

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE
COMPOSTELA

FACULTAD DE FÍSICA

Memoria Técnicas Experimentales I

Momento de Inercia

Alejandro Barreto Rivero - DNI: 49499348J

Abril 2023 - 1ºFísica USC

Índice

1. Introducción	2
1.1. Determinar la constante D	2
1.2. Cálculo del Momento de Inercia	2
1.3. Teorema de Steiner	2
2. Objetivos	3
3. Montaje y Procedimientos	3
3.1. Instrumentación	3
3.2. Cálculo de la constante D	3
3.3. Cálculo Experimental del Momento de Inercia de Distintos Sólidos	5
3.3.1. Disco	5
3.3.2. Esfera	6
3.3.3. Cilindro	7
3.4. Comprobación del Th de Steiner	8
3.4.1. Disco	9
3.4.2. Barra	10
4. Conclusiones	11
5. Bibliografía	11

1. Introducción

1.1. Determinar la constante D

Al emplear un soporte con un resorte elástico durante toda la práctica, debemos primeramente calcular su constante de recuperación D. Esta constante, si suponemos que el resorte tiene un comportamiento lineal, se tiene la siguiente ecuación.

$$M = -D \cdot \varphi \quad (1)$$

Gracias a esta ecuación podemos calcular la constante D sabiendo el par de fuerzas M y el ángulo en el que actúan.

El par recuperador M se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r} \quad (2)$$

1.2. Cálculo del Momento de Inercia

La ecuación fundamental del movimiento rotacional nos permite relacionar el momento de una fuerza con su momento angular:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (3)$$

Cuando queremos calcular el momento de inercia de un sólido, que rota sobre uno de sus ejes principales, Debemos tener en cuenta la siguiente ecuación:

$$L = I \cdot \omega \quad (4)$$

Sustituyendo L en la ecuación (3) y empleando también la ecuación (1), se obtiene lo siguiente:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D \cdot \varphi \quad (5)$$

Resolviendo la ED (5) obtenemos una ecuación para calcular el momento de inercia:

$$I = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 \cdot D \quad (6)$$

1.3. Teorema de Steiner

El Teorema de Steiner afirma que el momento de inercia de un eje (I) paralelo al situado en el centro de masas (I_0) se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$I = I_0 + m \cdot d^2 \quad (7)$$

Donde d es la distancia del eje del momento I al centro de masas, y m es la masa del sólido.

2. Objetivos

- Hallar experimentalmente la constante de recuperación **D** del muelle en espiral del soporte, midiendo la fuerza de recuperación del soporte al rotar un disco un ángulo φ .
- Determinar experimentalmente el momento de Inercia de tres sólidos distintos, y comprobar que el valor teórico del momento de inercia según el tipo de sólido concuerda con los resultados.
- Comprobar que el Th. de Steiner (7) se cumple. Para ello emplearemos dos sólidos distintos (Barra y Disco) para calcular su momento de inercia colocando su eje de giro a una distancia **d** de su centro de masas. Mediante regresión lineal simple (con término independiente) comprobaremos que tanto la masa como el momento de inercia del centro de masas experimental coinciden con sus valores teóricos.

3. Montaje y Procedimientos

3.1. Instrumentación

1. Balanza.
2. Dinamómetro.
3. Regla.
4. Soporte giratorio dotado con un muelle en espiral.
5. Sólidos.
6. Detector de barrera fotoeléctrico, conectado a un contador eléctrico.
7. Cronómetro

3.2. Cálculo de la constante D

Durante lo que queda de memoria, emplearemos constantemente la ecuación de la propagación de incertidumbres, que es la siguiente:

$$s(y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s(x_i)^2} \quad (8)$$

Para calcular la constante D primero colocamos el disco perforado en el soporte y lo rotamos hasta un intervalo de entre 90 y 180 grados del punto de equilibrio. Posteriormente colocamos el dinamómetro sujeto a la aguja que sobresale del disco de radio $r = 0,150 \pm 0,001$ m, de forma que este quede perpendicular al radio

del disco. Tomada la fuerza calculamos mediante la ecuación (2) el valor del par recuperador de fuerzas. La siguiente tabla muestra las 10 medidas tomadas:

φ ($\pm 0,087$ rad)	F ($\pm 0,01$ N)	M ($\pm 0,0016$ N·m)
1.571	0.19	0.0285
1.745	0.23	0.0345
1.833	0.24	0.0360
2.007	0.25	0.0375
2.094	0.27	0.0405
2.269	0.29	0.0435
2.531	0.31	0.0465
2.793	0.33	0.0495
2.880	0.34	0.0510
3.142	0.40	0.0600

Cuadro 1: Fuerza y Par recuperador medido

Además, para calcular la incertidumbre de M, hemos empleado la ecuación (8) y nos ha quedado que

$$s(M) = \sqrt{r^2 s(F)^2 + F^2 s(r)^2} \quad (9)$$

Lo que nos da para cada valor de M una incertidumbre muy similar, próxima a $\pm 0,0016$ N·m, por lo que tomaremos como constante la incertidumbre de M para poder realizar la regresión lineal simple (sin término independiente) de M frente a φ , donde **D** se corresponderá con el término b de la regresión.

Por tanto tendríamos que:

$$D = -186,3 \cdot 10^{-4} \pm 2,4 \cdot 10^{-4} (N \cdot m)/rad$$

El coeficiente de correlación de los datos es $r=0.9992$.

La siguiente gráfica muestra la recta de regresión y los datos obtenidos:

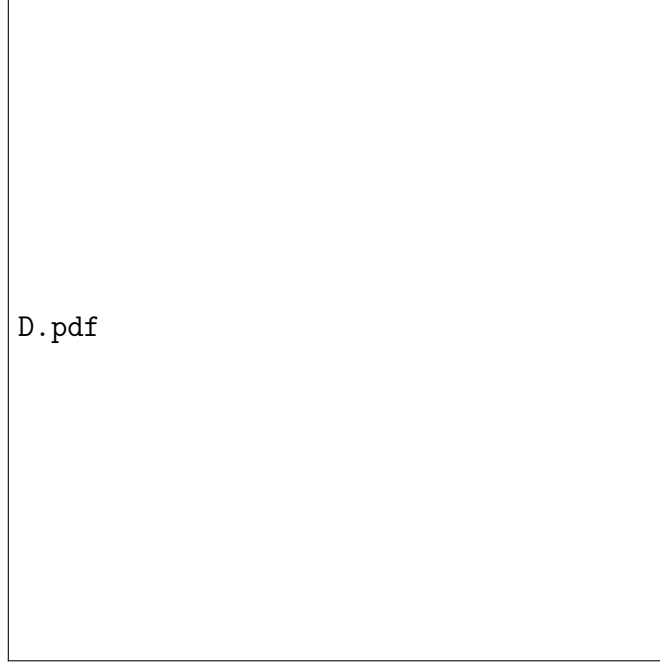


Figura 1: Gráfica de M frente a φ

3.3. Cálculo Experimental del Momento de Inercia de Distintos Sólidos

Una vez calculada la constante **D** podemos comenzar a calcular los momentos de inercia de los sólidos que vamos a emplear. Para ello emplearemos el Detector de barrera fotoeléctrico, que determinará el semiperíodo del sólido en el soporte. Comenzaremos colocando el sólido en su punto de equilibrio, de cara al detector. Una vez colocado, lo rotaremos un cierto ángulo y lo soltaremos. De esta forma el detector nos indicará el semiperíodo del sólido.

Debemos realizar unas 15 veces las medidas del semiperíodo de cada sólido, para poder reducir el error de la media. Conocido el semiperíodo, mediante la ecuación (6) podremos calcular el valor experimental del momento de inercia.

Necesitaremos calcular además la incertidumbre de cada momento de inercia, para ello emplearemos las ecuaciones (6) y (8), y con ellas deducimos la siguiente ecuación es:

$$s(I) = \frac{2\sqrt{4T_{1/2}^2 D^2 s(T_{1/2})^2 + T_{1/2}^4 s(D)^2}}{\pi} \quad (10)$$

3.3.1. Disco

El primer sólido será el disco, de radio $0,150 \pm 0,001$ m y masa $0,38139 \pm 0,00001$ Kg.

Los semiperíodos calculados para el disco se muestran en la siguiente tabla:

Medida	τ ($\pm 0,001$ s)
1	1,429
2	1,441
3	1,446
4	1,449
5	1,446
6	1,445
7	1,441
8	1,431
9	1,425
10	1,424
11	1,417
12	1,415
13	1,406
14	1,406
15	1,428
$\bar{\tau}$	1,4299

Cuadro 2: Semiperíodo del Disco y su media

Tenemos que todos los datos medidos entran en el intervalo de confianza de la media, por tanto ninguno ha sido descartado. Por tanto $\bar{\tau} = 1,4299 \pm 0,0076$.

Por tanto, y teniendo en cuenta la ecuación (10), se tiene que:

$$I_{disco} = 0,00386 \pm 0,00040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Debemos tener en cuenta que el momento de inercia teórico de un disco es:

$$I_{Disco} = \frac{m \cdot R^2}{2}, \quad (11)$$

Además, su incertidumbre, según la ecuación (8), es:

$$s(I) = I \cdot \sqrt{\frac{s(m)^2}{m^2} + \frac{4s(R)^2}{R^2}} \quad (12)$$

Luego, el valor teórico de el momento de inercia del disco es:

$$I_{Disco} = 429,1 \cdot 10^{-5} \pm 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.3.2. Esfera

El segundo sólido será una esfera, de radio $0,069 \pm 0,001$ m y masa $0,65923 \pm 0,00001$ Kg.

Los semiperíodos calculados para la esfera se muestran en la siguiente tabla:

Medida	τ ($\pm 0,001$ s)
1	0,727
2	0,726
3	0,727
4	0,727
5	0,726
6	0,728
7	0,727
8	0,729
9	0,729
10	0,730
11	0,729
12	0,729
13	0,728
$\bar{\tau}$	0,7278

Cuadro 3: Semiperíodo de la Esfera y su media

En este caso hemos tomado 13 datos, ya que hemos copiado mal 2 datos y no sirven. Tenemos que todos los datos medidos entran en el intervalo de confianza de la media, por tanto ninguno ha sido descartado. Por tanto $\bar{\tau} = 0,7278 \pm 0,0012$.

Por tanto, y teniendo en cuenta la ecuación (10), se tiene que:

$$I_{disco} = 100,0 \cdot 10^{-5} \pm 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Debemos tener en cuenta que el momento de inercia teórico de una esfera es:

$$I_{Disco} = \frac{2m \cdot R^2}{5}, \quad (13)$$

Empleando las ecuaciones (8) y (13), tenemos que el momento de inercia de la esfera es:

$$I_{Esfera} = 125,5 \cdot 10^{-5} \pm 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.3.3. Cilindro

El segundo sólido será un cilindro, de radio $0,050 \pm 0,001$ m y masa $38429 \pm 0,00001$ Kg.

Los semiperíodos calculados para el cilindro se muestran en la siguiente tabla:

Medida	τ ($\pm 0,001$ s)
1	0,436
2	0,436
3	0,435
4	0,431
5	0,429
6	0,432
7	0,436
8	0,438
9	0,435
10	0,435
11	0,433
12	0,433
13	0,437
14	0,435
15	0,435
16	0,435
$\bar{\tau}$	0,4344

Cuadro 4: Semiperíodo del Cilindro y su media

En este caso al calcular el intervalo de confianza hemos eliminado el dato de la medida 5 (0.429). Por tanto tenemos que el nuevo valor de la media es $\bar{\tau} = 0,4348 \pm 0,0014$.

Por tanto, y teniendo en cuenta la ecuación (10), se tiene que:

$$I_{Cilindro} = 35,7 \cdot 10^{-5} \pm 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Empleando las ecuaciones (8) y (11) (ya que los momentos de un disco y de un cilindro son iguales), tenemos que el momento de inercia del cilindro es:

$$I_{Esfera} = 48,0 \cdot 10^{-5} \pm 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3.4. Comprobación del Th de Steiner

Para comprobar experimentalmente el Teorema de Steiner (7) tomaremos 2 de los sólidos que tienen perforaciones a distintas distancias del centro de masas. Esos sólidos son el Disco y la Barra. Tomaremos primero el disco. Comenzaremos midiendo unas 15 veces el semiperíodo del disco rotando sobre su centro de masas. Posteriormente colocaremos el disco en el soporte por uno de los agujeros a distancia d del centro, y mediremos de nuevo sus semiperíodos. Haremos eso hasta que se acaben los agujeros.

En caso de la barra solamente tomaremos 10 agujeros distintos.

Cuando tengamos el semiperíodo calculado, calcularemos también sus momentos de inercia, para posteriormente realizar una regresión lineal simple (esta vez con término independiente) del momento de inercia frente al cuadrado de la distancia d . De esta forma, según la ecuación (7) tendremos que el término a y b

de la regresión se corresponderán con el momento de inercia principal y la masa respectivamente.

Cabe aclarar que en esta parte tuvimos múltiples problemas para tomar las medidas, ya que el soporte estaba fallando. Por tanto solo pudimos realizar correctamente la parte del disco, y la de la barra tomamos la mitad de los datos.

3.4.1. Disco

A continuación se muestran los datos tomados para el Disco en distintos ejes de giro:

Medida	0 m	0.03 m	0.06 m	0.09 m	0.012 m
1	1,429	1,475	1,685	1,928	2,396
2	1,441	1,477	1,687	1,954	2,414
3	1,446	1,479	1,691	1,925	2,401
4	1,449	1,481	1,692	1,956	2,463
5	1,446	1,479	1,692	1,958	2,376
6	1,445	1,481	1,659	1,948	2,395
7	1,441	1,485	1,680	1,937	2,436
8	1,431	1,481	1,678	1,910	2,463
9	1,425	1,484	1,679	1,916	2,439
10	1,424	1,479	1,684	1,917	2,444
11	1,417	1,483	1,688	1,940	2,47
12	1,415	1,486	1,693	1,954	2,493
13	1,406	1,486	1,686	1,943	2,474
14	1,406	1,487	1,679	1,942	2,491
15	1,428	1,484	1,672	1,946	2,483
$\bar{\tau}$	1,4299	1,4818	1,6847	1,9383	2,4430
I	0,003860	0,004145	0,005357	0.007091	0.011261

Cuadro 5: Semiperíodo del Disco en ejes de rotación a distancia "d" del centro

Se debe tener en cuenta que la incertidumbre de los semiperíodos sigue siendo $\pm 0,001$ s, y que la incertidumbre de las distancias es $\pm 0,001$ m.

Solamente hemos eliminado el dato **seis** de la **cuarta columna** (1.659), ya que no entraba dentro del intervalo de confianza de la media.

No vamos a tener en cuenta la incertidumbre ni de la media de cada semiperíodo ni de su momento de inercia correspondiente, ya que si no, estaríamos ante 2 variables cuyos incertidumbres varían y no son despreciables. Por tanto no podríamos realizar la regresión lineal de los datos I frente a d^2 (ya que tal regresión lineal ponderada excede los conocimientos que tenemos en este curso).

Los resultados de tal regresión son siguientes:

- $I_0 = 0,00361 \pm 0,00028 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- $m = 0,506 \pm 0,037 \text{ kg}$
- $r = 0,991$

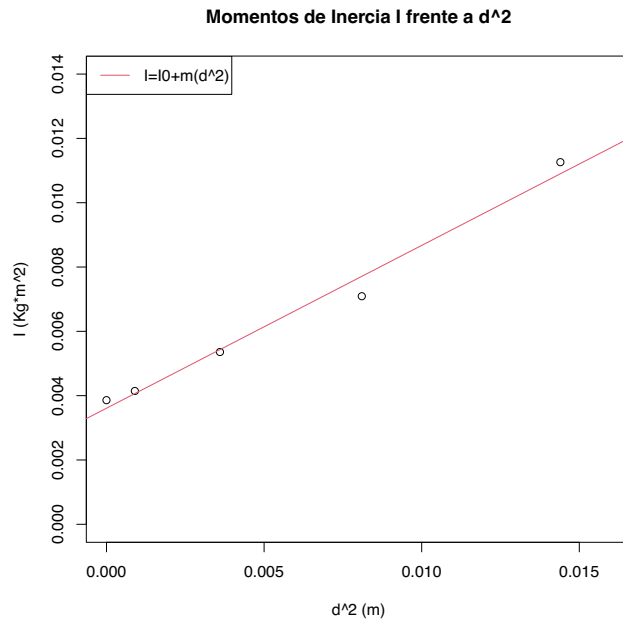


Figura 2: Gráfica de los MI del Disco respecto a d²

Teniendo en cuenta que el momento de inercia del Disco $I_0 = 0,00386 \pm 0,00040$ Kg·m² y la masa $m = 0,38139 \pm 0,00001$ Kg, (según lo calculado en el apartado 3.3.1), se puede comprobar que...

3.4.2. Barra

Se debe recordar que en esta parte tomamos únicamente parte de las medidas, debido a los problemas que hemos tenido con el soporte.

A continuación, la tabla con los datos recogidos para los tiempos de la barra:

Medida	0 m	0.01 m	0.02 m	0.03 m	0.04 m	0.05 m	0.06 m	0.07 m	0.08 m	0.09 m	0.10 m
1	1,595	1,606	1,625	1,649	1,689	1,681	1,697	1,738	1,772	1,826	1,866
2	1,596	1,606	1,633	1,643	1,686	1,688	1,710	1,732	1,785	1,829	1,871
3	1,595	1,606	1,627	1,648	1,677	1,681	1,701	1,738	1,782	1,833	1,876
4	1,600	1,607	1,629	1,651	1,685	1,682	1,700	1,732	1,781	1,831	1,879
5	1,595		1,632	1,646	1,671	1,680	1,703	1,729	1,777	1,825	1,870
6	1,596			1,661				1,724			
7	1,561										
tau	1,5962	1,6063	1,6292	1,6474	1,6843	1,6810	1,7003	1,7322	1,78125	1,8288	1,8724
I	0,004809	0,004870	0,005010	0,005123	0,005355	0,005334	0,005457	0,005664	0,005989	0,006313	0,006618

Cuadro 6: Semiperíodo de la Barra en ejes de rotación a distancia "d" del centro

Se han calculado las medias eliminando los datos fuera del intervalo de confianza. Hechos los cálculos de los momentos de inercia, hay que hacer la regresión lineal simple de estos frente al cuadrado de la distancia.

- $I_0 = 0,004922 \pm 0,000039$ kg·m²
- $m = 0,1690 \pm 0,0081$ kg
- $r = 0,98$

La siguiente gráfica muestra los datos junto a su recta de regresión.

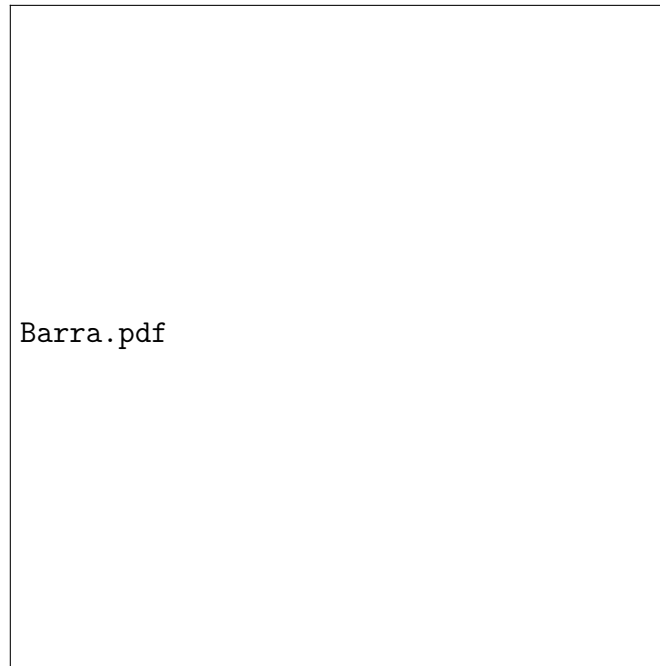


Figura 3: Gráfica de los MI de la Barra respecto a d^2

Ahora habrá que tener en cuenta la ecuación del momento de inercia de una barra, que es el siguiente:

$$I_{Barra} = \frac{m \cdot R^2}{12} \quad (14)$$

Sabiendo que la masa de la barra es de $0,12143 \pm 0,00001$ Kg, se tiene que su momento de inercia teórico es:

$$I_0 = 0,004368 \pm 0,000012 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

4. Conclusiones

5. Bibliografía