 3	380	203,0	439	144,0
sólido 4	498	85,0	520	63,0

	ρ_s (g/cm^3)	s(ρ_s) (g/cm^3)	ρ_L (g/cm^3)	s(ρ_L) (g/cm^3)
sólido 1	8,23	0,70	0,80	0,11
sólido 2	7,06	0,79	0,76	0,14
sólido 3	2,60	0,11	0,756	0,054
sólido 4	3,04	0,37	0,79	0,16

Conclusión:

En cuanto a las densidades obtenidas para los sólidos, podemos estimar a partir de ellas de qué materiales podría tratarse, obviando las posibles oquedades en las piezas cilíndricas al considerarlas macizas. Hay que tener en cuenta la posible impureza de las muestras. A continuación se indica una relación de las densidades de cada sólido y los materiales de los que aparentemente podría tratarse.

$\rho_{s_1} = (8{,}23 \pm 0{,}70)\, {}^{g}/_{cm^3}$	Acero $\rho = 7{,}85\ g/cm^3$ o Hierro $\rho = 7{,}87 g/cm^3$
$\rho_{s_2} = (7{,}06 \pm 0{,}79)\, {}^{g}/_{cm^3}$	Por la elevada incertidumbre que presenta resulta difícil determinar de qué elemento puede tratarse. En el rango de densidades posibles están las del Zinc ($\rho = 7{,}13\ g/cm^3$), el Cromo ($\rho = 7{,}19\ g/cm^3$), el Estaño ($\rho = 7{,}31\ g/cm^3$), el Manganeso ($\rho = 7{,}43\ g/cm^3$) o incluso el Acero o el Hierro de nuevo.
$\rho_{s_3} = (2{,}60 \pm 0{,}11)\, {}^{g}/_{cm^3}$	Aluminio $\rho = 2{,}70\ g/cm^3$
$\rho_{s_4} = (3{,}04 \pm 0{,}37)\, {}^{g}/_{cm^3}$	Por su apariencia probablemente se trate también de Aluminio, aunque la densidad obtenida se aproxima más a la del Escandio ($\rho = 2{,}99\ g/cm^3$).

Teniendo en cuenta sus incertidumbres, los cuatro valores obtenidos para la densidad de la acetona coinciden, rondando el valor real de la densidad de la acetona pura ($\rho = 0{,}791\, {}^{g}/_{cm^3}$).

Esto demuestra que el método utilizado para hallar las densidades combinando la ley de Hooke y el principio de Arquímedes es perfectamente válido, ya que los resultados finales han sido los esperados.