Resolución de ecuacións diferenciais de primeira orde mediante series de potencias. A función Gamma

Xesús Prieto Blanco

Índice

1. Introdución

Moitas ecuacións diferenciais non se poden resolver como combinación de funcións elementais (polinomios, funcións racionais, trigonométricas, logaritmos, ou as súas inversas). Nestes casos resulta útil poder expresar as solucións como series de potencias. Por ese motivo comezaremos revisando algúns resultados básicos sobre series, para aplicalos ás series de potencias. A continuación resolveremos un par de ecuacións lineais simples para ilustrar esta técnica. Por último estudaremos a función especial Gamma, a cal xorde con frecuencia ó resolver as ecuacións diferenciais mediante series.

2. Criterios de converxencia de series

Consideremos a seguinte serie (suma infinita):

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

Dise que converxe se existe o seguinte límite:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$$

Unha condición necesaria para que a serie converxa é que:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Pero esta condición non abonda para asegurar a converxencia. En moitos casos a converxencia pode determinarse mediante o criterio do cociente ou o criterio da raíz.

O **criterio do cociente** baséase no cálculo do seguinte límite L:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

e establece que se existe L poden darse os seguintes casos:

- se $L < 1$, a serie converxe, e
- se $L > 1$, a serie diverxe; pero
- se $L = 1$, o criterio non decide.

Por outra banda, para aplicar o **criterio da raíz** debemos calcular:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$$

e de xeito análogo:

- se $\rho < 1$, a serie converxe, e
- se $\rho > 1$, a serie diverxe; pero
- se $\rho = 1$, o criterio non decide.

3. Series de potencias

Unha serie de potencias en $x - x_0$ é unha suma infinita da forma[1]:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Cando $x = x_0$ esta serie converxe e a suma vale a_0, pero a serie pode diverxer para outros valores de x. En moitas ocasións podemos sabelo aplicando o criterio do cociente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se existe L, o seu valor depende de $|x-x_0|$; polo tanto a serie é converxente ($L < 1$) se:

$$|x-x_0| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \equiv R$$

[1]Estritamente o primeiro sumando do último sumatorio non se podería avaliar en $x = x_0$ xa que obteríamos 0^0. Así a todo usaremos esa notación por compacidade entendendo no sucesivo que ó expandir o sumatorio, o primeiro termo debe ser a_0 e non $a_0(x-x_0)^0$.

onde R se denomina radio de converxencia. De xeito análogo a serie diverxe se $|x-x_0| > R$. Xusto en $x = x_0 \pm R$ a serie pode ser converxente ou non. Obsérvese que se como resultado do límite anterior $R = \infty$, a serie converxe $\forall x$; mentres que se $R = 0$ a serie diverxe $\forall x \neq x_0$.

Aplicando o criterio da raíz tamén podemos obter un radio de converxencia:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Independentemente de que existan os límites dos criterios anteriores, sempre existe un radio de converxencia R, con $0 \leq R \leq \infty$, entendendo a última igualdade como unha convención que significa que a serie converxe $\forall x$.

Exemplos: $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3.1. Algunhas propiedades

Supoñamos dúas series que denominaremos $f(x)$ e $g(x)$ con radio de converxencia $R > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Entón:

- **Definición:** $f(x)$ é **analítica** en x_0.
- $f(x) + g(x)$ pode calcularse sumando termo a termo as dúas series.
- $f(x)g(x)$ pode calcularse coma se as series fosen polinomios:

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right) \\
&= \big(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots\big) \cdot \big(b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots\big) \\
&= \begin{array}{lllll}
a_0b_0 & +a_0b_1(x-x_0) & +a_0b_2(x-x_0)^2 & +a_0b_3(x-x_0)^3 & +\cdots \\
 & +a_1b_0(x-x_0) & +a_1b_1(x-x_0)^2 & +a_1b_2(x-x_0)^3 & +\cdots \\
 & & +a_2b_0(x-x_0)^2 & +a_2b_1(x-x_0)^3 & +\cdots \\
 & & & +a_3b_0(x-x_0)^3 & +\cdots \\
 & & & & +\cdots
\end{array} \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-x_0)^2 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \qquad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k
\end{aligned}$$

- $f(x)$ pode integrarse termo a termo no intervalo de converxencia.

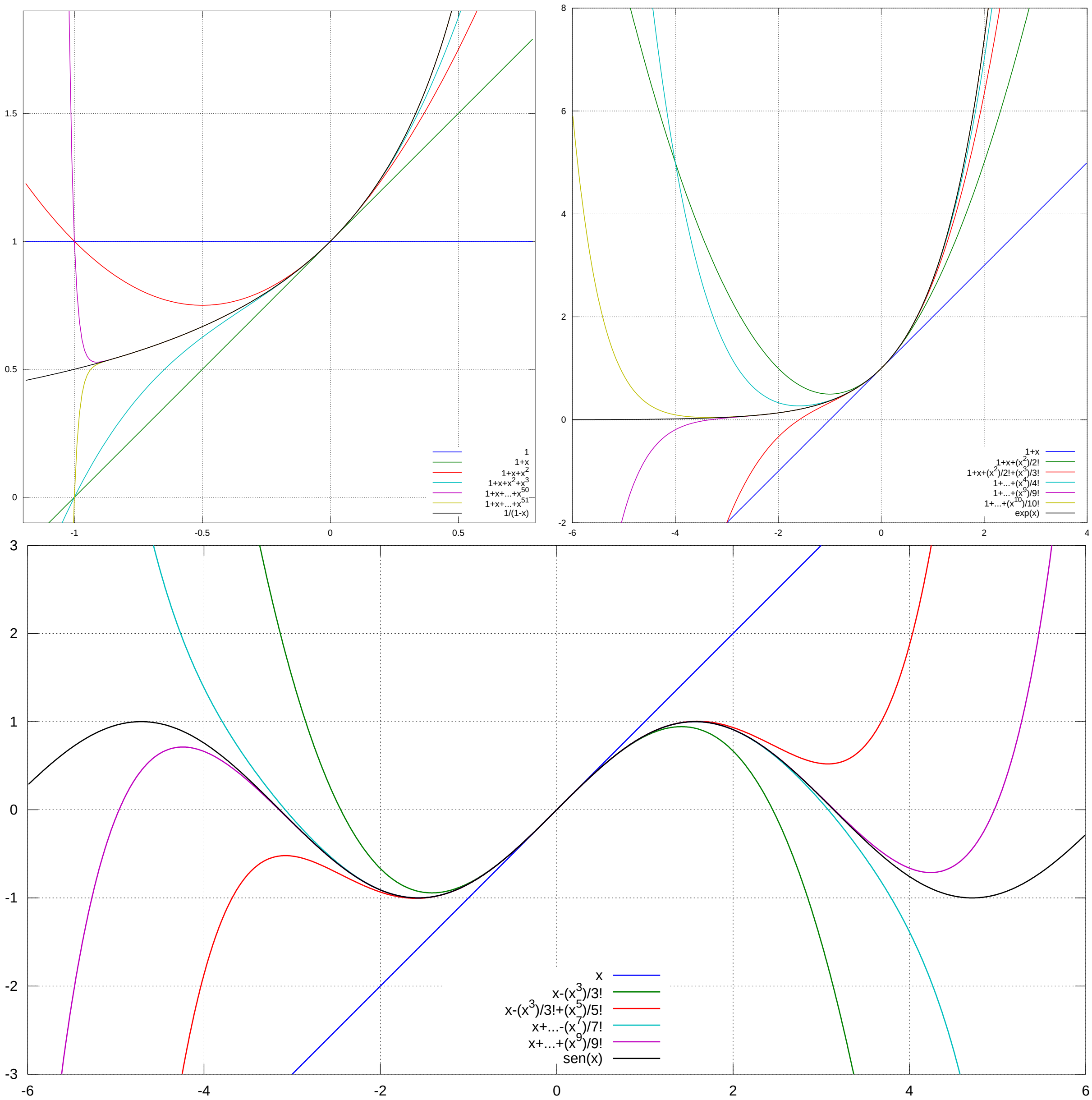


Figura 1: Algunhas funcións elementais e as súas aproximacións de Taylor. Arriba esquerda: función $(1-x)^{-1}$. Arriba dereita: función exponencial. Abaixo: función seno.

- $f(x)$ é continua e ten derivadas de tódalas ordes no intervalo $|x-x_0|<R$, que se poden calcular derivando termo a termo a serie:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \cdots$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + 4\cdot 3a_4(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x-x_0)^{n-3} = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0) + \cdots$$

Disto resulta que $f^{(n)}(x_0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, polo que a serie de potencias é a serie de Taylor no punto x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

A última propiedade suxire a posibilidade de expresar dunha función coñecida como unha serie de potencias. Sexa $h(x)$ unha función continua e con derivadas de tódalas ordes no intervalo $|x - x_0| < R$. O **teorema de Taylor** asegúranos que podemos expresar $h(x)$ como:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x)$$

onde o resto $R_N(x)$ é:

$$R_N(x) = \frac{h^{N+1}(\bar{x})}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1} \qquad \text{para algun } \bar{x} \in (x_0, x).$$

Pero o teorema de Taylor non asegura que a serie de potencias converxa en R. Poñamos como contra-exemplo a función:

$$h(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

que é continua e infinitamente derivable en $\mathbb{R}$, pero a súa serie de Taylor en 0 só converxe en $-1 < x < 1$ (ver Fig. 2).

Volvendo ó caso xeral, se no punto x se verifica que:

$$\lim_{N \to \infty} R_N(x) = 0,$$

entón $h(x)$ pode expresarse como unha serie de potencias.

4. A ecuación $y' = y$

Para ilustrar este método de solución aplicarémolo á ecuación diferencial $y' = y$ que ten como solución: $y = Ce^x$ sendo C unha constante. Obteremos a mesma solución a partir da súa serie de potencias. Para iso escribamos:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

Para que se verifique a ecuación diferencial $y' = y$ debemos igualar os coeficientes de igual potencia das series de y e de y', o que nos conduce á seguinte relación de recorrencia[2]:

$$a_n = a_{n+1}(n+1) \qquad \Rightarrow \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \qquad n = 0, 1, ...$$

[2]Relación que permite calcular cada coeficiente en función do anterior ou anteriores

Figura 2: Función Lorentziana e as súas aproximacións de Taylor a orde 2, 4, 6, 100 e 102.

En concreto:

$$n=0 \Rightarrow \quad a_1 = \frac{a_0}{1} = a_0; \qquad\qquad n=1 \Rightarrow \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2};$$
$$n=2 \Rightarrow \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3\cdot 2}; \qquad\qquad n=3 \Rightarrow \quad a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2} \qquad \ldots$$

En xeral, calquera termo desta serie se pode poñer en función do primeiro:

$$a_n = \frac{a_0}{n!},$$

relación que se pode demostrar por indución. Nótese que esta expresión (a diferencia da relación de recorrencia) permite obter cada coeficiente independentemente sen necesidade de coñecer os anteriores, o cal é necesario para escribir a serie da forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Unha vez obtida a serie, aínda debemos demostrar dalgunha maneira que a serie converxe. Neste caso concreto recoñecemos a serie da exponencial:

$$y = a_0 \mathrm{e}^x$$

5. Serie do binomio

O método de resolución en serie de potencias tamén serve para obter a serie de Taylor dunha función coñecida buscando unha ecuación diferencial que a función satisfaga. Por exemplo a función:

$$y = (1+x)^p \qquad \text{con} \quad p \in \mathbb{R}$$

satisfai a ecuación:

$$(1+x)y' = py \qquad \text{con} \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

Imos supoñer que esta ecuación diferencial admite unha solución en serie de potencias arredor de $x = 0$, o que nos permite calcular y' e $(1+x)y'$ como:

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \\
y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \\
(1+x)y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n a_n + (n+1) a_{n+1} \right] x^n .
\end{aligned}$$

Substituíndo na ecuación diferencial (1), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n a_n + (n+1) a_{n+1} \right] x^n = p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad n a_n + (n+1) a_{n+1} = p a_n \quad n = 0, 1, 2, ...$$

E despexando o coeficiente de maior subíndice da última expresión, chegamos á relación de recorrencia:

$$a_{n+1} = \frac{p-n}{n+1} a_n \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

mediante a cal calculamos os primeiros coeficientes da serie:

$$\begin{aligned}
n = 0 \Rightarrow \quad & a_1 = p a_0 \\
n = 1 \Rightarrow \quad & a_2 = \frac{p-1}{2} a_1 = \frac{p(p-1)}{2} a_0 \\
n = 2 \Rightarrow \quad & a_3 = \frac{p-2}{3} a_2 = \frac{p(p-1)(p-2)}{3 \cdot 2} a_0 \\
n = 3 \Rightarrow \quad & a_4 = \frac{p-3}{4} a_3 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0 \\
& ...
\end{aligned}$$

E en xeral:

$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} a_0$$

Como a ecuación diferencial (1) só ten unha solución con $y(0) = 1$, entón $a_0 = 1$, co cal a denominada **serie do binomio** queda:

$$\boxed{(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n} \tag{3}$$

Obsérvese que o coeficiente a_n contén n factores no numerador. Se $p \in \mathbb{N}$, o coeficiente a_{p+1} (e polo tanto tódolos seguintes) se cancela posto que contén no numerador o factor $p-(p+1)+1=0$. É dicir, a serie trúncase e queda reducida a un suma finita; ademais, mentres $p \geq n$:

$$p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!},$$

polo que podemos reescribir a serie como a suma:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n \qquad p \in \mathbb{N}$$

que é o binomio de Newton.

Queda por comprobar o radio de converxencia cando $p \notin \mathbb{N}$. Neste caso o radio de converxencia ven dado por:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ p\notin\mathbb{N}}}{=} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{p-n} \right| = 1$$

onde usamos a relación de recorrencia (2). Polo tanto, temos a seguridade de que se $p \notin \mathbb{N}$ a serie converxe cando $|x| < 1$ e diverxe se $|x| > 1$.

6. A función Gamma

A función Gamma proporciona unha xeneralización de $p!$ cando $p \notin \mathbb{N}$. Defínese $\Gamma(p)$ como:

$$\Gamma(p) \equiv \int_0^\infty t^{p-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \qquad 0 < p \in \mathbb{R}$$

Obsérvese que o límite superior da integral non supón un problema de definición xa que o integrando $t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}$ tende a cero moi rapidamente cando $t \to \infty$, e a integral converxe no seu límite superior $\forall p$. Por outra banda o integrando diverxe en $t = 0$ se $p < 1$; así e todo a integral segue converxendo para $p > 0$:

$$\int_0^1 t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < \int_0^1 t^{p-1}\mathrm{d}t = \left.\frac{t^p}{p}\right|_0^1 = \frac{1}{p}$$

A principal propiedade da función función Γ é:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{4}$$

Demostrémola integrando por partes:

$$\Gamma(p+1) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \underset{\substack{\left.\begin{array}{r} u=t^p \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \end{array}\right\}\uparrow}}{=} \lim_{b\to\infty} \left[-t^p\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^b + \int_0^b \mathrm{e}^{-t} p t^{p-1} \mathrm{d}t \right]$$

$$= p \int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = p\Gamma(p)$$

Para demostrar que a función Gamma xeneraliza o factorial, calculamos $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty = 1,$$

e aplicamos sucesivamente a propiedade (4) para Gamma no resto de valores naturais:

$$\begin{array}{lll} \Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1 & \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2 & \Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2 \\ \Gamma(5) = 4\,\Gamma(4) = 4\cdot 3\cdot 2 & \Gamma(6) = 5\,\Gamma(5) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 & \ldots \end{array}$$

Vemos que en xeral:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{se } n \in \mathbb{N}}$$

Calculemos agora $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ t=s^2}}{=} 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$$

Para obter a integral da gaussiana (a función e^{-s^2}), usaremos un método infrecuente consistente en converter o seu cadrado nunha integral dobre e resolver esta en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\right]^2 &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\rho^2}}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Polo tanto:

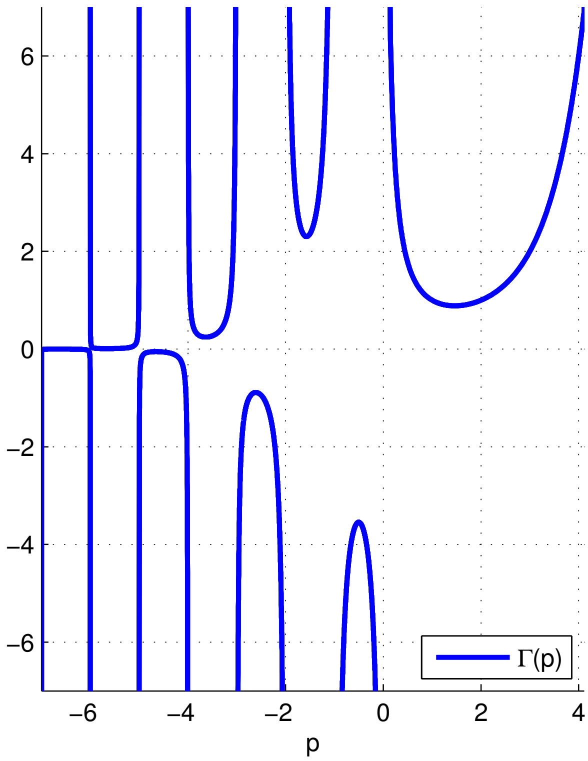
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

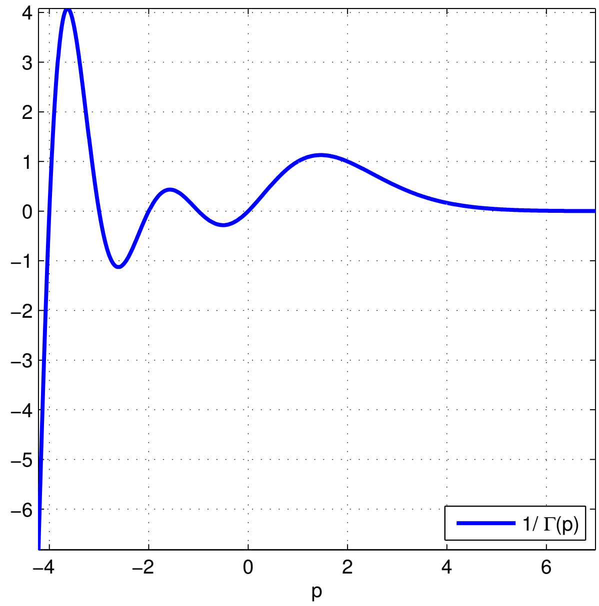
e entón:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \equiv \left(-\frac{1}{2}\right)!$$

A partir deste resultado e aplicando a propiedade (4) podemos calcular o valor da función Gamma en calquera valor semienteiro positivo posto que o podemos relacionar co valor da función no semienteiro anterior; por exemplo:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \equiv \frac{1}{2}! \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2^2} \equiv \frac{3}{2}! \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\cdot 3\sqrt{\pi}}{2^3} \equiv \frac{5}{2}! \\ &\vdots \end{aligned}$$





E se reescribimos (4) como:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}, \tag{5}$$

podemos *estender* a definición da función Gamma para semienteiros negativos calculando cada valor de Gamma a partir do semienteiro posterior:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{2^2}{3}\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2^3}{5\cdot 3}\sqrt{\pi} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Do mesmo xeito, podemos estender a definición da función Gamma ó intervalo (-1,0) a partir dos seus valores no intervalo (0,1). A continuación incorporamos tamén o intervalo (-2,-1) a partir do (-1,0) e así sucesivamente. Nótese que o cero non está incluído no dominio de definición de Gamma, xa que aí a función diverxe:

$$\lim_{p\to 0}\Gamma(p) = \lim_{p\to 0}\frac{\Gamma(p+1)}{p} = \lim_{p\to 0}\frac{1}{p} = \pm\infty.$$

En consecuencia a función tamén diverxe para todos os enteiros negativos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to-1}\Gamma(p) = \lim_{p\to-1}\frac{\Gamma(p+1)}{p} = \lim_{p\to-1}\frac{\Gamma(p+1)}{-1} = \pm\infty \\
&\lim_{p\to-2}\Gamma(p) = \lim_{p\to-2}\frac{\Gamma(p+1)}{p} = \lim_{p\to-2}\frac{\Gamma(p+1)}{-2} = \pm\infty \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por outra banda podemos relacionar a función Gamma de dous números que disten entre si un valor enteiro:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \\
&= p(p-1)\Gamma(p-1) \\
&= p(p-1)(p-2)\Gamma(p-2) \\
&= p(p-1)(p-2)\cdots(p+1-n)\Gamma(p+1-n),
\end{aligned}$$

de onde:

$$p(p-1)(p-2)\cdots(p+1-n) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-n)}.$$

Como o produto anterior aparece na serie do binomio (3), esta tamén se pode escribir como:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{n!\,\Gamma(p+1-n)}x^n \qquad \begin{cases}\text{se} \quad p = 0,1,2\ldots & \forall x \\ \text{se} \quad p \neq 0,1,2\ldots & |x|<1\end{cases}$$

Obsérvese que o rango de validez da expresión anterior esténdese $\forall x$ cando p é natural ou cero. Isto débese a que se $p > -1$ o numerador do termo xeral da serie non diverxe mentres que $\frac{1}{\Gamma(p+1-n)}$ se cancela cando $p+1-n$ é cero ou enteiro negativo, o cal ocorre cando $p \in \mathbb{Z}$ e n é grande abondo. Dito doutro xeito, se $p = 0, 1, 2\ldots$ a serie trúncase e convértese nun polinomio de x (o binomio de Newton), que obviamente está definido para calquera valor de x. Se p é un enteiro negativo seguimos tendo unha serie infinita, posto que nese caso o numerador tamén diverxe ó mesmo tempo que o denominador.