Puntos singulares regulares e irregulares. Serie de Frobenius. Ecuación de Bessel

Xesús Prieto Blanco

Índice

1. Introdución

Lembremos que unha ecuación de Euler de segunda orde é da forma:

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

sendo $p, q \in \mathbb{R}$ constantes. Esta ecuación pode reescribirse da forma:

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0.$$

Obsérvese que $x = 0$ **non** é un punto ordinario da ecuación diferencial xa que as funcións:

$$P(x) = \frac{p}{x} \qquad \text{e} \qquad Q(x) = \frac{q}{x^2}$$

non son analíticas en $x = 0$. En consecuencia non podemos aplicar o teorema visto anteriormente que nos aseguraría a existencia dun desenvolvemento en serie da solución arredor de $x = 0$. En efecto, sabemos que existen solucións da forma:

$$y = x^m,$$

as cales non son infinitamente derivables salvo que $m \in \mathbb{N}$:

$$y^{k)} = m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}.$$

Nótese que $y^{k)}$ diverxe en $x = 0$ se $k > m$ e ningunha das constantes multiplicativas se anula.

Ó igual que a ecuación de Euler admite solucións (en xeral non analíticas), podemos buscar solucións semellantes en ecuacións máis xerais. Consideremos:

$$y'' + \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots}{x} y' + \frac{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots}{x^2} y = 0;$$

para valores de x moi pequenos os numeradores da ecuación anterior estarán dominados polos termos constantes p_0 e q_0. Polo tanto é esperable que a solución se aproxime moito á forma x^m nas proximidades de $x = 0$, como nunha ecuación de Euler. Veremos que, cando $P(x)$ e $Q(x)$ *non se comportan peor* que $1/x$ e $1/x^2$ respectivamente, existen solucións do tipo:

$$y = x^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad m \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

que se denominan **series de Frobenius**.

2. Puntos singulares regulares

2.1. Definición

Sexa $x = x_0$ un punto singular da ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

Dise que x_0 é un punto **singular regular** da ecuación diferencial se as funcións $(x - x_0)P(x)$ e $(x-x_0)^2 Q(x)$ son analíticas en $x = x_0$. Se algunha destas funcións non é analítica, dise que x_0 é un punto **singular irregular**.

2.2. Estudo dun punto singular regular

Sexa $x = 0$ é un punto singular regular da ecuación (2). Polo tanto:

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{e} \qquad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad \text{con} \qquad |x| < R.$$

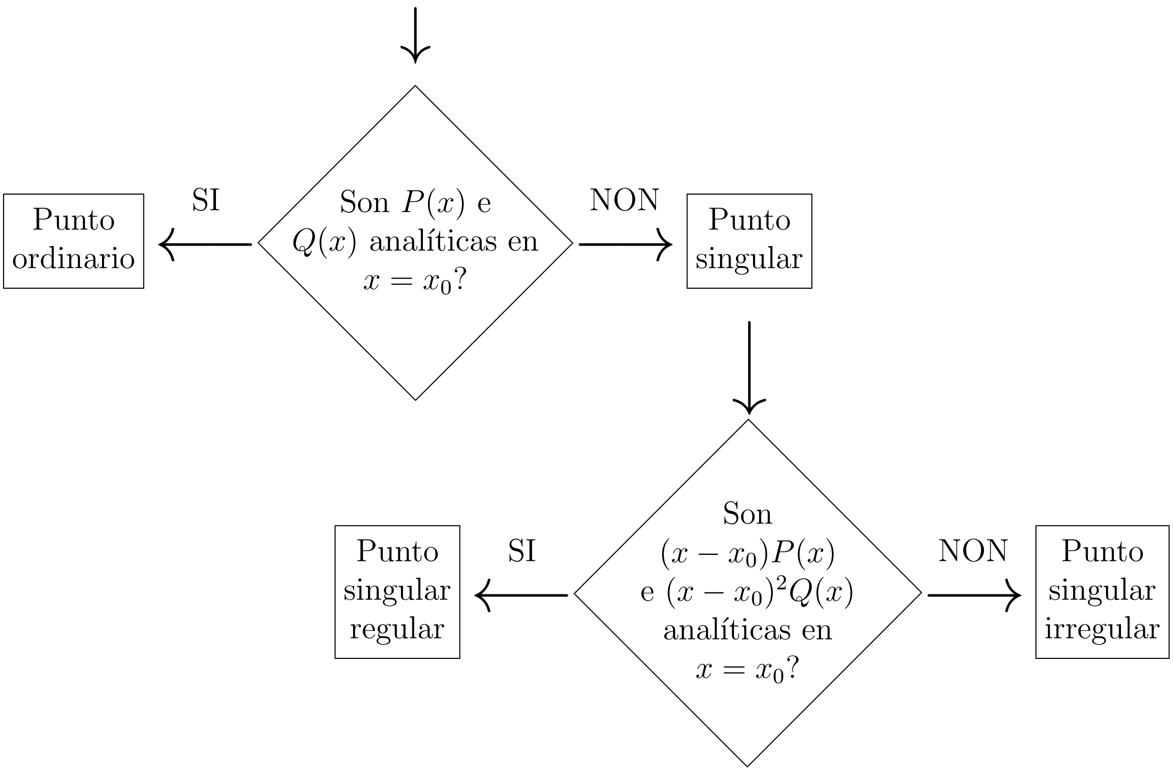

Figura 1: Diagrama de clasificación dos tipos de puntos da ecuación diferencial (2)

Supoñamos unha solución en **serie de Frobenius** con $a_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
y &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \Rightarrow \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1} \Rightarrow \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n-2} = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^n .
\end{aligned}$$

Agora debemos expresar $Q(x)y$ e $P(x)y'$ como unha serie de Taylor para despois substituír os resultados na ecuación (2). O Cadro 1 axuda a entender o reagrupamento de sumandos do segundo paso do cálculo de $Q(x)y$ seguinte:

$$\begin{aligned}
Q(x)y &= \frac{1}{x^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] x^m \\
&= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} \, a_k \right] x^n
\end{aligned}$$

Analogamente:

Cadro 1: Para converter un produto de series de Taylor nunha única serie, escribimos tódolos termos nunha táboa e agrupamos as diagonais coa mesma potencia de x. Por exemplo, os termos proporcionais a x^3 serán: $(q_3a_0+q_2a_1+q_1a_2+q_0a_3)x^3 = \sum_{k=0}^{3} q_{3-k}a_kx^3$.

$\cdot$	a_0	$+\ a_1x$	$+\ a_2x^2$	$+\ a_3x^3$	$+\ \cdots$	$=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$
q_0	q_0a_0	$+\ q_0a_1x$	$+\ q_0a_2x^2$	$+\ q_0a_3x^3$	$+\ \cdots$	
$+q_1x$	$+q_1a_0x$	$+\ q_1a_1x^2$	$+\ q_1a_2x^3$	$+$		
$+q_2x^2$	$+q_2a_0x^2$	$+\ q_2a_1x^3$	$+$			
$+q_3x^3$	$+q_3a_0x^3$	$+$				
$\vdots$	$\vdots$	$+$				
$=\sum_{n=0}^{\infty} q_nx^n$						

$$
\begin{aligned}
P(x)y' &= \frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_nx^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_nx^{m+n-1}\right] \\
&= x^{m-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_nx^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_nx^{n}\right] \\
&= x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\ (m+k)\ a_k\right]x^n
\end{aligned}
$$

Agora facemos a substitución que anunciábamos, sacamos factor común x^{m-2} e unimos os sumatorios con índice n:

$$
x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(m+n)(m+n-1)a_nx^n + \left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(m+k)a_k\right]x^n + \left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}a_k\right]x^n\right\} = 0.
$$

Dentro do sumatorio sacamos factor común x^n e agrupamos os sumatorios interiores:

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(m+n)(m+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]a_k\right\}x^n = 0.
$$

A expresión anterior ten a forma dunha serie de Taylor igualada a cero. A serie de Taylor da función cero ten tódolos seus termos nulos, polo que se debe anular o coeficiente que multiplica a cada x^n (entre chaves) da expresión anterior:

$$
(m+n)(m+n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}\ (m+k)+q_{n-k}\right]a_k = 0 \quad n = 0,1,2,... \tag{3}
$$

En concreto para $n=0$, (e considerando que buscamos $a_0 \neq 0$) esta condición redúcese a denominada **ecuación indicial**:

$$
m\,(m-1) + mp_0 + q_0 = 0 \ \Rightarrow\ m^2 + m\,(p_0-1) + q_0 = 0, \tag{4}
$$

que é similar á ecuación característica da ecuación de Euler, e ten dúas solucións m_1 e m_2 con $m_1 \geq m_2$.

Para outros valores de n, a ecuación (3) relaciona valores de diferentes coeficientes a_n. Por exemplo para $n = 1$, obtemos unha ecuación que relaciona a_1 con a_0:

$$(m+1)ma_1 + [p_1 m + q_1]a_0 + [p_0(m+1) + q_0]a_1 = 0, \Rightarrow$$
$$[(m+1)(m+p_0) + q_0]\, a_1 = -[p_1 m + q_1]a_0,$$

e permite obter a_1 en función de a_0 se $(m+1)(m+p_0) + q_0 \neq 0$. Para $n = 2$, obtemos outra ecuación que relaciona a_2 con a_1 e a_0, e así sucesivamente. En xeral para $n > 0$ obtemos unha ecuación que relaciona cada coeficiente a_n con tódolos anteriores mediante unha **ecuación de recorrencia** obtida de (3) sacando o último termo do sumatorio:

$$[(m+n)(m+n-1) + (m+n)p_0 + q_0]\, a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}\ (m+k) + q_{n-k}]\, a_k = 0 \quad n = 1, 2, ... \tag{5}$$

Así a todo, para poder obter un a_n en función dos anteriores, o coeficiente polo que está multiplicado non se pode anular. Para estudar se isto ocorre ou non, definamos a función:

$$f(m) = m(m-1) + mp_0 + q_0$$

Agora escribamos a relación de recorrencia (5) para os primeiros valores de n usando esta definición:

$$\begin{aligned}
&f(m+1)\ a_1 + (p_1 m + q_1)a_0 = 0\\
&f(m+2)\ a_2 + (p_2 m + q_2)a_0 + [p_1(m+1) + q_1]a_1 = 0\\
&f(m+3)\ a_3 + (p_3 m + q_3)a_0 + [p_2(m+1) + q_2]a_1 + [p_1(m+2) + q_1]a_2 = 0\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

É dicir o coeficiente de a_n é $f(m+n)$. Pero m debe ser m_1 ou m_2: un dos ceros de f. Se tomamos para m a maior das dúas raíces (m_1), entón $f(m_1 + n)$ nunca se anula posto que $n > 0$. Isto asegúranos a obtención dunha das dúas solucións da ecuación diferencial. Con respecto a m_2, hai tres situacións posibles:

- Se $m_1 = m_2$ a segunda solución non se pode expresar como serie de Frobenius.
- Se $m_1 - m_2 = L \in \mathbb{N}^+$, $f(m_2 + L) = f(m_2 + m_1 - m_2) = 0$, entón a_L desaparece da ecuación L-ésima, quedándonos L ecuacións lineais homoxéneas con L incógnitas. Agora ben:
    - Se son linealmente dependentes, podemos prescindir da ecuación para $n = L$, polo que a_L quedaría libre, podendo tomar calquera valor (por exemplo cero). Coas ecuacións para $n = L + 1$ e sucesivas, calcularíamos os valores de a_{L+1}, a_{L+2} ... No apartado seguinte veremos un exemplo deste tipo.
    - Se estas ecuacións son linealmente independentes, a única solución posible é $a_0 = a_1 = ... = a_{L-1} = 0$ en contradición coa hipótese. Poderíamos pensar que agora tamén somos libres para asignar calquera valor a a_L e proseguir coas seguintes ecuacións, pero estariamos construíndo outra vez a solución para m_1.

- Se $m_1 - m_2 = L \notin \mathbb{N}$, tamén podemos calcular os coeficientes para m_2, o menor dos dous valores de m.

2.3. Un punto ordinario como exemplo

No caso concreto que $p_0 = q_0 = q_1 = 0$, o punto $x_0 = 0$ pasa a ser ordinario, pero podemos utilizar igualmente o procedemento de Frobenius para resolver a ecuación diferencial. Para empezar as solucións da ecuación indicial (4) son:

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 0.$$

Para m_2 a relación de recorrencia (5) para $n = 1$ é:

$$[(m_2+1)m_2 + (m_2+1)p_0 + q_0]a_1 + [p_1 m_2 + q_1]a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_0 = 0,$$

que se verifica sempre, independentemente dos valores de a_0 e a_1. Coa relación de recorrencia (5) para $n = 2$, podemos proseguir a construción da solución para m_2 tomando por exemplo $a_1 = 0$:

$$[(m_2+2)(m_2+1) + (m_2+2)p_0 + q_0]a_2 + [p_2 m_2 + q_2]a_0 + [p_1(m_2+1) + q_1]a_1 = 0 \;\Rightarrow$$
$$2a_2 + q_2 a_0 = 0;$$

e así sucesivamente.

3. Teorema de Fuchs

Supoñamos que $x = x_0$ é un punto singular regular da ecuación diferencial (2): $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$, e que os desenvolvementos en serie de potencias de $(x - x_0)P(x)$ e $(x - x_0)^2 Q(x)$ converxen para $|x - x_0| < R$ con $R > 0$. Sexan m_1 e m_2 as raíces da ecuación indicial (4) con $m_2 \leq m_1$. Entón a ecuación diferencial ten polo menos unha solución en serie de Frobenius:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{m_1 + n},$$

válida en $|x - x_0| < R$, onde os a_n quedan determinados en función de $a_0 \neq 0$ pola fórmula de recorrencia (5). Ademais, se $m_1 - m_2$ non é un enteiro positivo ou cero, a ecuación diferencial ten unha segunda solución independente:

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{m_2 + n},$$

válida no mesmo intervalo, onde de novo $b_0 \neq 0$ e b_n ven dado unha fórmula de recorrencia análoga.

4. Ecuación de Bessel

Consideremos a ecuación diferencial de Bessel (ou máis ben a familia de ecuacións posto que dependen do parámetro p) seguinte:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad p \geq 0,\ p \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

O punto $x = 0$ é un punto singular regular xa que

$$xP(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2Q(x) = x^2 - p^2$$

son funcións analíticas con radio de converxencia infinito. Entón ten que existir polo menos unha solución en forma de serie de Frobenius. Para obtela, repetiremos o procedemento da sección 2.2, particularizado para esta familia de ecuacións concreta. A partir da expresión (1) da serie de Frobenius, podemos calcular os restantes termos que aparecen na ecuación (6) como se amosa na columna dereita das seguintes liñas:

$$\begin{aligned}
y &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} && \Rightarrow \quad x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+m} \\
&\Downarrow \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) a_n x^{n+m-1} && \Rightarrow \quad xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) a_n x^{n+m} \\
&\Downarrow \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m-2} && \Rightarrow \quad x^2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m}
\end{aligned}$$

O cálculo do termo x^2y merece unha explicación máis detallada. Primeiramente debemos ter presente que, como fixemos na sección 2.2, o seguinte paso vai consistir en substituír as series anteriores na ecuación de Bessel (6) e **agrupar** tódolos termos que conteñan a mesma potencia de x. Nas series das funcións y, xy' e x^2y'' anteriores, o expoñente de x é sempre $n + m$; polo tanto, simplemente agrupando estas series baixo o mesmo sumatorio poderemos sacar factor común x^{n+m}. Pola contra, na primeira expresión de x^2y o expoñente de x é $n + m + 2$, dúas unidades maior que nas demais series. En consecuencia, debemos agrupar o primeiro termo desta serie co terceiro das outras, o segundo co cuarto, o terceiro co quinto, etc. Dende un punto de vista formal, para lograr isto debemos substituír o índice n do sumatorio por outro índice: k, de xeito que o expoñente de x se converta en $k + m$. É dicir, debemos tomar $n + 2 = k \Rightarrow n = k - 2$:

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m+2} \overset{\substack{n=k-2 \\ \downarrow}}{=} \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+m}.$$

Pero k é un índice mudo, unha variable que *só existe* dentro do sumatorio polo que lle podemos cambiar o nome, así que en lugar de k chamarémoslle n:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+m} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+m}.$$

Este paso soe causar confusión, pero debemos decatarnos que o 'n' da última ecuación non é o mesmo 'n' que o da penúltima; non hai contradición nisto, posto que cada un só está definido dentro do seu sumatorio.

Fagamos pois a substitución na ecuación de Bessel (6):

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n x^{n+m}}_{x^2y''}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n x^{n+m}}_{xy'}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+m}}_{x^2y}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}p^2 a_n x^{n+m}}_{p^2y}=0$$

e agrupemos, polo momento, o primeiro, o segundo e o cuarto sumatorio:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+m)(n+m-1)+(n+m)-p^2\right]a_n x^{n+m}}_{x^2y''+xy'-p^2y}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+m}}_{x^2y}=0.$$

Tras simplificar e sacar factor común x^m queda:

$$x^m\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+m)^2-p^2\right]a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n\right\}=0.$$

Para poder agrupar os sumatorios, os seus respectivos índices deberían recorrer os mesmos valores, así que saquemos os dous primeiros sumandos do primeiro sumatorio:

$$\left[m^2-p^2\right]a_0+\left[(m+1)^2-p^2\right]a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+m)^2-p^2\right]a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0\Rightarrow$$

$$\left[m^2-p^2\right]a_0+\left[(m+1)^2-p^2\right]a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+m)^2-p^2\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^n=0. \tag{7}$$

Obsérvese que o primeiro membro da última expresión non é máis que unha serie de Taylor, polo que se deben cancelar tódolos seus coeficientes. Como buscamos unha solución con $a_0\neq 0$, do primeiro coeficiente obtemos a seguinte ecuación indicial:

$$m^2-p^2=0\Rightarrow m=\pm p$$

O Teorema de Fuchs asegúranos que sempre hai unha solución en forma de serie de Frobenius para $m=p$ e hai outra para $m=-p$ polo menos cando $m_1-m_2=2p$ non é un número natural. E dicir, se $p\neq 0$, $1/2$, 1, $3/2$, 2,... hai dúas solucións en forma de serie de Frobenius; se $p=0$, $1/2$, 1, $3/2$, 2,... o teorema non di nada respecto da segunda solución. Así a todo, veremos que para p semienteiro positivo tamén se pode expresar esa segunda solución como unha serie de Frobenius, mentres que para p natural construirémola doutro xeito.

4.1. Solución para $m=p$

Consideremos o caso $m=p$ e substituámolo no segundo coeficiente de (7):

$$[(p+1)^2-p^2]a_1=0\Rightarrow(2p+1)a_1=0\overset{\overset{p\geq 0}{\downarrow}}{\Rightarrow}a_1=0.$$

A mesma substitución para o resto dos coeficientes conduce a unha relación de recorrencia:

$$\left[(n+p)^2 - p^2\right] a_n + a_{n-2} = 0 \;\Rightarrow\; a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2p)n} \qquad n \geq 2,\; n \in \mathbb{N}$$

Para $n = 3$ obtemos que $a_3 = -\frac{a_1}{3(3+p)} = 0$, e igualmente para todos coeficientes impares da serie de y:

$$a_3 = a_5 = a_7 \cdots = 0$$

Por outra banda, para valores pares de n obtemos:

$$\begin{aligned}
n = 2 \Rightarrow a_2 &= -\frac{a_0}{2(2+2p)} = & & -\frac{a_0}{2^2(p+1)} \\
n = 4 \Rightarrow a_4 &= -\frac{a_2}{4(4+2p)} = -\frac{a_2}{2^3(p+2)} = & & \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(p+1)(p+2)} \\
n = 6 \Rightarrow a_6 &= -\frac{a_4}{6(6+2p)} = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(p+3)} = & & -\frac{a_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(p+1)(p+2)(p+3)} \\
n = 8 \Rightarrow a_8 &= -\frac{a_6}{8(8+2p)} = -\frac{a_6}{2^2 \cdot 4(p+4)} = & & \frac{a_0}{2^8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

En xeral:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{8}$$

Obsérvese que o significado de 'n' nesta expresión (8) non ten relación co das expresións anteriores. Por outra banda, a partir desta expresión xa podemos construír unha das solucións da ecuación:

$$y_1 = a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\cdots(p+n)} \tag{9}$$

Defínese **a función de Bessel de primeira clase de índice** p**:** $J_p(x)$ como a función (9) anterior con $a_0 = 1/(2^p p!)$, entendendo $p!$ como definida a través da función Γ cando p non é natural:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!(p+n)!} \tag{10}$$

4.2. Solucións para $m = -p$

Se repetimos o procedemento da sección anterior para $m = -p$ supoñendo que $p \neq 0$, $1/2$, 1, $3/2$, 2,... , resulta que simplemente debemos substituír p por $-p$ na expresión (10):

$$y_2 = J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}{n!(-p+n)!} \tag{11}$$

No canto de volver a construír a serie para os valores de p restantes (natural ou semienteiro positivo), estudaremos o límite das solucións $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ cando p tende a eses valores.

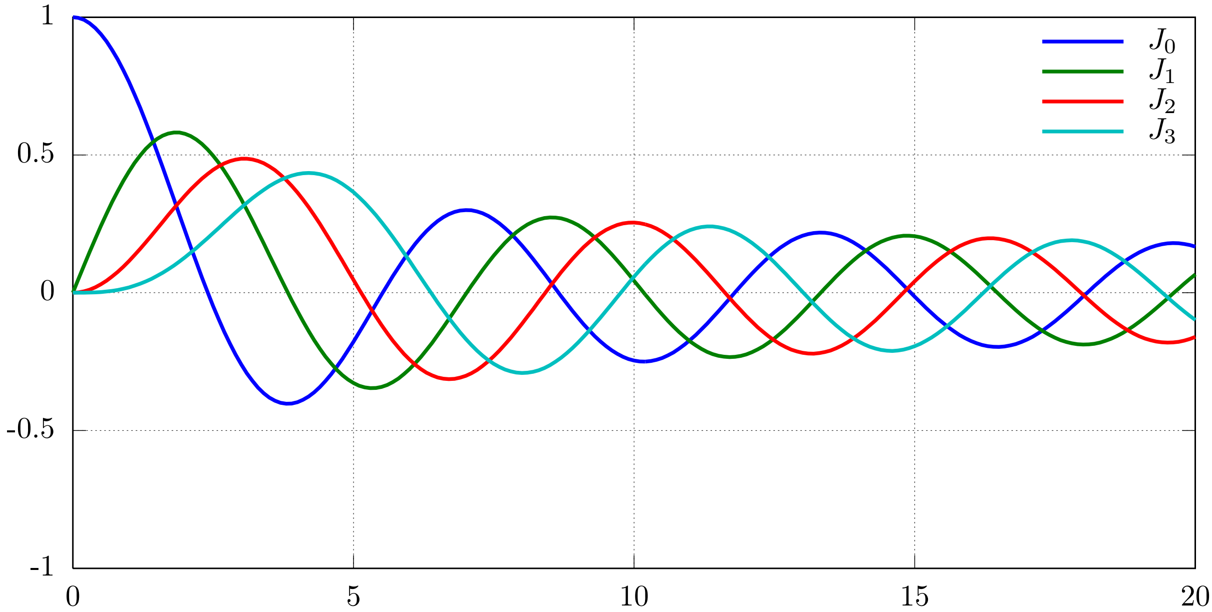

Figura 2: Algunhas funcións de Bessel de primeira clase de índice enteiro

En primeiro lugar debemos notar que, cando p é un natural positivo, a expresión (11) de $J_{-p}(x)$ contén o termo $(-p+n)!$ no denominador, o cal diverxe para valores de n pequenos (menores que p). En consecuencia eses primeiros sumandos desaparecen, é dicir, se $p = L \in \mathbb{N}^+$:

$$J_{-L}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-L}}{n!(-L+n)!} \underset{\substack{\uparrow \\ n<L \Rightarrow \frac{1}{(-L+n)!}=0}}{=} \sum_{n=L}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-L}}{n!(-L+n)!} \underset{\substack{\uparrow \\ k=n-L}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+L} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+L}}{(k+L)!k!} = (-1)^L J_L(x) \tag{12}$$

Obviamente esta propiedade e extensible a $L = 0$. Polo tanto, se $p = L \in \mathbb{N}$, $J_L(x)$ e $J_{-L}(x)$ son linealmente dependentes.

Polo contrario, se $p \notin \mathbb{N}$, $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ son linealmente independentes. Vexámolo considerando as proximidades de $x = 0$, onde o termo máis importante da serie de Frobenius é o correspondente a $n = 0$:

$$J_p(x) \simeq \frac{1}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^p \Longrightarrow \text{Acoutado}$$

$$\uparrow$$

$$p > 0,\ p \notin \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{(-p)!} \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$J_{-p}(x) \simeq \frac{1}{(-p)!}\left(\frac{2}{x}\right)^p \Longrightarrow \text{Non acoutado}$$

Obsérvese que esta independencia lineal tamén inclúe a valores de p semienteiros. De feito, máis adiante calcularemos explicitamente $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$, e veremos que son diferentes.

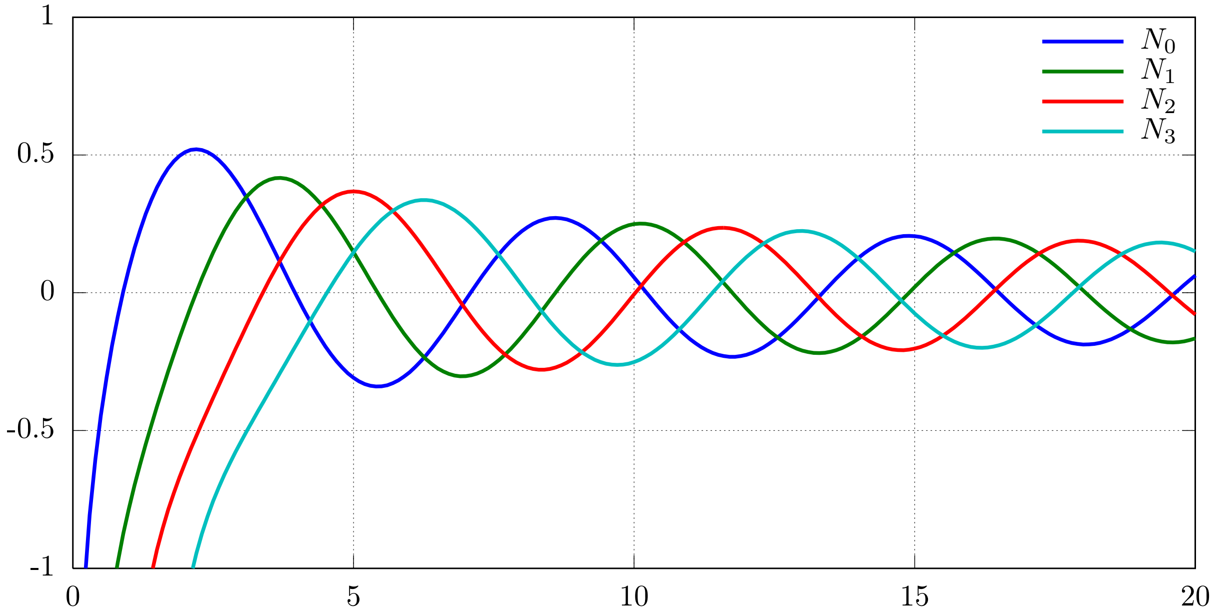

Figura 3: Algunhas funcións de Bessel de segunda clase de índice enteiro

Polo tanto podemos escribir a solución xeral da ecuación de Bessel (6) para p non natural como:

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \qquad p \notin \mathbb{N}$$

Só queda pendente a obtención da segunda solución para os casos onde $p \in \mathbb{N}$. Unha posible opción é aplicar a Fórmula de Liouville, pero usaremos unha vía máis rápida e conceptualmente moi interesante. Comecemos expresando a solución xeral da ecuación de Bessel para $p \notin \mathbb{N}$ como:

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 N_p(x)$$

onde $N_p(x)$ —tamén chamada $Y_p(x)$— é a **función de Neumann de índice** p ou **función de Bessel de segunda clase de índice** p que se define como:

$$N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}. \tag{13}$$

Para unha ecuación dada (p constante) esta expresión non é máis que una combinación lineal de $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$, pero analicemos como cambia a expresión en función de p. Cando p se vai achegando a un número natural par, o coseno de $p\pi$ do numerador tende a 1, $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ se parecen cada vez máis e en consecuencia o numerador tende a cero. Pero o denominador tamén tende cero de xeito que o resultado do cociente permanece estable e linealmente independente de $J_p(x)$ a medida que p se achega ó límite. Para o caso de p impar $J_{-p}(x)$ tende a $-J_p(x)$ [ecuación (12)] pero $\cos p\pi$ agora tende a -1 polo que se seguen a cancelar tanto numerador como denominador. Para estender a definición

(13) a p natural non queda máis que tomar o límite:

$$N_L(x) = \lim_{p\to L} N_p(x) = \lim_{p\to L} \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{p\to L} \frac{\frac{\partial}{\partial p}\left[J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)\right]}{\frac{\partial}{\partial p}\operatorname{sen} p\pi} \Rightarrow$$

$$N_L(x) = \frac{(-1)^L \left.\dfrac{\partial J_p(x)}{\partial p}\right|_{p=L} - \left.\dfrac{\partial J_{-p}(x)}{\partial p}\right|_{p=L}}{\pi(-1)^L} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(x)}{\partial p} - (-1)^L \frac{\partial J_{-p}(x)}{\partial p}\right]_{p=L}$$

4.3. Cálculo de $J_{\pm 1/2}(x)$

Partamos da serie:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}}{n!\,(n+1/2)!},$$

e poñamos $(n+1/2)!$ en función de $(-1/2)!$:

$$\begin{aligned}
(1/2+n)! &= (1/2+n)\cdot(1/2+n-1)\ \cdots\ 3/2\cdot 1/2\cdot(-1/2)! \\
&= \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\ \cdots\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{2n+1}{2}\cdot\underbrace{\frac{2n}{2n}}_{=1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\underbrace{\frac{2n-2}{2(n-1)}}_{=1}\cdot\frac{2n-3}{2}\ \cdots\ \underbrace{\frac{4}{2\cdot 2}}_{=1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{2}}_{=1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\ n!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Entón, substituíndo obtemos:

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}}{n!\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\ n!}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 2^{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
J_{-1/2}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/2}}{n!(n-1/2)!} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\ n!}\sqrt{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ x^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x
\end{aligned}$$

Como podemos ver, $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$ poden construírse a partir da serie de Frobenius e son linealmente independentes.

4.4. Algunhas propiedades das funcións de Bessel

4.4.1. Fórmulas de recorrencia

A derivada dunha función de Bessel pode relacionarse cunha función de Bessel de índice unha unidade menor:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^p J_p(x)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n+2p}}{2^{2n+p}\ n!\ (n+p)!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (2n+2p)\ x^{2n+2p-1}}{2^{2n+p}\ n!\ (n+p)!}$$
$$= x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n+p-1}}{2^{2n+p-1}\ n!\ (n+p-1)!} = x^p J_{p-1}(x). \tag{14}$$

Pero tamén se pode relacionar cunha de índice unha unidade maior:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{15}$$

4.4.2. Derivada de $J_p(x)$

Desenvolvendo cada unha das expresións (14) e (15) anteriores:

$$px^{p-1} J_p(x) + x^p \frac{\mathrm{d}J_p(x)}{\mathrm{d}x} = x^p J_{p-1}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}J_p(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) \tag{16}$$
$$-px^{-p-1} J_p(x) + x^{-p} \frac{\mathrm{d}J_p(x)}{\mathrm{d}x} = x^{-p} J_{p+1}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}J_p(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{p}{x} J_p(x) = -J_{p+1}(x), \tag{17}$$

e sumándoas, obtemos unha forma alternativa da derivada:

$$\frac{\mathrm{d}J_p(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)}{2}$$

4.4.3. Relación entre diferentes ordes

Se no canto de sumar, restamos (16) e (17), as derivadas de $J_p(x)$ desaparecen das expresións anteriores e quedan relacionadas tres funcións con índices separados unha unidade:

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) \qquad \Rightarrow \qquad J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x).$$

Aplicando esta propiedade, podemos calcular $J_{3/2}(x)$ a partir de $J_{1/2}(x)$ e $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{3/2}(x) = \frac{2\frac{1}{2}}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right)$$

4.4.4. Definición alternativa

$$J_p(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(p\theta - x \operatorname{sen}\theta\right) \mathrm{d}\theta \qquad p \in \mathbb{N}$$

4.5. Aplicacións

As funcións de Bessel son necesarias para a descrición de campos (electromagnético, membrana vibrante, ondas acústicas, de temperatura...) en problemas con simetría cilíndrica ou esférica. Destacamos a difracción de luz a través dunha apertura circular.