Problemas resueltos capítulo 4

4.1 Consideremos las siguientes medidas de una lámina metálica (1)

e(mm) 0,13 0,10 0,09 0,14 0,13

¿Cuál es el espesor y la incertidumbre que debemos asociar a la lámina?

Consideremos como mejor estimador del mensurando el valor medio de las medidas

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i = \frac{1}{5}(0{,}13+0{,}10+0{,}09+0{,}14+0{,}13) = 0.116 \text{ mm}$$

$$s_A^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(e_i-\bar{e})^2 \Rightarrow s_A = 0.021 \text{ mm}$$

$$s_A(\bar{x}) = \frac{s_A}{\sqrt{n}} = \frac{s_A}{\sqrt{5}} = 0.0093 \text{ mm}$$

Por otra parte consideraremos la última cifra significativa como la resolución instrumental, esto es

$$s_B = \frac{0.01}{\sqrt{12}} = 0.0029 \text{ mm}$$

El valor de la incertidumbre combinada será

$$u_C = \sqrt{s_A^2(\bar{x}) + s_B^2} = \sqrt{(0.0093)^2 + (0.0029)^2} = 0.0097 \text{ mm}$$

Por lo que escribiremos para el resultado

$$e \equiv (0.1160 \pm 0.0097) \text{ mm}$$

4.2. Se mide con un polímetro una resistencia diez veces arrojando los siguientes valores

R(kΩ) 101; 102; 103; 110; 108; 102; 109; 100; 101; 102

Si el fabricante nos indica que la lectura en este rango de resistencia puede desviarse hasta ± 5%, Calcular la incertidumbre de la medida

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \bar{R} = 103.80 \text{ k}\Omega$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Rightarrow s_x^2 = 3.71 \text{ k}\Omega$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_x = 1.17 \text{ k}\Omega$$

Por otra parte la posible desviación del instrumento ±5% consideraremos que corresponde a una distribución cuadrada de forma que

$$s_B \simeq \frac{0{,}05 * \bar{R}}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}05 \cdot 103.80}{\sqrt{3}} \doteq 3{,}0 \text{ k}\Omega$$

La incertidumbre combinada será

$$u_c = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_B^2} \simeq \sqrt{(1.17)^2 + (3.0)^2} = 3.2 \text{ k}\Omega$$

El resultado se escribirá como

$$R = (103.8 \pm 3.2) \text{ k}\Omega$$

4.3. En un experimento de calorimetría se usa una resistencia para disipar calor. Si la potencia disipada se estima como (2)

$$P = \frac{V^2}{R_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]}$$

siendo R_0 la resistencia a la temperatura de referencia $T_0 = 298$ K y V el voltaje aplicado a la misma. Realizamos cinco medidas

V(V)	10,1	10,3	10,0	10,1	10,2
T(K)	343	350	349	350	349

siendo $R_0 = 100\ k\Omega$ con incertidumbre relativa

$\frac{u_{R_0}}{R_0} = 0.020$ y $\alpha = 0{,}0012\ K^{-1}$ $\frac{u_\alpha}{\alpha} = 0.10$

Calcular P y su incertidumbre.

i) Incertidumbre y valor estimado del voltaje

$\bar{V} = 10.140$ V

$$u_{\bar{V}} = \sqrt{u_a^2 + u_b^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u_a^2 &= \frac{1}{4\cdot 5}\sum_{i=1}^{5}(V_i-\bar{V})^2 \\ u_b &= \frac{0.1}{\sqrt{12}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} u_a &= 0.051\ V \\ u_b &= 0{,}029\ V \end{aligned}$$

$u_{\bar{V}} = 0{,}059$

ii) Incertidumbre y valor estimado de la temperatura

$\bar{T} = 348{,}2$ K

$$u_{\bar{T}} = \sqrt{u_a^2 + u_b^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u_a^2 &= \frac{1}{4\cdot 5}\sum_{i=1}^{5}(T_i-\bar{T})^2 \\ u_b &= \frac{1}{\sqrt{12}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} u_a &= 1.3\ K \\ u_b &= 0.29\ K \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$U_{\bar{T}} = 1.4\ K$$

El valor estimado para $\bar{P}$ será

$$\bar{P} \simeq \frac{\bar{V}^2}{R_0\left[1+\alpha(\bar{T}-T_0)\right]} = \frac{(10.14)^2}{100\cdot10^3\left[1+0.0012\,(348.2-298)\right]}$$

$$\bar{P} \simeq 9.698\cdot10^{-4}\ W$$

Para calcular la incertidumbre consideramos las incertidumbres debidas a V, R_0, α y T

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{2V}{R_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_0} = -\frac{V^2}{R_0^2\left[1+\alpha(T-T_0)\right]}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{V^2}{R_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]^2}\cdot(T-T_0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{V^2}{R_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]^2}\cdot\alpha$$

$$u_{\bar{P}}^2 = \left[\frac{2\bar{V}}{R_0\left[1+\alpha(\bar{T}-T_0)\right]}\right]^2 u^2(\bar{V}) + \left[\frac{\bar{V}^2}{R_0^2\left[1+\alpha(\bar{T}-T_0)\right]}\right]^2\cdot u^2(R_0) +$$

$$+\left[\frac{\bar{V}^2(\bar{T}-T_0)}{R_0\left[1+\alpha(\bar{T}-T_0)\right]^2}\right]^2\cdot u^2(\alpha) + \left[\frac{V^2\alpha}{R_0\left[1+\alpha(T-T_0)\right]^2}\right]^2 u^2(\bar{T})$$

$$U_P = 2.3\cdot10^{-5}\ W = 0.23\cdot10^{-4}\ W$$

Por lo tanto, deberíamos expresar el resultado como

$$P = (9.70 \pm 0.23) \cdot 10^{-4} \ W$$

4.4. Se mide el nº de desintegraciones en un minuto de una fuente radiactiva, obteniéndose un contaje $n = 100$. Calcúlese la incertidumbre de esta medida.

Normalmente consideraremos que la estadística de contaje sigue una distribución de Poisson con probabilidad

$$prob(n=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} ;$$

Como sólo tenemos una medida no podemos considerar otra cosa que $\lambda \simeq n$. Recordemos que en la distribución de Poisson

$$\mu = \lambda ; \quad \sigma^2 = \lambda$$

Por lo tanto con la información mínima que tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \simeq 100 \\ \sigma^2 \simeq 100 \end{array}\right\}$$

De aquí establecemos que $\sigma \simeq \sqrt{100} = 10$. Por lo tanto podemos decir que la incertidumbre de esta medida es aproximadamente de 10.

Respecto a si esta es una incertidumbre de tipo A o B, claramente es de tipo B ya que hemos supuesto una distribución de probabilidad "modelo" para estimar su varianza.

4.5. Se realizan 100 medidas de una magnitud que sigue una distribución de probabilidad normal con $\sigma = 2$. Si el valor medio de las cien medidas es 12.1 ¿qué incertidumbre le asignaríamos a la medida?

$$\bar{x} = 12.1$$

observemos que $\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(2)^2}{100}$ en este caso.

Podríamos intentar estimar la varianza poblacional a través de los datos muestrales, pero en este caso nos dan directamente el valor de la varianza de la población, así que

$$u(\bar{x}) = \frac{\sqrt{2^2}}{10} = \frac{2}{10} = 0,20$$

Por lo tanto el resultado se expresaría como

$$12.10 \pm 0.20$$

4.6. Se han realizado cinco medidas del diámetro de una esfera con un calibre que aprecia la centésima de mm, los resultados son

d(mm) 0.10 0.11 0.09 0.10 0,11

Calcúlese el diámetro de la esfera y su incertidumbre. A partir de estos datos calcular el volumen de la esfera y su incertidumbre.

Contamos con cinco datos que nos permiten escribir:

$$\bar{d} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} d_i = 0.1020 \text{ mm}$$

$$s(\bar{d}) = \left[\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(d_i-\bar{d})^2\right]^{1/2} = 0.0084 \text{ mm}$$

Consideraremos la incertidumbre de repetibilidad estimada como tipo A,

$$u_r = \frac{0.0084}{\sqrt{5}} \text{ mm} = 0.0037 \text{ mm}$$

Por otra parte consideraremos una distribución constante de anchura 0.01 mm para estimar la incertidumbre debida a la resolución instrumental

$$u_c \simeq \frac{0.01}{\sqrt{12}} \text{ mm} = 0.0029 \text{ mm}$$

$$u(\bar{d}) = \sqrt{u_r^2 + u_c^2} = 0.0047 \text{ mm}$$

La esfera tendrá un volumen dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{24}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

El valor estimado del volumen será

$$V = \frac{1}{6}\pi (0.102)^3 \text{ mm}^3 = 5.56 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^3$$

$$u(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right) u(\bar{d}) = \frac{1}{2}\pi \cdot d^2\, u(\bar{d})$$

$$= \frac{1}{2}\pi (0.102)^2 \cdot 0.0047 \text{ mm}^3 = 0.77 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^3$$

4.7. Dada una magnitud $y = y(x_1, x_2)$, si se expresa la ley de propagación de incertidumbres de la forma

$$\sigma^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2)$$

a) ¿Es esta expresión válida cualesquiera que sean las distribuciones de probabilidad de x_1 y x_2?

En general sí. Las varianzas se propagan de esta forma sin tener que hacer hipótesis sobre las distribuciones de x_1 y x_2. Pueden, sin embargo, aparecer problemas si la función $y = y(x_1, x_2)$ presenta discontinuidades en la región de estudio (o sus derivadas) o bien estamos muy cerca del extremo de la función. En este caso tendríamos que incluir términos de orden superior.

b) ¿Cuál es el error relativo que se comete al calcular y según la fórmula anterior si en realidad x_1 y x_2 no son independientes?

Veamos, si las variables están correlacionadas, deberíamos usar

$$\tilde{\sigma}^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) \operatorname{cov}(x_1, x_2)$$

Así que

$$\tilde{\sigma}^2(y) - \sigma^2(y) = \Delta\sigma^2(y) = 2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) \operatorname{cov}(x_1, x_2)$$

si suponemos que aproximadamente

$$\Delta\sigma^2(y) \simeq 2\sigma(y)\cdot\Delta\sigma(y) = 2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\operatorname{cov}(x_1, x_2)$$

$$\Delta\sigma(y) \simeq \frac{1}{\sigma(y)}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\operatorname{cov}(x_1, x_2)$$

$$\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)} \simeq \frac{1}{\sigma^2(y)}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\operatorname{cov}(x_1, x_2)$$

Esto es:

$$\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)} \simeq \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma^2(x_2)}$$

dividiendo por $\sigma(x_1), \sigma(x_2)$; tendremos

$$\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)} \simeq \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\frac{\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\frac{\sigma^2(x_1)}{\sigma(x_2)} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\frac{\sigma^2(x_2)}{\sigma(x_1)}}$$

recordemos que $-1 \leq \frac{\operatorname{cov}(x_1, x_2)}{\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)} \leq 1$ ya que

este término corresponde al coeficiente de correlación de x_1 y x_2, así que

$$\left|\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)}\right| \leq \frac{\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\right|}{\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\frac{\sigma(x_2)}{\sigma(x_1)}\right|} = \frac{\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\right|}{\epsilon\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\frac{1}{\epsilon^2}\right|}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)}$$

$$\left|\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)}\right| \leq \frac{1}{\left|\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)}\cdot\frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)} + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)}\frac{\sigma(x_2)}{\sigma(x_1)}\right|}$$

Si denominamos $\epsilon = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\Big/\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\cdot\sigma(x_1)\big/\sigma(x_2)$

$$\left|\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)}\right| \leq \frac{1}{\left|\epsilon + 1/\epsilon\right|}$$

si no hacemos aproximaciones la expresión está más complicada

$$\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma^2(x_2)} - \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma^2(x_2) + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\mathrm{cov}(x_1,}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma^2(x_2)}}$$

$$\frac{\Delta\sigma(y)}{\sigma(y)} = 1 - \sqrt{1 + \frac{2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\mathrm{cov}(x_1, x_2)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\sigma^2(x_2)}}$$

4.8. Dos magnitudes estadísticamente independientes x_1 y x_2 se miden para determinar el valor de

$$y = \ln(x_1) + x_2$$

¿Cuál es la relación entre las incertidumbres típicas de y, x_1, x_2?

$$u^2(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2)$$

puesto que x_1, x_2 son estadísticamente independientes.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1$$

$$u^2(y) = \frac{u^2(x_1)}{(x_1)^2} + u^2(x_2)$$

o bien

$$u(y) = \sqrt{\frac{u^2(x_1)}{(x_1)^2} + u^2(x_2)}$$

4.9. Se mide la longitud de una varilla metálica a diferentes temperaturas con los resultados siguientes

L(mm)	17	25	27	39	41	48
$(T-T_0)$ (K)	0,0	20,0	42,1	79,0	88,3	100,2

Considerando que $L = L_0 + \alpha(T - T_0)$ obtener a través de mínimos cuadrados los valores de L_0 y α considerando $\frac{u(L)}{L} \simeq 0{,}1$

Observemos que éste es un ajuste pesado ya que las incertidumbres de los datos varían sensiblemente de un punto a otro

$L(mm)$	17	25	27	39	41	48
$u_L(mm)$	1.7	2,5	2,7	3,9	4,1	4.8

consideremos entonces que $\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{\left[L_i - L_0 - \alpha(T-T_0)_i\right]^2}{(u_{L_i})^2}$

$$L_0 \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{(u_{L_i})^2} + \alpha \sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i}{(u_{L_i})^2}$$

$$L_0 \sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} + \alpha \sum_{i=1}^{6} \frac{\left[(T-T_0)_i\right]^2}{(u_{L_i})^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{(u_{L_i})^2} = 0.81183 \ mm^{-2} \qquad \sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} = 23.771 \ K\, mm^{-2}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\left[(T-T_0)_i\right]^2}{(u_{L_i})^2} = 1617 \ K^2\, mm^{-2} \qquad \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i}{(u_{L_i})^2} = 20.673 \ mm^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{L_i \cdot (T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} = 862.61 \ K \cdot mm^{-1}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{(u_{L_i})^2} \cdot \sum_{i=1}^{6} \frac{\left[(T-T_0)_i\right]^2}{(u_{L_i})^2} - \left(\sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} \right)^2$$

a)

$$L_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i}{(u_{L_i})^2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\left[(T-T_0)_i\right]^2}{(u_{L_i})^2} \end{vmatrix} = 17.3 \ mm$$

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{(u_{L_i})^2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i}{(u_{L_i})^2} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{L_i(T-T_0)_i}{(u_{L_i})^2} \end{vmatrix} = 0.279 \ mm\, K^{-1}$$

Las incertidumbres se obtienen a partir de la inversión de la matriz del sistema

$$u^2(L_0) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{6} \frac{[(T-T_0)_i]^2}{(U_{L_i})^2} = 2.16 \text{ mm}^2$$

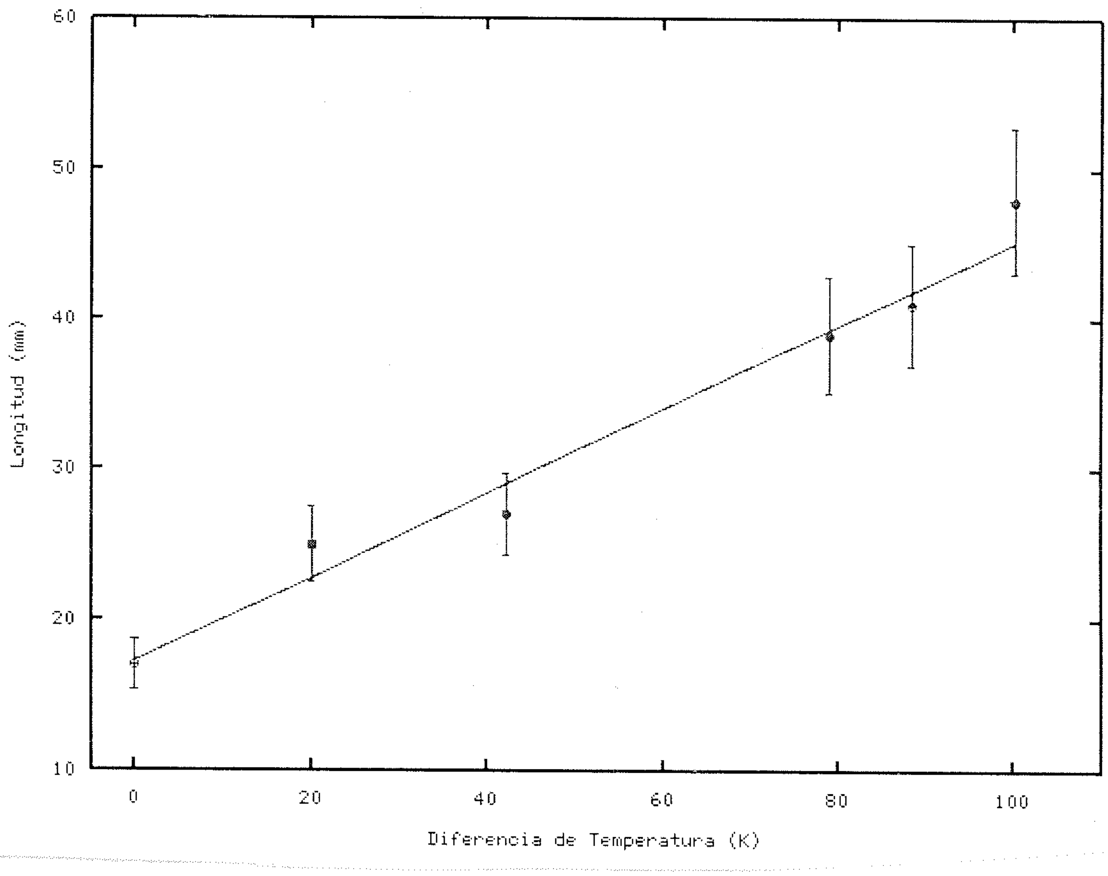
$$u^2(\alpha) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{(U_{L_i})^2} = 0.0011 \text{ mm}^2 \, K^{-2}$$

b) $$\mathrm{Cov}(L_0, \alpha) = \frac{1}{\Delta} \left(-\sum_{i=1}^{6} \frac{(T-T_0)_i}{(U_{L_i})^2} \right) = -0.032 \text{ mm}^2 \, K^{-1}$$

De aquí obtendremos que

$$U(L_0) = 1.5 \text{ mm} \qquad U(\alpha) = 0.033 \text{ mm } K^{-1}$$

La gráfica de los datos con su barra de incertidumbre junto con la recta de regresión será:



d) el valor esperado o predicho para $T-T_0 = 200\ K$ será

$$L = L_0 + \alpha \cdot 200\ K = 73.16\ mm$$

- considerando que ΔT tiene una incertidumbre despreciable

$$u_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial L_0}\right)^2 u_{L_0}^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)^2 u_\alpha^2 + 2\left(\frac{\partial L}{\partial L_0}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right) cov(L_0,\alpha) =$$

$$= U_{L_0}^2 + (200)^2 \cdot U_\alpha^2 + 2 \cdot (200) \cdot cov(L_0, \alpha) =$$

$$= 32.876\ mm^2$$

$U_L = 5.7\ mm$

- Es importante señalar que si no tenemos en cuenta la covarianza, se obtendría

$$\tilde{u}_L = \sqrt{36,3}\ mm\ !! \simeq 6.0\ mm$$

4.10 La densidad del aire puede obtenerse (considerando un modelo de gas ideal) del valor de la densidad ρ_0 a una temperatura y presión de referencias (T_0, P_0) para una temperatura y presión arbitrarias (T, P) como

$$\rho = \rho_0 \frac{(273.2 + T_0)}{(273.2 + T)} \cdot \frac{P}{P_0}$$

$\rho_0 = 1.293 \cdot kg\ m^{-3}$ $\quad P_0 = 101,3\ kPa$ $\quad T_0 = 20°C$

$u_{\rho_0} = 0.018\ kg\ m^{-3}\ (k=2)$

$\frac{u_T}{(273{,}2 + T)} = 0.02$ $\quad \frac{u_P}{P} \simeq 0.01$

$$u_\rho^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}\right)^2 u_{\rho_0}^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)^2 u_T^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)^2 u_P^2$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}\right) = \frac{(273.2+T_0)}{(273.2+T)} \frac{P}{P_0} \qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right) = \rho_0 \frac{(273.2+T_0)}{(273.2+T)} \cdot \frac{1}{P_0}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) = -\rho_0 \frac{(273.2+T_0)}{(273.2+T)^2} \frac{P}{P_0}$$

$$u_\rho^2 = \frac{(273.2+T_0)^2}{(273.2+T)^2} \frac{P^2}{P_0^2} \cdot u_{\rho_0}^2 + \rho_0^2 \frac{(273.2+T_0)^2}{(273.2+T)^4} \frac{P^2}{P_0^2} \cdot u_T^2 +$$

$$+ \rho_0^2 \frac{(273.2+T_0)^2}{(273.2+T)^2} \cdot \frac{1}{P_0^2} \cdot u_P^2$$

Como vemos obviamente podemos sacar factor común para obtener

$$u_\rho^2 = \rho_0^2 \frac{(273.2+T_0)^2}{(273.2+T)^2} \frac{P^2}{P_0^2} \cdot \left[\frac{u_{\rho_0}^2}{\rho_0^2} + \frac{u_T^2}{(273.2+T)^2} + \frac{u_P^2}{P^2} \right]$$

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \sqrt{\frac{u_{\rho_0}^2}{\rho_0^2} + \frac{u_T^2}{(273.2+T)^2} + \frac{u_P^2}{P^2}}$$

$$\frac{u_{\rho_0}}{\rho_0} = \frac{0.018}{1.293} = 0.014$$

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \left[(0.014)^2 + (0.02)^2 + (0.01)^2 \right] = 0.026$$

La incertidumbre de ρ está dada como

$$u_\rho \simeq 0{,}026 \cdot \rho_0 \cdot \frac{(273.2+T_0)\ P}{(273.2+T)\ P_0}$$

4.11 La tasa de kerma en aire $\dot{K}$ de una fuente puntual de radiación se puede considerar como inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d. Considerando una incertidumbre típica de 1mm en la distancia d, considerando

$$\dot{K} = \frac{c}{d^2}$$

siendo la incertidumbre de c muy pequeña, calcular la distancia a la que la incertidumbre de $\dot{K}$ es del 1%

$$u_{\dot{K}} = \frac{2c}{d^3} u_d$$

$$\frac{u_{\dot{K}}}{\dot{K}} = \frac{2c}{d^3} \cdot u_d \cdot \frac{d^2}{c} \equiv \frac{2}{d} u_d$$

si $\dfrac{u_{\dot{K}}}{\dot{K}} = 0.01 \Rightarrow \quad 0.01 = \dfrac{2}{d} u_d$

$$d = \frac{2}{0.01} \cdot u_d$$

$$\boxed{d = 200 \cdot u_d = 200\ mm}$$

4.12. La actividad de una fuente radiactiva de ^{60}Co disminuye de acuerdo a la ley de decadencia radiactiva

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \Delta t}$$

$$T_{1/2} = 1925,5 \text{ d (días)}$$

$$u_{T_{1/2}} = 0,5 \text{ d} \quad (k=1)$$

- Calculemos la constante λ a través de

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 3.5998 \cdot 10^{-4} \text{ d}^{-1}$$

$$u_\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}^2} \cdot u_{T_{1/2}} = 9.4 \cdot 10^{-8} \text{ d}^{-1} = 0.00094 \cdot 10^{-4} \text{ d}^{-1}$$

- Considerando que

$$u_{\Delta t} = 1 \text{ min} = 6,94 \cdot 10^{-4} \text{ d}$$

$$A_0 = 2 \text{ GBq} \qquad u_{A_0} = 2 \cdot \text{GBq} \cdot 10^{-2} = 0,02 \text{ GBq}$$

Calculo la actividad al cabo de 365 d y su incertidumbre.

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda \Delta t} = 2 \text{ GBq} \cdot \exp\left[-3.5998 \cdot 10^{-4} \text{ d}^{-1} \cdot 365 \text{d}\right]$$

$$A = 1,7537 \text{ GBq}$$

$$u_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta t}\right)^2 u_{\Delta t}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial A_0}\right)^2 u_{A_0}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\right)^2 u_\lambda^2$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \Delta t}\right) = -A_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \Delta t} \quad ; \quad \left(\frac{\partial A}{\partial A_0}\right) = e^{-\lambda \Delta t} \quad ; \quad \left(\frac{\partial A}{\partial \lambda}\right) = -A_0\, \Delta t \cdot e^{-\lambda \Delta t}$$

$$u_A^2 = A_0^2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{-2\lambda\Delta t}\, u_{\Delta t}^2 + e^{-2\lambda\Delta t} \cdot u_{A_0}^2 + A_0^2 \cdot \Delta t^2 \cdot e^{-2\lambda\Delta t} \cdot u_\lambda^2$$

$$= A_0^2\, e^{-2\lambda\Delta t}\left[\lambda^2 u_{\Delta t}^2 + \frac{u_{A_0}^2}{A_0^2} + \Delta t^2 u_\lambda^2\right]$$

$$u_A = A \left\{\lambda^2 u_{\Delta t}^2 + \frac{u_{A_0}^2}{A_0^2} + \Delta t^2\, u_\lambda^2\right\}^{1/2} = 0.018 \text{ GBq}$$

, obsérvese que con esta expresión de la actividad la incertidumbre relativa de A crece con el tiempo.