· **TEST TEMA 2**

① 30% lee El correo gallego, 45% lee La voz de Galicia y 15% ambos. Si cogemos uno que lea la voz, prob. de que lea el correo también?

Regla de la multiplicación: $p(A\cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$

$p(A) = 0'3$ (correo)
$p(B) = 0'45$ (voz)
$p(A\cap B) = 0'15$

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{0'15}{0'45} = 0'33$$

② Moneda: $p(\text{cara}) = 2/3$, $1 \to$ cara, $0 \to$ cruz. Media y varianza?

Bernuolli: Discreta:

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) \begin{cases} 2/3 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\mu = E\{x\} = \sum p(x_i)x_i = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$

$$\sigma^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = \sum p(x_i)x_i^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 - \frac{4}{9} = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6-4}{9} = \frac{2}{9}$$

Es la (a) $\mu = \frac{2}{3}, \sigma^2 = \frac{2}{9}$

③ Var. aleatoria continua, con $f(x) \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. varianza?

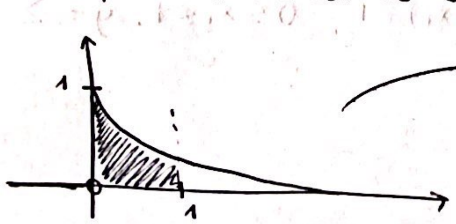
vamos:

$$\sigma^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = \int_0^1 2x \cdot x^2\,dx - \left(\int_0^1 2x^2\,dx\right)^2 = \int_0^1 2x^3\,dx - \left(\int_0^1 2x^2\,dx\right)^2 = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 - \left(\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18}$$

$\sigma^2 = \frac{1}{18}$, es la d

④ Densidad de probabilidad: $f(x) = e^{-x}$, $0 < x$, $P(x=1)$?

La probabilidad es el área bajo la curva de densidad:



$$p(x=1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}, \text{ es la (d)}$$

⑤ Diez dados de 6 caras. Probabilidad de obtener 4 unos?

Binomial.

$n = 10$

Éxito = "sacar un 1" $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$

Fracaso = "no sacarlo" $\Rightarrow q = 1 - p = \frac{5}{6}$

Así:

$$p(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6 = (210)(0'00077)(0'334) = 0'054$$

Luego:

$p(X=4) \simeq 0'054 \simeq 5'41\%$, es la (c)

⑥ Encuesta de 100 personas con 23% de estudiantes, σ?

La d) 4'2 ni idea de porqué

⑦ Distribución binomial $np = cte$, $n \to \infty$, distribución obtenida?

Poisson

⑧ nº medio de años hasta que falle un coche sin mantenimiento: 8'2. Prob. de que un coche sin mantenimiento funcione más de 10 años? (Pacal)

Tenemos: $p(x=r) = p^{r-1}q$, $\mu = \frac{1}{q}$ $\sigma^2 = \frac{p}{q^2}$

como $\mu = 8'2 = \frac{1}{q} \Rightarrow q = 0'12$,
$p = 0'87$

Buscamos:

$$p(x>10) = 1 - \Big(p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) + p(X=6) + p(X=7) + p(x=8) + p(x=9) + p(X=10)\Big) =$$

$$1 - \Big(0'12 + (0'12)(0'87) + (0'12)(0'87)^2 + (0'12)(0'87)^3 + (0'12)(0'87)^4 + (0'12)(0'87)^5 + (0'12)(0'87)^6 + (0'12)(0'87)^7 + (0'12)(0'87)^8 + (0'12)(0'87)^9\Big)$$

$= 0'30 \simeq 27\%$, es la (c)

⑨ Sumamos 24 variables tal que: $f(x_i) = 1$, $0 \leq x_i \leq 1$. $y = \sum^{24} x_i$. Distribución de y?

Calculamos μ, σ^2:

$$\mu = E\{x\} = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$, como $y = 24x_i = \frac{24}{2} = 12 = \mu_y$

$$\sigma^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma_y^2 = 24\sigma_x^2 = \frac{24}{12} = 2 = \sigma^2$$

Normal ~~Binomial~~ con $\mu = 12$, $\sigma^2 = 2$, ya que la binomial es para VARIABLE DISCRETA.

(10) 50 coches / hora con tiempo de pago 1 min. ¿Prob. de que se forme cola de más de 2 coches?

Supongamos: $\lambda = 50$ coches / hora.

$$p(x>2) = 1 - (p(x=1) + p(x=2) + p(x=0)) = 1 - \left(\frac{e^{-50}\cdot 50}{1!} + \frac{e^{-50}\cdot 50^2}{2!} + e^{-50}\right) = 1 - (9'64.10^{-21} + 2'41.10^{-19} + 1'928.10^{-22})$$

$\lambda = 1$ min

$$p(x>2) = 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{e^{-1}}{2} = 1 - 0'73 - 0'18 = 0'086$$? No sé :(

- **TIPO EXAMEN**

(1) $\{ [\overset{x}{1}, \overset{y}{2}]\ [1,3]\ [2,5]\ [3,7]\ [3,8] \}$ covarianza?

Como: $\text{cov}(x,y) = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = 12 - 2\cdot 5 = 12 - 10 = 2$, la (b)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{1}{5}(1+1+2+3+3) = 2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum y_i = \frac{1}{5}(2+3+5+7+8) = 5$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{N}\sum y_i x_i = \frac{1}{5}(2+3+10+21+24) = 12$$

(2) Sea: $\bar{x} = 1$, $\sigma^2 = 9$. Th. de Chebychev, intervalo de $p \geq 75\%$

Como: $p(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$$0'75 = 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k^2} = 0'25, \quad k^2 = \frac{1}{0'25}$$

$$k = 2$$

~~$\mu + \sigma$~~

Intervalo:

$\mu + k\sigma = 1 + 2\cdot 3 = 7$

$\mu - k\sigma = 1 - 2\cdot 3 = -5$

$[7, -5]$ es la (d)

④ sean x con s_x^2 y y con s_y^2, $cov(x,y)=0$, s_z^2 si $z=x+y$?

(d) $s^2(z) = s^2(x) + s^2(y)$

⑤ sea: $x_1=1$, $f_1=0'25$, $x_2=5$, $f_2=0'75$. coef. de asimetría de Fisher.

$$A_F(\gamma_1) = \frac{1}{s^3}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3 = \frac{m_3(\bar{x})}{s^3} = \frac{-6}{5'196} = -1'1547, \text{ (a)}$$

Así:

$$\bar{x} = \sum f_i x_i = 1\cdot 0'25 + 5\cdot 0'75 = 0'25 + 3'75 = 4$$

$$s^3 \Rightarrow s^3 = 5'196$$

$$s^2 = \sum f_i(x_i-\bar{x})^2 = 0'25(1-4)^2 + 0'75(5-4)^2 = 2'25 + 0'75 = 3$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3} = 1'73$$

$$m_3(\bar{x}) = \sum f_i(x_i-\bar{x})^3 = 0'25(1-4)^3 + 0'75(5-4)^3 = -6'75 + 0'75 = -6$$

⑥ sea:

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=A$	12	4	8	7
$y=B$	3	5	6	5

$f(x=2\mid y=A)$?

Como: $12+4+8+7 = 31$, $f(x=2\mid y=A) = 8/31$ es la (d)

⑦ sea: $f(x) = 1$ $\quad 0\le x\le 1$, $y = \ln(x+1)$, calcular $f(y)$ en $0\le y\le \ln 2$?

Usando:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}$$

como $\ln 2 < 1$, estamos en el intervalo:

$$f(x)\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{el resto}\end{cases}$$

Derivando:

$$y = \ln(x+1)$$

$$dy = \frac{dx}{x+1}$$

$$f_Y = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} \Rightarrow f(y) = x+1$$

$$f(y) = e^y - 1 + 1 = e^y, \text{ la (a)}$$

$$-1 + e^y = x$$

⑨ sea la v. aleatoria continua:

$$f(x)\begin{cases}(1-x) & 0\leq x<1\\ (x+1) & -1\leq x<0\end{cases} \qquad ¿\sigma^2(x)?$$

Distribución trianguar con vértice en $x=0$

como: $\sigma^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$

$$E\{x^2\} = \int_{-1}^{0}(x+1)x^2\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)x^2\,dx = \int_{-1}^{0} x^3+x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2-x^3\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = -\frac{2}{4}+\frac{2}{3}$$

$$= \frac{-6+8}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$E\{x\} = \int_{-1}^{0}(x+1)x\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)x\,dx = \int_{-1}^{0} x^2+x\,dx + \int_{0}^{1} x-x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 0$$ tiene sentido

Así:

$$\sigma^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = \frac{1}{6}$$, la (c)

⑩ cierta población con 90% de fumadores sufren cáncer y un 5% no lo padecen. Si hay 0'3 fumadores, prob. de que, al seleccionar un paciente al azar sea fumador?

Bayes: F ≡ fumadores C ≡ cáncer $\bar{C}$ ≡ no cáncer

~~$p(C|F) = 0'9$~~

~~F $p(\bar{C}|F) = 0'5$ (1o1?)~~

~~$p(F) = 0'3$~~

~~$\bar{F}$ $p(\bar{F}) = 0'7$~~

~~$p(C) = 0'9\cdot 0'3 = 0'27$~~

~~$p(F|C) = \frac{p(F)\,p(C|F)}{p(C)} = \frac{0'3\cdot 0'9}{0'27} =$~~

F: $p(F)=0'3$
- $p(C|F) = 0'9$
- $p(\bar{C}|F) = 0'1$

$\bar{F}$: $p(\bar{F}) = 0'7$
- $p(C|\bar{F}) = 0'05$
- $p(\bar{C}|\bar{F}) = 0'95$

$p(C) = 0'9\cdot 0'3 + 0'05\cdot 0'7$

$p(C) = 0'305$

$$p(F|C) = \frac{p(F)\cdot p(C|F)}{p(c)}$$

$$p(F|C) = \frac{0'3\cdot 0'9}{0'305} = 0'88$$

$\simeq 0'89$, la (c)

TEST T3

① Estimador fiel de la varianza de la media $\sigma^2(\bar{x})$ para una muestra de n datos $\{x_i\}^n$?

La (d) : $s^2(\bar{x}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

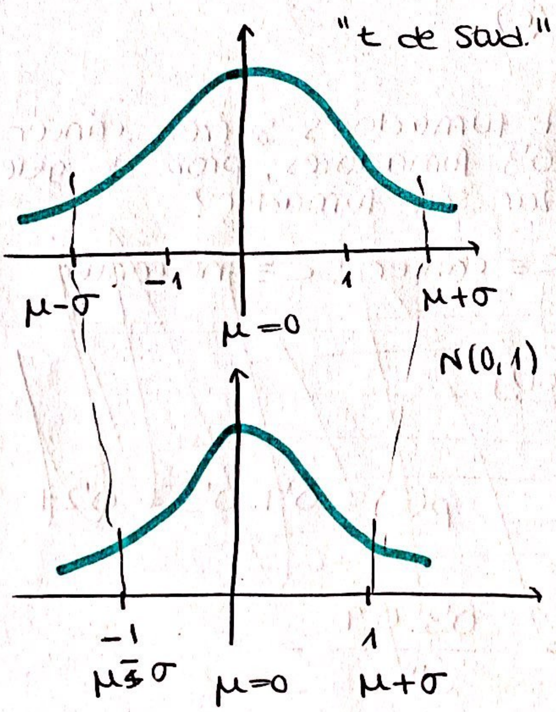
② Muchas muestras de n datos de dist. madre normal, ahora $\frac{(n-1)}{\sigma^2} \sum^{n} (x_i - \bar{x})^2$ el estadístico sigue una distribución de probabilidad:

(d) χ^2 de Pearson con n-1 grados de libertad

③ Distribución ~~a~~ t de Student con n grados de libertad cumple que:

(a) Distribución asimétrica
(b) Valor esperado de t igual a n
(c) Tiende a N(0,1) cuando $n \to \infty$
(d) Más estrecha que la N(0,1)

La t de Student tiene esta pinta:



Valor esperado

con esperanza $E\{X\} = 0$ y varianza:

$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}$ con $n>2$

Es más ancha que una normal, ya que la varianza ~~para~~ para n pequeños es mayor que 1

La única que se cumple es la (c) : Tiende a una normal estándar cuando $n \to \infty$ (ya que cuando $n \to \infty$, $\sigma^2 \to 1$)

TEST TEMA 4

⑥ Unidades básicas del SI: metro, kilogramo, segundo, kelvin, amperio, mol

c) candela

⑦ Expresión más correcta:

d) 3'2346(35) mm

⑧ Nombres y símbolos de unidades asociadas a nombres propios.

a) 1ª letra del símbolo en mayúscula y el nombre completo en minúscula.

⑩ Sea $y = (x_1)^2 (x_2)^3$ con incert. relativas de 10%, 20%. Incert. relativa de y?

Nota: incertidumbre relativa es la incert. dividida por la medida

Usando:

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(2\,\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(3\,\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$$

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right) = \sqrt{(2\cdot 0'10)^2 + (3\cdot 0'2)^2}$$

$$\frac{u(y)}{y} = 0'63 \rightarrow \boxed{63\% = \frac{u(y)}{y}}$$

⑭ Incertidumbre tipo A y B:

c) Ambas son estadísticas, pero las de tipo A se evalúan mediante distribuciones de frecuencia obtenidas de la propia muestra de datos exp., la segunda (B) se evalúa mediante distribuciones de prob. estimadas.