

# Análisis de Fourier

Técnicas experimentales II – Laboratorio de electromagnetismo

Pablo Pardiñas Busto

## Índice

<b>1. Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>2</b>
2.1. Serie de Fourier	2
2.2. Circuito RLC como filtro	3
2.3. Frecuencia de resonancia	3
<b>3. Instrumental y procedimiento experimental</b>	<b>4</b>
3.1. Instrumental	4
3.2. Procedimiento experimental	4
<b>4. Análisis de resultados</b>	<b>5</b>
4.1. Medidas de los componentes del circuito RLC	5
4.2. Frecuencia de resonancia y factor de calidad $Q$	6
4.3. Análisis de la señal cuadrada	7
4.4. Análisis de la señal triangular	12
4.5. Análisis del pulso	16
<b>5. Conclusiones</b>	<b>19</b>
5.1. Cuestiones	20

# 1. Objetivos

A lo largo de esta práctica llevaremos a cabo el estudio de un circuito RLC conectado en paralelo. El objetivo será estudiar el comportamiento de distintas señales periódicas al atravesar el circuito. Obtendremos los armónicos de las diferentes señales y los analizaremos mediante el desarrollo en serie de Fourier.

## 2. Fundamentos teóricos

### 2.1. Serie de Fourier

Una función  $f(t)$  periódica “física” (“suave”, integrable, ...) de período  $T$  puede descomponerse en una suma infinita (en principio) de funciones sinusoidales:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)\} \quad (1)$$

donde  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  (siendo  $f$  la frecuencia en Hz). Los coeficientes que  $n$ -ésimos que determinan la serie de Fourier ( $a_n$  y  $b_n$ ) son:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt \quad (3)$$

Las correspondientes componentes  $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  de frecuencia  $n\omega$  son los armónicos. El primero de los armónicos ( $n = 1$ ) se conoce como armónico fundamental

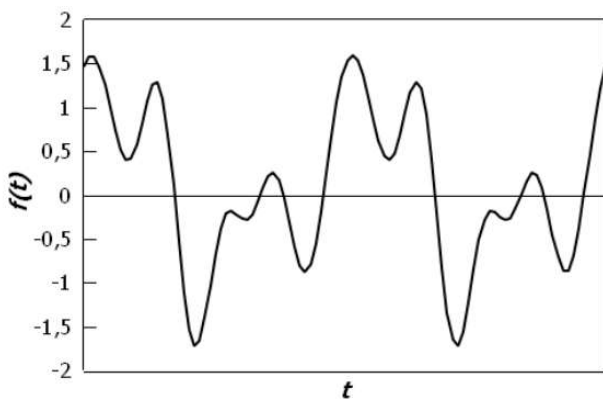


Figura 1: Función periódica  $f(t)$

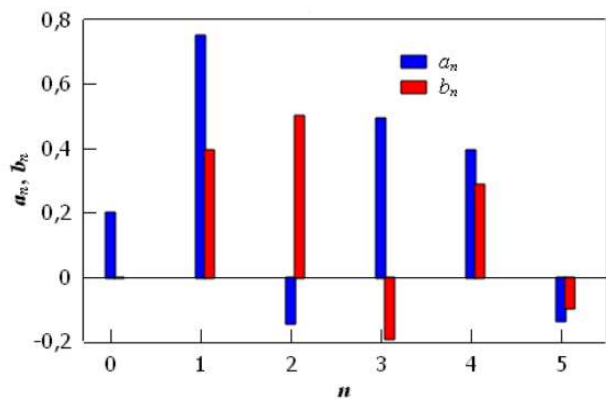


Figura 2: Espectro de Fourier

(Imágenes extraídas del guion de prácticas)

En las figuras 1 y 2 podemos ver, respectivamente, una función periódica  $f(t)$  y los coeficientes  $n$ -ésimos resultantes de realizar el desarrollo en serie de Fourier.

A la hora de calcular los coeficientes de la serie de Fourier nos será de gran ayuda estudiar la paridad de la función, ya que si es una onda par los términos en senos se anulan y solo tendríamos una serie de cosenos ( $b_n = 0 \forall n$ ); mientras que, si la función es impar, se anularían los términos de los cosenos y tendríamos una serie de senos ( $a_n = 0 \forall n$ ).

## 2.2. Circuito RLC como filtro

Como acabamos de ver, podemos desarrollar una función periódica de cualquier forma en serie de Fourier. Por lo tanto, un circuito alimentado con una señal de este tipo responderá perfectamente a aquellos armónicos de frecuencia próxima a la suya de resonancia (el resto de armónicos estarán muy atenuados por el circuito). Es decir, el circuito resonante pasa-banda permite seleccionar un determinado armónico de una señal periódica, siempre que tenga un factor de calidad  $Q$  suficientemente alto.

El circuito que utilizaremos en esta práctica es un circuito RLC en paralelo (con una modificación que veremos en la figura 3), con una frecuencia de resonancia  $f_0$  y factor de calidad  $Q \gtrsim 20$ . Aplicando una frecuencia (aproximadamente)  $nf = f_0$ , tendremos en la salida del circuito (al actuar como filtro) el  $n$ -ésimo armónico prácticamente aislado, con los demás armónicos muy atenuados o prácticamente nulos.

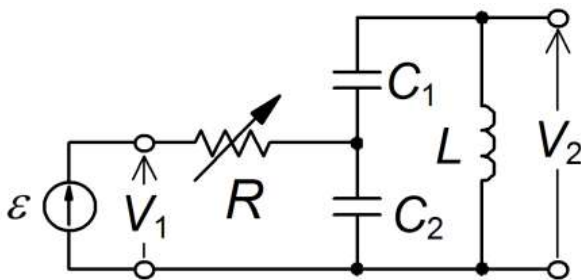


Figura 3: Circuito real

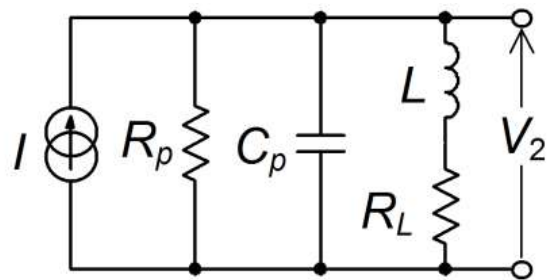


Figura 4: Circuito equivalente aproximado

(Imágenes extraídas del guion de prácticas)

En las figuras 3 y 4 se muestran el circuito RLC en paralelo y su simplificación equivalente. Tanto la resistencia como el condensador pueden ser expresados como admitancias (falta de oposición al paso de la corriente senoidal; inversa de la impedancia), y junto a la autoinducción  $L$  se forma el circuito resonante en paralelo. Cabe destacar que la autoinducción tiene pérdidas debidas a la resistencia  $R_L$  del bobinado y a la histéresis del núcleo ferromagnético, por lo que  $Q$  resulta menor de lo esperado.

## 2.3. Frecuencia de resonancia

La reactancia es la oposición que ofrece una inductancia o una capacidad en un circuito, por lo que en nuestro circuito tenemos tanto una reactancia inductiva  $X_L$  como una reactancia capacitiva  $X_C$ , cuyas expresiones analíticas son:

$$X_L = L \cdot 2\pi \cdot f \quad (4)$$

$$X_C = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f} \quad (5)$$

Observando las ecuaciones (4) y (5) vemos que si aumentamos la frecuencia aumenta la reactancia inductiva y disminuye la reactancia capacitiva. Llamamos frecuencia de resonancia  $f_0$  a aquella frecuencia para la que las reactancias inductiva y capacitiva coinciden en valor absoluto. Teniendo esto en cuenta podemos despejar fácilmente una expresión para la frecuencia de resonancia, en función de los valores de los componentes del circuito.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (6)$$

La reactancia inductiva y la reactancia capacitiva se contrarrestan por lo que en la frecuencia de resonancia la corriente que pasa por el circuito es máxima.

A partir de la frecuencia de resonancia obtenemos el factor de calidad  $Q$ , un parámetro que mide la relación entre la energía reactiva que almacena y la energía que se disipa durante un ciclo completo de la señal. Un factor de calidad alto indica que se pierde poca energía en relación con la almacenada, mientras que un factor de calidad bajo indica una mayor pérdida de energía respecto de la almacenada. El factor de calidad se calcula mediante el cociente entre la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, es decir, la diferencia entre las frecuencias del intervalo en el que se concentra la mayor potencia de la señal.

Por lo tanto, el factor de calidad  $Q$  se puede calcular de la siguiente forma:

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (7)$$

Las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  que hemos tomado son las llamadas frecuencias efectivas, que se corresponden con las frecuencias a las que la onda está desfasada  $\pm\pi/4$  radianes ( $\pm 45^\circ$ ).

### 3. Instrumental y procedimiento experimental

#### 3.1. Instrumental

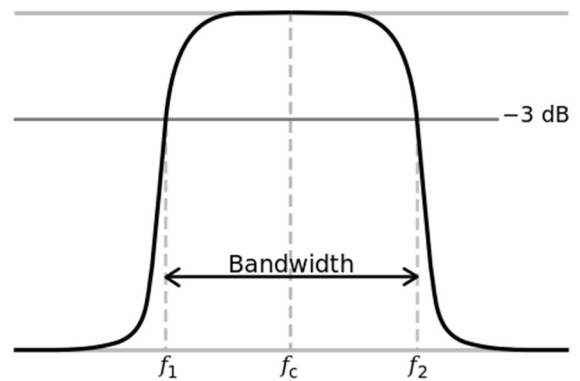
- Circuito RLC conectado en paralelo (*figura 3*).
- Osciloscopio.
- Generador de señales de corriente alterna (señal sinusoidal, cuadrada y triangular).
- Cables de conexión.
- Rectificador (para obtener el pulso aproximado).

#### 3.2. Procedimiento experimental

En primer lugar, deberemos identificar los componentes del circuito RLC y conectar de la manera que se indica en la *figura 3*. Anotaremos los valores teóricos de los diferentes componentes y mediremos aquellos valores que podamos con el multímetro para corroborar que se encuentran dentro del margen de permitividad proporcionado.

Una vez anotados los valores de los componentes del circuito y comprobando que hemos conectado el circuito RLC en paralelo, suministraremos una tensión de entrada sinusoidal y buscaremos la frecuencia de resonancia  $f_0$ . Para facilitar el trabajo y comprobar que la frecuencia es correcta podemos calcular la frecuencia de resonancia teórica utilizando los valores de los componentes del circuito mediante la ecuación (6). El valor experimental que obtengamos, si bien no es exacto, si se debe aproximar al teórico.

Como ya hemos comentado, en la frecuencia de resonancia la amplitud de la salida es máxima y está en fase con la de entrada. Con el osciloscopio podemos medir tanto el desfase de las señales como la amplitud, por lo que verificando que la amplitud es máxima y el desfase nulo o casi nulo, obtendremos la frecuencia de resonancia experimentalmente. Podemos comprobar que la frecuencia de resonancia no depende de la amplitud ajustándola con la resistencia variable.



**Figura 5: Ancho de banda**

(Imagen extraída de:

[https://es.wikipedia.org/wiki/Ancho\\_de\\_banda](https://es.wikipedia.org/wiki/Ancho_de_banda))

Una vez hemos calculado la frecuencia de resonancia buscaremos las 2 frecuencias de corte  $f_1$  y  $f_2$ , en las que como ya hemos comentado el desfase es de  $\pm\pi/4$  radianes. Debemos tener en cuenta que el osciloscopio mide el desfase en grados, por lo que las frecuencias de corte buscadas se corresponden con desfases de  $\pm 45^\circ$ , es decir, de  $45^\circ$  y  $315^\circ$ . Con los datos obtenidos calcularemos el factor de calidad  $Q$ .

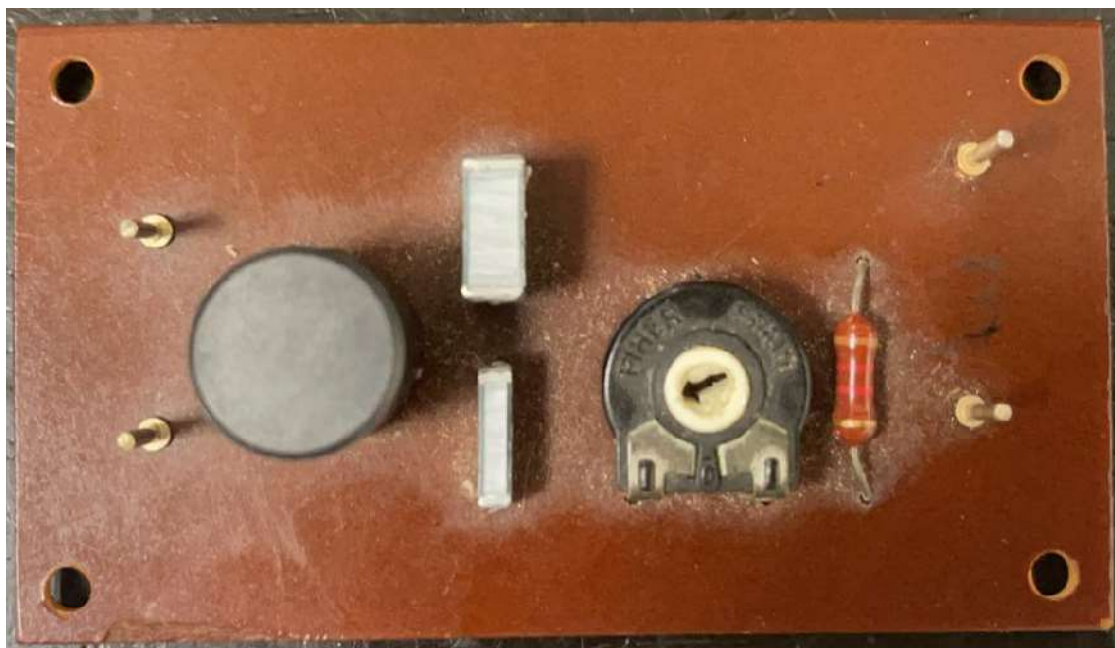
Pasamos al análisis de las diferentes señales periódicas, comenzando por la cuadrada. Introduciremos la señal con una amplitud lo suficientemente elevada y anotaremos este valor. Buscamos los 5 primeros armónicos, introduciendo en el generador de señal frecuencia alrededor de  $f_0/n$ . Estas frecuencias no se corresponden de manera exacta con los armónicos, pero si son muy cercanos a ellos por lo que tras establecer la frecuencia aproximada regularemos la señal hasta obtener la máxima amplitud en la señal de salida. Para algunos  $n$  no aparecen armónicos como tal, si no que veremos una señal sinusoidal, resultante de la superposición de otras componentes no totalmente eliminadas. Veremos también que la señal de salida aparece ligeramente “deformada” en ocasiones. En ese caso medimos la mayor y menor diferencia entre dos extremos contiguos y tomaremos como dato el promedio de ambos y como incertidumbre de la medida la de la media.

Una vez finalizada esta parte repetiremos las medidas aplicando en este caso una señal de entrada triangular. Por último, usaremos el rectificador para recortar la señal triangular, con el objetivo de obtener el equivalente aproximado a un pulso. El rectificador truncará la señal triangular para obtener una señal con un período muy pequeño. Para el estudio de esta señal debemos conocer la diferencia de tiempos del pulso (ancho de la señal) y el período. Anotaremos también la amplitud de la salida (comprobando que se mantiene constante independientemente de la frecuencia) y las frecuencias en las que hayamos medidos cada armónico, de igual forma que con la señal cuadrada y la señal triangular.

## 4. Análisis de resultados

### 4.1. Medidas de los componentes de circuito RLC

Un circuito RLC, como su nombre indica, está formado por una resistencia eléctrica ( $R$ ), una bobina ( $L$ ), y un capacitor o condensador ( $C$ ). El circuito en cuestión que hemos utilizado en la práctica es el que se muestra a continuación.



*Figura 5: Circuito RLC*

Observando el código de colores de la resistencia vemos que el valor nominal de esta es  $R = 1200 \pm 0,5\% \Omega$ . Midiendo con el multímetro el valor de la resistencia es  $R = 1194 \pm 1 \Omega$  (tomando como incertidumbre la precisión del aparato), que está dentro del rango de tolerancia. A esta resistencia debemos sumar la de autoinducción  $R_L$ , que como ya hemos comentado anteriormente se produce tanto por la resistencia del bobinado como por la histéresis del núcleo ferromagnético. El resultado que hemos obtenido al medirla con el polímetro es  $R_L = 27 \pm 1 \Omega$ . Sumando ambas resistencias tenemos una resistencia equivalente  $R_p = 1221 \pm 1 \Omega$ .

Siguiendo con la bobina de autoinducción, la inductancia de esta es  $L = 39 \text{ mH} = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ H}$ . Desconocemos la incertidumbre de este dato, pues es una medida que aparece en el dispositivo y no muestra ninguna información sobre rangos de tolerancia ni de otro tipo, por lo que la despreciaremos.

Finalmente, deberemos calcular la capacidad equivalente  $C_p$  del circuito. Observamos en la *figura 5* dos condensadores (en el centro del dispositivo dos rectángulos metálicos) de diferente tamaño. Sus correspondientes capacidades son  $C_1 = 0,22 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 22 \text{ nF} = 0,022 \mu\text{F}$ , y, observando el esquema del circuito real (*figura 3*) vemos que están conectados en serie, por lo que su capacidad se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$C_p = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (8)$$

Sustituyendo los valores de las capacidades en la ecuación obtenemos que la capacidad equivalente es  $C_p = 20 \text{ nF} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ . En la siguiente tabla se recogen los valores de los componentes del circuito a modo de recopilatorio.

$R_p (\Omega)$	$R_p = 1221 \Omega$
$L (\text{H})$	$3,9 \cdot 10^{-2} \text{ H}$
$C_p (\text{F})$	$2 \cdot 10^{-8} \text{ F}$

*Tabla 1: Medidas de los componentes del circuito*

## 4.2. Frecuencia de resonancia y factor de calidad $Q$

Como ya hemos comentado, en primer lugar, calcularemos la frecuencia de resonancia teórica, con las medidas de los componentes del circuito. Sustituyendo en la ecuación (6) los datos recogidos en la *tabla 1* calculamos  $f_{0,teo}$ :

$$f_{0,teo} \simeq 5698 \text{ Hz} = 5,698 \text{ kHz}$$

Una vez hallado el valor de la frecuencia de resonancia teórica lo hemos utilizado para hallar con mayor facilidad la frecuencia de resonancia experimentalmente, y hemos visto que esta era menor al valor teórico esperado, en concreto,  $f_{0,exp} = 5,61 \text{ kHz}$ . La incertidumbre de esta medida es discutible y no basta con tomar simplemente la resolución del osciloscopio, ya que los valores oscilan y en ocasiones nos es sencillo asegurar cual es el valor que debemos tomar de la medida. Por lo tanto, tomaremos una incertidumbre  $s(f) = 0,05 \text{ kHz}$ .

$$f_{0,exp} = 5,61 \pm 0,05 \text{ kHz}$$

Como ya hemos explicado, las frecuencias de corte son aquellas en las que el desfase de la señal es de  $\pm 45^\circ$ , al buscar estas frecuencias alrededor de la frecuencia de corte los valores que hemos medido son:

$$f_1 = 5,53 \pm 0,05 \text{ kHz}$$

$$f_2 = 5,74 \pm 0,05 \text{ kHz}$$

A modo de resumen mostramos en la siguiente tabla las frecuencias de resonancia,  $f_0$ , y de corte,  $f_1$  y  $f_2$ , junto a su correspondiente ángulo de desfase medido. El ángulo lo mostraremos sin incertidumbre, pues oscilaba en un rango de valores y este dato solo nos sirve para ver que la frecuencia de resonancia tiene un desfase aproximadamente nulo y las frecuencias de corte un desfase de  $45^\circ$  y  $315^\circ$ .

	Medida experimental de $f_c$ (kHz)	Desfase de la señal experimental ( $^\circ$ )
$f_0$ (kHz)	$5,61 \pm 0,05$	$358,2^\circ$
$f_1$ (kHz)	$5,53 \pm 0,05$	$45,1^\circ$
$f_2$ (kHz)	$5,74 \pm 0,05$	$314,6^\circ$

Tabla 2: Frecuencias de resonancia,  $f_0$ , y de corte,  $f_1$  y  $f_2$

Con las frecuencias de corte  $f_1$  y  $f_2$ , y con la frecuencia de resonancia  $f_0$  podemos calcular el factor de calidad  $Q$  mediante la ecuación (7). La incertidumbre de este parámetro la calculamos por propagación, teniendo en cuenta que  $f_0$ ,  $f_1$  y  $f_2$  son fuentes de incertidumbre.

$$s(Q) = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial f_0}\right)^2 \cdot s^2(f) + \left(\frac{\partial Q}{\partial f_1}\right)^2 \cdot s^2(f) + \left(\frac{\partial Q}{\partial f_2}\right)^2 \cdot s^2(f)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{f_2 - f_1}\right)^2 \cdot s^2(f) + \left(-\frac{f_0}{(f_2 - f_1)^2}\right)^2 \cdot s^2(f) + \left(\frac{f_0}{(f_2 - f_1)^2}\right)^2 \cdot s^2(f)} \quad (9)$$

Sustituyendo los datos tomados en las ecuaciones (7) y (9) obtenemos:

$$Q = 26,71 \pm 0,80$$

Obtenemos un factor de calidad mayor a 20 por lo que lo consideramos aceptable. Con todo el valor obtenido es, a priori, menor al teórico, pues el coeficiente de calidad es directamente proporcional a la frecuencia de resonancia, y el valor experimental de esta es menor al teórico, por lo que podríamos pensar que el factor de calidad también es menor (aunque quizás el ancho de banda teórico también sea diferente al que hemos medido). Calculamos a continuación el factor de calidad teórico (suponiendo el mismo ancho de banda) utilizando  $f_{0,exp}$ , para poder compararlo con el obtenido experimentalmente:

$$Q_{teo} = 27,13$$

Observamos, como ya hemos comentado, que el factor de calidad teórico es mayor que el experimental, suponiendo el mismo ancho de banda para ambos.

### 4.3. Análisis de la señal cuadrada

Comenzaremos el análisis de Fourier por la onda cuadrada. La función que describe esta señal alterna entre su valor mínimo y máximo sin pasar por los valores intermedios, como sí lo hace por ejemplo la onda senoidal. Para un período  $T$  y unos valores máximo y mínimo de  $+V$  y  $-V$  respectivamente, se define la función  $f(t)$  que caracteriza la onda cuadrada como:

$$f(t) = \begin{cases} -V & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right) \\ +V & \text{si } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

La función, de la forma en que la hemos definido, es una función impar (podría ser par si en lugar de estar centrada en el 0 lo estuviera en mitad de uno de los extremos), por lo que solo tendrá términos en senos en el desarrollo en serie de Fourier. Por lo tanto, aplicando la ecuación (3) tenemos:

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 -V \sen(n\omega t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} V \sen(n\omega t) dt \right] = \frac{4V}{n\omega T} \left[ 1 - \cos\left(\frac{Tn\omega}{2}\right) \right]$$

Teniendo en cuenta que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , y que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  obtenemos:

$$b_n = \frac{2V}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{2V}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (10)$$

Observamos que para los  $n$  pares  $b_n = 0$ , por lo que en este caso solo tendremos armónicos en los impares. Por lo tanto, haciendo el cambio de variable  $n = 2k - 1$ , la serie de Fourier resultante para la señal cuadrada es:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V}{(2k-1)\pi} \sen[(2k-1)\omega t] \quad (11)$$

Con esta expresión podemos obtener el valor de los armónicos sabiendo el potencial aplicado a la señal de entrada. Los datos medidos en el laboratorio son los voltajes pico-pico  $V_{pp}$  de la onda, en este caso la cuadrada. El voltaje de la señal de entrada se mantiene constante durante toda la práctica, y el valor que hemos medido es:

$$V_{pp,1} = 13,4 \pm 0,2 \text{ V}$$

Teniendo el voltaje pico-pico el voltaje de la onda cuadrada es la mitad que este, por lo que el voltaje obtenido que usaremos para calcular los armónicos es:

$$V_1 = 6,7 \pm 0,1 \text{ V}$$

Los armónicos teóricos llevan asociados una incertidumbre, como consecuencia de que para calcularlos se ha tomado una medida directa del voltaje, que lleva asociada una incertidumbre, por lo que las incertidumbres de los armónicos se calculan por propagación obteniendo:

$$s(b_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial b_n}{\partial V}\right)^2 \cdot s^2(V)} = \frac{4}{n\pi} s(V) \quad (12)$$

Sustituyendo los datos en las ecuaciones (10) y (12) obtenemos los 5 primeros armónicos teóricos, teniendo en cuenta que en los  $n$  pares los armónicos son nulos.

$$b_1 = 8,531 \pm 0,127 \text{ V}$$

$$b_3 = 2,844 \pm 0,042 \text{ V}$$

$$b_5 = 1,706 \pm 0,025 \text{ V}$$

Una vez hemos calculado los armónicos teóricos pasamos a la obtención de los armónicos experimentales. Como ya hemos visto en el procedimiento experimental, para buscar los



armónicos hemos establecido una frecuencia  $f = f_0/n$ , y a partir de esa frecuencia hemos buscado la que entregaba una mayor amplitud en la señal de salida. Los armónicos serán los voltajes de las señales de salida, los cuales obtenemos a partir de  $V_{pp,2}$  que hemos medido. Recordamos que para los casos en los que las amplitudes no sean constantes tomamos el mayor valor y el menor y hacemos la media aritmética de ellos.

Como hemos visto en el cálculo teórico, para los pares no tenemos armónicos. En la parte experimental hemos visto como se cumple este hecho, pues para las frecuencias que corresponderían a los armónicos pares obtenemos una onda en la salida de una amplitud de unos 0,5 V, la cual no es un armónico sino una especie de senoide, cuya forma (en amarillo) se muestra en las siguientes imágenes:



Figura 6: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/2$  ( $n = 2$ )



Figura 7: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/4$  ( $n = 4$ )

Para los armónicos impares hemos obtenido los siguientes resultados:



Figura 7: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0$  ( $n = 1$ )

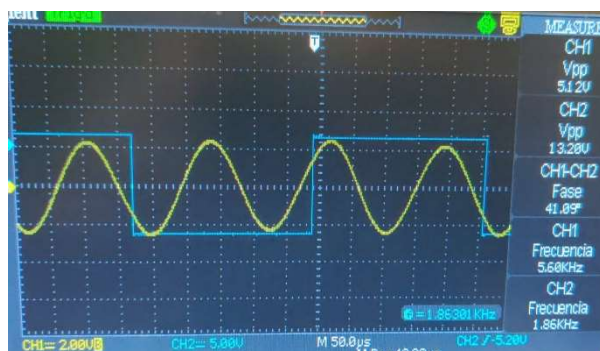


Figura 8: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/3$  ( $n = 3$ )



Figura 9: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/5$  ( $n = 5$ )

Observamos que a medida que aumentamos la frecuencia la amplitud de la señal de salida se va reduciendo, lo que concuerda con los resultados de los armónicos teóricos calculados previamente. En la siguiente tabla se recogen los datos de los voltajes pico-pico medidos, teniendo en cuenta que en  $n = 5$  se han tomado el valor mínimo y el máximo y se ha realizado la media.

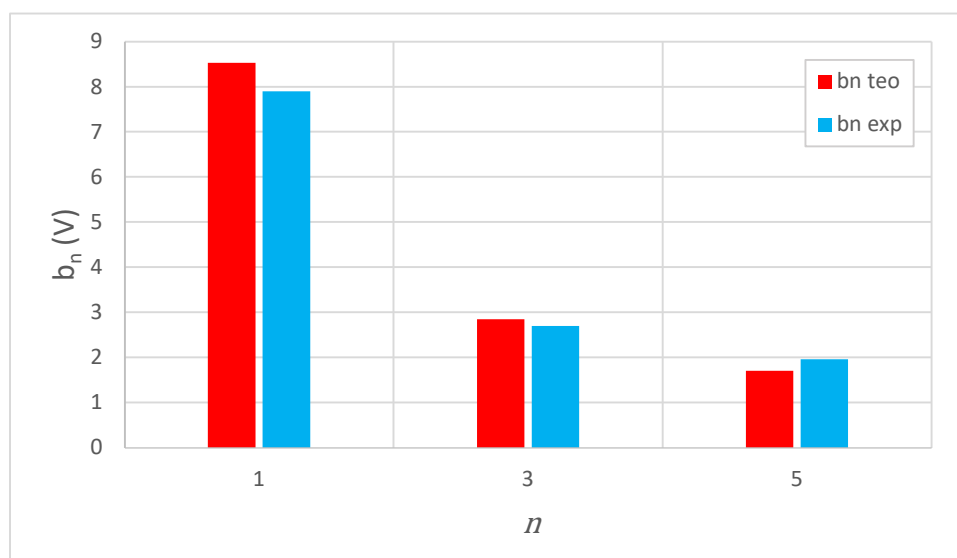
$n$	$f$ (kHz)	$V_{pp,2}$ (V)	$b_n$ (V)
1	$5,61 \pm 0,05$	$15,80 \pm 0,20$	$7,900 \pm 0,100$
2	$1,87 \pm 0,05$	$5,40 \pm 0,20$	$2,700 \pm 0,100$
3	$1,13 \pm 0,05$	$3,68 \pm 0,23$	$1,960 \pm 0,115$

*Tabla 3:  $b_n$  experimentales para la señal cuadrada*

Reunimos los datos teóricos experimentales y teóricos en una misma tabla y los representaremos gráficamente en un gráfico de barras con el objetivo de facilitar la comparación.

$n$	$b_{n,teo}$ (V)	$b_{n,exp}$ (V)
1	$8,531 \pm 0,127$	$7,900 \pm 0,100$
2	$2,844 \pm 0,042$	$2,700 \pm 0,100$
3	$1,706 \pm 0,025$	$1,960 \pm 0,130$

*Tabla 4:  $b_n$  teóricos y experimentales para la señal cuadrada*



*Figura 10: Comparación armónicos (señal cuadrada) teóricos (rojo) y experimentales (azul)*

Observamos que los valores teóricos y experimentales son bastante similares, siendo un poco mayor el valor teórico  $b_{1,teo}$  y  $b_{2,teo}$  a sus homólogos experimentales, mientras que  $b_{3,teo}$  es menor al obtenido experimentalmente.

Para finalizar con el estudio de la señal cuadrada realizaremos un estudio del comportamiento de los armónicos en función de la frecuencia. Para ello establecemos una frecuencia  $f = f_0/5$ , para así estudiar el 5º armónico. Representamos los armónicos de la señal de entrada normalizados al primero. Representamos también las amplitudes en la salida del circuito, que actúa como filtro, de cada armónico para esta frecuencia, normalizados en este caso al 5º armónico, que es el que queremos estudiar.

Junto a estos datos representamos también la función lorentziana, que relaciona la amplitud de la salida de la onda al pasar por el filtro en función de la frecuencia, y cuya expresión es:

$$A_{RLC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(Q \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (13)$$

Al establecer la frecuencia  $f = f_0/5$  estamos sintonizando el circuito en el 5º armónico, es decir, se maximiza la amplitud de este armónico y se pueden discriminar los demás. Al fijar esta frecuencia, si tenemos un armónico de amplitud  $c_n$ , al pasar por el filtro su amplitud  $c'_n$  será:

$$c'_n = \frac{c_n}{\sqrt{1 + \left(Q \cdot \frac{n\omega}{5\omega} - \frac{5\omega}{n\omega}\right)^2}} \quad (14)$$

Normalizando tanto las amplitudes de los armónicos de la entrada como las amplitudes de la salida del filtro (14), de la forma que hemos explicado en cada caso, hemos realizado la siguiente representación con datos que se muestran en la tabla:

$n$	Armónico $b_n$ de la señal de entrada	Amplitud del armónico en la salida
1	1,0000	0,0390
2	0,3334	0,0585
3	0,2000	1,0000

Tabla 5: Amplitud normalizada de los armónicos  $b_n$  en la señal de entrada y de salida del filtro

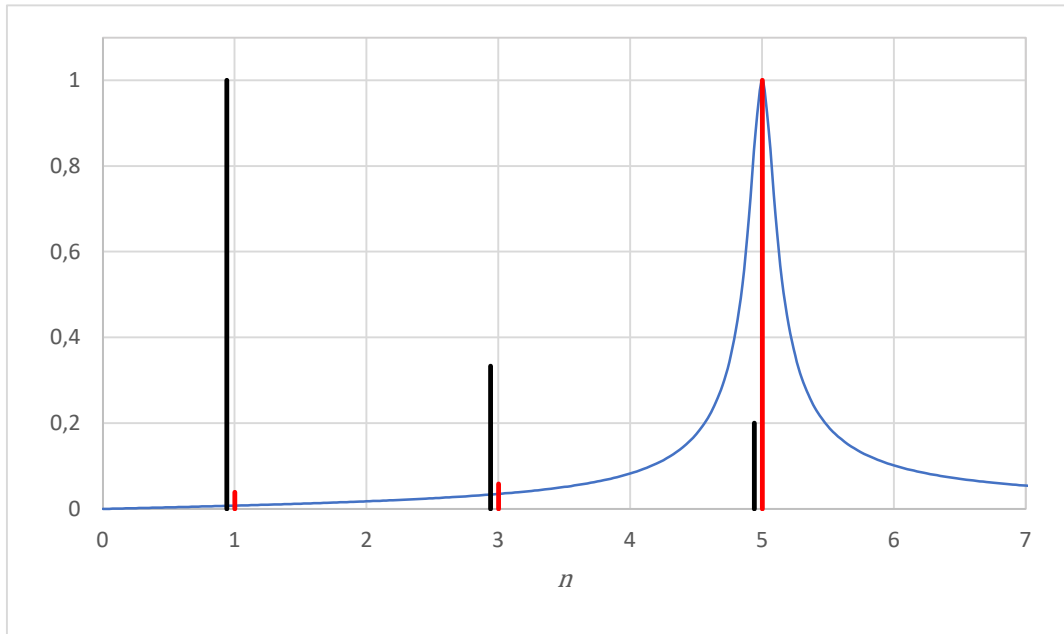


Figura 11: Comparación armónicos de la señal cuadrada a una frecuencia  $f = f_0/5$

En rojo se representan las amplitudes de la salida normalizadas al 5º armónico, en negro las de los armónicos de la entrada, normalizados al 1º de ellos, y en azul la lorentziana, tomando en este caso la frecuencia constante y como variable  $n$ . El criterio de discriminación propuesto es que  $a_k A_{RLC} < \frac{1}{5} a_n, k \neq n$ , y fácilmente comprobamos que se cumple tanto para  $n = 1$  como para  $n = 3$ , por lo que podemos discriminar ambos armónicos en el caso de la frecuencia  $f = f_0/5$ .

#### 4.4. Análisis de la señal triangular

Continuamos el análisis de Fourier con la onda triangular. La función que describe esta señal pasa del valor máximo al mínimo de manera lineal, con rectas de misma pendiente en valor absoluto, pero signo alternado. Matemáticamente podemos definir la función periódica de la siguiente forma:

$$f(t) = \begin{cases} V + \frac{2V}{T}t & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right) \\ V - \frac{2V}{T}t & \text{si } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

Al haber definido de esta forma, la función es par, por lo que en este caso solo tendremos términos en cosenos en el desarrollo de Fourier ( $b_n = 0$ ). Además de los términos  $a_n$ , que obtendremos mediante la ecuación (2), también debemos tener en cuenta el término  $a_0$ , el cual se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (15)$$

Aplicando las ecuaciones (2) y (15) obtenemos los siguientes resultados:

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left( V + \frac{2V}{T}t \right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left( V - \frac{2V}{T}t \right) dt \right] = V$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left( V + \frac{2V}{T}t \right) \cos(n\omega t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left( V - \frac{2V}{T}t \right) \cos(n\omega t) dt \right] = \frac{8V}{n^2\omega^2 T^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{Tn\omega}{2}\right) \right]$$

Teniendo en cuenta que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , y que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  obtenemos:

$$a_n = \frac{2V}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] \quad (16)$$

Observamos que nuevamente los armónicos pares se anulan. Hacemos pues el mismo cambio de variable  $n = 2k - 1$  para obtener la serie de Fourier de la señal triangular, recordando en esta ocasión que el término  $a_0$  no es nulo:

$$f(t) = \frac{V}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4V}{(2k-1)^2\pi^2} \cos[(2k-1)\omega t] \quad (17)$$

El voltaje pico-pico medido en el laboratorio para la onda triangular oscilaba en un rango de  $\pm 0,4$  V, por lo que en este caso la incertidumbre de la medida será esa variación. A diferencia de la onda cuadrada, por cómo hemos definido la función, el voltaje de entrada coincide con el  $V_{pp}$  por lo que:

$$V_{pp,1} = V_1 = 13,04 \pm 0,40 \text{ V}$$

Calculamos la expresión de la incertidumbre de los armónicos teóricos por propagación, teniendo en cuenta que como sucedía en la onda cuadrada, la única fuente de incertidumbre es el voltaje:

$$s(a_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial a_n}{\partial V}\right)^2 \cdot s^2(V)} = \frac{4V}{n^2 \pi^2} s(V) \quad (18)$$

Sustituyendo los datos en las ecuaciones (16) y (18) obtenemos los 5 primeros armónicos teóricos, teniendo en cuenta que en los  $n$  pares los armónicos son nulos:

$$a_1 = 5,2849 \pm 0,1621 \text{ V}$$

$$a_3 = 0,5872 \pm 0,0180 \text{ V}$$

$$a_5 = 0,2114 \pm 0,0064 \text{ V}$$

Una vez hemos calculado los armónicos teóricos pasamos a la obtención de los armónicos experimentales. Como ya vimos en el anterior apartado y en el procedimiento teórico, para buscar los armónicos establecemos una frecuencia  $f = f_0/n$ , y a partir de esa frecuencia buscamos la que entregaba una mayor amplitud en la señal de salida. Los armónicos serán los voltajes de las señales de salida, los cuales obtenemos a partir de  $V_{pp,2}$  que hemos medido.

Como hemos visto en el cálculo teórico, y de la misma forma que sucedía para el caso de la onda cuadrada, los armónicos de los  $n$  pares son nulos. Los resultados obtenidos para estas frecuencias se muestran a continuación y en ellos observamos una onda resultado de la combinación de varios armónicos en distintas amplitudes:

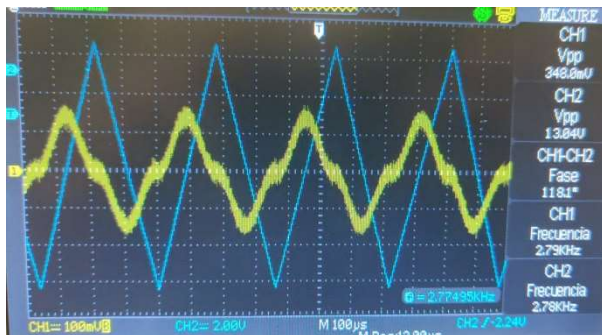


Figura 12: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/2$  ( $n = 2$ )

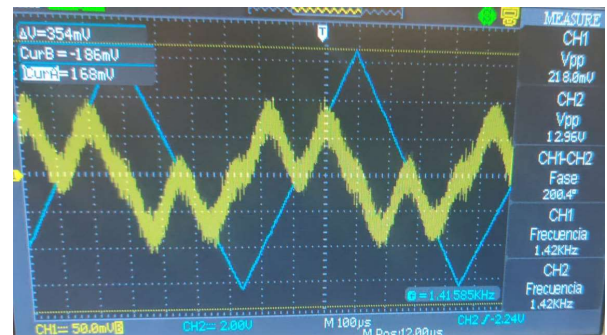


Figura 13: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/4$  ( $n = 4$ )

Para los armónicos impares hemos obtenido los siguientes resultados:

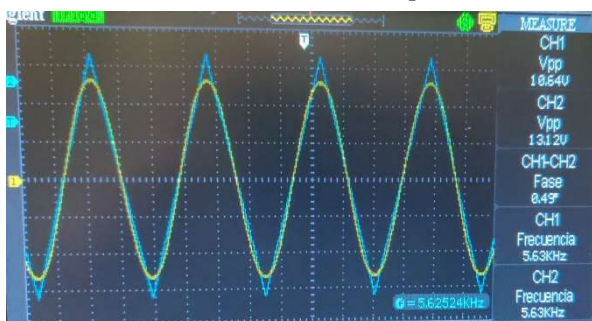


Figura 14: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0$  ( $n = 1$ )

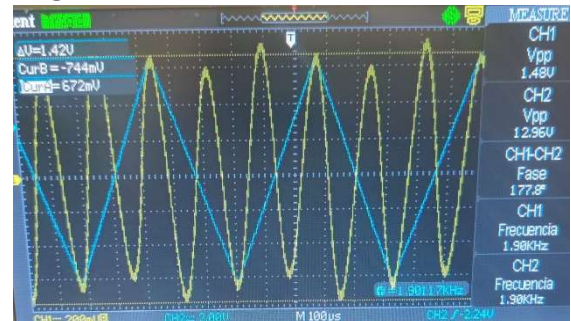


Figura 15: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_0/3$  ( $n = 3$ )



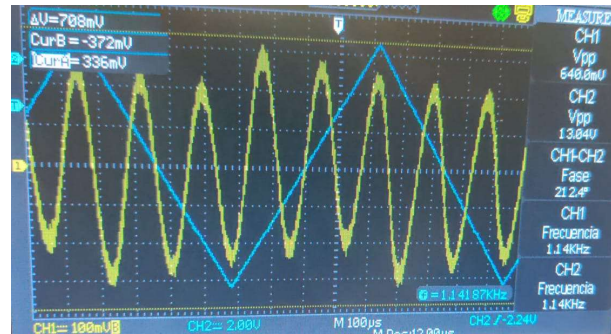


Figura 16: Respuesta del circuito para una frecuencia  $f = f_n/5$  ( $n = 5$ )

Observamos nuevamente que a medida que aumentamos la frecuencia la amplitud de la señal de salida se va reduciendo, lo que concuerda con los resultados de los armónicos teóricos calculados previamente. En la siguiente tabla se recogen los datos de los voltajes pico-pico medidos, teniendo en cuenta que en  $n = 3$  y  $n = 5$  se han tomado el valor mínimo y el máximo y se ha realizado la media.

$n$	$f$ (kHz)	$V_{pp,2}$ (V)	$a_n$ (V)
1	$5,61 \pm 0,05$	$10,7200 \pm 0,4000$	$5,3600 \pm 0,2000$
2	$1,90 \pm 0,05$	$1,3850 \pm 0,0495$	$0,6925 \pm 0,0245$
3	$1,14 \pm 0,05$	$0,5200 \pm 0,0453$	$0,2600 \pm 0,0225$

Tabla 6:  $b_n$  experimentales para la señal triangular

Reunimos los datos teóricos experimentales y teóricos en una misma tabla y los representaremos gráficamente en un gráfico de barras con el objetivo de facilitar la comparación.

$n$	$a_{n,teo}$ (V)	$a_{n,exp}$ (V)
1	$5,2849 \pm 0,1621$ V	$5,3600 \pm 0,2000$
2	$0,5872 \pm 0,0180$ V	$0,6925 \pm 0,0245$
3	$0,2114 \pm 0,0064$ V	$0,2600 \pm 0,0225$

Tabla 7:  $b_n$  teóricos y experimentales para la señal triangular

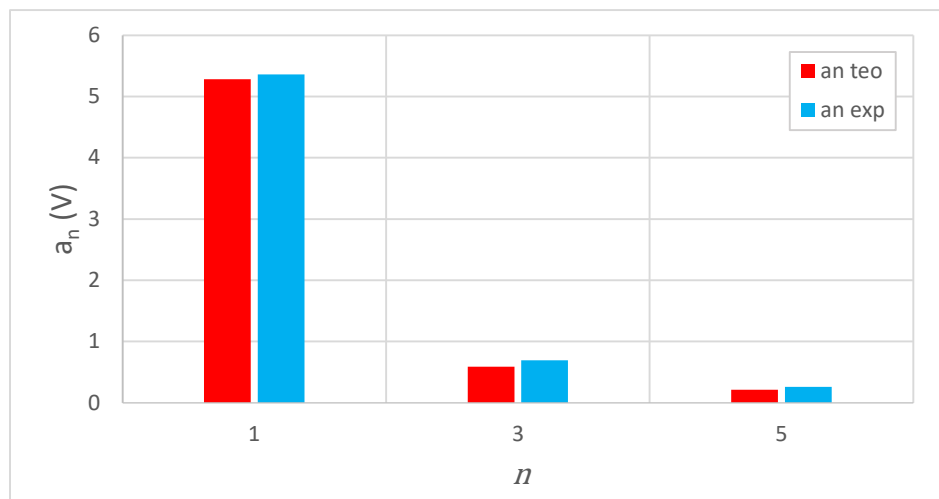


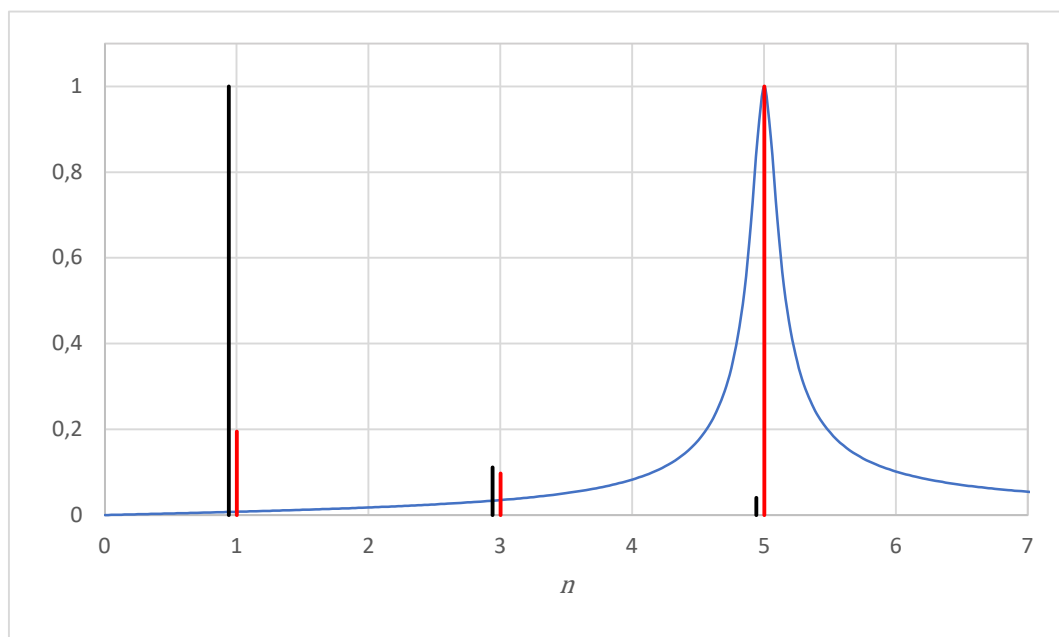
Figura 17: Comparación armónicos (señal triangular) teóricos (rojo) y experimentales (azul)

En este caso observamos que los resultados experimentales obtenidos son mayores a los armónicos teóricos. Además observamos que la amplitud del primer armónico es mucho mayor que la de los demás. Esto se debe a que el primer armónico ya constituye una muy buena aproximación a la señal de entrada, como podemos comprobar en la *figura 14*.

Para finalizar con el estudio de la señal triangular, y de igual forma que en con la señal cuadrada, realizaremos un estudio del comportamiento de los armónicos en función de la frecuencia. Estableceremos nuevamente una frecuencia  $f = f_0/5$  para estudiar el quinto armónico. Recordamos que normalizamos los armónicos de la señal de entrada al primero ( $n = 1$ ) y los de la salida al quinto ( $n = 5$ ), que es el que queremos estudiar. De la misma forma que con la onda cuadrada, sustituimos los datos en la ecuación (14), obteniendo los siguientes resultados.

$n$	Armónico $b_n$ de la señal de entrada	Amplitud del armónico en la salida
1	1,0000	0,1950
2	0,1111	0,0974
3	0,0400	1,0000

*Tabla 8: Amplitud normalizada de los armónicos  $a_n$  en la señal de entrada y de salida del filtro*



*Figura 18: Comparación armónicos de la señal triangular a una frecuencia  $f = f_0/5$*

Al igual que con la onda cuadrada, en rojo se representan las amplitudes de la salida normalizadas al 5º armónico, en negro las de los armónicos de la entrada, normalizados al 1º de ellos, y en azul la lorentziana, tomando la frecuencia constante y como variable  $n$ . Recordamos que el criterio de discriminación propuesto es que  $a_k A_{RLC} < \frac{1}{5} a_n, k \neq n$ , por lo que en este caso el primer armónico estaría casi en el límite de discriminación, pues al normalizar los armónicos de la salida al quinto, el primer armónico ( $n = 1$ ) nos da una amplitud normalizada de 0,1950, que es casi  $\frac{1}{5}$  (al normalizar al quinto armónico  $a_{5,nor} = 1$ ), el límite de discriminación que hemos supuesto.

#### 4.5. Análisis del pulso

El último tipo de señal que estudiaremos será el pulso. La función que describe esta señal es similar a la delta de Dirac, una función que no es continua sino discreta, aunque en este caso la función toma un valor finito en un punto y no infinito como si lo hace la delta de Dirac. Sin embargo, en el laboratorio no podemos conseguir un pulso exacto, ya que por muy pequeño que sea el intervalo de señal nunca será nulo.

Con todo, utilizando el rectificador en la señal triangular si podemos conseguir una aproximación a esta señal. A continuación, se muestra la señal (en azul) que hemos conseguido en el laboratorio.

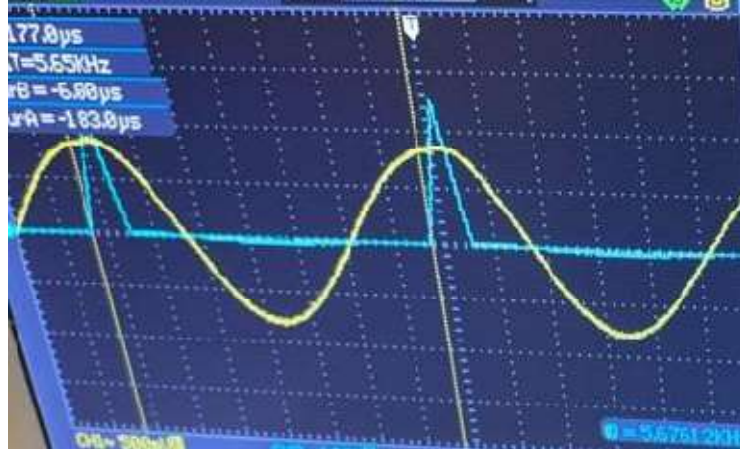


Figura 19: Señal de pulso (azul)

Como ya hemos explicado, la señal de pulso la obtenemos con el rectificador en la señal triangular. Si centramos la función con el 0 en un máximo, llamamos  $a$  a la distancia desde la base de la señal al máximo de amplitud (semianchura) y  $T$  al período (distancia entre los máximos de los pulsos) podemos expresar la señal mediante la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, -a\right) \\ V + \frac{V}{a}t & \text{si } t \in (-a, 0] \\ V - \frac{V}{a}t & \text{si } t \in [0, a) \\ 0 & \text{si } t \in \left(a, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

De la misma forma que con la señal triangular, el pulso es una función par por lo que nuevamente solo tenemos términos en cosenos ( $b_n = 0$ ) y el término  $a_0$ , los cuales calculamos aplicando las expresiones (2) y (15):

$$a_0 = \frac{2}{T} \left[ \int_{-a}^0 \left( V + \frac{V}{a}t \right) dt + \int_0^a \left( V - \frac{V}{a}t \right) dt \right] = \frac{2Va}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_{-a}^0 \left( V + \frac{V}{a}t \right) \cos(n\omega t) dt + \int_0^a \left( V - \frac{V}{a}t \right) \cos(n\omega t) dt \right] = \frac{4V}{Tan^2\omega^2} [1 - \cos(n\omega t)]$$



Teniendo en cuenta que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , y que  $1 - \cos(\alpha) = 2\sin^2(\alpha/2)$  obtenemos la siguiente expresión:

$$a_n = \frac{2VT}{an^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi a}{T}\right) \quad (19)$$

Por lo tanto, el desarrollo en serie de Fourier de la señal será:

$$f(t) = \frac{Va}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2VT}{an^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi a}{T}\right) \cos\left(\frac{2n\pi a}{T}\right) \quad (20)$$

En el laboratorio hemos medido la anchura  $A$  de la señal (base del pulso) y el período de esta, midiendo la distancia entre los picos del pulso. Como incertidumbre de ambas medidas daremos 4  $\mu\text{s}$ , para evitar posibles errores al ajustar el cursor. Los datos experimentales medidos, teniendo en cuenta que  $a = A/2$ , se muestran en la siguiente tabla.

$f$ (kHz)	$V_1$ (V)	$A$ ( $\mu\text{s}$ )	$a$ ( $\mu\text{s}$ )	$T$ ( $\mu\text{s}$ )
$5,58 \pm 0,05$	$1,16 \pm 0,20$	$18 \pm 4$	$9 \pm 2$	$179 \pm 4$
$2,179 \pm 0,05$	$1,16 \pm 0,20$	$38 \pm 4$	$19 \pm 2$	$360 \pm 4$
$1,87 \pm 0,05$	$1,16 \pm 0,20$	$56 \pm 4$	$28 \pm 2$	$536 \pm 4$
$1,41 \pm 0,05$	$1,16 \pm 0,20$	$76 \pm 4$	$38 \pm 2$	$704 \pm 4$
$1,13 \pm 0,05$	$1,16 \pm 0,20$	$88 \pm 4$	$44 \pm 2$	$796 \pm 4$

*Tabla 9: Datos experimentales del pulso*

Observamos que la amplitud del pulso se mantiene constante, aunque si varía el ancho de la señal y su período. Sustituyendo los datos obtenidos en la ecuación (19) calcularemos los 5 primeros armónicos, y para obtener su incertidumbre debemos calcularla por propagación, teniendo en cuenta que las fuentes de incertidumbre en este caso son el potencial de entrada  $V_1$ , el período  $T$  y el parámetro  $a$  (semianchura):

$$s(a_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial a_n}{\partial V}\right)^2 \cdot s^2(V) + \left(\frac{\partial a_n}{\partial T}\right)^2 \cdot s^2(T) + \left(\frac{\partial a_n}{\partial a}\right)^2 \cdot s^2(a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(a_n) = \sqrt{(B)^2 \cdot s^2(V) + (C)^2 \cdot s^2(T) + (D)^2 \cdot s^2(a)} \quad (21)$$

siendo B, C y D:

$$B = \frac{\partial a_n}{\partial V} = \frac{2T}{an^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi a}{T}\right)$$

$$C = \frac{\partial a_n}{\partial T} = \frac{-2\pi anV \cdot \sin\left(\frac{2n\pi a}{T}\right) + 2TV \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi a}{T}\right)}{an^2\pi^2 T}$$

$$D = \frac{\partial a_n}{\partial a} = \frac{2\pi anV \cdot \sin\left(\frac{2n\pi a}{T}\right) - 2TV \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi a}{T}\right)}{a^2 n^2 \pi^2}$$

Sustituyendo los datos experimentales en las ecuaciones (19) y (21) calculamos los 5 primeros armónicos teóricos:

$$a_1 = 0,1596 \pm 0,0403 \text{ V}$$

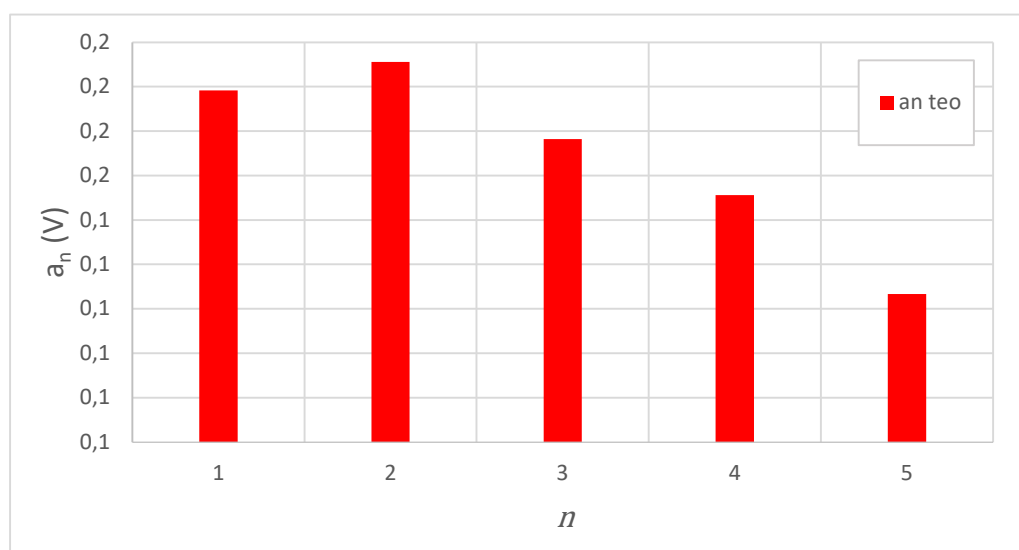
$$a_2 = 0,1628 \pm 0,0259 \text{ V}$$

$$a_3 = 0,1541 \pm 0,0214 \text{ V}$$

$$a_4 = 0,1478 \pm 0,0192 \text{ V}$$

$$a_5 = 0,1367 \pm 0,0173 \text{ V}$$

En cuanto a la medida de los armónicos experimentales en el laboratorio hemos cometido un error a la hora de realizar la práctica, pues no hemos tomado los datos de las amplitudes de la salida, lo que nos imposibilita comparar los datos teóricos con los experimentales. Los datos se tomarían midiendo los voltajes pico-pico de la salida, de la misma forma que en los apartados de la señal cuadrada y la señal triangular, y los  $a_n$  serían la mitad del  $V_{pp,2}$  medido. Los datos experimentales los compararíamos con los teóricos para observar la tendencia y la calidad de la experiencia, aunque lastimosamente por este error no podemos realizar la comparación como en la señal cuadrada y la triangular. De todos modos, representaremos los armónicos teóricos que hemos obtenido con las medidas que sí hemos tomado, para ver el espectro de los armónicos del pulso.



*Figura 20: Armónicos teóricos del pulso*

En este caso no observamos una tendencia tan clara al amortiguamiento de los armónicos como en las señales cuadrada y triangular. Sin embargo, si que parece que a partir del 2º sí van decreciendo las amplitudes.

## 5. Conclusiones

A lo largo de esta práctica hemos estudiado como podemos desarrollar cualquiera señal en serie de Fourier, es decir, expresarla como una suma de funciones sinusoidales. También hemos estudiado la respuesta de un circuito RLC conectado en paralelo a diferentes señales de entrada. Como objeto de estudio del circuito RLC hemos tomado la señal cuadrada, la triangular y hemos hecho una aproximación a lo que sería un pulso (función delta de Dirac pero con un valor finito).

En primer lugar, hemos tomado las medidas de los parámetros que determinan el circuito RLC y con ello hemos estimado la frecuencia de resonancia  $f_0$  y calculado el factor de calidad  $Q$ , obteniendo un valor de este mayor a 20 (como se pedía para asegurar la fiabilidad de los resultados). Hemos comprobado además que el valor del factor de calidad obtenido es menor que el teórico, pues como ya hemos comentado en el apartado de análisis de resultados, la frecuencia de resonancia medida experimentalmente era menor que la teórica.

En el análisis de la señal cuadrada, los resultados obtenidos parecen a priori satisfactorios. Las amplitudes de los armónicos experimentales medidos se aproximan en gran medida a los valores teóricos que hemos calculado, tal y como podemos ver y ya hemos comentado en la *figura 10*. Además, hemos realizado el estudio de los armónicos cuando la frecuencia de la señal de entrada es  $f = f_0/5$ , es decir, el circuito está sintonizado para el 5º armónico. Aplicando el criterio de discriminación  $a_k A_{RLC} < \frac{1}{5} a_n, k \neq n$ , observamos fácilmente en la *figura 11* que podemos discriminar los 2 primeros armónicos. El procedimiento de este estudio se explica con detalle en el apartado 4.3., pero como conclusión podemos decir que vemos claramente como el circuito está sintonizado al 5º armónico.

Seguimos con el análisis de la señal triangular, en la cual el procedimiento de estudio es análogo al de la señal cuadrada. En este caso la amplitud experimental de los armónicos es menor a la teórica, aunque están dentro del rango de incertidumbre. Observamos que la diferencia de amplitud entre el primer armónico y el tercero y cuarto es mucho mayor que en el caso anterior. Como ya hemos comentado en el correspondiente apartado, este se debe a que el primer armónico ya supone una buena aproximación a la onda triangular, por lo que el error de la serie de Fourier con solo el primer término es reducido, por lo que tiene sentido que los términos posteriores tengan una menor amplitud.

Al igual que con la señal cuadrada, también hemos realizado el estudio de las amplitudes de los armónicos cuando el circuito está sintonizado al quinto armónico ( $f = \frac{f_0}{5}$ ). En este caso para el armónico fundamental nos encontramos en el límite de discriminación pues al normalizar las amplitudes de los armónicos de la señal de salida  $a_1$  era casi un quinto de  $a_5$  (recordamos que el criterio de discriminación era  $a_k A_{RLC} < \frac{1}{5} a_n$ ).

Finalmente, hemos estudiado una señal triangular que, con el rectificador de señal, hemos tratado de aproximar a un pulso. Sin embargo, como ya hemos comentado el estudio de esta onda no es tan riguroso y completo como en las anteriores, ya que no hemos medido las amplitudes experimentales, por lo que no tenemos cómo comparar los armónicos teóricos. Sin embargo, podemos observar en los resultados teóricos como sus amplitudes son muy similares unas con otras (siendo la de mayor amplitud  $a_2$  y no  $a_1$ ), a diferencia de las anteriores señales.

## 5.1. Cuestiones

### 1. ¿Por qué ciertas funciones periódicas no tienen armónicos pares?

Al desarrollar una función en serie de Fourier existen varias razones por las cuales puede no tener armónicos pares. La primera de ellas es que la función sea impar, como ocurre en el caso de la señal cuadrada. La otra es por la propia simetría de la onda, por ejemplo, en el caso, que hemos estudiado, de la señal triangular observamos que la onda es simétrica respecto al origen (y también con respecto al semiperíodo), lo que provoca que al realizar el desarrollo los armónicos pares se anulen.

En resumen, una función periódica puede no tener armónicos pares debido a su paridad o a ciertas simetrías de su forma.

### 2. ¿Podría una función periódica no tener armónicos impares distintos de la componente fundamental? ¿Podría no tener la fundamental?

No, una función periódica siempre tendrá armónicos impares distintos de la componente fundamental. El único caso en el que se podría dar este hecho es que la función sea una constante. Si suponemos una función periódica arbitraria, por lo general no será ni par ni impar, por lo que tanto los coeficientes  $a_n$  como los  $b_n$  serán (en general) distintos de 0.

Por otra parte, si suponemos una función par los  $b_n$  serán 0 para todo  $n$  (salvo para  $n = 1$  si la función es una constante). Sin embargo, sí tendría los  $a_n$  y el fundamental  $a_0$ . Si suponemos que la función es impar, los  $a_n$  se anulan, pero tenemos los  $b_n$  impares, como ocurría en el caso estudiado de la onda cuadrada.

Por último, una función periódica puede que no tenga componente fundamental, ya que esta es el promedio de la función en un período completo, y por lo tanto el promedio puede ser 0, como ocurre nuevamente en el caso de la onda cuadrada. Sin embargo, las dos condiciones simultáneas es imposible que se cumplan, ya que, como hemos visto, la única forma de que una función periódica no tenga armónicos impares distintos de la componente fundamental es que la función sea una constante, por lo que su componente fundamental sería la propia constante (el promedio de una constante es evidentemente una constante). Si se anulase la componente fundamental significaría que la constante de la función es también 0, es decir  $f(t) = 0$ , por lo que no tendríamos función.

## Referencias

- David J. Griffiths; Introduction to electrodynamics.
- Edminister, J. A. Circuitos eléctricos. 2 edición. (1994) McGraw-Hill, Capítulo 12, pág 195.
- Rosario Bartiromo, Mario de Vincenzi, Electrical Measurements in the Laboratory practice (2016). Springer, Cap. 6.2.2 y 8.3.
- Guíons alternativos/Análisis de Fourier.
- Guiones de prácticas/Práctica 3: Circuito RLC paralelo. Análisis de Fourier.