2.8. Cuestiones y problemas

2.1. Se tira un dado. Calcúlese la probabilidad de obtener un tres condicionada por haber obtenido un número impar.

2.2. Un feriante nos propone el siguiente juego: por una apuesta de 2 euros, podemos ganar 15 euros si conseguimos que nos salgan dos caras y un número par al lanzar dos monedas y un dado al aire. Presumiendo la honestidad del feriante (dado y monedas no trucadas), calcúlense nuestros ingresos esperados en n apuestas.

2.3. A la vista de los resultados de la cuestión anterior, calcúlese el valor esperado o medio de los ingresos en n apuestas.

2.4. Una fábrica tiene tres máquinas independientes que producen cierto tipo de pieza. La máquina 1 produce el 50 % de las piezas totales con un 2 % de piezas defectuosas, la máquina 2 produce el 40 % de las piezas con un 1 % defectuosas y la 3 produce el 10 % con un 0,5 % de piezas defectuosas. ¿Qué proporción de las piezas de la fábrica presentan defectos tras el proceso de producción? Si se selecciona al azar una pieza producida en la cadena de producción, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina 2 si no presenta defectos? Si la misma pieza resulta defectuosa, ¿cuál es entonces la probabilidad de que proceda de la máquina 2? ¿Cuál es la probabilidad total de piezas defectuosas en el proceso productivo?

2.5. Sabemos que se produce una forma incipiente de cáncer en tres de cada mil españoles. Como forma de detección precoz se ha desarrollado un protocolo de diagnóstico cuya fiabilidad es la siguiente: entre los pacientes sanos solamente un 5 % presenta una reacción positiva (falsa alarma). De los pacientes con cáncer incipiente sólo un 2 % presentan una reacción negativa (alarma fallida). Los pacientes que hayan presentado una reacción positiva serán hospitalizados para cirugía exploratoria. ¿Qué proporción de pacientes de los que se cree que tienen cáncer realmente lo tendrán?

2.6. Sea X una variable aleatoria. ¿Cuándo se verificará la igualdad de los valores esperados $E\{x^2\} = (E\{x\})^2$?

2.7. La variable $X =$"número de hijos por familia en una cierta ciudad" tiene por distribución de probabilidad la siguiente tabla:

X	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,47	0,30	0,10	0,06	0,04	0,02	0,01

Hállese:

a) Media o esperanza matemática. ¿Qué significado tiene este número?

b) Varianza y desviación típica.

c) Momento central de tercer orden.

d) Suponiendo que el Ayuntamiento de la ciudad paga 1.200 euros por hijo y que $Y = 1200X$, ¿qué representa Y? ¿Cuál es su distribución de probabilidad? ¿Cuál es el la cantidad que debe reservar en sus presupuestos la corporación municipal para política de incentivos a la natalidad?

e) Media, varianza y desviación típica de Y.

2.8. Un fotomultiplicador de estado sólido está formado por cuatro contadores Geiger. Cada uno de los contadores cubre un cuarto de la superficie total del detector. Si dos o más fotones llegan simultáneamente a un contador, éste produce la misma señal s que si le llega un solo fotón. Las señales de los diferentes contadores se suman (i.e. si solo un contador se dispara la señal es s mientras que si dos detectan señal, ésta es de valor $2s$). Si al detector llegan dos fotones simultáneamente (y se reparten al azar entre los cuatro contadores), encuéntrese la distribución de probabilidad para la señal del detector (i.e. probabilidad de obtener s y $2s$). Calcúlese la señal media del detector y su varianza. Calcúlese el cociente de la desviación típica sobre el valor medio.

2.9. Consideremos un sistema físico formado por dos partículas cada una de las cuales puede encontrarse en dos niveles de energías 0 y ϵ. Consideremos que las partículas son idénticas, por lo que no podremos distinguir entre ambas mediante ningún procedimiento físico.

a) Calcúlese el número de configuraciones (microestados) del sistema, i.e. el número de formas de colocar las dos partículas indistinguibles en los dos niveles de energía, así como la energía de cada microestado.

b) Denotemos mediante una etiqueta l=1,2..., cada una de las configuraciones del apartado anterior y sea E_l la energía de cada una de ellas. Podemos considerar que cada una de ellas es un posible resultado de una variable aleatoria discreta y que el conjunto total de configuraciones obtenidas en el ejercicio anterior forman el espacio muestral o colectividad estadística. Supongamos que la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria estuviese dada por

$$P_l = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_l},$$

donde Z es una constante independiente del microestado. La distribución de probabilidad anterior se denomina distribución canónica o de Gibbs y nos da la probabilidad de que el sistema adopte un microestado determinado cuando se encuentra en equilibrio térmico con un termostato a la temperatura $T = 1/k_B\beta$, siendo k_B la constante de Boltzmann. Calcúlese el valor que debe tomar Z, denominada función de partición, para que P_l sea una función de probabilidad, el valor medio de la energía (energía interna) del sistema formado por dos partículas y el coeficiente de variación de Pearson de dicha magnitud, que mide sus fluctuaciones con respecto a la media.

2.10. Consideremos una variable cuya distribución de probabilidad es constante entre 0 y 1, esto es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

¿cuál es el valor esperado y la varianza de x? Calcúlese $E\{x^2\}$. Calcúlese el valor esperado de x^3 para esta distribución de probabilidad uniforme.

2.11. Se observó que que la variable $X =$ " número de centímetros a los que un dardo queda del centro al ser tirado por una persona" seguía una ley de probabilidad de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Hállese k para que $f(x)$ sea función de densidad de probabilidad. Representar dicha función.

b) Hállese la función de distribución y representarla.

c) Obténganse la media, la varianza y la desviación típica.

d) Calcúlese $p(X \leq 1)$.

e) ¿Cuál es la probabilidad de acertar en la diana?

2.12. Sea x una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad dada por una distribución triangular:

$$f(x) = \begin{cases} k(x+a) & -a \leq x \leq 0 \\ k(a-x) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcúlese k para que esta densidad de probabilidad esté correctamente definida.

b) Calcúlese la función de distribución de probabilidad acumulativa.

c) Calcúlese $E\{x\}$, $E\{x^2\}$, así como σ^2.

d) Si dos variables aleatorias x e y siguen esta distribución de probabilidad, hállese el valor esperado de $x + y$ y su varianza.

2.13. Calcúlese la probabilidad de que al lanzar seis dados de póker obtengamos:

a) exactamente un as

b) al menos un as

c) exactamente dos ases.

2.14. En el juego de la ruleta rusa en el tambor del arma hay únicamente una bala y los cinco compartimentos restantes permanecen vacíos. Se pide:

a) Calcúlese la probabilidad de estar vivo después de pulsar N veces el gatillo.

b) ¿Cuál es la probabilidad de sucumbir en el N-ésimo intento?

2.15. La probabilidad de éxito en un experimento de Bernoulli es p. Calcúlese la probabilidad de que, en el experimento que ocupa el k-ésimo lugar, ocurra un éxito por l-ésima vez ($0 < l = k = n$).

2.16. En un negocio arriesgado la petrolera Aceito S.A. ha comprometido todos sus fondos (ya muy mermados por arriesgadas inversiones y corruptos administradores) para financiar una serie de 12 perforaciones. Cada perforación en esta región tiene una probabilidad de un 20 % de producir petróleo con éxito, independientemente de las demás perforaciones. Para evitar la bancarrota, tres o más perforaciones deben producir petróleo. ¿Cuál es la probabilidad de lo anterior?

2.17. Modelo de Laplace de la incertidumbre experimental: En 1783, Laplace formuló un modelo para explicar el origen de los incertidumbres de observación. Sea x_0 el valor exacto de una determinada magnitud experimental. Supongamos que el proceso de medida está afectado por un número n de causas independientes, cada una de las cuales produce una desviación de la medida correcta de magnitud ε. Esta desviación se produce en una dirección o en otra ($x_0 \pm \varepsilon$) de manera equiprobable. La incertidumbre experimental total sería, según Laplace, el resultado de la acción combinada (suma) de las n causas independientes. Calcúlese la probabilidad de que se produzca una incertidumbre de medida Δx cuando actúan n causas.

2.18. Considérese un experimento aleatorio de Bernouilli. Obténgase el espacio muestral y la distribución de probabilidad de la variable aleatoria

$$X = \text{"número de intentos antes del primer fracaso."}$$

Calcúlese asimismo la esperanza matemática y la varianza de la distribución obtenida y compárese con la distribución geométrica o de Pascal.

2.19. Considérese un experimento aleatorio que consiste en retirar sin reemplazamiento bolas de una urna en las que existen m bolas blancas y $N - m$ bolas negras. Demuéstrese que la probabilidad de que en n intentos se hayan obtenido r bolas blancas es

$$p(x = r) = \frac{\binom{m}{r}\binom{N-m}{n-r}}{\binom{N}{n}}.$$

Demuéstrese que la distribución anterior, denominada distribución hipergeométrica, está normalizada y obténganse sus dos primeros momentos característicos. Obsérvese que la distribución hipergeométrica es el equivalente a la binomial cuando el muestreo se hace sin reemplazamiento. Pruébese que la distribución anterior recupera la binomial cuando $N \to \infty$.

2.20. Supongamos que disponemos de dos cajas de cigarros habanos, cada una de ellas con n cigarros inicialmente, y que cada vez que necesitamos un habano extraemos uno de una de las cajas al azar. Calcúlese la probabilidad de que cuando en una de las cajas se hayan terminado los cigarros en la otra queden exactamente r cigarros.

2.21. El problema siguiente, denominado el problema de los ases, fue formulado en 1936 y se atribuye al matemático inglés J. H. C. Whitehead. Fue remitido a Marilyn vos Savant por el maestro de los puzzles matemáticos Martin Gardner, señalando que era uno de sus favoritos.

a) Si en una mano de bridge (se juega con 13 cartas de una baraja de 52 cartas) tenemos un as, ¿cuál es la probabilidad de que tengamos un segundo as en la misma mano?

b) Si el as de la mano es el as de corazones, ¿cuál es la probabilidad de que la mano tenga otro as?

c) ¿Son idénticas estas probabilidades?

2.22. *Los cinco problemas de Huygens.*

En 1654, Antoine Gombaud, el caballero de Méré, miembro de la aristocracia francesa, clase social muy aficionada entonces a los juegos de azar; y Damien Mitton, rico burgués de la corte, escritor, autor junto con Méré del concepto de "hombre honesto" del XVII y modelo de "libertino" para Pascal en sus *Pensées* (Pensamientos, 1670), plantean a Pascal el denominado *problème des partis* (problema de los puntos), que en esencia consiste en lo siguiente: dos jugadores A y B pactan jugar una serie de juegos justos hasta que uno de ellos haya ganado un número concreto, N. Si el juego debe interrumpirse súbitamente cuando A ha ganado N_1 y B N_2, ¿cómo deben dividirse las apuestas? Este problema ya había sido considerado por Cardán y por Pacioli y Tartaglia aproximadamente en la misma época. Esta consulta se considera el desencadenante de la correspondencia entre Pascal y Fermat, siete cartas intercambiadas entre los meses de julio y octubre de 1654, que hoy día son consideradas como el origen de la moderna teoría de probabilidades. Además del antedicho problema de los puntos, consideraron también el problema de los dados, que analiza la cuestión de cuántas veces deben lanzarse dos dados antes de que se espere que salga el seis doble.

En 1655, Christiaan Huygens visita París, para informar a los matemáticos de esta ciudad de su descubrimiento de la primera luna de Saturno. En este viaje, Huygens conoció a través de Pierre Carcavy el trabajo sobre probabilidades contenido en la correspondencia entre Pascal y Fermat. De vuelta a Holanda, en 1657 Huygens publicó un pequeño trabajo titulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (De la razón en los juegos de azar) sobre cálculo de probabilidades, el primer trabajo impreso sobre el tema, probablemente inspirado por la correspondencia de Pascal y Fermat, y basado eminentemente en la solución de problemas. Contiene 14 problemas resueltos y cinco para resolver por el lector, en parte debidos a Pascal y Fermat, y que serán considerados como una referencia ineludible por matemáticos posteriores como Jacob y Nicholas Bernoulli, de Moivre o Montmort. Estos problemas son los siguientes:

Problema 1

A y B juegan uno contra el otro, con dos dados, bajo la condición de que A gana si obtiene 6 puntos, y B gana si obtiene siete puntos. Le corresponde el primer tiro a A, los dos siguientes a B, los otros dos siguientes a A, y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A sobre la de B?

Nota: Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656, y resuelto por Huygens en carta a Carcavi el 6 de julio de 1656.

Problema 2

Tres jugadores A, B y C, con doce fichas cada uno, de las cuales cuatro son blancas y ocho negras, juegan con la condición de que gana el primer jugador que obtiene, extrayendo sin mirar, una ficha blanca. A extrae primero, luego B, luego C, luego A de nuevo, y así sucesivamente hasta que se extraiga por primera vez la ficha blanca. ¿Cuál es la proporción de las probabilidades de ganar de cada jugador con respecto a los otros?

Nota: Problema resuelto por Huygens en 1665.

Problema 3

El jugador A apuesta al jugador B que de un mazo de cuarenta cartas, que contiene diez de cada color, extraerá cuatro siendo todas ellas de colores distintos. ¿Cuál es la ratio de las probabilidades de victoria de A sobre las de B?

Nota: Problema propuesto por Fermat a Huygens en junio de 1656, quien lo responde sin prueba en una carta a Carcavi de 6 de julio de 1656.

Problema 4

Dos jugadores tienen doce fichas cada uno, cuatro blancas y ocho negras. A apuesta a B que, escogiendo siete fichas sin mirar, obtendrá tres blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A sobre la de que gane B? Huygens también considera el caso en que se apuesta a escoger tres o más fichas blancas. Obténgase la solución en este último caso.

Nota: Huygens resuelve este problema en 1665.

Aunque no forma parte del problema original de Huygens, obténgase la solución tanto en el caso de extracción sin reemplazamiento de la bola como con reemplazamiento.

Problema 5

Los mismos jugadores A y B tienen doce fichas cada uno y juegan con tres dados. La condición es ahora que si se obtienen 11 puntos en un lanzamiento, A entrega una ficha a B, mientras que si se obtienen catorce, B entrega una a A, ganando el jugador que obtiene primero todas las fichas. Obténgase la fracción de la probabilidades de victoria de A y B.

Nota: Este problema es el conocido como la ruina del jugador, y fue planteado por Pascal a Fermat. Posteriormente, a través de Carcavi, se le plantea a Huygens en carta de 28 de septiembre de 1656 en la que se contienen las soluciones de Pascal y de Fermat. Por su parte, Huygens incluye su solución en una carta a Carcavi de 12 de octubre de 1656 y la demostración en una nota de 1676.

Problema adicional

En el caso de que tiremos dos dados podemos obtener un nueve de dos formas diferentes, 9=5+4=6+3, el mismo número que de obtener un diez, 10=6+4=5+5. Si se lanzan tres dados, el número de formas de obtener un nueve y de obtener un diez también es el mismo, seis maneras diferentes. Analícese por qué al lanzar dos dados es más frecuente obtener un nueve y al lanzar tres es más frecuente el diez.

Nota: Este problema se contiene en el *Liber de ludo aleae* (Libro de los juegos de azar), de Gerolamo Cardano, el primero publicado sobre probabilidades con técnicas eficaces, escrito durante la década de 1560 y publicado póstumamente en 1663.

2.23. Una partícula que ejecuta saltos independientes entre sí de longitud l en los nodos de una red unidimensional con probabilidades idénticas en ambos sentidos constituye el ejemplo básico del denominado paseo al azar simple (*simple random walk*). Calcúlese la probabilidad de que, luego de $2n$ saltos, la partícula se encuentre a una distancia $x = nl$ del origen de coordenadas situado en el punto de partida. ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$? La generalización a tres dimensiones de este modelo se denomina movimiento browniano.

2.24. En un *call center* se reciben una media de 2 llamadas por minuto. Calcúlese la probabilidad de que se reciban:

a) Ninguna llamada en un minuto.

b) Menos de 5 llamadas por minuto.

c) Ninguna llamada en 10 minutos.

d) Menos de 5 llamadas en 10 minutos.

¿Cuál es el número más probable de llamadas durante un intervalo de 10 minutos? ¿Y en media hora?

2.25. Un fotomultiplicador de estado sólido está formado por un único contador Geiger cuya superficie es 1 mm^2 y se somete a una radiación pulsada cuya intensidad media es de 5 fotones/mm^2 en el plano donde se encuentra el detector. Considérese que la señal s del detector es nula si no llega ningún fotón y $s = 1$ si llega un fotón o más de uno. ¿Cuál es la probabilidad de que en un detector incidan

obtienen catorce,
primero todas las
toria de A y B.

or, y fue planteado
plantea a Huygens
n las soluciones de
ión en una carta a
nota de 1676.

un nueve de dos
e obtener un diez,
nas de obtener un
ıaneras diferentes.
obtener un nueve

Libro de los juegos
probabilidades con
ado póstumamente

le longitud l en los
lénticas en ambos
paseo al azar sim-
que, luego de $2n$
lel origen de coor-
iando $n \to \infty$? La
mina movimiento

minuto. Calcúlese

un intervalo de 10

un único contador
ación pulsada cuya
de se encuentra el
si no llega ningún
la probabilidad de

a) más de 5 fotones?,

b) cinco fotones?,

c) ningún fotón?

2.26. Una lámina fina de oro es bombardeada mediante un haz de neutrones de manera que podemos suponer que la probabilidad de que un neutrón impacte en un punto cualquiera de la lámina es uniforme. Si el número medio de colisiones por núcleo es de 3,

a) ¿qué fracción de núcleos no sufre ningún impacto?

b) ¿Qué proporción del total sufre 3 impactos? ¿Y más de dos impactos?

2.27. Las colisiones de una partícula en el seno de un gas son sucesos puntuales que tienen lugar en un soporte continuo, el tiempo. Por ello, el número de colisiones de una partícula en el interior del gas es una variable aleatoria de Poisson. Teniendo en cuenta esto, obténgase la función densidad de probabilidad de la variable t="tiempo entre colisiones sucesivas de una partícula" y obténgase su valor esperado en términos de la frecuencia de colisión, λ (número de colisiones por unidad de tiempo). Considérese un gas formado por partículas de masa m encerradas en un recipiente de volumen V a la temperatura T. Sabiendo que según la teoría cinética de los gases, la velocidad media de las partículas en estas condiciones es

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}},$$

donde k_B es la constante de Boltzmann ($k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K), calcúlese el recorrido libre medio de una partícula (espacio recorrido en promedio entre dos colisiones consecutivas). Como aplicación numérica tómese, $m = 3{,}32 \times 10^{-27}$ kg (correspondiente a la masa de la molécula de hidrógeno) y T =298.15 K.

(*Nota*: El orden de magnitud típico de la frecuencia de colisión, λ, para hidrógeno molecular a densidades moderadas es de 10^{11} colisiones/s).

2.28. La probabilidad de que un núcleo radiactivo con vida media τ que existe a $t = 0$ decaiga durante el intervalo de tiempo $(t, t + \delta t)$ es:

$$p(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sabiendo que en una fuente radiactiva que contiene n núcleos, la probabilidad de observar k decadencias en un determinado temporal sigue una distribución de Poisson de media λ, determínese λ en función de τ.

2.29. Consideremos un líquido en el interior de un capilar aproximadamente unidimensional. Debido a las colisiones aleatorias con las moléculas vecinas, la posición de una partícula en el interior del líquido es una variable aleatoria que está descrita por la distribución gaussiana con varianza dependiente del tiempo:

$$f(x,t) = Ae^{-x^2/4Dt} \quad ; \quad x \in (-\infty, \infty)$$

donde D es el denominado coeficiente de difusión. Calcúlese la constante de normalización y demuéstrese que la curtosis de la distribución de probabilidad es igual a 3 en todo instante de tiempo.

2.30. Un líquido se expone a un haz de rayos X incidente que provoca la ionización de los átomos del material, los electrones emitidos colisionan con las moléculas que los rodean hasta detenerse. Si la densidad de probabilidad de que un electrón se detenga a una distancia x del punto en el que fue emitido viene descrita por la función:

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \, (0, +\infty)\,,$$

donde σ depende de la naturaleza del líquido y de la temperatura, obténgase la distancia media que recorren los electrones, denominada longitud de termalización.

2.31. En un procedimiento industrial de control de calidad se desechan las piezas cuyo tamaño difiere en al menos un 5 % del tamaño medio (5,0 mm). Sabiendo que el tamaño de las piezas sigue una distribución gaussiana de desviación típica 0,2 mm, calcúlese la proporción de piezas rechazadas.

2.32. Se ha comprobado experimentalmente que el tiempo necesario para acabar un examen de una determinada carrera se distribuye normalmente con una media de 240 minutos con una desviación típica de unos 30 minutos.

a) ¿Qué proporción de alumnos terminará su examen antes de media hora?

b) ¿Qué proporción lo hará en cuatro horas?

c) ¿Cuándo debe darse por terminado el examen para permitir que el 95 % de los alumnos haya terminado?