

Oscilador amortiguado y forzado

Daniel Pérez Curros

1 Oscilador amortiguado

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo de Pohl de amplitud inicial θ_0 , frecuencia ω_1 y fase inicial φ_0 amortiguado por un coeficiente γ es:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \quad (1)$$

O, si solo tenemos en cuenta los máximos de la amplitud:

$$\theta(t_{max}) = \theta_0 e^{-\gamma t_{max}} \quad (2)$$

1.1 Obtención de γ y ω_1 en función de I

El coeficiente de amortiguamiento está en parte determinado por las fuerzas de rozamiento que se dan en el péndulo, pero el efecto más grande que vemos depende de las corrientes de Foucault generadas por una corriente de intensidad I que circula por el electroimán. Nuestro objetivo principal será calcular ω_1 de forma directa, a partir del tiempo de las oscilaciones medido en el laboratorio; y γ mediante un ajuste a la ecuación (2), salvo por algunos detalles que mencionaré más adelante.

Antes de hacer nada, hay que hacer tres aclaraciones sobre las medidas. En el péndulo hay una serie de marcas con números que miden longitudes desde -20 hasta 20 en intervalos de 0,2, pero las unidades son completamente arbitrarias. Además, el centro está escorado a la izquierda, aparentemente en el valor -1. Por eso los datos que usamos están corregidos con respecto a los valores crudos, aunque el método usado (restar o sumar 1 a las medidas) puede que no sea el más preciso posible.

La segunda cuestión es que, excepto para $I_1 = 0$, los datos de las amplitudes y el tiempo total se anotaron viendo un vídeo del movimiento, no en tiempo real. Es decir, en principio deberían ser más precisos.

En tercer lugar, las medidas del periodo se tomaron cronometrando el tiempo total de todas las oscilaciones de cada serie, y luego dividiendo entre el número total de oscilaciones. En la práctica del giróscopo, sobre la medida directa del momento de inercia I_3 , argumenté por qué, debido al tiempo de reacción, las medidas del tiempo estaban sistemáticamente desviadas. En este caso, el movimiento comenzaba con una cuenta atrás, por lo que no hay motivo para pensar que esto suceda (tanto el péndulo como el cronómetro reaccionan a la cuenta atrás, no entre sí); y el tiempo final se comprobaba en el vídeo, ya que en él se veía el cronómetro. Si el análisis se hubiese hecho minuciosamente, fotograma a fotograma, habría que tener en cuenta los FPS del vídeo a la hora de calcular la incertidumbre, pero dado que no fue *tan* exhaustivo probablemente es suficiente con suponer que $\sigma(t_{total}) = 0,2$ s.

Ahora sí, comenzamos con $I_1 = 0$. En este caso, no hay corriente, por lo que el amortiguamiento depende por completo de las fuerzas de rozamiento mecánicas. Tomando únicamente una medida por ciclo, calculamos que:

$$\omega_{11} = 3,093 \pm 0,003 \text{ rad/s}$$

y ajustando a una curva $y = ae^{-bx}$, vemos que

$$a = \theta_{01} = 19,5 \pm 0,1 \text{ u}$$

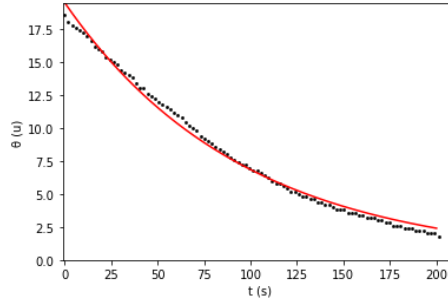


Figura 1: amplitud máxima en función del tiempo del péndulo con $I = 0$. Las barras de error son demasiado pequeñas como para que se vean a esta escala.

$$b = \gamma_1 = 0,0105 \pm 0,0001 \text{ s}^{-1}$$

A pesar de tener casi 100 puntos, el ajuste no es muy bueno. Sabemos que la amplitud θ_0 ha de ser del orden de 18,6 u (unidades arbitrarias), porque ese es el valor inicial medido, y sin embargo aquí se desvía bastante. Se ve, además, que la curva no se acerca demasiado a los puntos.

Ahora pongamos $I_2 = 0,30$ A. A partir de este momento tomamos siempre dos medidas por ciclo (una en cada extremo), por lo que ahora podemos ajustar los datos a la función (1), de la forma¹ $y = \theta_0 e^{-bx} \cos(cx + d)$. De modo que tendremos tres curvas con las que calcular γ , y una para calcular ω_1 (además de la medida directa, que es $\omega_1 = 3,081 \pm 0,009$ rad/s).

Los parámetros que obtenemos para (1) son:

$$b = \gamma = 0,069 \pm 0,002 \text{ s}^{-1} \quad c = \omega_1 = 3,081 \pm 0,003 \text{ rad/s} \quad d = \varphi_0 = -3,14 \pm 0,04 \text{ rad}$$

Una cosa que llama la atención es que, al contrario que en la ecuación original, φ_0 no es 0, con lo que la fase inicial teórica debe ser $-\pi$. La razón es que cada oscilación empieza por el lado izquierdo del péndulo, que es el lado negativo, por lo que el valor inicial no es θ_0 sino $-\theta_0$. Y si ahora hacemos el ajuste para (2):

$$a_{(1)} = -\theta_0 = -18,71 \pm 0,06 \text{ u} \quad b_{(1)} = \gamma = 0,0700 \pm 0,0003 \text{ s}^{-1}$$

$$a_{(2)} = \theta_0 = 18,2 \pm 0,1 \text{ u} \quad b_{(2)} = \gamma = 0,0732 \pm 0,0008 \text{ s}^{-1}$$

Si hacemos la media para ω_1 y γ , obtenemos:

$$\gamma_2 = 0,0705 \pm 0,0003 \text{ s}^{-1} \quad \omega_{12} = 3,081 \pm 0,003 \text{ rad/s}$$

Continuemos con $I_3 = 0,60$ A. Haremos lo mismo que antes, pero en este caso no prestaremos atención a los valores de ω_1 y φ_0 que obtengamos del ajuste sinusoidal. El motivo es que, por alguna razón, sus incertidumbres se disparan hasta un nivel absurdo, y tampoco era una información demasiado útil en primer lugar (ω_1 se puede obtener directamente y φ_0 debe ser cercano a $-\pi$). Así que:

$$a_{(1)} = -\theta_0 = -18,55 \pm 0,06 \text{ u} \quad b_{(1)} = \gamma = 0,253 \pm 0,001 \text{ s}^{-1}$$

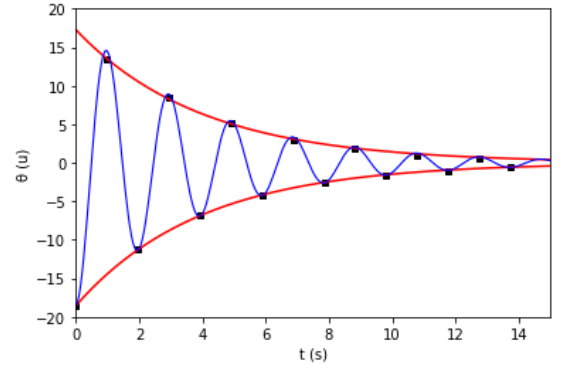
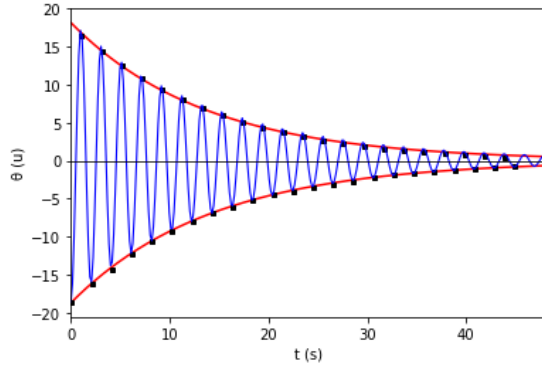
$$a_{(2)} = \theta_0 = 17,3 \pm 0,2 \text{ u} \quad b_{(2)} = \gamma = 0,251 \pm 0,005 \text{ s}^{-1}$$

$$b_{(3)} = \gamma = 0,25 \pm 0,02 \text{ s}^{-1}$$

Lo que nos deja:

$$\gamma_3 = 0,253 \pm 0,001 \text{ s}^{-1} \quad \omega_{13} = 3,20 \pm 0,03 \text{ rad/s}$$

¹Un lector atento habrá notado que, en la curva descrita, la amplitud es $\theta_0 = 18,6$ u en lugar de un parámetro cualquiera a . Esto no es una errata, sino simplemente que ese parámetro se da por supuesto y no es parte del ajuste. El motivo de esto es que, sin excluirlo, la amplitud obtenida es exagerada, probablemente porque solo tenemos datos extremos y no intermedios.

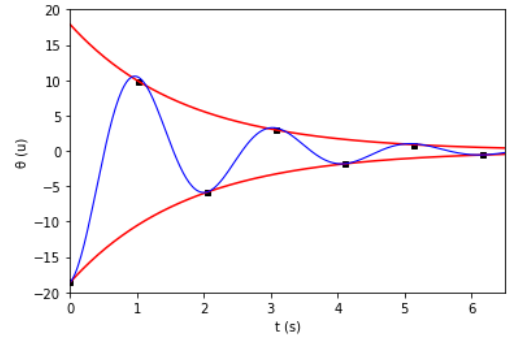
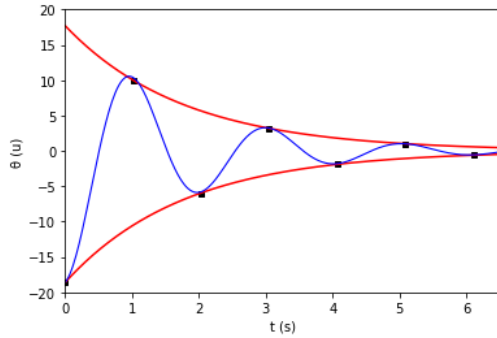


Figuras 2 y 3: amplitud máxima en función del tiempo del péndulo con $I_2 = 0,30$ A e $I_3 = 0,60$ A. Nótese cómo las dos curvas exponenciales, que definen la amplitud en el lado izquierdo y derecho, delimitan el movimiento total, y cómo la intensidad disminuye considerablemente el número de oscilaciones.

En $I_4 = 0,91$ A hay ya tan pocas oscilaciones que tenemos que hacer dos series de medidas, y de la función coseno no podemos sacar nada, ya que las incertidumbres de todos los parámetros son demasiado altas. En cualquier caso, podemos obtener a partir de los cuatro ajustes exponenciales que:

$$b_{(1)} = \gamma = 0,562 \pm 0,006 \text{ s}^{-1} \quad b_{(2)} = \gamma = 0,562 \pm 0,003 \text{ s}^{-1}$$

$$b_{(3)} = \gamma = 0,566 \pm 0,002 \text{ s}^{-1} \quad b_{(4)} = \gamma = 0,58 \pm 0,01 \text{ s}^{-1}$$



Figuras 4 y 5: Ambas gráficas corresponden a $I_4 = 0,91$ A, y podemos ver que el amortiguamiento es tan grande que ya tenemos muy pocos datos. Por eso necesitamos dos series diferentes.

Siendo los cálculos directos de ω_1 :

$$\omega_{1(1)} = 3,09 \pm 0,08 \text{ rad/s} \quad \omega_{1(2)} = 3,06 \pm 0,07 \text{ rad/s}$$

Y por lo tanto:

$$\gamma_4 = 0,565 \pm 0,001 \text{ s}^{-1} \quad \omega_{14} = 3,07 \pm 0,04 \text{ rad/s}$$

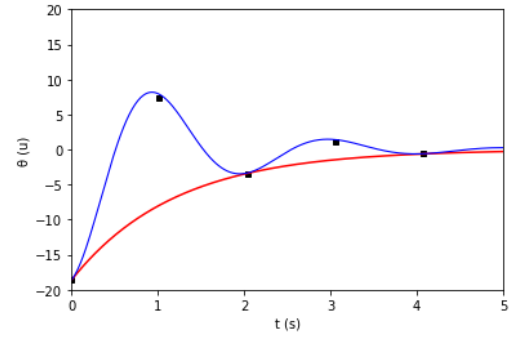
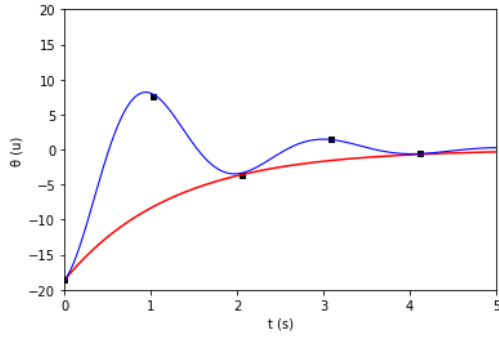
Por último, terminemos con $I_5 = 1,12$ A. Aquí γ se hace tan grande que apenas hay dos ciclos por serie, y sacar un ajuste para las amplitudes positivas es imposible (solo tenemos dos datos). Por eso nos limitaremos a sacar dos exponenciales. Quizás habría sido buena idea hacer alguna serie más, pero tendremos que conformarnos con dos. De modo que:

$$b_{(1)} = \gamma = 0,80 \pm 0,01 \text{ s}^{-1} \quad b_{(2)} = \gamma = 0,836 \pm 0,003 \text{ s}^{-1}$$

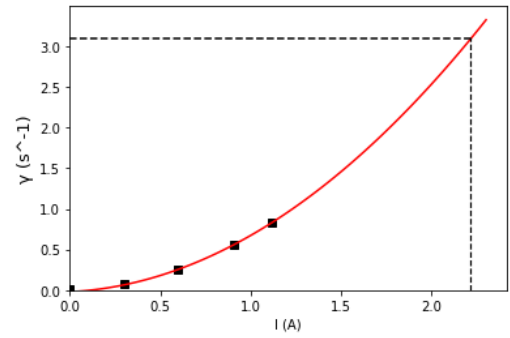
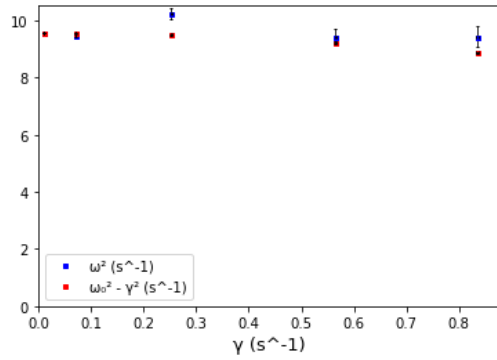
$$\omega_{1(1)} = 3,09 \pm 0,08 \text{ rad/s} \quad \omega_{1(2)} = 3,06 \pm 0,07 \text{ rad/s}$$

Finalmente:

$$\gamma_5 = 0,834 \pm 0,003 \text{ s}^{-1} \quad \omega_{15} = 3,07 \pm 0,04 \text{ rad/s}$$



Figuras 6 y 7: Ambas gráficas corresponden a $I_5 = 1,12$ A. Tenemos tan pocos puntos que ni siquiera podemos sacar una curva exponencial para el límite superior, pero aun así vemos la misma tendencia que antes.



Figuras 8 y 9: A la izquierda se puede ver la representación de ω_1^2 y $\omega_0^2 - \gamma^2$ frente a γ , donde se puede apreciar que son bastante parecidas pero no del todo; y a la izquierda la de γ frente a I , que sigue una función cuadrática. Las líneas de puntos marcan I_c y $\gamma_c = \omega_0$.

1.2 Comparación entre γ y ω_1 y cálculo teórico de la intensidad crítica

Ahora que ya tenemos los datos de la frecuencia y el amortiguamiento para todas las intensidades, podemos representar ω_1^2 y $\omega_0^2 - \gamma^2$ frente a γ , donde $\omega_0 = \omega_{11} = \omega_1(I = 0)$ (figura 8). Deberían ser iguales, y están cerca de serlo, pero está claro que en algún caso hemos infraestimado las incertidumbres que les correspondían.

En cualquier caso, sabemos que debería haber una intensidad I_c en la que γ coincidiese con ω_0 , y por lo tanto la oscilación se anule por completo. En el laboratorio la encontramos en $I_c = 1,99 \pm 0,01$ A, y aquí podemos intentar deducirla a partir de un valor extrapolado de γ .

Si suponemos que $\gamma(I) = aI^2 + bI + c$, entonces los parámetros de esta parábola son:

$$a = 0,58 \pm 0,03 \text{ A}^{-2}\text{s}^{-1} \quad b = 0,11 \pm 0,05 \text{ A}^{-1}\text{s}^{-1} \quad c = -0,02 \pm 0,02 \text{ s}^{-1}$$

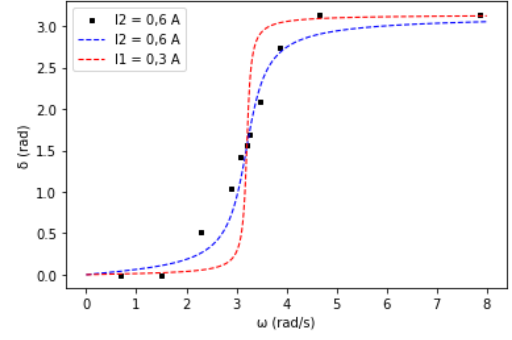
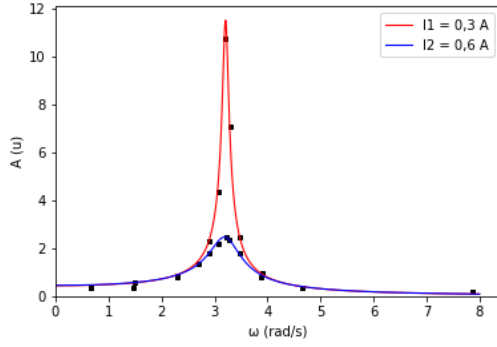
Y recordando que $\omega_0 = 3,093 \pm 0,003$ rad/s, el valor teórico de la intensidad crítica es de:

$$I_c = 2,22 \pm 0,09 \text{ A}$$

Que no coincide con el valor experimental, aunque tampoco está muy lejos. Esto puede ser debido a que no hayamos evaluado bien las incertidumbres, o simplemente que la dependencia de γ respecto de I no sea realmente cuadrática según sube la intensidad.

2 Oscilador amortiguado y forzado

Cuando al péndulo se le aplica una fuerza periódica procedente de un motor se generan también oscilaciones, cuya amplitud viene determinada por la siguiente ecuación:



Figuras 10 y 11: A la izquierda vemos la amplitud de las oscilaciones dependiendo de la frecuencia del motor, para ambas intensidades. Se puede ver cómo es mucho más exagerada cuando la intensidad de la corriente es baja. En la derecha se ve el desfase entre la fuerza y el péndulo para $I_2 = 0,6$ A, también dependiente de la frecuencia, y las dos curvas teóricas que lo describen. Hay que aclarar que **esas curvas no son un ajuste**, son un simple cálculo hecho a partir de los valores antes obtenidos para ω_0 y γ .

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (3)$$

En donde A es la amplitud, F_0 la fuerza máxima, m la masa del péndulo, ω la frecuencia de la fuerza (y de la oscilación), γ el coeficiente de amortiguación, y ω_0 la frecuencia "natural" del objeto, dependiente de sus átomos. Esta amplitud se hace muy grande cuando ω se acerca a la frecuencia de resonancia, que se corresponde con:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (4)$$

Lo que hicimos nosotros fue fijar una intensidad constante (primero $I_1 = 0,3$ A, luego $I_2 = 0,6$ A) e ir variando el voltaje de la corriente que alimentaba al motor, de forma que este girase a muchas frecuencias para cada intensidad. La amplitud ya no la medimos como antes, sino que simplemente tomamos las posiciones máximas que alcanzaba el péndulo a izquierda y derecha (sin corrección), las sumamos y dividimos entre 2.

Si hacemos un ajuste con los datos que obtuvimos, vemos que los coeficientes de nuestras curvas son²:

$$(F_0/m)_{(1)} = 4,51 \pm 0,07 \text{ u/s}^2 \quad \omega_{(1)} = 3,210 \pm 0,001 \text{ rad/s} \quad \gamma_{(1)} = 0,061 \pm 0,001 \text{ s}^{-1}$$

$$(F_0/m)_{(2)} = 4,6 \pm 0,2 \text{ u/s}^2 \quad \omega_{(2)} = 3,22 \pm 0,01 \text{ rad/s} \quad \gamma_{(2)} = 0,29 \pm 0,01 \text{ s}^{-1}$$

De esto además podemos calcular unas frecuencias de resonancia que, al ser γ muy bajo, son prácticamente idénticas a la frecuencia natural:

$$\omega_{R1} = 3,2087 \pm 0,0004 \text{ rad/s} \quad \omega_{R2} = 3,215 \pm 0,005 \text{ rad/s}$$

En las curvas (figura 10) podemos ver muy claramente la respuesta del péndulo: cuando γ es bajo, la resonancia es muy intensa, pero se atenúa mucho cuando la fuerza se ve muy amortiguada. Esto se ve especialmente bien si tenemos en cuenta el factor de calidad $Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega}$, donde $\Delta\omega$ es la distancia entre los dos puntos cuya amplitud es $A = \frac{1}{\sqrt{2}}A_R$. Cuanto más grande sea Q , más pronunciado es el pico:

$$Q_1 = 26,310 \pm 0,004 \quad Q_2 = 5,42 \pm 0,03$$

²Aunque es cierto que γ no coincide con los valores que obtuvimos anteriormente, esto probablemente se debe a que las intensidades las medimos prestando menos atención, ya que eran menos relevantes en esta parte de la práctica. Por lo tanto, 0,3 A pueden ser perfectamente 0,28.

Si estudiamos los límites cuando $\omega \rightarrow 0$ y $\omega \rightarrow \infty$, vemos que la curva no es simétrica: la amplitud claramente tiende a 0 en el infinito, pero no cuando la frecuencia tiende a 0. La cuestión es que, obviamente, cuando la frecuencia es 0 la fuerza no existe, por lo que no sé de dónde sale exactamente esa amplitud inicial. Imagino que hay una explicación teórica perfectamente estudiada, pero un vistazo muy rápido a la literatura no menciona nada en especial.

Queda por resolver un último detalle de esta oscilación forzada: el desfase. Aunque la frecuencia de la oscilación y de la fuerza sean la misma, no se mueven exactamente a la vez, sino que hay un desfase δ entre ellas. Esto viene dado por³:

$$\delta = \arctan \left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (5)$$

De la ecuación se deduce que, cuanto más cerca estemos de la frecuencia natural (o de la resonante, a efectos prácticos), mayor será el ángulo de desfase, hasta alcanzar $\pi/2$. Y cuanto mayor sea γ , más progresivo será el aumento, y por lo tanto más suave será la curva de desfase.

Ahora bien, medir el desfase adecuadamente en el péndulo es bastante complicado. Nosotros pudimos hacerlo gracias a que grabamos vídeos del movimiento (y solo para $I_2 = 0,6$ A), pero aun así es muy impreciso. Por eso hacer un ajuste con el que intentar deducir (otra vez) ω_0 y γ sería bastante inútil. De todas maneras, es bastante ilustrativo representar los datos obtenidos para I_2 y la curvas teóricas del desfase (figura 11).

Merece la pena explicar cómo se calculan estos datos a partir de las medidas crudas. Lo hice de dos formas distintas, una para $\omega < \omega_R$ (donde $0 < \delta < \pi/2$) y otra para $\omega > \omega_R$ (donde $\pi/2 < \delta < \pi$). Si A_1 y A_2 son las posiciones máximas a izquierda y derecha alcanzadas por el péndulo en cada ω , A_0 la posición en la que se encuentra cuando la fase del motor es 0, y A la amplitud máxima (calculada antes) entonces:

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} \frac{A_0 - \frac{1}{2}(A_1 + A_2)}{A} \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{A_2 - A_0}{A}$$

En el primer caso, para $0 < \delta_1 < \pi/2$, estamos calculando la distancia (en radianes) al centro de la oscilación; mientras que en el segundo, con $\pi/2 < \delta_2 < \pi$, calculamos la distancia al extremo correspondiente a $\pi/2$, y después sumando $\pi/2$. Posiblemente haya otras maneras más sencillas de hacerlo, y, evidentemente, en δ_2 se da la paradoja de que "aumentar" el desfase implica estar más cerca del centro de oscilación, que se puede interpretar como un desfase menor.

3 Conclusiones

Los movimientos oscilatorios son probablemente los más importantes de toda la física, lo que queda claro si tenemos en cuenta que todas las prácticas del laboratorio de mecánica los incluyen de alguna manera. En este caso había que estudiar de forma explícita dos casos: qué ocurre cuando una fuerza se opone a este movimiento (oscilador amortiguado) y cuando interviene una fuerza externa, también periódica (amortiguado y forzado).

Para el caso amortiguado, vimos claramente dos fenómenos distintos que actuaban contra la oscilación: la fuerza de rozamiento mecánica (muy débil) y las corrientes de Foucault generadas por un electroimán. Ambas reducían progresivamente la amplitud de la oscilación hasta hacerla llegar a 0, y cuando las corrientes se hacían demasiado grandes (a partir de una intensidad I_c de alrededor de 2 A en el electroimán) llegaba a desaparecer.

En el caso forzado no hay tal atenuación, porque el motor que lo impulsa no se detiene, pero sí observamos el fenómeno de la resonancia. Cuando la frecuencia del motor era cercana a ω_R , la amplitud del movimiento se disparaba, pero lejos de esta prácticamente desaparecía. Esto tiene que ver principalmente con la frecuencia natural a la que vibran los átomos del sistema: si están en sintonía con la fuerza externa, esta se amplifica mucho; si no, es todo lo contrario.

³Taylor, John R. *Classical Mechanics*.