

# Momento de inercia

Gonzalo Bastos González

2 de mayo de 2023

# Índice

<b>1. Objetivos e introducción teórica</b>	<b>2</b>
<b>2. Materiales y metodología</b>	<b>4</b>
2.1. Determinación del momento de inercia de diferentes cuerpos .	5
2.2. Verificación del teorema de Steiner . . . . .	8
<b>3. Análisis de datos</b>	<b>9</b>
3.1. Determinación del momento de inercia de diferentes cuerpos .	9
3.2. Determinación de los momentos de inercia de diferentes cuerpos	10
3.2.1. Disco . . . . .	10
3.2.2. Cilindro . . . . .	11
<b>4. Conclusiones</b>	<b>11</b>

## 1. Objetivos e introducción teórica

Esta práctica gira alrededor del concepto de momento de inercia y tiene dos objetivos principales:

- Medir experimentalmente el momento de inercia de diferentes cuerpos
- Verificar el teorema de Steiner

Para comenzar con nuestra práctica en primer necesitamos unas bases teóricas sobre las que realizar nuestros experimentos. La práctica parte del concepto de momento de inercia, magnitud que se define como la cuantificación de la inercia de rotación de un cuerpo. Matemáticamente el concepto de momento de inercia de un sistema de partículas se define como:

$$I = \sum_i^N m_i r_i^2 \quad (1)$$

Esta fórmula puede generalizara para cuerpos de masa continua, que son con los que trabajamos, con la siguiente expresión:

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

Si aplicamos esta expresión a determinados cuerpos geométricos simples podemos obtener una expresión simplificada para su momento de inercia respecto a su eje de simetría:

$$\begin{aligned} \text{Disco: } I &= \frac{MR^2}{2} \\ \text{Cilindro: } I &= \frac{MR^2}{2} \\ \text{Esfera: } I &= \frac{2MR^2}{5} \\ \text{Barra: } I &= \frac{ML^2}{12} \end{aligned} \quad (3)$$

Siendo  $M$  la masa del cuerpo,  $R$  su radio y  $L$  su longitud.

A partir de la definición de momento de inercia podemos intuir que esta magnitud va a presentar una gran relación con la rotación de los cuerpos y, por tanto, las magnitudes que la definen. Partiremos de la ecuación fundamental del movimiento de rotación:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (4)$$

Donde se relaciona el momento de la fuerza que produce la rotación ( $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ ) con la derivada del momento angular  $\vec{L}$ . En un sólido rígido el momento angular se puede expresar como:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (5)$$

Siendo  $\vec{\omega}$  la velocidad angular. Cuando el giro se produce sobre uno de los ejes principales del cuerpo el momento angular tiene la misma dirección que  $\vec{\omega}$  y podemos emplear la expresión anterior en módulos ( $L = I_e\omega$ ).

Para nuestra práctica mediremos el momento de inercia respecto a un eje a partir del período de oscilación de su rotación cuando se le hace girar sometido a la fuerza recuperadora de un resorte elástico. El momento de esa fuerza recuperadora cumple la siguiente relación:

$$M = -D\varphi \quad (6)$$

Donde  $D$  es una constante propia del resorte y  $\varphi$  es el ángulo girado. A partir de esta ecuación vamos a buscar una relación que nos permita calcular el momento de inercia del cuerpo respecto al eje a partir del momento de la fuerza, que podremos determinar experimentalmente:

$$M = \frac{dL}{dt}; L = I\omega; \omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior y la Ec.6 obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{I}\varphi \quad (8)$$

Esta es la ecuación diferencial que describe el comportamiento de un oscilador simple, si la resolvemos obtenemos la siguiente expresión que nos ayuda a modelizar la oscilación:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I}}t + \phi_0\right) \quad (9)$$

El período de este movimiento armónico viene dado por la siguiente expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (10)$$

Esta expresión nos permitirá calcular el momento de inercia de nuestro cuerpo midiendo su período de oscilación cuando se somete a la fuerza recuperadora

del resorte, algo mucho más fácil de medir experimentalmente. Esta igualdad nos servirá como fundamento para calcular todos los momentos de inercia medidos a lo largo de toda la práctica.

La segunda parte de la práctica se centra en verificar el teorema de Steiner, que afirma que el momento de inercia de un sólido rígido respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto a otro eje paralelo que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del sólido por la distancia que separa ambos ejes al cuadrado. Matemáticamente se puede expresar como:

$$I_{ee} = I_0 + md^2 \quad (11)$$

## 2. Materiales y metodología

Los materiales empleados para el estudio de sus propiedades fueron:

- Disco perforado, de 381,39 g de masa y 29,9 cm de diámetro.
- Esfera maciza, de 659,23 g de masa y 13,8 cm de diámetro
- Cilindro macizo, de 384,29 cm de masa y 10 cm de diámetro
- Barra rígida, de 65,7 cm de longitud

La incertidumbre de las medidas masas viene dada por la precisión instrumental de la balanza:

$$s(m) = 0,01 \text{ g} \quad (12)$$

Por otro lado, la incertidumbre de las medidas realizadas con la regla de los diámetros y la longitud de la barra viene dada por la precisión instrumental de la regla empleada:

$$s(x) = 0,001 \text{ m} \quad (13)$$

Para realizar las medidas contamos con los siguientes instrumentos:

- Balanza, con una precisión de 0,01 g
- Recta milimetrada, con una precisión de 0,001 m
- Soporte giratorio dotado de un resorte
- Detector fotoeléctrico empleado para medir semiperíodos
- Dinamómetro

En la siguiente figura podemos ver los materiales empleados:

El procedimiento experimental seguido en cada una de las dos partes de la práctica se detallará a continuación:



Figura 1: Materiales empleados

## 2.1. Determinación del momento de inercia de diferentes cuerpos

Esta primera parte de la práctica se centra en determinar los momentos de inercia de diferentes cuerpos respecto a su eje de simetría. Para ello aplicaremos la Ec.10, que relaciona el momento de inercia del cuerpo con su período de oscilación. No obstante, por comodidad a la hora de trabajar con el detector fotoeléctrico hemos decidido trabajar con semiperíodos. Por tanto la expresión de la Ec.10 se transforma en:

$$T_{1/2} = \pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (14)$$

Como observamos en la expresión anterior la relación entre el semiperíodo y el momento de inercia depende también de la constante  $D$  del resorte, *a priori* desconocida. Para calcular el valor de esa constante partiremos de la Ec.6 ( $M = -D\varphi R$ ) y realizaremos un ajuste por mínimos cuadrados de  $M$  frente a  $\varphi$ , donde la pendiente de la recta será la constante  $D$ . Para el ajuste tomaremos diez medidas con el dinámometro de la fuerza que es necesario ejercer para rotar el disco un determinado ángulo y, previo cálculo del momento de esas fuerzas, calcularemos la constante.

Para calcular los momentos de las fuerzas ejercidas vamos a suponer que el vector fuerza y el vector posición son perpendiculares, lo que nos permitirá trabajar solo con los módulos:

$$M = RF \quad (15)$$

Para la incertidumbre del momento aplicaremos propagación de incertidumbres:

$$s(M) = \sqrt{F^2 s^2(R) + R^2 s^2(F)} \quad (16)$$

Las incertidumbres involucradas son:

- La incertidumbre de la fuerza aplicada, que viene dada por la precisión instrumental del dinamómetro:

$$s(F) = 0,01 \text{ N} \quad (17)$$

- La incertidumbre del módulo del vector posición, que equivale al radio del disco. Este radio se obtuvo de forma indirecta, midiendo el diámetro del disco con la regla milimetrada que cuenta con una precisión instrumental de 1mm:

$$s(R) = \frac{s(d)}{2} = 0,0005 \text{ m} \quad (18)$$

La incertidumbre de los ángulos medidos viene dada por la precisión instrumental del disco:

$$s(\varphi) = 5^\circ = 0,087 \text{ rad} \quad (19)$$

Una vez conocida la constante  $D$  del resorte podemos proceder a estudiar el semiperíodo de rotación bajo el efecto de la fuerza recuperadora del resorte. Para ello, como hemos mencionado anteriormente, mediremos varios valores del semiperíodo empleando el detector fotoeléctrico para poder tener una mejor estimación de su valor. Una vez tengamos nuestro valor de referencia del semiperíodo podremos aplicar la Ec.14 para calcular el momento de inercia de cada cuerpo. En concreto la expresión empleada será:

$$I = D \left( \frac{T_{1/2}}{\pi} \right)^2 \quad (20)$$

A partir de propagación de incertidumbres podemos calcular la incertidumbre del momento de inercia experimental:

$$s(I) = \sqrt{\left( \frac{\partial I}{\partial D} \right)^2 s^2(D) + \left( \frac{\partial I}{\partial T_{1/2}} \right)^2 s^2(T_{1/2})} \quad (21)$$

$$s(I) = \sqrt{\left( \frac{T_{1/2}}{\pi} \right)^4 s^2(D) + \left( \frac{2T_{1/2}D}{\pi^2} \right)^2 s^2(T_{1/2})}$$

Las incertidumbres que participan en esta expresión son:

- La incertidumbre de la constante  $D$  del resorte, que la obtendremos a partir del ajuste por mínimos cuadrados mencionado anteriormente.
- La incertidumbre del semiperíodo de rotación, que viene dada por la precisión instrumental del detector fotoeléctrico:

$$s(T_{1/2}) = 0,001 \text{ s} \quad (22)$$

Una vez calculados los momentos de inercia experimentales de cada cuerpo debemos compararlos con el valor teórico, calculado a partir de la Ec.3 para cada figura concreta. Estos valores teóricos también cuentan con una incertidumbre asociada, pues se calculan en función de las dimensiones de la figura, medidas con la regla milimetrada, y de la masa, medida con la balanza. A continuación detallaremos cuál será la incertidumbre del momento de inercia de cada figura con la que trabajamos, calculadas a partir de propagación de incertidumbres:

- El momento de inercia del disco es  $\frac{MR^2}{2}$ , siendo  $M$  su masa y  $R$  su radio, por lo que el valor teórico con su incertidumbre es:

$$I_D = 0,004262 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_D) = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial M}\right)^2 s^2(M) + \left(\frac{\partial I_D}{\partial R}\right)^2 s^2(R)} \quad (23)$$

$$s(I_D) = \sqrt{\left(\frac{R^2}{2}\right)^2 s^2(M) + (MR)^2 s^2(R)} = 0,000074 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- El momento de inercia del cilindro tiene la misma ecuación ( $\frac{MR^2}{2}$ ), por lo que aplicando la ecuación anterior con las dimensiones del cilindro obtenemos su momento de inercia con la incertidumbre asociada:

$$I_C = 0,00048036 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_C) = 0,00000025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (24)$$

- El último cuerpo con el que trabajamos en esta parte de la práctica fue la esfera, cuyo momento de inercia es  $\frac{2MR^2}{5}$ , por lo que el valor teórico con su incertidumbre asociada es de:

$$I_E = 0,000726 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$s(I_E) = \sqrt{\left(\frac{2R^2}{5}\right)^2 s^2(M) + \left(\frac{4MR}{5}\right)^2 s^2(R)} = 0,000045 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (25)$$



## 2.2. Verificación del teorema de Steiner

En esta segunda parte de la práctica trataremos de verificar el teorema de Steiner (Ec.11). Para ello estudiaremos el momento de inercia respecto a varios ejes de dos cuerpos, el disco perforado y la varilla metálico. El disco perforado era el del apartado anterior, por lo que sus dimensiones son las mismas. La barra metálica tiene un longitud de 65,7 cm de longitud y una masa de 0,14410 kg.

Para verificar la igualdad del teorema vamos a realizar una regresión lineal de  $I$  frente a  $d^2$ , la pendiente de esa recta será la masa  $m$  del cuerpo y el término independiente será  $I_0$ . Para ello mediremos diez valores del semiperíodo (Para calcular  $I$ ) con los cuerpos rotando alrededor de varios ejes. En primer lugar mediremos 10 semiperíodos con el cuerpo rotando sobre el eje por el que pasa por el centro de masas para calcular  $I_0$ . Luego realizaremos este mismo procedimiento con el cuerpo rotando sobre ejes situados a una distancia  $d$  del eje paralelo que pasa por el centro de masas.

En el caso del disco perforado tomaremos 4 conjuntos de medidas, fijando el disco sobre cada una de las perforaciones, que se sitúan a distancias de 3, 6, 9 y 12 cm del centro de masas respectivamente, como se puede ver en la siguiente figura.



Figura 2: Montaje experimental para verificar el teorema de Steiner con el disco

En el caso de la varilla tomaremos 10 conjuntos de medidas, fijando la varilla sobre cada una de las perforaciones transversales con las que cuenta la varilla, situadas a 1 cm la una de la otra. Por tanto las distancias irán de 1 a 10 cm, aumentando de uno en uno. Cabe destacar que en esta parte

de la práctica solo pudimos tomar 5 medidas del semiperíodo para cada valor de distancia por problemas técnicos. El problema observado fue que los valores medidos de los semiperíodos no resultaban nada fiables, oscilaban con frecuencia y en muchos momentos perdían la linealidad, por lo que es posible que los resultados en esta parte de la práctica no sean los esperados.

### 3. Análisis de datos

#### 3.1. Determinación del momento de inercia de diferentes cuerpos

En la siguiente tabla podemos ver representadas las medidas tomadas en el laboratorio de los ángulo de rotación del disco y las fuerzas, con sus momentos asociados (Teniendo en cuenta que el radio del disco es  $14,95\text{ cm}$ ), necesarias para producir esas rotaciones:

Medida	$F\text{ (N)}$	$\varphi\text{ (}^\circ\text{)}$	$\varphi\text{ (rad)}$	$M\text{ (N} \cdot \text{m)}$	$s(M)\text{ (N} \cdot \text{m)}$
1	0,19	90	1,571	0,0284	0,0015
2	0,23	100	1,745	0,0344	0,0015
3	0,24	105	1,833	0,0359	0,0015
4	0,25	115	2,007	0,0374	0,0015
5	0,27	120	2,094	0,0404	0,0015
6	0,29	130	2,269	0,0434	0,0015
7	0,31	145	2,531	0,0463	0,0015
8	0,33	160	2,793	0,0493	0,0015
9	0,34	165	2,880	0,0508	0,0015
10	0,4	180	3,142	0,0598	0,0015

Tabla 1: Datos empleados para calcular la constante del resorte

A partir de estos datos vamos a realizar una regresión lineal simple por el método de los mínimos cuadrados para ajustar  $M$  frente a  $\varphi$ , donde la pendiente de esa recta será la constante  $D$  del muelle. Cabe destacar que en la Ec.6 aparece el signo menos porque  $M$  actúa como el momento de una fuerza recuperadora, pero nosotros ajustaremos nuestros valores a la recta  $M = D\varphi$ . Los datos obtenidos a partir del ajuste son:

$$\begin{aligned}
b &= 0,01857 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \\
s(b) &= 0,00024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \\
r &= 0,9992 \\
s &= 0,0017
\end{aligned} \tag{26}$$

Por tanto el valor de la constante  $D$  del resorte es:

$$D = 0,01857 \pm 0,00024 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \tag{27}$$

Una vez realizado este cálculo podemos empezar a determinar los diversos momentos de inercia.

### 3.2. Determinación de los momentos de inercia de diferentes cuerpos

Para determinar el momento de inercia de diferentes los diferentes cuerpos a estudiar aplicaremos la Ec.20. Para ello necesitaremos conocer el semiperíodo de oscilación de los diferentes cuerpos, que estimaremos a partir de un conjunto de 15 medidas, para tener más fiabilidad.

#### 3.2.1. Disco

En la siguiente tabla podemos ver las 15 medidas del semiperíodo del disco:

Medida	$T_{1/2}$ (s)	Medida	$T_{1/2}$ (s)	Medida	$T_{1/2}$ (s)
1	1,429	6	1,445	11	1,417
2	1,441	7	1,441	12	1,415
3	1,446	8	1,431	13	1,406
4	1,449	9	1,425	14	1,406
5	1,446	10	1,424	15	1,428

Tabla 2: Datos de los semiperíodos del disco

Para determinar un valor de referencia para el semiperíodo vamos a realizar un tratamiento estadístico a los datos que nos permitirá escoger un valor fiable. En primer lugar calcularemos la media y la desviación típica de la muestra:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{1/2} &= 1,4299 \text{ s} \\
s_A(T_{1/2}) &= 0,014 \text{ s}
\end{aligned} \tag{28}$$

A partir de estos datos estableceremos un intervalo de confianza centrado en el valor medio para evaluar los posibles valores discordantes a eliminar. Este intervalo vendrá dado por la siguiente expresión:  $\bar{T}_{1/2} \pm k \cdot s_A(T_{1/2})$ . Donde  $k$  es el factor de cobertura, que con  $k = 2$  nos dará una confianza del 95 %. En nuestro caso el intervalo será:

$$1,4019 \text{ s} \leq x_i \leq 1,4579 \text{ s} \quad (29)$$

Como podemos ver, todos los datos entran en nuestro intervalo por lo que no necesitamos eliminar ninguno. El siguiente paso será calcular la desviación típica de la media, así como la incertidumbre combinada:

$$\begin{aligned} s_A(\bar{T}_{1/2}) &= 0,0036 \text{ s} \\ s_C(\bar{T}_{1/2}) &= 0,0037 \text{ s} \end{aligned} \quad (30)$$

Por tanto nuestro valor final de referencia del semiperíodo y su incertidumbre es:

$$T_{1/2} = 1,4299 \pm 0,0037 \text{ s} \quad (31)$$

Si aplicamos la Ec.20 para calcular el valor del momento de inercia y la Ec.21 para calcular su incertidumbre obtenemos:

$$I_D = 0,003847 \pm 4,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (32)$$

Comparando este valor con el teórico, de  $0,004262 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  podemos ver que, aunque no entra en el rango de incertidumbre, el resultado se acerca bastante a lo esperado.

### 3.2.2. Cilindro

## 4. Conclusiones