1. Resolución de EDO de primer orden con series de potencias

1.1. Criterios de converxencia

Sea a serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, dise que converxe se existe o seguinte límite:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$$

Unha condición necesaria pero non suficiente para que converxa é que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Para determinar a converxencia ou non converxencia dunha serie podemos utilizar diversos criterios, entre eles destacan dous, o criterio do cociente e o criterio da raíz:

- O criterio do cociente se basa no cálculo deste límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

  En función do valor deste límite L o criterio distingue entre tres situacións:

  1. $L < 1 \;\Rightarrow$ A serie converxe
  2. $L > 1 \;\Rightarrow$ A serie diverxe
  3. $L = 1 \;\Rightarrow$ O criterio non decide

- O criterio da raíz se basa no cálculo do seguinte límite:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

  En función do valor deste límite ρ o criterio distingue entre tres situacións:

  1. $\rho < 1 \;\Rightarrow$ A serie converxe
  2. $\rho > 1 \;\Rightarrow$ A serie diverxe
  3. $\rho = 1 \;\Rightarrow$ O criterio non decide

1.2. Series de potencias

Definimos unha serie de potencias como unha suma infinita de potencias de orden n, donde x_0 é o punto onde está centrada a serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Para $x = x_0$ a serie converxe trivialmente a a_0 pero para outros valores de x temos que estudar a súa converxencia, aplicando o criterio do cociente en moitas ocasións:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\,(x - x_0)^{n+1}}{a_n\,(x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

O valor de L depende do termo $|x - x_0|$, por tanto a serie converxe ($L < 1$) se x pertence ao radio de converxencia, que se define como:

$$|x - x_0| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \equiv R$$

De forma análoga se $|x - x_0| > R$ a serie diverxe. Nos extremos do intervalo ($x = x_0 \pm R$) a serie pode ser converxente ou non, hai que estudar cada caso particular. Se no cálculo do radio de converxencia obtemos $R = 0$ a serie diverxe $\forall x \in \mathbb{R}$, mentres que se $R = \infty$ entón a serie converxe $\forall x \in \mathbb{R}$. O radio de converxencia tamén se pode obter a partir do criterio da raíz:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Un exemplo de serie de potencias moi común é a que se relaciona coa exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Esta serie converxe $\forall x \in \mathbb{R}$, como vamos a demostrar a continuación:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\,x^n}{n!\,x^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{x} \right| = \infty$$

1.2.1. Propiedades das series de potencias

Supoñamos dúas series de potencias con $R > 0$ $f(x)$ e $g(x)$ centradas en x_0 e de término xeral a_n e b_n respectivamente. Algunhas das súas propiedades son:

- Por definición, xa que $R > 0$, $f(x)$ é **analítica** en x_0
- $f(x) + g(x)$ pode calcularse sumando termo a termo
- $$f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right)$$
- $f(x)$ pode integrarse termo a termo no intervalo de converxencia
- $f(x)$ é continua e ten derivadas continuas de todas as ordes no intervalo de converxencia que se poden calcular termo a termo:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$
$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n - 1)(n - 2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

A expresión da derivada n-ésima resulta ser:

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Polo que a serie de potencias é a serie de Taylor no punto x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

A última propiedade marca unha clara relación entre as funcións coñecidas e as súas series de Taylor. O teorema de Taylor nos di que sexa unha función $h(x)$continua e infinitamente derivable en $|x - x_0|$ podemos expresala como:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x)$$

Onde o resto é $R_N(x)$, que se define como:

$$R_N(x)\frac{h^{N+1}(\overline{x})}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

Non obstante o teorema de Taylor non asegura que a serie de potencias sea converxente $\forall x \in \mathbb{R}$, a función só se pode expesar como serie de potencias nun determinado intervalo, no que se cumpre que:

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$$

1.3. A ecuación $y' = y$

A solución de esta ED é ben coñecida, $y = Ce^x$, pero vamos a obtela a partir de series de potencias:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \overbrace{=}^{\text{Buscamos } x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

Sustituimos na ED e igualamos os coeficientes:

$$a_n = a_{n+1}(n+1) \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

Unha vez obtida a relación de recorrencia vamos a buscar o termo xeral a_n:

$$\begin{array}{lll} n=0 \Rightarrow & a_1 = \frac{a_0}{1} = a_0; & n=1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \\ n=2 \Rightarrow & a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3\cdot 2}; & n=3 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2} \quad \cdots \end{array}$$

Por tanto, o termo xeral da serie é:

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

Por tanto a expresión final da serie de potencias sería:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!}x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Unha vez coñecida a serie debemos estudar a súa converxencia, neste caso é moi sinxelo pois é a serie da exponencial, que como demostramos anteriormente converxe $\forall x \in \mathbb{R}$. A solución final é $y = a_0 e^x$.

1.4. A serie do binomio

Este método de resolución é moi útil para coñecer a serie de Taylor dunha determinada función coñecida unha ecuación diferencial que a función satisfaga. En concreto vamos a estudar a función do binomio:

$$y = (1+x)^p \quad \text{con } p \in \mathbb{R}$$

Esta función cumple a seguinte ecuación diferencial:

$$(1+x)y' = py \quad \text{con } y(0) = 1$$

Vamos a buscar unha solución por series de potencias arredor de $x_0 = 0$, o que nos permite calcular y e y' como:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Para sustituir na ED primeiro vamos a operar o paréntesis para facilitar as operacións:

$$\text{ED:} \quad y' + xy' = py$$
$$xy' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

Sustituindo todas as expresións na ED obtemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} [n a_n + (n+1) a_{n+1}] x^n = p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$n a_n + (n+1) a_{n+1} = p a_n \quad n = 0, 1, 2, ...$$
$$a_{n+1} = \frac{p-n}{n+1} a_n$$

Unha vez obtida a relación de recorrencia vamos a buscar o termo xeral a_n por inducción dando valores a n:

$$\begin{aligned}
&n = 0 \Rightarrow a_1 = pa_0 \\
&n = 1 \Rightarrow a_2 = \tfrac{p-1}{2}a_0 = \tfrac{p(p-1)}{2}a_0 \\
&n = 2 \Rightarrow a_3 = \tfrac{p-2}{3}a_2 = \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3 \cdot 2}a_0 \\
&n = 3 \Rightarrow \tfrac{p-3}{4}a_3 = \tfrac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2}a_0
\end{aligned}$$

Por inducción podemos ver que o termo xeral é:

$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}a_0$$

Como a ED ten a condición de $y(0) = 1$ a denominada serie do binomio queda da seguinte forma:

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n$$

Esta serie queda en función do parámetro p, dependendo do seu valor a serie vai ter comportamentos diferentes. O caso máis común é o de $p \in \mathbb{N}$. Neste caso os coeficientes a partir de a_{p+1} se cancelan (Teñen o termo $p - (p-1) + 1 = 0$ multiplicando no numerador) polo que a suma se reduce a unha suma finita, trúncase. Ademais mentres que $p \geq n$ cúmplese que:

$$p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$$

Polo que podemos escribir a serie como o binomio de Newton:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!}x^n = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \quad p \in \mathbb{N}$$

No caso de $p \notin \mathbb{N}$ podemos estudar a converxencia da serie co criterio do cociente (Empregando a relación de recorrencia):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{p-n}\right| = 1$$

Polo tanto, se $p \notin \mathbb{N}$ a serie converxe se $|x| < 1$ e diverxe se $|x| > 1$.

2. A función Gamma de Euler

Esta función nos permite unha xeralización da función factorial ($p!$) cando $p \notin \mathbb{N}$. Defínese como:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \quad 0 < p \in \mathbb{R}$$

A propiedade principal desta función é a que relaciona dous términos consecutivos:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

Podemos demostrala integrando por partes:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t} dt \overset{\substack{u = t^p \to du = pt^{p-1} \\ dv = e^{-t} \to v = -e^{-t}}}{=}$$

$$= -t^p e^{-t}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt = p\Gamma(p)$$

Vamos a calcular $\Gamma(1)$ e logo para o resto de valores tales que $p \in \mathbb{N}$ por recurrencia:

$$\begin{array}{l}
\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 = 0! \\
\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1! \\
\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2! \\
\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3! \\
\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5!
\end{array}$$

Por inducción demostramos a relación que hai entre o factorial e a función gamma:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

Unha vez coñecidos os valores da función gamma nos naturais temos que estendela a toda a recta real. Un caso particular que ten un resultado analítico simple é $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \overset{t=s^2}{=} 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds$$

Obtemos así a integral da metade da gaussiana, que por ser unha función par podemos cambiar o límite de integración:

$$2\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

Desta forma obtivemos o seguinte resultado, que nos permite calcular factoriales de números non enteiros negativos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\right)!$$

Aplicando a relación de recorrencia $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ podemos calcular o valor da función gamma para calquera semienteiro positivo, por exemplo:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)!$$

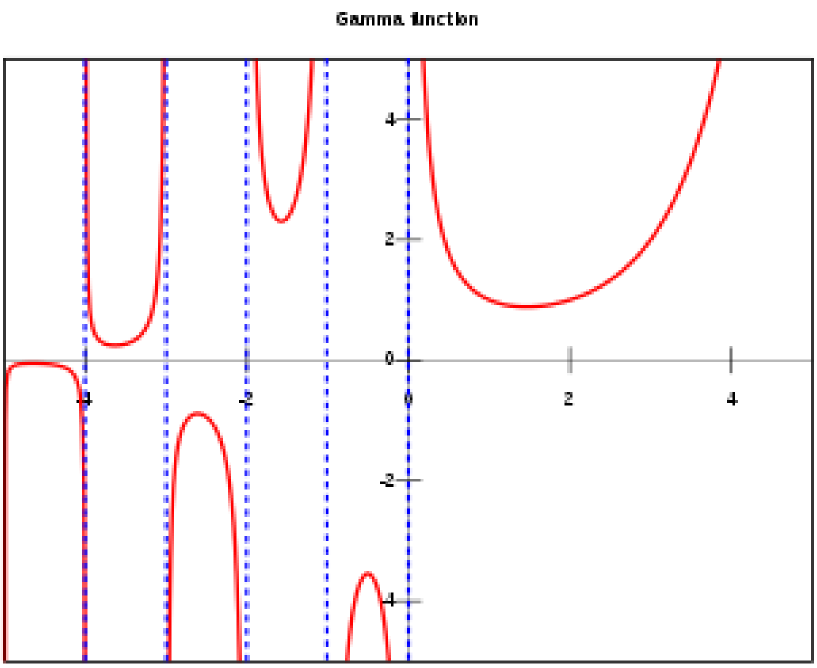

Figura 1: Gráfica de $\Gamma(p)$

Se reescribimos a relación de recorrencia como:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

Podemos extender aos semienteiros negativos o procedemento anterior para obter resultados analíticos, un exemplo sería:

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

Podemos aplicar esta misma lóxica para calcular o valor da función no intervalo $(-1, 0)$ a partir dos seus valores no intervalo $(0, 1)$ e así sucesivamente. Esta extensión é válida $\forall x < 0 | x \notin \mathbb{Z}$. Nos valores enteiros a función non está definida porque tampouco o está no cero:

$$\lim_{p\to 0} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p} = \pm\infty$$

En consecuencia a función tampouco está definida en ningún dos enteiros negativos, probarémolo para $p = -1$:

$$\lim_{p\to -1} = \lim_{p\to -1} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \lim_{p\to -1} \frac{\Gamma(0)}{-1} = \pm\infty$$

Por último, podemos relacionar os valores da función gamma de dous números que disten entre si un enteiro:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p+1) &= p\Gamma(p) \\
&= p(p-1)\Gamma(p-1) \\
&= p(p-1)(p-2)\Gamma(p-2) \\
&= p(p-1)(p-2)\cdots(p+1-n)\Gamma(p+1-n)
\end{aligned}$$

O producto anterior aparece tamén na serie do binomio, polo que podemos reescribila como:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{n!\Gamma(p+1-n)} \qquad \begin{cases} \text{Se } p = 0, 1, 2, ... & \forall x \\ \text{Se } p \neq 0, 1, 2, ... & |x| < 1 \end{cases}$$

3. Resolución de EDO de segunda orde

3.1. Puntos singulares e ordinarios

Vamos a considerar a seguinte ED en forma normal (Se non o está hai que normalizala!!):

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Definición 1. *Por definición diremos que x_0 é un punto ordinario se $P(x)$ e $Q(x)$ son analíticas nese punto. Se o punto non é ordinario denomínase singular.*

Teorema 1. *Sexa x_0 un punto ordinario e sexan a_0 e a_1 constantes arbitrarias. Existe unha función $f(x)$ analítica en x_0 que verifica a ED e as condicións iniciais de $y(x_0) = a_0$ e $y'(x_0) = a_1$.*

Ademais cúmplese que o radio de converxencia do desenvolvemento en series da solución é, polo menos, o menor dos radios dos desenvolvementos en serie de Taylor de $P(x)$ e $Q(x)$.

3.2. Ecuacións de Legendre

Denominamos funcións de Legendre á familia de funcións que verifican a seguinte ED:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0 \quad p \in \mathbb{R}$$

En forma normal:

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{p(p + 1)}{1 - x^2}y = 0$$

Polo tanto as funcións $P(x)$ e $Q(x)$ son:

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \\ Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Analíticas en } x_0 = 0 \text{ con } R = 1$$

Vamos a buscar unha solución xeral da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calculando o resto de termos implicados na ecuación:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow -2xy' = -\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n$$

$$-x^2 y'' = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

No paso intermedio da segunda liña definimos un cambio de variable $j = n-2$ e despois cambiando j por n. Podemos facer isto porque o índice é unha variable muda, que solo existe dentro do sumatorio. Unha vez temos os nosos sumatorios cos índices iguais podemos sustituir na ED:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1) a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - [n(n-1) - 2n + p(p+1)] a_n] x^n = 0$$

Temos unha serie de Taylor igualada a función 0, polo que podemos igualar todos os termos a 0:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - [n(n-1) - 2n + p(p+1)] a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - (p-n)(p+n-1) a_n = 0$$

Así calculamos a relación de recorrencia:

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} a_0 \\
a_4 &= -\frac{(p-2)(p+2+1)}{3 \cdot 4} a_2 &&= \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!} a_0 \\
a_6 &= -\frac{(p-4)(p+4+1)}{5 \cdot 6} a_4 &&= -\frac{(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} a_0
\end{aligned}$$

Estes termos se relacionan mediante índices pares, os termos de índices impares siguen unha recorrencia indepente, non hai conexión entre os termos pares e os impares. Os termos impares a_{2n+1} seguen a seguinte relación:

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2\cdot 3}a_1$$
$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+3+1)}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$
$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+5+1)}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

Polo tanto, temos dúas solucións LI que depende de a_0 e de a_1, como nos expresaba o Th.1. Este resultado ten moito sentido, pois as constantes a_0 e a_1 son as constantes da ED, que ten 2 por ser de segundo grao.

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{(p-2)p(p+1)(p+3)}{4!}x^4 \\ &- \frac{(p-4)(p-2)p(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots \\ y_2 &= x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 \\ &- \frac{(p-5)(p-3)(p-1)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

Estas dúas solucións denomínanse **funcións de Legendre**. Estas funcións son unha serie infinita de potencias, cuxa converxencia estudaremos a continuación.

3.3. Converxencia e polinomios de Legendre

Se $p \in \mathbb{Z}$ a serie trúncase nun momento dado, coverténdose nun polinomio finito. Se p é par e positivo ou impar e negativo trúncase y_1, mentres que se p é impar e positivo ou par e negativo, trúncase y_2. No caso de que $p \notin \mathbb{Z}$ vamos a estudar a converxencia aplicando o criterio do cociente, por exemplo a y_1:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(p-2n)(p+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\right| = x^2$$

Polo tanto, a serie converxe se $|x| < 1$. A demostración para y_2 é análoga.

O caso máis interesante é aquel no que $p = L \in \mathbb{Z}$. Neste caso consideraremos só as series que quedan truncadas. Ademais, en vez de usar as funcións y_1 e y_2, soen multiplicarse por unha constante de xeito que o coeficiente que acompaña a potencia máis alta sexa:

$$a_L = \frac{(2L)!}{2^L(L!)^2} = \frac{(2L-1)(2L-3)(2L-5)\cdots\quad 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{L!}$$

Polo tanto as novas funcións, os **polinomios de Legendre**, quedan da seguinte forma:

$$P_L(x) = \sum_{k=0}^{[L/2]} \frac{(-1)^k (2L-2k)!}{2^L k!(L-k)!(L-2k)!} x^{L-2k}$$

onde $[L/2]$ é o maior enteiro menor ou igual a $L/2$:

$$[L/2] = \begin{cases} L/2 & \text{se } L \text{ par} \\ (L-1)/2 & \text{se } L \text{ impar} \end{cases}$$

A forma máis útil de facer os cálculos dos polinomios de Legendre é empregando a fórmula de Rodrigues:

$$P_L(x) = \frac{1}{2^L L!} \frac{\mathrm{d}^L}{\mathrm{d}x^L} \left[\left(x^2 - 1 \right)^L \right], \quad L \in \mathbb{N}_0$$

Para $L = 0$ obtemos a recta $y = 1$, para $L = 1$ obtemos a recta $y = x$, para $L = 2$ obtemos o seguinte polinomio:

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} [(x^2-1)^2] = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dx^2} [x^4 - 2x^2 + 1] = \frac{3x^2-1}{2}$$

Na seguinte figura podemos ver representados polinomios de Legendre ata orde 5, con $p = n$:

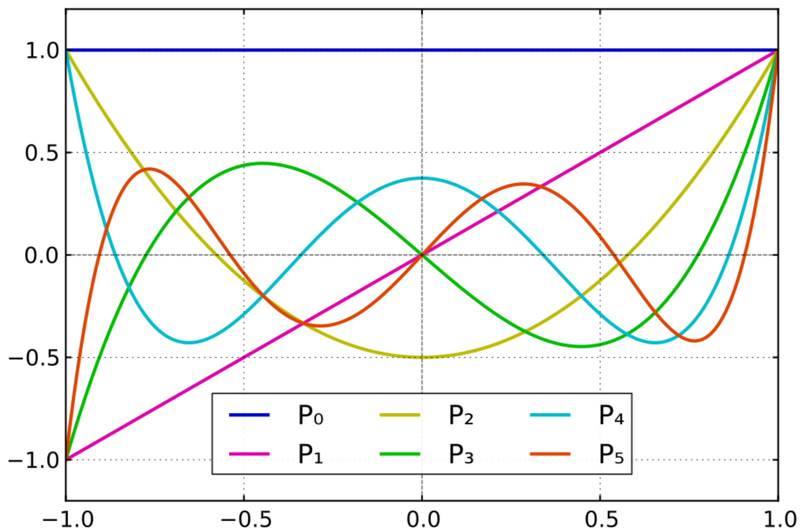

Figura 2: Polinomios de Legendre

Onde os polinomios teñen as seguintes ecuacións:

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$
$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$
$$P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$$

3.4. Algunhas propiedades

Os polinomios de Legendre:

- verifican $P_L(1) = 1$ e $P_L(-1) = (-1)^L$
- son ortogonais: $\int_{-1}^{1} P_L(x) P_{L'}(x) \mathrm{d}x = 0$ se $L \neq L'$

4. Puntos singulares e series de Frobenius

4.1. Introdución

Partimos dunha ecuación de Euler de segunda orde da forma:

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0$$

Onde $p, q \in \mathbb{R}$ son constantes. Escribindo en forma normal a ecuación temos que:

$$y'' + \frac{p}{x} y' + \frac{q}{x^2} y = 0$$

En $x_0 = 0$ a función ten un punto non ordinario xa que as funcións $P(x)$ e $Q(x)$ non son analíticas. Non podemos aplicar o Th.1 para afirmar que existen solucións, pero por ser unha ecuación de Euler sabemos que existen solucións da forma:

$$y = x^m$$

Respecto a estas solucións temos que notar que, salvo que $m \in \mathbb{N}$, non son infinitamente derivables en $x_0 = 0$, por iso non son analíticas.

$$y^{k)} = m(m-1) \cdots (m-k+1) x^{m-k}$$

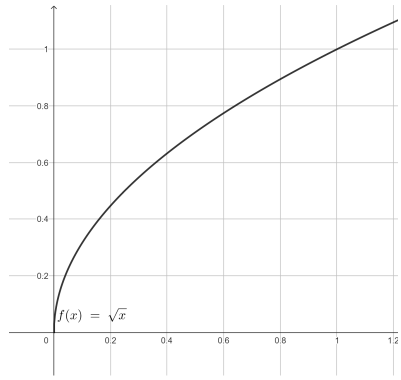

Figura 3: $f(x) = \sqrt{x}$

A expresión da derivada k-ésima non se pode avaliar se $k > m$ e a derivada nunca se anula (Só se anula se $m \in \mathbb{N}$), xa que temos unha indeterminación do tipo $[\frac{k}{0}]$. A idea intuitiva disto é que a recta tanxente ten pendente infinita cando $x \to 0$. Podemos velo gráficamente coa función $f(x) = \sqrt{x}$. En $x_0 = 0$ a pendente da recta tanxente vaise ao infinito, polo que non é derivable, aínda que si que exista $f(0)$.

Podemos aplicar esta lóxica e buscar soluciόns non analíticas en x_0 para ecuacións de segunda orde máis xerais, do tipo de:

$$y'' + \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots}{x} y' + \frac{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots}{x^2} y = 0$$

En este tipo de ecuacións, cando $x \lll 1$ os termos p_0 e q_0 dominarán nos numeradores, facendo que podamos despreciar aos outros termos con potencias de n e buscar solucións do tipo x^m, como se tratáramos cunha ecuación de Euler. En certos casos que estudaremos a continuación as ED deste tipo poden resolverse por series de potencias, obtendo solucións do tipo:

$$y = x^m \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad m \in \mathbb{R}$$

Este tipo de series de potencias denomínanse **series de Frobenius**.

4.2. Clasificación e estudo dos puntos non regulares

Sexa $x = x_0$ un punto singular da ecuación diferencial:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Definición 2. *Dise que x_0 é un punto singular regular da ecuación diferencial se as funcións $(x - x_0)\,P(x)$ e $(x - x_0)^2\,Q(x)$ son analíticas en $x = x_0$. Se algunha destas funcións non é analítica, dise que x_0 é un punto singular irregular.*

Supoñendo que $x_0 = 0$ é un punto singular regular na nosa ecuación de partida vamos a tratar de resolver a ED por series de Frobenius. Trataremos de determinar cando obteremos dúas solucións LI e cando existirá solo unha (Th. de Fuchs):

$$
\begin{aligned}
y &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \Rightarrow \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1} \Rightarrow \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^{m+n-2} = x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1) a_n x^n
\end{aligned}
$$

O seguinte paso é tratar de expresar as funcións $P(x)$ e $Q(x)$ como unha serie de Taylor para substituír todas as series na ecuación e poder operar con elas. Unha vez convertidas as funcións en series de Taylor temos que operar o producto entre a serie de Taylor e a expresión en forma de serie da derivada n-ésima da función. O exemplo do produto de $Q(x)$ e y será representado a continuación, en forma de táboa:

$$
\begin{aligned}
Q(x)y &= \frac{1}{x^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] x^m \\
&= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k \right] x^n
\end{aligned}
$$

Para operar buscamos agrupar as diagonais coa mesma potencia de x:

	$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
q_0	$q_0 a_0 + q_0 a_1 x + q_0 a_2 x^2 + q_0 a_3 x^3 + \cdots$
$+q_1 x$	$+q_1 a_0 x + q_1 a_1 x^2 + q_1 a_2 x^3 +$
$+q_2 x^2$	$+q_2 a_0 x^2 + q_2 a_1 x^3 +$
$+q_3 x^3$	$+q_3 a_0 x^3 +$
$\vdots$	$\vdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$	

$$
\begin{aligned}
P(x)y' &= \frac{1}{x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^{m+n-1} \right] \\
&= x^{m-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (m+n) a_n x^n \right] \\
&= x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} (m+k) a_k \right] x^n
\end{aligned}
$$

Agora facemos a substitución que anunciábamos, sacamos factor común x^{m-2} e unimos os sumatorios con índice n :

$$x^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(m+n)(m+n-1)a_nx^n+\left[\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(m+k)a_k\right]x^n+\left[\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right]x^n\right\}=0$$

Dentro do sumatorio sacamos factor común x^n e agrupamos os sumatorios interiores:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(m+n)(m+n-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]a_k\right\}x^n=0$$

Nesta expresión temos a serie de Taylor igualada á función 0, polo que podemos afirmar que todos os termos da serie valen 0:

$$(m+n)(m+n-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]a_k=0$$

Esta expresión depende do valor de n no que nos atopemos, estudaremos en primeiro lugar o caso máis simple, $n=0$ (Supoñendo sen perda de xeralidade que $a_0\neq 0$):

$$m(m-1)+mp_0+q_0=0\Rightarrow m^2+m\left(p_0-1\right)+q_0=0$$

Esta ecuación denomínase ecuación indicial e nos permitirá calcular os valores de m válidos. Garda unha relación moi estreita coa ecuación característica das ED de Euler, que obtemos despois de facer a substitución $y=x^m$ para buscar solucións en forma de potencias.

Se en vez de $n=0$ estudamos o resto dos casos obteremos ecuacións que nos relacionan, en xeral, cada término a_n cos n términos anteriores (a_0,a_{n-1}). Por exemplo para $n=1$ obtemos:

$$(m+1)ma_1+\left[p_1m+q_1\right]a_0+\left[p_0(m+1)+q_0\right]a_1=0,\Rightarrow$$
$$\left[(m+1)\left(m+p_0\right)+q_0\right]a_1=-\left[p_1m+q_1\right]a_0$$

Esta ecuación relaciona a_1 con a_0, podemos despexar a_1 se $(m+1)(m+p_0)q_0\neq 0$. Podemos obter a ecuación xeral de recorrencia para todos os valores de n se calculamos o termo que acompaña a a_n e o sacamos do sumatorio:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]a_k=[(m+n)p_0+q_0]a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]a_k$$

Polo tanto obtemos a seguinte ecuación de recorrencia para $n \geq 0$:

$$[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]\,a_n+\sum_{k=0}^{n-1}\left[p_{n-k}(m+k)+q_{n-k}\right]a_k=0 \quad n=1,2,\ldots$$

Para poder obter a_n en función do termo anterior o coeficiente que o acompaña debe ser distinto de 0. Para estudar cando isto ocorre ou non vamos a definir a seguinte función:

$$f(m)=m(m-1)+mp_0+q_0$$

Se representamos esta función obtemos unha parábola cuxos ceros están situados nos valores m_1 e m_2, onde $m_1 \geq m_2$. Esta función está definida para que o seu valor coincida co coeficiente que acompaña a cada termo a_i cando calculamos $f(m+i)$. Por exemplo, queda claro cando calculamos o valor de $f(m+n)$:

$$f(m+n)=[(m+n)(m+n-1)+(m+n)p_0+q_0]$$

A partir desta función podemos escribir a relación de recorrencia para os 5 primeiros valores de n:

$$\begin{aligned}
&f(m+1)a_1+(p_1m+q_1)\,a_0=0\\
&f(m+2)a_2+(p_2m+q_2)\,a_0+[p_1(m+1)+q_1]\,a_1=0\\
&f(m+3)a_3+(p_3m+q_3)\,a_0+[p_2(m+1)+q_2]\,a_1+[p_1(m+2)+q_1]\,a_2=0
\end{aligned}$$

Polo tanto podemos concluir que o coeficiente de a_n é $f(m+n)$. Ese valor de m só pode ser m_1 ou m_2, as solucións da ecuación indicial. Se tomamos o maior dos valores de m, m_1, entón $f(m_1+n)$ nunca se anula porque $n>0$. Se tomamos m_2 podemos enfrentarnos a tres posibles situacións:

- Se $m_1=m_2$ a segunda solución non se pode expresar como serie de Frobenius.
- Se $m_1-m_2=L\in\mathbb{N}^+, f\left(m_2+L\right)=f\left(m_2+m_1-m_2\right)=0$, entón a_L desaparece da ecuación L-ésima, quedándonos L ecuacións lineais homoxéneas con L incógnitas. Agora ben:

- Se son linealmente dependentes, podemos prescindir da ecuación para $n = L$, polo que a_L quedaría libre, podendo tomar calquera valor (por exemplo cero). Coas ecuacións para $n = L+1$ e sucesivas, calcularíamos os valores de $a_{L+1}, a_{L+2} \ldots$
- Se estas ecuacións son linealmente independentes, a única solución posible é $a_0 = a_1 = \ldots = a_{L-1} = 0$ en contradición coa hipótese. Poderíamos pensar que agora tamén somos libres para asignar calquera valor a a_L e proseguir coas seguintes ecuacións, pero estariamos construíndo outra vez a solución para m_1.

- Se $m_1 - m_2 = L \notin \mathbb{N}$, tamén podemos calcular os coeficientes para m_2, o menor dos dous valores de m.

4.3. Teorema de Fuchs

Teorema 2. *Supoñamos que $x = x_0$ é un punto singular regular da ecuación diferencial (2): $y''+ P(x)y'+Q(x) = 0$, e que os desenvolvementos en serie de potencias de $(x - x_0)\, P(x)$ e $(x - x_0)^2\, Q(x)$ converxen para $|x - x_0| < R$ con $R > 0$. Sexan m_1 e m_2 as raíces da ecuación indicial (4) con $m_2 \leq m_1$. Entón a ecuación diferencial ten polo menos unha solución en serie de Frobenius:*

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^{m_1+n}$$

válida en $|x - x_0| < R$, onde os a_n quedan determinados en función de $a_0 \neq 0$ pola fórmula de recorrencia (5). Ademais, se $m_1 - m_2$ non é un enteiro positivo ou cero, a ecuación diferencial ten unha segunda solución independente:

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x - x_0\right)^{m_2+n}$$

válida no mesmo intervalo, onde de novo $b_0 \neq 0$ e b_n ven dado unha fórmula de recorrencia análoga.

5. Ecuación de Bessel

Consideremos a familia de ecuacións diferenciais:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0 \quad p \geq 0, p \in \mathbb{R}.$$

Escrita en forma normal:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

En primeiro lugar vamos a estudar o comportamento xeral da ecuación, para poder facernos unha idea de cales poden ser as súas solucións en función da relación entre x e p:

- Se $x \lll p$ o termo x^2 perde importancia frente a p^2, polo que a ED acaba parecendo unha ED de Euler, que admite solucións do tipo $y = x^m$.
- Se $x \ggg p$ podemos desprezar o termo $\frac{1}{x}y$ e aproximar a ED a outra máis coñecida: $y'' + y = 0$. Esta ecuación admite solucións do tipo $y = A\cos x + B\sin x$, funcións periódicas.

Na seguinte figura podemos ver representadas varias solucións da ecuación de Bessel:

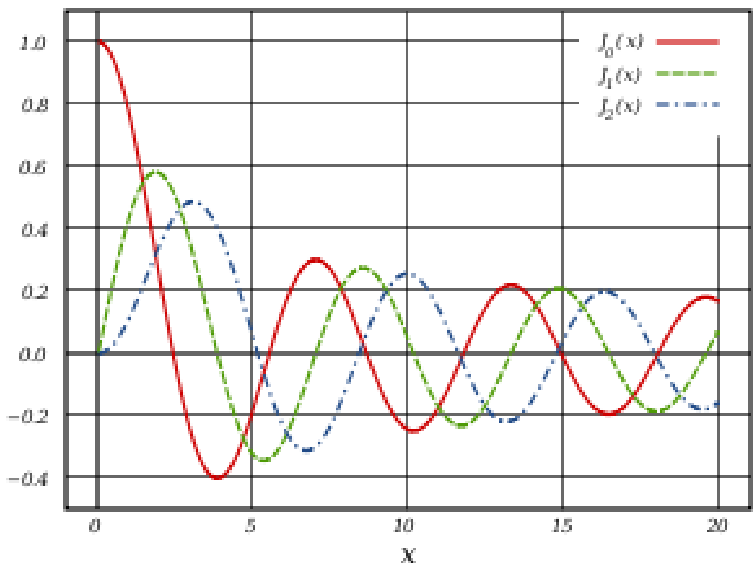

Figura 4: Funcións de Bessel para $p = 0, 1, 2$

O punto $x_0 = 0$ non é ordinario, pero si que é singular regular xa que cumple que:

$$xP(x) = 1 \quad \text{e} \quad x^2Q(x) = x^2 - p^2$$

son funcións analíticas con radio de converxencia infinito. Entón ten que existir polo menos unha solución en forma de serie de Frobenius (Th. de

Fuchs). Para buscar esta solución vamos a calcular a forma que teñen todos os termos que participan na ED a partir da expresión base da serie de Frobenius:

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} \Rightarrow x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+m}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) a_n x^{n+m-1} \Rightarrow xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) a_n x^{n+m}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m-2} \Rightarrow x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m}$$

No cálculo de $x^2 y$ fixemos un cambio de índice $n' = n - 2$, que nos servirá para agrupar potencias de x cando substituámos as series na ED. Podemos facer este cambio de índice porque é unha variable muda, que só pertence ao sumatorio. Unha idea intuitiva para velo é que adiantamos o índice dúas unidades e rebaixamos o interior do sumatorio en dúas unidades. Se substituímos todas as series na ecuación de Bessel obtemos:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m}}_{x^2 y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+m) a_n x^{n+m}}_{xy'} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+m}}_{x^2 y} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n x^{n+m}}_{p^2 y} = 0$$

Podemos agrupar o primeiro, segundo e cuarto sumatorio xa que empezan en $n = 0$. Sacando factor común x^m en todos os sumatorios obtemos:

$$x^m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+m)^2 - p^2 \right] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \right\} = 0.$$

O seguinte paso é agrupar todos os sumatorios, pero precisamos sacar os dous primeiros termos do primeiro sumatorio para que teñan o mesmo índice inicial:

$$\left[m^2 - p^2 \right] a_0 + \left[(m+1)^2 - p^2 \right] a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+m)^2 - p^2 \right] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\left[m^2 - p^2 \right] a_0 + \left[(m+1)^2 - p^2 \right] a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(n+m)^2 - p^2 \right] a_n + a_{n-2} \right\} x^n = 0.$$