Bioestadística – Grado en Biología
Curso 2022-2023

Tema 5. Contrastes de hipótesis

Profesores: Mª Ángeles Casares de Cal, Fernando Castro Prado, Laura Davila Pena y Pedro Faraldo Roca

Índice

1 Introducción

Además de la estimación puntual y los intervalos de confianza, que hemos visto en el tema anterior, la otra gran tarea de la Inferencia Estadística consiste en contrastar* hipótesis, cuyo objetivo es responder a preguntas muy concretas sobre la población. Por ejemplo, ¿la proporción de vehículos de gasolina se encuentra en el 25%? Como vemos se plantean en términos de unas hipótesis que debemos aceptar o rechazar. Y esta decisión la tomaremos basándonos en una realización muestral. Cuando los datos muestrales discrepen mucho de la hipótesis (en nuestro ejemplo, cuando la proporción muestral de vehículos de gasolina sea muy distinta del 25%) rechazaremos la hipótesis.

En la Sección 2 veremos los conceptos básicos que surgen en cualquier problema de contraste de hipótesis. En la Sección 3 trataremos el problema de contraste de hipótesis sobre una proporción, y en la Sección 4 estudiaremos los problemas de contraste de hipótesis en relación con la media o la varianza de una población normal.

2 El problema de contraste de hipótesis

En el ejemplo de la proporción de vehículos de gasolina, la hipótesis que queremos contrastar se puede formular así, $H_0: \ p = 0'25$, siendo p la proporción de vehículos de gasolina.
Además de la hipótesis que queremos contrastar, tenemos su "alternativa" que en este caso sería $H_a: \ p \neq 0'25$.
Y estas dos hipótesis no son tratadas de igual modo: damos por cierta la hipótesis H_0, que se venía aceptando hasta ahora, y vemos si la muestra aporta pruebas en su contra.

Definición 1
Llamaremos ***hipótesis nula****, y la denotamos por H_0, a la que se da por cierta antes de obtener la muestra. Goza de* presunción de inocencia.
Llamaremos ***hipótesis alternativa****, y la denotamos por H_a a lo que sucede cuando no es cierta la hipótesis nula.*
Por gozar la hipótesis nula de presunción de inocencia, sobre la hipótesis alternativa recae la carga de la prueba.
Por tanto, cuando rechazamos H_0 en favor de H_a es porque hemos encontrado pruebas "significativas" a partir de la muestra. Más adelante definimos con precisión qué entendemos por pruebas "significativas".

El contraste de hipótesis constituye un problema de decisión. Lo vamos a representar mediante la tabla siguiente.

	Decisión	
Realidad	Aceptar	Rechazar
H_0 cierta	Correcto	Error de tipo I
H_0 falsa	Error de tipo II	Correcto

Definición 2
Observamos que se puede tomar una decisión correcta o errónea.
Llamamos ***error de tipo I*** *al que cometemos cuando rechazamos la hipótesis nula, siendo cierta.*
Error de tipo II *es el que cometemos cuando aceptamos la hipótesis nula, siendo falsa.*
Asociados a estos dos errores tenemos dos probabilidades:
Nivel de significación: *Es la probabilidad del error de tipo I. Lo denotamos por α:*

$$\alpha = P(Rechazar\ H_0 \mid H_0\ es\ cierta)$$

Potencia: *Es la probabilidad de detectar que una hipótesis es falsa. La denotamos por β:*

$$\beta = P(Rechazar\ H_0 \mid H_0\ es\ falsa) = 1 - P(Error\ de\ tipo\ II)$$

*Comprobar la exactitud o autenticidad de algo.

Debemos adoptar un criterio que, a partir de la muestra, nos permita decidir si aceptamos o rechazamos la hipótesis nula. Obviamente, queremos minimizar las probabilidades de los errores de tipo I y II. Pues bien, la forma de minimizar la probabilidad del error de tipo I (el nivel de significación) es mediante un criterio que acepte H_0 la mayor parte de las veces. Sin embargo, así se incrementa la probabilidad del error de tipo II, esto es, disminuye la potencia del test. Una forma de proceder ante un problema con dos objetivos como es éste, consistiría en fijar el nivel de significación y escoger el criterio que proporcionase la mayor potencia posible.

El criterio de contraste suele estar basado en un **estadístico de contraste**, que es una operación que se realiza sobre la muestra de modo que refleje si los datos muestrales son más compatibles con la hipótesis nula o con la alternativa. En el ejemplo de la proporción, el estadístico más natural sería la proporción muestral. Sobre la base del estadístico de contraste se construyen dos regiones:

Región de rechazo o región crítica. Si el estadístico de contraste cae en esta región, se rechaza la hipótesis nula. Al haber fijado el nivel de significación α, hay que construir esta región de modo que su probabilidad bajo H_0 sea α, como mucho. Como α es una probabilidad pequeña, cuando el estadístico cae en la región de rechazo, consideramos que hay pruebas significativas para rechazar H_0 y para demostrar estadísticamente H_a.

Región de aceptación. Si el estadístico de contraste cae en esta región, se acepta la hipótesis nula. Es simplemente el conjunto complementario de la región de rechazo. Cuando el estadístico cae en la región de aceptación, consideramos que no ha habido pruebas o que no son suficientes para rechazar H_0 y por eso la aceptamos. Pero de ello no se deduce que esté demostrada H_0 ni que haya que rechazar H_a. Simplemente no se pudo demostrar H_a.

Observación

Como vemos, cada verbo sólo se puede utilizar con cierta hipótesis. La hipótesis nula, o se acepta o se rechaza, pero nunca se demuestra porque no se persigue tal cosa. Y la hipótesis alternativa, o se demuestra o no se demuestra, pero nunca se acepta ni se rechaza.

A modo de resumen, podemos indicar las siguientes etapas en la resolución de un problema de contraste de hipótesis:

1. Determinar la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_a.
2. Fijar un nivel de significación α adecuado al problema de contraste, en función de la gravedad de los errores de decisión.
3. Escoger un método de contraste, esto es, buscar un estadístico de contraste y determinar las regiones de aceptación y rechazo de acuerdo con el sentido común y respetando el nivel de significación.
4. Tomar la muestra, calcular el estadístico de contraste y verificar si cae en la región de aceptación o en la de rechazo.

3 Contraste de hipótesis sobre una proporción

Queremos contrastar la hipótesis como la propuesta como ejemplo en la sección anterior.
La muestra en la que basaremos nuestra decisión está constituida por n variables independientes con distribución Bernoulli(p), como en el planteamiento general de inferencia paramétrica sobre una proporción.
Contrastaremos dos tipos de hipótesis sobre p:

- **Hipótesis simple**. $H_0 : p = p_0$, siendo p_0 una proporción conocida.
  En el ejemplo, hemos considerado $H_0 : p = 0'25$, esto es, p_0 era $0'25$.
- **Hipótesis compuesta**. $H_0 : p \leq p_0$ ó $H_0 : p \geq p_0$, siendo p_0 una proporción conocida.
  Usando el ejemplo de la proporción de vehículos de gasolina, nos podríamos plantear si la proporción habrá aumentado respecto del 25%. En tal caso, si se trata de buscar pruebas del aumento, tendríamos $H_0 : p \leq 0'25$ (y por tanto, $H_a : p > 0'25$).

Rechazaremos la hipótesis simple $H_0: \ p = p_0$ *si la proporción muestral discrepa mucho de* p_0, tanto por ser mucho mayor como por ser mucho menor.
Estandarizando $\widehat{p}$ obtenemos un estadístico con distribución conocida y tabulada, el cual servirá entonces como estadístico de contraste.
En concreto, si la hipótesis fuera cierta, esto es, $p = p_0$, entonces el estadístico de contraste tiene la siguiente distribución

$$\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

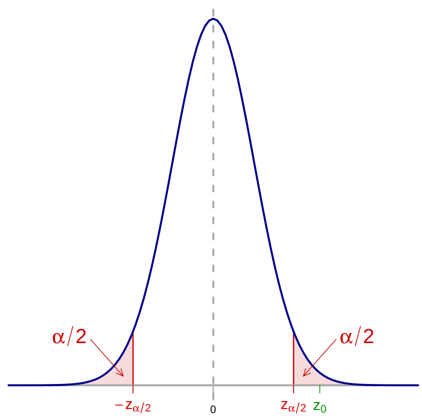
Este estadístico de contraste es el pivote empleado en los intervalos de confianza, con la diferencia de que ahora se sustituye el parámetro desconocido p por el valor conocido p_0, que viene indicado por la hipótesis nula.

Sobre las regiones de aceptación y rechazo, el sentido común nos invita a rechazar la igualdad si el estadístico es "muy grande" (en valor absoluto).
Solo falta decidir el "umbral" que separa la aceptación del rechazo, y esto se hará respetando el nivel de significación, α.

Supongamos que hemos determinado ya α. Podemos buscar entonces $z_{\alpha/2}$ en la distribución normal de forma que la región crítica tenga probabilidad α, pues ésta sería la probabilidad de que, siendo $p = p_0$, el valor del estadístico cayese en esa región y, en consecuencia, se rechazase la hipótesis.
El criterio final sería:

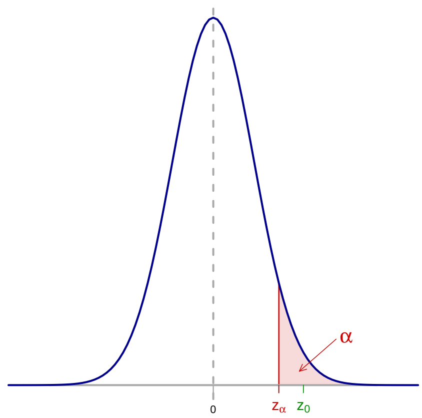
Rechazamos $\quad H_0: \ p = p_0 \qquad$ si $\quad z_0 = \dfrac{|\widehat{p} - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > z_{\alpha/2}$

En este caso de hipótesis nula simple, la región crítica se descompone en dos trozos y, por ello, hablamos de contraste **bilateral**.

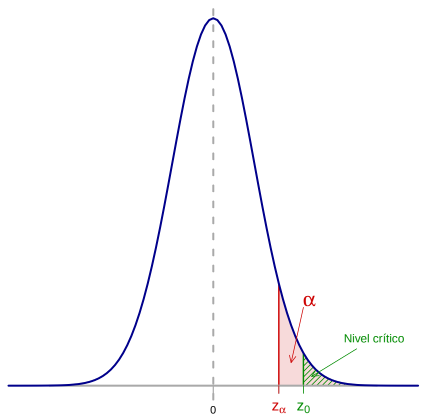


Si la hipótesis nula fuera compuesta, por ejemplo,
$H_0: \ p \leq p_0$,
sólo rechazaríamos cuando $\widehat{p}$ fuera mucho mayor que p_0, y la región crítica tendría un único trozo. En esta ocasión diremos que se trata de un contraste de hipótesis **unilateral**.
El criterio sería:

Rechazamos $\quad H_0: \ p \leq p_0 \qquad$ si $\quad z_0 = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > z_{\alpha}$



Definición 3 (Nivel crítico)
*En un contraste de hipótesis, en lugar de fijar el nivel de significación, se proporciona la probabilidad que contendría una región crítica limitada por el valor observado z_0 del estadístico. A esta probabilidad le llamamos **nivel crítico** (en inglés, p-value), y viene a representar el mayor nivel de significación que permite aceptar la hipótesis nula.*
También podemos interpretar el nivel crítico como la probabilidad de obtener una "discrepancia" mayor que la observada en la muestra.
Así, un nivel crítico muy pequeño se interpreta como una "prueba muy significativa" de la alternativa, considerándose pequeño en comparación con los niveles de significación habituales (5%, 1%), o los que correspondan al tipo de contraste que se esté tratando.



Ejemplo 1
En un laboratorio se ha estado trabajando en la elaboración de un nuevo producto que consiga la erradicación de cierto parásito que afecta a las doradas de una piscifactoría. Para probar que es eficaz, se administra este producto en la alimentación de 200 doradas afectadas por el parásito, y en 120 de ellas el parásito ha desaparecido. Se considera que este producto es efectivo si, después de su administración, el porcentaje de doradas sin el parásito es superior al 50%.

¿Constituyen estos resultados una prueba significativa de la eficacia del producto, al nivel de significación del 5%?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre una proporción (p: proporción de doradas en las que el parásito ha desparecido).

- Hipótesis nula: $H_0: \; p \leq 0'5$
  Hipótesis alternativa: $H_a: \; p > 0'5$ (el producto es eficaz)
- Nivel de significación, $\alpha = 0'05$
- Criterio de decisión
  Se probará H_a (la eficacia del producto) si la proporción muestral es "mucho mayor" que $0'5$.
- Estadístico del contraste
  $$\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1) \quad \text{bajo } H_0 \text{ (o supuesto que } H_0 \text{ es cierta)}$$
  siendo $p_0 = 0'5$.
- Región crítica o de rechazo
  Rechazaremos $H_0: \; p \leq 0'5$ si $\dfrac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > z_\alpha$,
  donde $z_\alpha = z_{0'05} = 1'645$ se obtiene de las tablas de la distribución normal estándar.
- Datos muestrales
  Tamaño de la muestra (n): 200
  Número de doradas en las que ha desparecido el parásito: 120

  Entonces la proporción muestral de pacientes curados es $\widehat{p} = \dfrac{120}{200} = 0'6$
- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:
  $$z_0 = \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} = \frac{0'6-0'5}{\sqrt{\frac{0'5\,(1-0'5)}{200}}} = 2'83$$
- Región crítica (región de aceptación)
  El valor del estadístico del contraste (2'83) es mayor que 1'645, es decir, cae en la región crítica o de rechazo.
  Conclusiones

Por lo tanto, podemos considerar demostrada estadísticamente la eficacia del producto. Hay pruebas que lo demuestran al nivel de significación del 5%.

- NIVEL CRÍTICO

  Para valorar con más precisión si las pruebas son significativas o no, se calcula el **nivel crítico**:

$$P\left(\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > 2'83\right) \approx P(Z > 2'83) = 1 - P(Z \le 2'83) = 1 - 0'997673 = 0'002327 \approx 0'0023$$

  Esta probabilidad se puede obtener de las tablas de la distribución $N(0,1)$.

- CONCLUSIONES

  Entonces las pruebas son significativas al 5% y al 1%. Hay pruebas de que la proporción de doradas en las que ha desaparecido el parásito es mayor del 50%, pues además de que la proporción muestral es mayor del 50%, el nivel crítico es pequeño.

  En general, cuanto más pequeño es el nivel crítico, más significativas son las pruebas. En este caso, tenemos pruebas significativas al 0'23% de que el producto es eficaz. □

Ejemplo 2

En un ecosistema dos especies de aves A y B se encuentran en equilibrio, con igual proporción de ambas. Se teme que los últimos acontecimientos hayan alterado el equilibrio, y para comprobarlo, se toma una muestra de 1.600 aves, de las cuales 720 son de la especie A. ¿Podemos concluir que se ha alterado el equilibrio?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre una proporción (p: proporción de aves de la especie A).

- Hipótesis nula: $H_0:\ p = 0'5$ (equilibrio de las especies)

  Hipótesis alternativa: $H_a:\ p \neq 0'5$

- Criterio de decisión:

  Se probará H_a (la alteración del equilibrio) si la proporción muestral es muy distinta de 0'5.

- Estadístico del contraste:

  $$\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1) \quad \text{bajo } H_0$$

  siendo $p_0 = 0'5$.

- Datos muestrales:

Tamaño de la muestra (n):	1600
Número de aves de la especie A:	720

  Entonces la proporción muestral de aves de la especie A es: $\widehat{p} = \dfrac{720}{1600} = 0'45$

- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:

  $$\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} = \frac{0'45-0'5}{\sqrt{\frac{0'5\,(1-0'5)}{1600}}} = -4$$

- Cálculo del nivel crítico:

  $$P\left(\left|\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}}\right| > |-4|\right) \approx P\big(\,|Z| > |-4|\,\big) = 2\cdot P\big(Z > 4\big)$$
  $$= 2\cdot(1 - P(Z \le 4)) = 0'00000633 = 6'33\times 10^{-5}$$

  Esta probabilidad se puede obtener de las tablas de la distribución $N(0,1)$.

- Conclusiones:

  Se puede concluir que se ha alterado el equilibrio pues el nivel crítico es muy pequeño.

  Hay pruebas muy significativas de la alteración del equilibrio. □

Ejemplo 3

Se ha establecido como objetivo medioambiental que el porcentaje de vehículos que sobrepase los 120 g/km de emisiones de CO2 no sea superior al 15%. Se ha realizado un muestreo de 1000 vehículos y se ha observado que 140 presentan emisiones superiores a 120 g/km. ¿Constituyen estos resultados una prueba significativa de que el porcentaje de vehículos que exceden el umbral de contaminación es mayor del 15 %?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre una proporción (p: proporción de vehículos con emisiones superiores a 120 g/km).

- Hipótesis nula: $H_0: \ p \leq 0'15$ (objetivo medioambiental)
  Hipótesis alternativa: $H_a: \ p > 0'15$
- Criterio de decisión:
  Se probará H_a (incumplimiento del objetivo medioambiental) si la proporción muestral es "mucho mayor" de 0'15.
- Estadístico del contraste:
  $$\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1) \ \text{ bajo } H_0.$$
  siendo $p_0 = 0'15$
- Datos muestrales:

Tamaño de la muestra (n):	1000
Número de vehículos con emisiones superiores a 120 g/km:	140

  entonces la proporción muestral de vehículos con emisiones superiores a 120 g/km es: $\widehat{p} = \frac{140}{1000} = 0'14$
- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:
  $$\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} = \frac{0'14 - 0'15}{\sqrt{\frac{0'15\,(1-0'15)}{1000}}} = -0'89$$
- Cálculo del nivel crítico:
  $$P\left[\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\,(1-p_0)}{n}}} > -0'89\right] \approx P[Z > -0'89] = 0'81$$
- Conclusiones:
  Los resultados muestrales son favorables a la hipótesis nula –pues la proporción muestral (0'14) es menor que 0'15–, por lo tanto, ya sabemos que no hay pruebas a favor de la hipótesis alternativa: vamos a aceptar H_0. De todas maneras, hemos calculado el nivel crítico en este caso para ver qué valor obtenemos. El nivel crítico es mayor del 50%.
  No hay pruebas de incumplimiento del objetivo medioambiental, a ningún nivel razonable.
  Como acabamos de decir, el resultado muestral $\widehat{p} = 0'14$ no es una prueba de H_a, esto es, del incumplimiento del objetivo medioambiental, porque este valor cumple el objetivo ($0'14 \leq 0'15$). □

Observación 1

Como comentario general, debemos ser muy cuidadosos en la formulación de las hipótesis nula y alternativa, y en la redacción de las conclusiones.

Así, el contraste de hipótesis tiene dos resultados posibles:

"Aceptar H_0"	que es equivalente a	"No demostrar H_a"
"Rechazar H_0"	que es equivalente a	"Demostrar H_a"

Nunca diremos que se demuestra H_0, porque no se busca eso. Se acepta H_0 sin necesidad de pruebas que lo demuestren.
Sin embargo, con H_a es al revés. Para H_a sólo cabe:
– demostrarla si hay pruebas "significativas", o
- no demostrarla cuando, o no hay pruebas, o éstas no son "significativas".

Si formulamos una hipótesis nueva que deseamos proponer a la comunidad, la ponemos como alternativa, y buscamos pruebas que la demuestren. Si no hay pruebas o no son "suficientes" (significativas), simplemente retiramos la hipótesis.

Si cuestionamos una hipótesis ya aceptada por la comunidad, entonces la ponemos como nula, y sólo si encontramos "pruebas significativas" en su contra, proponemos su rechazo.

4 Contrastes de hipótesis para una población normal

Queremos contrastar hipótesis relativas a la media y la varianza de una población $N(\mu, \sigma)$. Para ello, tomamos una muestra aleatoria simple:

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma) \qquad \text{independientes}$$

4.1 Media con varianza conocida

Supongamos que la varianza σ^2 es conocida, y se desea contrastar una hipótesis relativa a la media, μ, por ejemplo, que la media toma cierto valor conocido $H_0 : \mu = \mu_0$. Si dicha hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$ es cierta, entonces

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

El sentido común nos aconseja rechazar la hipótesis nula de que la media poblacional es μ_0 cuando la media muestral sea muy distinta de μ_0. Si además debemos respetar un nivel de significación α prefijado, debemos actuar así:

$$\text{Rechazar } H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{si} \quad \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha/2}$$

El contraste unilateral consistiría en:

$$\text{Rechazar } H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{si} \quad \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\alpha}$$

4.5 Media con varianza desconocida

Podemos repetir toda la argumentación anterior, con la salvedad de que, cuando la varianza es desconocida, no podemos usar σ y en su lugar debemos emplear un estimador adecuado, en concreto, S_c. Sabemos que este cambio afecta a la distribución, que pasa a ser T de Student (véase Sección 7.2 del Tema 4). Así, si $H_0 : \mu = \mu_0$ es cierta, entonces

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

y la regla de decisión será:

$$\text{Rechazar } H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{si} \quad \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{S_c/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}$$

De igual modo, el contraste unilateral consistiría en:

$$\text{Rechazar } H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{si} \quad \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} < -t_{\alpha}$$

Ejemplo 4
Un biólogo está interesado en determinar si la altura de las plantas de girasol crecidas en semillero y tratadas con un extracto de raíces de la planta "Hierba doncella" (Vinca minor) es, en media, inferior a 15 cm, la altura media estándar de las plantas de girasol. Para evaluar esta posibilidad, trata una muestra aleatoria de veinte plantas de semillero con el extracto, obteniéndose posteriormente las siguientes alturas:

13'7	15'8	16'1	14'1	10'5	15'2	19'0	12'8	15'0	19'2
13'6	16'5	13'5	14'4	16'7	10'9	15'1	13'3	12'3	14'3

¿Constituyen estos resultados una prueba significativa de que la altura media de las plantas de girasol así tratadas es menor de 15 cm?

¿Qué supuestos son necesarios para realizar este contraste de hipótesis?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre la media con varianza desconocida.

- Hipótesis nula: $H_0: \mu \geq 15$
  Hipótesis alternativa: $H_a: \mu < 15$ (lo que queremos demostrar)
- Criterio de decisión:
  Se probará H_a (altura media menor de 15 cm) si la media muestral es "mucho menor" de 15 cm. Para valorar si es "mucho menor" se tiene en cuenta la distribución del estadístico del contraste.
- Estadístico del contraste:
  $\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \sim T_{19}$ bajo H_0.
- Datos muestrales
  Tamaño de la muestra: $n = 20$
  Media muestral:
  $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20}(13'7 + 15'8 + \cdots + 14'3) = 14'6\ cm$
  Cuasivarianza:
  $$S_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \overline{x})^2\right] = \frac{1}{19}\left[(13'7 - 14'6)^2 + (15'8 - 14'6)^2 + \cdots + (14'3 - 14'6)^2\right] =$$
  $$= 5'11\ cm^2$$
  por lo tanto,
  $S_c \quad = \sqrt{51'11} = 2'26\ cm$
- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:
  $\frac{\overline{x} - \mu_0}{s_c/\sqrt{n}} = \frac{14'6 - 15'0}{2'26/\sqrt{20}} = -0'79$
- Cálculo del nivel crítico:
  $P\left[\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_c/\sqrt{n}} < -0'79\right] = P\left(T_{19} < -0'79\right)$
  De las tablas de la distribución T de Student (de las que presentamos a continuación un fragmento), y por la simetría de esta distribución, se obtiene que esta probabilidad es mayor que 0'2 y menor que 0'25.

m \ α	0'45	0'4	0'3	0'25	0'2	0'1	0'05	0'025	0'01	0'005
16	0'128	0'258	0'535	0'690	0'865	1'34	1'75	2'12	2'58	2'92
17	0'128	0'257	0'534	0'689	0'863	1'33	1'74	2'11	2'57	2'90
18	0'127	0'257	0'534	0'688	0'862	1'33	1'73	2'10	2'55	2'88
19	0'127	0'257	0'533	0'688	0'861	1'33	1'73	2'09	2'54	2'86
20	0'127	0'257	0'533	0'687	0'860	1'33	1'72	2'09	2'53	2'85

- Conclusiones:
  Los resultados son favorables a la hipótesis alternativa, $H_a: \mu < 15$, pues la media muestral es menor de 15 cm., sin embargo, el nivel crítico es grande, mayor del 5% y del 10%, por lo que las pruebas no son significativas.
- Para poder realizar este contraste de hipótesis es necesario suponer que la población es normal, es decir, que "la altura de los girasoles", es una variable aleatoria normal $N(\mu, \sigma)$, con cierta media μ y varianza σ^2. Además, se supone que las observaciones son independientes. □

4.6 Varianza con media conocida

Si la hipótesis nula $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ es cierta, entonces

$$\frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_n^2$$

y, por tanto, la regla de decisión será:

$$\text{Rechazar } H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \text{si } \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2}^2 \text{ o } \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2}^2$$

mientras que para el contraste unilateral será:

$$\text{Rechazar } H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad \text{si } \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2$$

4.7 Varianza con media desconocida

Si la hipótesis nula $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ es cierta, entonces

$$\frac{(n-1)S_c^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

y, por tanto, la regla de decisión será:

$$\text{Rechazar } H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \text{si } \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha/2}^2 \text{ ó } \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2}^2$$

mientras que para el contraste unilateral será:

$$\text{Rechazar } H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad \text{si } \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2$$

Ejemplo 5
Las especificaciones de una compañía fabricante de cereales, en lo que concierne al envasado de sus productos, indican que el peso de las cajas grandes de cereales debe tener una desviación típica de 15 gramos como máximo.

Para ver si la variabilidad del proceso ha cambiado con respecto al nivel máximo especificado, el responsable del envasado de los productos elige aleatoriamente quince cajas de cereales anotando su peso. Los resultados son los siguientes:

388	385	368	399	352	378	350	395	392	376	348	347	372	412	370

Basándonos en estas observaciones, ¿podemos afirmar, a un nivel de significación $\alpha = 0'05$, que la desviación típica de la población es mayor del nivel especificado de 15 gramos?

¿Qué supuestos son necesarios para realizar este contraste de hipótesis?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre la varianza con media desconocida.

- Hipótesis nula: $H_0 : \ \sigma \leq 15 \quad (\sigma^2 \leq 225)$
  Hipótesis alternativa: $H_a : \ \sigma > 15 \quad (\sigma^2 > 225)$ (lo que queremos confirmar)
- Criterio de decisión:
  Se podrá probar H_a si la varianza muestral es "mucho mayor" de 225, equivalentemente, si el estadístico de contraste es mayor que χ_α^2.
- Estadístico del contraste
  $\dfrac{(n-1)\,S_c^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{14}^2$ bajo H_0,
  siendo $\sigma_0^2 = 225$.
- Región crítica o de rechazo
  Rechazaremos $H_0 : \ \sigma^2 \leq 225$ si $\dfrac{(n-1)\,S_c^2}{\sigma_0^2} > \chi_{0'05}^2$,
  donde $\chi_{0'05}^2 = 23'7$, y se obtiene de las tablas de la distribución Ji-cuadrado.
- Datos muestrales
  Tamaño de la muestra: $n = 15$
  Media muestral:
  $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{15}(388 + 385 + \cdots + 370) = 375'47$ g

Cuasivarianza:

$$S_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\overline{x})^2\right] = \frac{1}{14}\left[(388-375'47)^2+(385-375'47)^2+\cdots+(370-375'47)^2\right] =$$
$$= 404'267 \text{ g}^2$$

- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:
$$\frac{(n-1)\,s_c^2}{\sigma_0^2} = \frac{14\cdot 404'267}{225} = 25'154$$
- Cálculo del nivel crítico
$$P\left(\frac{(n-1)\,S_c^2}{\sigma_0^2} > 25'16\right) = P\left(\chi^2_{n-1} > 25'16\right)$$
De las tablas de la distribución Ji-cuadrado (de las que presentamos a continuación un fragmento) se obtiene que esta probabilidad es mayor que 0'025 y menor que 0'05.

m \ α	0'995	0'99	0'975	0'95	0'90	0'75	0'50	0'25	0'10	0'05	0'025	0'01	0'005
11	2'60	3'05	3'82	4'57	5'58	7'58	10'3	13'7	17'3	19'7	21'9	24'7	26'8
12	3'07	3'57	4'40	5'23	6'30	8'44	11'3	14'8	18'5	21'0	23'3	26'2	28'3
13	3'57	4'11	5'01	5'89	7'04	9'30	12'3	16'0	19'8	22'4	24'7	27'7	29'8
14	4'07	4'66	5'63	6'57	7'79	10'2	13'3	17'1	21'1	23'7	26'1	29'1	31'3
15	4'60	5'23	6'26	7'26	8'55	11'0	14'3	18'2	22'3	25'0	27'5	30'6	32'8

- Conclusiones
Los resultados muestrales son favorables a la hipótesis alternativa, pues la cuasidesviación típica es mayor que 15g.
Pero esto no es suficiente, hay que calcular el nivel crítico. Y en este caso tenemos lo siguiente:
  - Sí podemos afirmar, al nivel del 5%, que la desviación típica es mayor que 15g pues el nivel crítico es menor del 5%.
  - Pero si consideramos el nivel de significación del 1% la respuesta sería diferente:
No rechazaríamos H_0 al nivel del 1%, pues el nivel crítico es mayor del 1%.

  Por tanto, se trata de un caso dudoso. Hay pruebas significativas, pero no demasiado significativas.
- Para poder realizar este contraste de hipótesis es necesario suponer que la población es normal, es decir, que "el peso de las cajas" es una variable aleatoria normal $N(\mu,\sigma)$, con cierta media μ y varianza σ^2. Además, se supone que las observaciones son independientes, lo cual es fácil de asumir porque son cajas distintas. □

5 Comparación de poblaciones

En esta sección estudiaremos el problema de comparación de dos conjuntos de observaciones. Este problema es muy importante pues engloba muchas situaciones prácticas, incluyendo la comparación de dos métodos de medición, la valoración de la eficacia de un tratamiento por comparación con individuos no tratados, la comparación entre dos grupos de individuos en general, y otras muchas circunstancias.

En la comparación de observaciones, debemos distinguir dos situaciones diferentes: muestras emparejadas (apareadas) y muestras independientes.

Diremos que hay muestras emparejadas cuando a un mismo individuo (o material, o experimento) se le efectúa la medición de dos variables aleatorias, siendo el propósito del estudio comparar estas dos variables. Podemos considerar los siguientes ejemplos típicos de muestras emparejadas:

- Se desea comparar dos métodos de análisis para determinar la concentración de un analito[†], y se realizan mediciones con los dos métodos en las mismas muestras.
- Se mide cierta variable a un grupo de pacientes, antes y después de aplicar un tratamiento. Por ejemplo, se podría medir el colesterol antes de empezar una dieta para reducir su nivel, y volver a medir el colesterol a los mismos pacientes después de aplicar la dieta.

[†] *Analito* es un termino utilizado principalmente en química analítica, que hace referencia a una sustancia, la cual puede ser un ion, un elemento, o incluso un compuesto determinado, cuya presencia o concentración se desea conocer.

- Se miden dos magnitudes comparables a un grupo de individuos: por ejemplo, la visión en el ojo derecho y la visión en el ojo izquierdo.

El asunto esencial en las muestras emparejadas es que las dos variables se miden sobre los mismos individuos.

Por el contrario, diremos que las muestras son independientes si se mide la misma variable en dos grupos diferentes de individuos. Como ejemplos típicos, serían los estudios de casos y controles, donde se diseña un grupo de individuos que recibirán el tratamiento y otro grupo diferente de individuos que recibirán un placebo.

El tema se divide en dos secciones, la primera dedicada a la comparación de dos medias en muestras emparejadas, y la segunda a la misma comparación en muestras independientes.

5.1 Comparación de dos medias en muestras emparejadas

Suponemos que se han medido dos variables X e Y simultáneamente en n individuos independientes. Por tanto podemos formalizarlo mediante una muestra aleatoria simple

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n).$$

Suponemos que el vector aleatorio (X, Y) tiene distribución normal, y la pregunta es si la media de X es similar a la media de Y, o si por el contrario, una media es más grande que la otra. En este momento se puede plantear un contraste bilateral, esto es:

$$\begin{aligned} H_o &: \mu_X = \mu_Y \\ H_a &: \mu_X \neq \mu_Y \end{aligned}$$

o un contraste unilateral

$$\begin{aligned} H_o &: \mu_X \leq \mu_Y \\ H_a &: \mu_X > \mu_Y \end{aligned}$$

donde $\mu_X = E(X)$ y $\mu_Y = E(Y)$.

La idea para realizar el contraste consiste en considerar las diferencias

$$X_1 - Y_1, X_2 - Y_2, \dots, X_n - Y_n$$

como una muestra aleatoria simple que también tiene distribución normal cuya media es $\mu_X - \mu_Y$. De este modo el problema se reduce a contrastar si la media de las diferencias es cero, o si por el contrario es mayor que cero o menor que cero.

Bastará con estandarizar la media de las diferencias para obtener un estadístico de contraste. Observemos que la media de las diferencias coincide con la diferencia de las medias.

Pues bien, bajo la hipótesis nula $H_o : \mu_X = \mu_Y$,

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_D/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

siendo

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(D_i - \overline{D}\right)^2$$

la cuasivarianza de las diferencias $D_i = X_i - Y_i$, con $i \in \{1, \dots, n\}$.

Por tanto,

$$\text{Rechazaremos} \quad H_o : \mu_X = \mu_Y \qquad \text{si} \quad \frac{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right|}{S_D/\sqrt{n}} > t_{\alpha/2}$$

siendo $t_{\alpha/2}$ la abscisa que deja una probabilidad $\alpha/2$ a la derecha en la distribución T_{n-1}.

Ejemplo 6

Para analizar la concentración de zinc en una estación de tratamiento de agua potable se tomaron medidas de la concentración de zinc en la superficie y en el fondo de diez depósitos de agua potable. Los resultados (en mg/l) son los siguientes:

Superficie	0'415	0'238	0'390	0'410	0'605	0'609	0'632	0'523	0'411	0'612
Fondo	0'430	0'266	0'567	0'531	0'707	0'716	0'651	0'589	0'469	0'723

¿Hay pruebas significativas de que, en media, la concentración en el fondo de los depósitos es superior a la de la superficie?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre la diferencia de medias en muestras emparejadas.

X denota el contenido de zinc en el fondo (μ_X es la media de X)

Y denota el contenido de zinc en la superficie (μ_Y es la media de Y)

- Hipótesis nula: $H_o: \mu_X \leq \mu_Y$
  Hipótesis alternativa: $H_a: \mu_X > \mu_Y$ (lo que queremos demostrar)
- Criterio de decisión:
  Se probará H_a ($\mu_X > \mu_Y$) si la media muestral de X es "mucho mayor" que la media muestral de Y. (Para valorar si es "mucho mayor" se tiene en cuenta la distribución del estadístico de contraste.)
- Estadístico del contraste:
  $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_D/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$ bajo H_o.
- Datos muestrales:
  - Diferencia $D_i = X_i - Y_i$:
    0'015 0'028 0'177 0'121 0'102 0'107 0'019 0'066 0'058 0'111
  - Tamaño de la muestra:
    $n = 10$
  - Media muestral de la diferencia:
    $$\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y} = \frac{1}{10}(0'015 + 0'028 + \cdots + 0'111) = 0'08\ mg/l$$
  - Cuasivarianza de la diferencia:
    $$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(D_i-\overline{D})^2\right] = \frac{1}{9}\left[(0'015-0'08)^2 + (0'028-0'08)^2 + \cdots + (0'111-0'08)^2\right] =$$
    $$= 0'0027$$
    por lo tanto,
    $$S_D = \sqrt{0'0027} = 0'052\ mg/l$$
- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:
  $$\frac{\overline{D}}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{0'08}{0'052/3'16} = \frac{0'08}{0'01646} = 4'86$$
- Cálculo del nivel crítico:
  $$P\left(\frac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}} > 4'86\right) = P\left(T_9 > 4'86\right)$$
  De las tablas de la distribución T de Student (de las que presentamos a continuación el fragmento necesario), y por la simetría de esta distribución, se obtiene que esta probabilidad es menor que 0'005.

m \ α	0'45	0'4	0'3	0'25	0'2	0'1	0'05	0'025	0'01	0'005
6	0'131	0'265	0'553	0'718	0'906	1'44	1'94	2'45	3'14	3'71
7	0'130	0'263	0'549	0'711	0'896	1'41	1'89	2'36	3'00	3'50
8	0'130	0'262	0'546	0'706	0'889	1'40	1'86	2'31	2'90	3'36
9	0'129	0'261	0'543	0'703	0'883	1'38	1'83	2'26	2'82	3'25
10	0'129	0'260	0'542	0'700	0'879	1'37	1'81	2'23	2'76	3'17

- Conclusiones:
  Los resultados son favorables a la hipótesis alternativa, $H_a: \ \mu_X > \mu_Y$, pues la diferencia de medias es positiva. Además, el nivel crítico es pequeño, menor del 5% y del 1%, por lo que las pruebas son significativas. Podemos afirmar que la concentración media de zinc en el fondo de los depósitos de agua es superior a la concentración media de zinc en la superficie.

5.2 Comparación de dos medias en muestras independientes

Pensemos en dos poblaciones normales, con sus respectivas medias y varianzas: $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$. Queremos contrastar hipótesis que comparen sus medias, μ_1 y μ_2, o sus varianzas, σ_1^2 y σ_2^2.
Extraemos una muestra aleatoria simple en cada población

$$\begin{array}{ll} X_{11}, \ldots, X_{1n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1) & \quad \text{independientes} \\ X_{21}, \ldots, X_{2n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2) & \quad \text{independientes} \end{array}$$

y además ambas muestras son extraídas de manera independiente entre sí.
En relación con la primera muestra, obtenemos los estimadores de μ_1 y σ_1^2:

$$\overline{X}_1 = \frac{X_{11} + \ldots + X_{1n_1}}{n_1} \qquad S_{c_1}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(X_{1i} - \overline{X}_1 \right)^2$$

y en relación con la segunda muestra, obtenemos los estimadores de μ_2 y σ_2^2:

$$\overline{X}_2 = \frac{X_{21} + \ldots + X_{2n_2}}{n_2} \qquad S_{c_2}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} \left(X_{2j} - \overline{X}_2 \right)^2$$

Cuando las varianzas son desconocidas y suponemos que son distintas, la distribución exacta del estadístico bajo H_o es algo complicada. Aquí presentamos la aproximación de Satterthwaite:
Si $H_o : \mu_1 = \mu_2$ es cierta, entonces

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1} + \frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} \approx T_\gamma$$

donde

$$\gamma \approx \frac{\left(S_{c_1}^2 / n_1 + S_{c_2}^2 / n_2 \right)^2}{\frac{\left(S_{c_1}^2 / n_1 \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_{c_2}^2 / n_2 \right)^2}{n_2 - 1}}$$

Como γ tiene que ser un entero, se toma como valor para γ el entero más próximo al resultado obtenido en el cálculo.
Por tanto,

$$\text{Rechazaremos } H_o : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{si} \quad \frac{\left| \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \right|}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1} + \frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} > t_{\alpha/2}$$

En caso de muestras grandes, se aproxima por la distribución normal, esto es, suponiendo que $H_o : \mu_1 = \mu_2$ es cierta, se tiene

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1} + \frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} \approx N(0, 1)$$

siendo válida esta aproximación cuando las dos muestras son grandes (Criterio: $n_1 > 30$ y $n_2 > 30$). Por tanto,

$$\text{Rechazaremos } H_o : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{si} \quad \frac{\left| \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \right|}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1} + \frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} > z_{\alpha/2}$$

siendo $z_{\alpha/2}$ la abscisa que deja una probabilidad $\alpha/2$ a la derecha en la distribución normal estándar.

Los contrastes unilaterales siguen las pautas ya conocidas de asignación del nivel de significación íntegramente al lado izquierdo o derecho de la distribución, según el caso.

Ejemplo 7

Los siguientes datos corresponden al tamaño - volumen medido en cm^3 - de las bellotas de once alcornoques (*Quercus suber*) y diez encinas (*Quercus ilex*):

Alcornoque	56'7	46'2	45'5	40'9	41'9	42'1	40'8	41'3	33'9	33'0	34'7
Encina	34'8	41'0	34'3	36'6	56'9	53'9	42'7	46'2	46'1	44'6	

¿Existe evidencia de que el tamaño medio de las bellotas de los alcornoques difiere del de las bellotas de las encinas?

¿Qué supuestos son necesarios para poder realizar este contraste de hipótesis?

Solución.

Es un problema de contraste de hipótesis sobre la diferencia de medias en muestras independientes.

La especie (*Q.suber, Q. ilex*) es la variable que define el grupo.

El volumen de las bellotas es la variable que se quiere comparar en ambos grupos.

Denotamos mediante μ_1 el volumen medio de las bellotas de la especie *Q. suber*.

Denotamos mediante μ_2 el volumen medio de las bellotas de la especie *Q. ilex*.

- Hipótesis nula: $H_o: \mu_1 = \mu_2$
  Hipótesis alternativa: $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$ (lo que queremos demostrar)
- Criterio de decisión:
  Se rechazará H_o ($\mu_1 = \mu_2$) si la media muestral de las bellotas *Q. suber* es "mucho mayor" o "mucho menor" que la media muestral de las bellotas *Q. ilex*.
- Estadístico del contraste:

$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1} + \frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} \approx T_\gamma \quad \text{bajo } H_o$$

  donde γ es el entero más próximo a $\dfrac{\left(S_{c_1}^2/n_1 + S_{c_2}^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(S_{c_1}^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(S_{c_2}^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$
- Datos muestrales:
  - *Quercus suber*
    Tamaño de la muestra:
    $n = 11$
    Media muestral:
    $$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{1_i} = \frac{1}{11}(56'7 + 46'2 + \cdots + 34'7) = 41'545 \approx 41'5\ cm^3$$
    Cuasivarianza:
    $$S_{c_1}^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left[(x_{1_i} - \overline{x}_1)^2\right] = \frac{1}{10}\left[(56'7 - 41'5)^2 + (46'2 - 41'5)^2 + \cdots + (34'7 - 41'5)^2\right] \simeq$$
    $$\approx 44'68$$
  - *Quercus ilex*
    Tamaño de la muestra:
    $n = 10$
    Media muestral:
    $$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_{2_i} = \frac{1}{10}(34'8 + 41'0 + \cdots + 44'6) = 43'71 \approx 43'7\ cm^3$$

Cuasivarianza:

$$S_{c_2}^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left[(x_{1_i}-\overline{x}_1)^2\right] = \frac{1}{9}\left[(34'8-43'7)^2+(41'0-43'7)^2+\cdots+(44'6-43'7)^2\right] \simeq$$
$$\approx 57'49$$

- Valor $\gamma \simeq \dfrac{(44'68/11+57'49/10)^2}{\dfrac{(44'68/11)^2}{10}+\dfrac{(57'49/10)^2}{9}} = \dfrac{(4'06+5'75)^2}{\dfrac{4'06^2}{10}+\dfrac{5'75^2}{9}} = \dfrac{96'236}{1'65+3'67} \simeq 18$
- Valor del estadístico del contraste para la muestra dada:
$$\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1}+\frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} = \frac{41'545-43'71}{\sqrt{\frac{44'68}{11}+\frac{57'49}{10}}} = \frac{-2'165}{3'1322} = -0'69$$
- Cálculo del nivel crítico:
$$P\left(\frac{\mid \overline{X}_1-\overline{X}_2 \mid}{\sqrt{\frac{S_{c_1}^2}{n_1}+\frac{S_{c_2}^2}{n_2}}} >\mid -0'69 \mid\right) = P\left(\mid T_\gamma \mid > 0'69\right) = P\left(T_\gamma > 0'69\right)+P\left(T_\gamma < -0'69\right) = 2\cdot P\left(T_\gamma > 0'69\right)$$
De las tablas de la distribución T de Student (de las que presentamos a continuación el fragmento necesario), y por la simetría de esta distribución, se obtiene que esta probabilidad está entre $2\cdot 0'25 = 0'5$ y $2\cdot 0'2 = 0'4$.

m \ α	**0'45**	**0'4**	**0'3**	**0'25**	**0'2**	**0'1**	**0'05**	**0'025**	**0'01**	**0'005**
16	0'128	0'258	0'535	0'690	0'865	1'34	1'75	2'12	2'58	2'92
17	0'128	0'257	0'534	0'689	0'863	1'33	1'74	2'11	2'57	2'90
18	0'127	0'257	0'534	0'688	0'862	1'33	1'73	2'10	2'55	2'88
19	0'127	0'257	0'533	0'688	0'861	1'33	1'73	2'09	2'54	2'86
20	0'127	0'257	0'533	0'687	0'860	1'33	1'72	2'09	2'53	2'85

- Conclusiones:
El nivel crítico es grande, mayor del 5% y del 1%, por lo que no hay evidencia de que el tamaño medio de la bellotas de las encinas y de los alcornoques sean diferentes.
- Para poder realizar este contraste las variables X_1 (tamaño de las bellotas de alcornoque) y X_2 (tamaño de las bellotas de encina) deben ser variables aleatorias normales e independientes.

6 Ejercicios

1. Una enzima de restricción es una enzima que puede reconocer una secuencia determinada de nucleótidos dentro de una molécula de ADN, y cortar el ADN en ese punto en concreto, llamado sitio de reconocimiento o diana de restricción, o en un sitio no muy lejano a este.

   Las enzimas de restricción de tipo I fueron las primeras en ser identificadas. Este tipo de enzimas cortan aleatoriamente el ADN a una distancia media de la diana de restricción de 1000 pares de bases (bp).

   En un experimento en el laboratorio se elige una secuencia de ADN y se le aplica una enzima de restricción de tipo I, obteniéndose veinte fragmentos cuyas distancias a la diana de restricción – medidas en pares de bases (bp) – presentamos a continuación:

1237	1127	1100	1192	1033	1177	1068	1009	1175	1290
971	1132	1031	1063	974	955	1128	1065	1269	1036

   Si suponemos que la variable aleatoria "distancia a la diana de restricción" tiene distribución normal, ¿podemos aceptar que la distancia media a la diana de restricción de los fragmentos generados por esta enzima es de 1000 bp?

2. En una planta de tratamiento de agua potable se quiere comprobar si, en media, el pH del agua depurada ha disminuido y no cumple los niveles establecidos (el pH del agua potable no debe ser, en media, inferior a 6'5). Para comprobarlo se toman dieciséis muestras de agua y los resultados fueron los siguientes:

5'95	6'29	6'88	6'54	6'73	6'69	6'95	6'18
6'93	7'12	6'36	6'44	6'17	6'34	7'21	6'83

   ¿Constituyen estos datos una prueba significativa de que, en media, el pH del agua depurada no cumple el nivel mínimo establecido? Se supone que las observaciones son independientes y distribuidas normalmente.

3. En un equipo de análisis que acompaña a los acuarios para determinar la temperatura del agua, se indica que la desviación típica de tales mediciones no supera los 2 grados. Llevamos a cabo 20 mediciones de la temperatura del acuario y obtenemos una desviación típica muestral de 2'5 grados. Supongamos que la temperatura es una variable aleatoria normal. ¿Podemos aceptar la indicación que proporciona el equipo de análisis con un nivel de significación del uno por ciento?

4. Existe la sospecha de que, debido a la contaminación ambiental en una región, la proporción de machos y hembras en una población de ratones de campo no es 1 : 1, sino que hay más machos que hembras. Se diseña un experimento para capturar 200 ratones y en la muestra obtenida hay 90 hembras y 110 machos. ¿Estos resultados avalan la hipótesis de que la proporción de machos es mayor que la proporción de hembras?

5. Los biólogos Peter and Rosemary Grant, en su estudio sobre una especie de pinzones (Geospiza fortis) de las Islas Galápagos, pusieron de manifiesto como la selección natural puede actuar con gran rapidez cuando cambian las condiciones medioambientales.

   Cuando la comida era abundante y había diferentes tamaños de semillas, todos los pinzones terrestres eran capaces de encontrar comida. En esta situación, antes de la sequía, el tamaño medio del pico de la población de pinzones era de 9'30 mm. Sin embargo, durante la sequía del año 1977, en la isla Daphne Major, la vegetación cambió considerablemente, las semillas disponibles eran de mayor tamaño y los pinzones que tenían picos ligeramente más grandes estuvieron en condiciones mejores para sobrevivir que las aves con picos más pequeños. Después de la sequía se obtuvo una muestra de 101 pinzones y el tamaño medio del pico (la profundidad del pico) era de 9'85 mm, con una cuasidesviación típica de 1 mm.

   A la vista de estos resultados, ¿podemos afirmar que, en efecto, el tamaño medio de los picos de los pinzones supervivientes es mayor que el tamaño medio de los picos de la población de pinzones antes de la sequía?

¿Qué supuestos son necesarios para realizar este contraste?

6. Se sospecha que la longitud de los peces es mayor en un lago, que llamaremos lago A, que en otro, que llamaremos lago B. En busca de pruebas de esta sospecha, se toman peces de uno y otro lago, y se miden, obteniéndose los siguientes resultados (en centímetros):

   Lago A: 12, 17, 8, 13, 16, 14, 18, 15, 16, 15.

   Lago B: 12, 11, 15, 14, 16, 13, 15.

   ¿Encuentras pruebas significativas de que los peces del lago A son más grandes que los peces del lago B?

7. Los datos de temperatura recogidos en quinientas una estaciones meteorológicas terrestres y marítimas de todo el mundo dieron una temperatura media de $13'9°C$ en 1950. En 1988, la temperatura media en estas estaciones fue de $14'2°C$. Emparejando las lecturas de 1988 y 1950 por estación, se estima que la cuasidesviación típica de la diferencia de las lecturas es $S_D = 2'2°C$.

   Suponiendo normalidad, ¿sostienen estos datos el argumento de que la temperatura media en 1988 fue superior a la del año 1950?