Resolución de ecuacións diferenciais de segunda orde mediante series de potencias arredor de puntos ordinarios. Polinomios de Legendre

Xesús Prieto Blanco

Índice

1. Introdución

Neste tema aplicaremos o método das series de potencias á ecuación de Legendre, como exemplo de resolución dunha ecuación diferencial de segunda orde arredor dun punto ordinario, o cal definimos decontado.

2. Puntos ordinarios e singulares

Consideremos a ecuación diferencial de segunda orde:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

Definición

Diremos que $x = x_0$ é un **punto ordinario** da ecuación diferencial (1) se as funcións $P(x)$ e $Q(x)$ son analíticas nese punto.

Un punto non ordinario denomínase **punto singular**.

Teorema

Sexa x_0 un punto ordinario de (1), e sexan a_0 e a_1 dúas constantes arbitrarias. Existe unha única función analítica en $x = x_0$ que é solución da ecuación diferencial nun certo entorno de x_0 e que verifica as condicións iniciais $y(x_0) = a_0$ e $y'(x_0) = a_1$.

Ademais, se os desenvolvementos en serie de $P(x)$ e $Q(x)$ son válidos nun intervalo $0 < |x - x_0| < R$, entón o desenvolvemento da solución tamén é válido (polo menos) no mesmo intervalo.

3. Ecuación e funcións de Legendre

Estudemos a ecuación (denominada de Legendre) seguinte:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0 \qquad p \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

que tamén se pode escribir:

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{p(p + 1)}{1 - x^2}y = 0. \tag{3}$$

Como as funcións:

$$P(x) = -\frac{2x}{1 - x^2} \quad \text{e} \quad Q(x) = \frac{p(p + 1)}{1 - x^2}$$

son analíticas en $x = 0$ con $R = 1$, ten que existir unha solución xeral da forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Entón podemos calcular os restantes termos que aparecen na ecuación (2) que substituiremos polas expresións da columna dereita das seguintes liñas:

$$\begin{array}{rlcrl}
y' = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} & \Rightarrow & -2xy' = & -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n \\
\Downarrow & & & & \\
y'' = & \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} & \Rightarrow & y'' = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \\
\Downarrow & & & & \\
-x^2y'' = & -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n & \Rightarrow & -x^2y'' = & -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n
\end{array}$$

Obsérvese que o paso na segunda das liñas anteriores se obtén definindo un índice provisional $\hat{n} = n-2$ que varía dende cero ata infinito e despois cambiando $\hat{n} \to n$, o cal é lícito por ser unha variable muda (só está definida dentro do sumatorio). Por outra banda, na última liña puidemos estender o comezo da suma incluíndo $n = 0$ e $n = 1$ posto que eses dous primeiros termos son nulos. Os dous obxectivos destas transformacións son: que todas as sumas comecen no mesmo valor do índice e que todas conteñan a mesma potencia de x. Isto vai permitir agrupalas trala xa anunciada substitución na ecuación diferencial (2):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n\right] x^n = 0.$$

A suma do primeiro membro da última ecuación pode interpretarse como a serie de Taylor arredor de $x = 0$ dunha determinada función. Pero a ecuación di que esa función é cero, polo que cada un dos coeficientes da serie ten que anularse independentemente:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[-n(n+1) + p(p+1)\right] a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \Rightarrow$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (p-n)(p+n+1)a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Despexando a_{n+2} obtemos a **relación de recorrencia** seguinte:

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{4}$$

Do cal deducimos que os valores de a_n con n par dependen de a_0:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} a_0 \\
a_4 &= -\frac{(p-2)(p+2+1)}{3 \cdot 4} a_2 &&= \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!} a_0 \\
a_6 &= -\frac{(p-4)(p+4+1)}{5 \cdot 6} a_4 &&= -\frac{(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} a_0 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

mentres que os correspondentes a n impar dependen de a_1:

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{(p-1)(p+2)}{2 \cdot 3} a_1 \\
a_5 &= -\frac{(p-3)(p+3+1)}{4 \cdot 5} a_3 &&= \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!} a_1 \\
a_7 &= -\frac{(p-5)(p+5+1)}{6 \cdot 7} a_5 &&= -\frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} a_1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Polo tanto as dúas solucións linealmente independentes son:

$$y_1 = 1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \frac{(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots$$

$$y_2 = x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7 + \cdots$$

Estas solucións denomínanse **funcións de Legendre**.

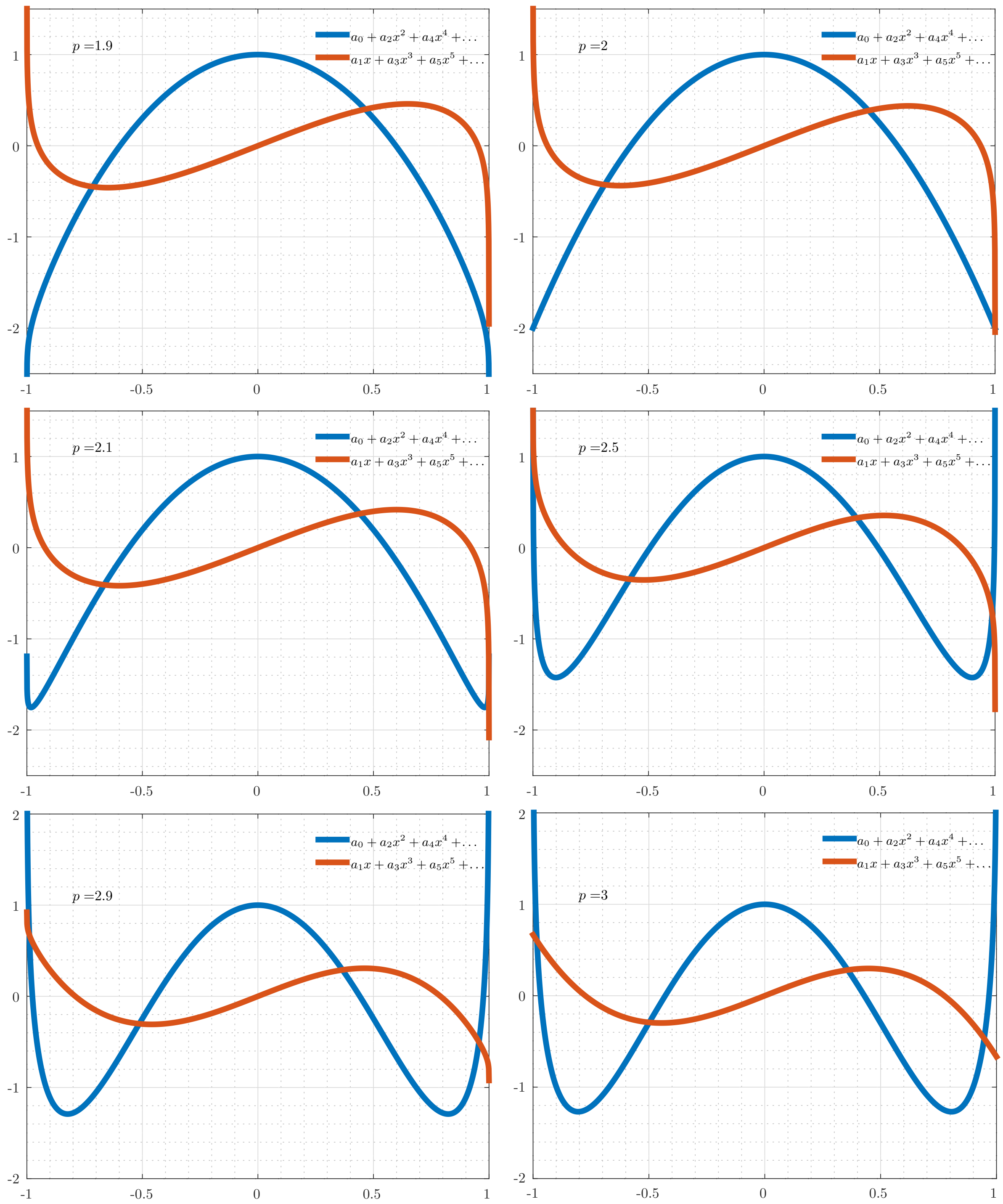

Figura 1: Aproximación ás funcións de Legendre considerando os seus primeiros 10000 termos non nulos para diversos valores de p. Obsérvense as diferencias sutís entre as funcións para un valor enteiro de p (unha delas trúncase) e para un valor próximo. Neste último caso non se trunca ningunha, pero as asíntotas dunha das funcións en $x = \pm 1$ non se aprecian tan claramente como na outra debido ás limitacións numéricas no cálculo da serie.

3.1. Converxencia

Se $p \in \mathbb{Z}$, unha das series córtase, convertÃ©ndose nun polinomio. En concreto, se p é par e positivo, ou impar e negativo, queda truncada a serie de y_1; mentres que se p é impar e positivo ou par e negativo, trúncase y_2. Obviamente, a serie que queda truncada converxe $\forall x$.

Pola contra, se $p \notin \mathbb{Z}$, podemos determinar a converxencia aplicando o criterio do cociente a dous termos consecutivos da serie que estudemos. Por exemplo, para y_1 temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \right| = x^2$$

E polo tanto a serie converxe se:

$$L < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

A demostración para y_2 é análoga.

4. Polinomios de Legendre

Retomemos o caso $p = L = 0, 1, 2, ...$ e consideremos soamente as series que quedan truncadas. Ademais, no canto de usar as funcións y_1 e y_2, soen multiplicarse por unha constante de xeito que o coeficiente que acompaña á potencia máis alta sexa:

$$a_L = \frac{(2L)!}{2^L (L!)^2} = \frac{(2L-1)(2L-3)(2L-5)\cdots \quad 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{L!}$$

As novas funcións así construídas denomínanse **polinomios de Legendre** e quedan da forma:

$$P_L(x) = \sum_{k=0}^{[L/2]} \frac{(-1)^k (2L-2k)!}{2^L k!(L-k)!(L-2k)!} x^{L-2k},$$

onde $[L/2]$ é o maior enteiro menor ou igual a $L/2$:

$$[L/2] = \begin{cases} L/2 & \text{se } L \text{ par} \\ (L-1)/2 & \text{se } L \text{ impar} \end{cases}$$

4.1. Fórmula de Rodrigues

O cálculo dos polinomios de Legendre tamén se pode facer en base á **fórmula de Rodrigues**:

$$P_L(x) = \frac{1}{2^L L!} \frac{\mathrm{d}^L}{\mathrm{d}x^L} \left[(x^2-1)^L \right], \qquad L \in \mathbb{N}_0$$

que aplicada ós primeiros valores de L, conduce ós seguintes polinomios:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= \frac{1}{2\cdot 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2-1\right] = \frac{1}{2}2x = x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2^2\cdot 2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[(x^2-1)^2\right] = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[x^4-2x^2+1\right] = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^3-4x\right] = \frac{3x^2-1}{2}\\
P_3(x) &= \frac{1}{2^3\cdot 3!}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[(x^2-1)^3\right] = \frac{1}{8\cdot 6}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[x^6-3x^4+3x^2-1\right] =\\
&= \frac{6\cdot 5\cdot 4x^3-3\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}{8\cdot 6} = \frac{5x^3-3x}{2}\\
P_4(x) &= \frac{1}{2^4\cdot 4!}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\left[(x^2-1)^4\right] = \frac{1}{16\cdot 24}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\left[x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1\right] =\\
&= \frac{35x^4-30x^2+3}{8}\\
P_5(x) &= \frac{1}{2^5\cdot 5!}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}\left[(x^2-1)^5\right] = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

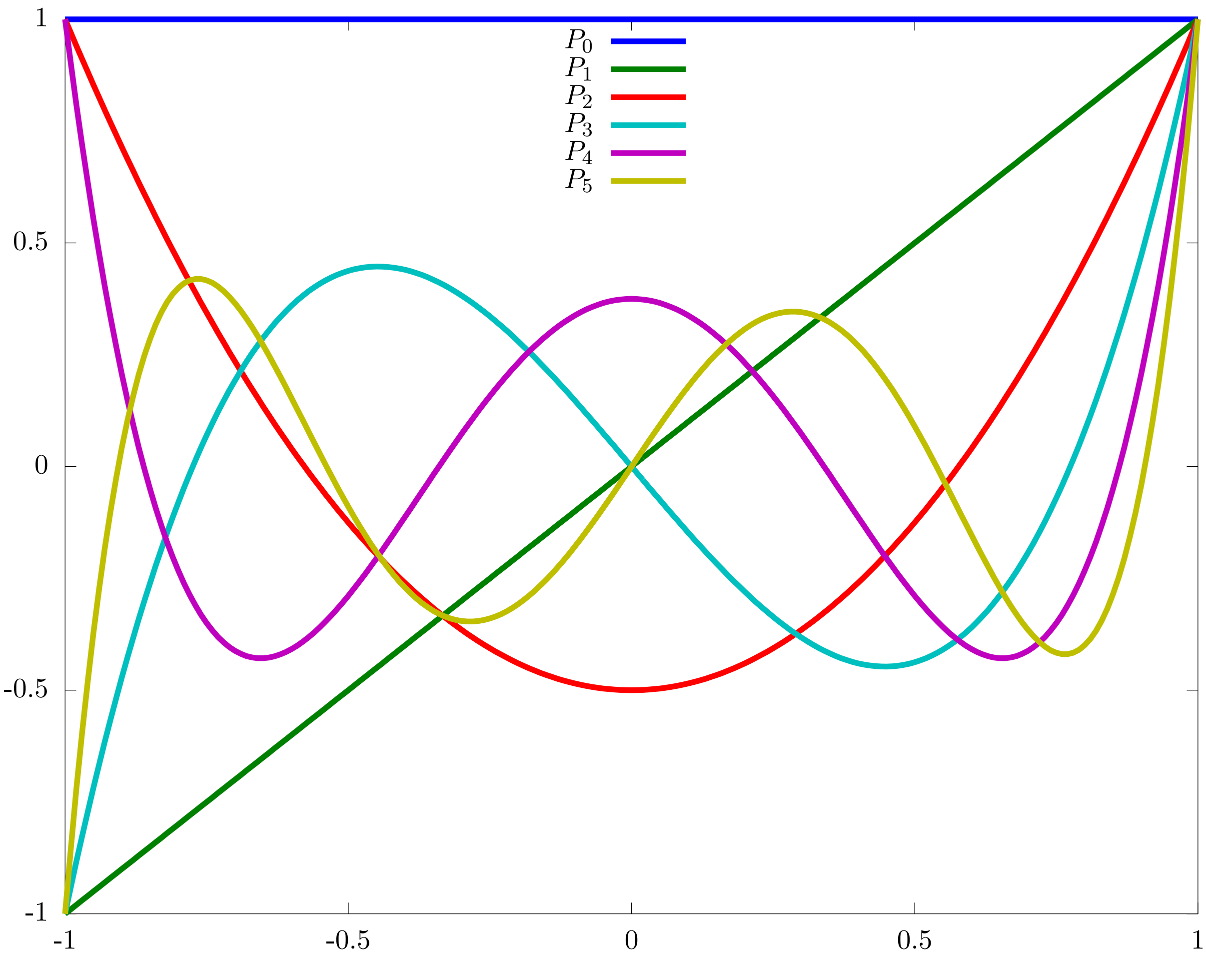

Figura 2: Primeiros 6 (P_0 a P_5) polinomios de Legendre

4.2. Algunhas propiedades

Os polinomios de Legendre:

- verifican $P_L(1) = 1$ e $P_L(-1) = (-1)^L$,
- son ortogonais: $\int_{-1}^{1} P_L(x)P_{L'}(x)\mathrm{d}x = 0$ se $L \neq L'$

4.3. Aplicacións

Os polinomios de Legendre soen xurdir en problemas con simetría esférica, nos que o argumento do polinomio é o coseno do ángulo cenital $P_L(\cos\theta)$. En concreto aparecen:

- na función de onda do electrón do átomo de hidróxeno ou outros potenciais centrais (orbitais s, p e d corresponden a P_0, P_1 e P_2 respectivamente);
- no campo electrostático creado por unha distribución de carga localizada;
- absorción ou emisión dipolar (P_1) ou cuadripolar (P_2) de luz ou radiación electromagnética: antenas.
- no campo gravitatorio...