

Oscilador amortiguado y forzado

Juan Ammerman Yebra

Grupo M1

Grado en física

3 de abril de 2017

Índice

1. Introducción teórica	1
2. Objetivos	3
3. Material empleado y procedimiento	3
4. Datos experimentales y análisis	4
4.1. Análisis cualitativo de las incertidumbres	4
4.2. Frecuencia característica	4
4.3. Oscilador amortiguado	5
4.4. Oscilador amortiguado y forzado	8
4.5. Amortiguamiento crítico	9
5. Conclusiones	9
5.1. Oscilador amortiguado	9
5.2. Oscilador amortiguado y forzado	10
5.3. Amortiguamiento crítico	11
6. Propagación de incertidumbres	11
6.1. Frecuencia característica	11
6.2. Oscilaciones amortiguadas	11

1. Introducción teórica

Cuando en un sistema se produce un desplazamiento de su posición de equilibrio estable se producen oscilaciones. Si la variación producida es pequeña, las oscilaciones producen un movimiento armónico simple. La aproximación de los movimientos a uno armónico simple es muy común y permite la simplificación de problemas bastante complicados a problemas mucho más simples.

Al desplazar a un sistema de su equilibrio aparece una fuerza $F(x)$ que tiende a llevar al sistema otra vez a la posición de equilibrio. Por tanto, si $F(x)$ posee derivadas continuas de todos los órdenes, la podemos desarrollar en un serie de Taylor:

$$F(x) = F_0 + x \left(\frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2} \right)_0 + \dots \quad (1)$$

donde F_0 es el valor que toma $F(x)$ en el punto de equilibrio. Si el sistema se encontrase en la posición de equilibrio, éste estaría quieto, por lo que no podría actuar ninguna fuerza sobre él, por esta razón F_0 es igual a cero. Ahora, si consideramos oscilaciones lo suficientemente pequeñas, podemos despreciar todos los términos de orden superior al primero. Entonces obtenemos la siguiente relación:

$$F(x) = -kx \quad (2)$$

donde $k = -\left(\frac{dF}{dx} \right)_0$. Como la fuerza recuperadora siempre está dirigida a la posición de equilibrio, su derivada es negativa, y por tanto k es siempre positiva. Los sistemas que pueden ser descritos por una expresión como (2) se dice que obedecen la *ley de Hooke*. Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton tenemos que:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3)$$

Si resolvemos la ecuación diferencial, llegamos a que el desplazamiento en función del tiempo es:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (4)$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Consideremos ahora la situación en la que tenemos una fuerza resistiva que amortigua las oscilaciones. Esta fuerza puede ser más o menos constante, si se trata por ejemplo del rozamiento por un deslizamiento ordinario, o puede depender de la velocidad de una manera complicada, como puede ocurrir con la resistencia que opone un fluido. En este caso, consideraremos que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad. Por lo tanto, teniendo en cuenta esta nueva fuerza, la ecuación del movimiento resultante será:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (5)$$

Antes de resolverla introduciremos una nueva constante que será: $2\beta = \frac{b}{m}$. La razón de introducir un 2 en la definición de la constante es para simplificar los cálculos al resolver la

ecuación. Por tanto la expresión que obtenemos ahora para el desplazamiento es:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - w_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - w_0^2} t} \right) \quad (6)$$

Como podemos ver tenemos un primer término, que lo que va a hacer es frenar por completo el sistema cuando el tiempo tienda a infinito, y un segundo término que tenemos que examinar en función del valor de la nueva constante β . En función de su valor podemos observar tres casos:

■ **Amortiguamiento débil:**

En este caso tenemos $\beta < w_0$, donde si tomamos la parte de real de (6) la expresión resultante para la solución es:

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(w_1 t - \delta) \quad (7)$$

Analizando vemos que es la solución para un m.a.s. por una exponencial negativa, debido a esto el resultado es un movimiento oscilatorio con una amplitud que decrece exponencialmente con el tiempo.

■ **Amortiguamiento fuerte:** Ahora tendremos que $\beta > w_0$ y por tanto la solución que obtenemos es:

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - w_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - w_0^2})t} \quad (8)$$

donde ahora vemos que tenemos dos exponenciales que tienden a cero para tiempos muy grandes. En esta ocasión el amortiguamiento es tal que no se llega a completar una oscilación. Si nos fijamos en los exponentes podemos darnos cuenta de que el tiempo de extinción de del movimiento será menor cuanto mayor sea β

■ **Amortiguamiento crítico:** Para terminar tenemos el caso en el que $\beta = w_0$. Cuando esto ocurre el parámetro de extinción es máximo y el tiempo de extinción del movimiento se hace mínimo. La solución para este caso es:

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} \quad (9)$$

Por último nos falta considerar el caso en el que tenemos una fuerza que mantenga las oscilaciones cuando las fuerzas de amortiguamiento agotan la energía del oscilador. Entonces, teniendo esta fuerza en cuenta, llegamos por la segunda ley de Newton y desarrollando de la misma manera que antes a:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(x) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = f(x) \quad (10)$$

donde $f(x) = \frac{F(x)}{m}$, que es una ecuación diferencial del movimiento donde la solución estará formada por uno de los caso anteriores más una solución particular que satisfaga la ecuación con la fuerza.

Cuando dejamos pasar un tiempo, el término transitorio se extingue y queda tan solo el término estacionario (consideramos que la fuerza externa es sinusoidal tal que $f(t) = f_0 \cos(wt)$), por tanto el movimiento resultante es:

$$x(t) = A \cos(wt - \delta) \quad \text{donde} \quad A^2 = \frac{f_0^2}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\beta^2 w^2} \quad (11)$$

2. Objetivos

El objetivo de esta práctica es describir el movimiento de un muelle amortiguado y forzado. A lo largo de la práctica iremos sometiendo el muelle a distintos amortiguamientos y finalmente lo forzaremos para comprobar las distintas relaciones que existen entre los parámetros que describen cada movimiento.

3. Material empleado y procedimiento

- **Fuente de alimentación:** se utilizó para alimentar el electroimán y el motor que forzaba el péndulo de torsión.
- **Amperímetro:** nos permitía saber la corriente que circulaba por el electroimán para saber cuantitativamente cuanto estábamos amortiguando el péndulo.
- **Voltímetro:** nos indicaba el voltaje al que sometíamos el motor cuando cambiábamos la frecuencia de la fuerza que ejercía éste.
- **Péndulo de torsión:** cuerpo que hacíamos oscilar.
- **Electroimán:** haciendo pasar por el diferentes intensidades de corriente nos permitía obtener diferentes coeficientes de amortiguamiento.
- **Motor:** se conectó al péndulo de torsión para forzarlo en la segunda parte de la práctica.
- **Cronómetro:** utilizado para medir el tiempo de las oscilaciones

En la práctica empezamos determinando la frecuencia característica del muelle del péndulo. Se tomaron cuatro tiempos para 40 oscilaciones de los que realizamos un promedio. Posteriormente, haciendo pasar distintas intensidades de corriente por el electroimán, generamos corrientes de Foucault de distinta intensidad que frenaban el péndulo. De aquí obtuvimos una relación entre el coeficiente de amortiguamiento y la intensidad que circulaba por el electroimán.

Tras terminar esta parte, fijamos una intensidad y encendimos el motor para forzar el péndulo con un movimiento oscilante. En esta parte tomamos la amplitud del movimiento y la frecuencia del movimiento que generaba el motor (variábamos la diferencia de potencial aplicada al motor para obtener diferentes frecuencias) para así realizar un estudio de la relación entre estas dos magnitudes.

Por último intentaremos obtener la intensidad a la que se produce el amortiguamiento crítico, y sacar de este el coeficiente de amortiguamiento, que como vimos en la introducción debería coincidir con la frecuencia característica. Esta parte se realiza en último lugar ya que trabajamos con unas intensidades algo altas para el electroimán donde éste se calienta bastante debido al efecto Joule, produciendo una disminución de su acción y por tanto influyendo en las siguientes medidas.

4. Datos experimentales y análisis

4.1. Análisis cualitativo de las incertidumbres

Esta práctica principalmente tomamos datos de la amplitud de la oscilación y el periodo de éstas. En cuanto a la amplitud, para cada experimento con el péndulo, con y sin amortiguamiento, realizamos dos tomas de datos para reducir la incertidumbre, ya que teníamos que tomar la medida con el péndulo en movimiento y podía ser difícil tomarla en algunas ocasiones. La incertidumbre que consideramos en base a esto fue de¹ 0,3 u ò 0,2 u en función de si podíamos ver con menor facilidad o no el indicar de amplitudes. Además cada uno de la pareja de laboratorio hizo una de ellas con el objetivo de reducir algún error sistemático que pudiese cometer cualquiera de los dos. A la hora de realizar los cálculos posteriores tuvimos que restarle a todos los datos (0,5pm0,1) u ya que el péndulo se encontraba desplazado del origen de la escala de medida, por tanto también tendremos en cuenta la incertidumbre añadida por este factor.

En las medidas del tiempo intentamos tomar varios tiempos para cada experimento y cogiendo el mayor número de oscilaciones posible. En el caso de la frecuencia característica fue posible tomar 40 oscilaciones, mientras que en las oscilaciones amortiguadas hubo ocasiones en las que tuvimos que tomar menos de 10 oscilaciones, de ahí la diferencia en las incertidumbres que observaremos. En este caso la principal fuente de error no será el instrumento de medida, cuya incertidumbre sería de $\frac{0,01}{\sqrt{12}}$ s, si no que viene dada por nuestro tiempo de reacción. Para este tiempo estimamos 0,3 s, siendo la incertidumbre final 0,6 s ya que cometemos un error al iniciar y parar el cronómetro.

En cuanto a los instrumentos de medida de la intensidad de corriente y voltaje, tomamos como variación la última cifra decimal que nos mostraban (a no ser que la medida oscilase entre dos valores, en cuyo caso la aumentaríamos) y suponemos una distribución cuadrada debido a que no disponíamos de ninguna indicación del fabricante acerca de su incertidumbre.

4.2. Frecuencia característica

Para el cálculo de la frecuencia característica tomamos cuatro tiempos de 40 oscilaciones cada uno. En la tabla se muestran los datos del tiempo junto con la posición desde la que fue soltado el péndulo para determinar si existía alguna variación de la frecuencia con la amplitud.

Amplitud($\pm 0,20$)	t($\pm 0,60$)
19,50	77,43
16,50	77,54
12,50	77,60
9,50	77,61

$$\bar{t} = 77,55 \text{ s} \quad u_a = 0,04133 \text{ s} \quad u_b = 0,60 \text{ s} \quad u_c = 0,60 \text{ s}$$

$$\bar{t} = (77,55 \pm 0,6) \text{ s} \Rightarrow T = \frac{t}{40} (1,939 \pm 0,015) \text{ s}$$

¹Las unidades de la amplitud las expresamos en “u” debido a que desconocemos las unidades de la escala que utilizamos en el péndulo.

$$w_0 = (3,241 \pm 0,025)s^{-1}$$

Como podemos ver en la tabla las cuatro medidas del periodo para las distintas amplitudes concuerdan entre sí, entrando su variación en las incertidumbres tomadas. En base a esto concluimos que la frecuencia del movimiento no depende de la amplitud al no encontrar ninguna variación significativa en nuestro datos.

4.3. Oscilador amortiguado

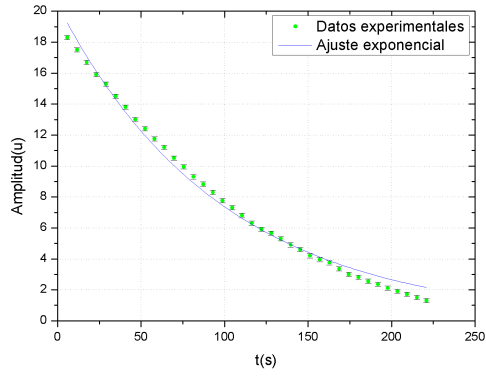
Los datos tomados para las amplitudes en el caso en el que el péndulo no se encontraba amortiguado fueron tomadas cada tres oscilaciones para tener una menor incertidumbre. En el caso del movimiento amortiguado la amplitud se medía en cada oscilación, ya que el péndulo se frenaba antes y si lo hiciésemos cada tres oscilaciones dispondríamos de muy pocos datos.

Como vimos en la introducción teórica la frecuencia de las oscilaciones varía con el coeficiente de amortiguamiento, por esta razón se muestra una tabla con las frecuencias medidas para cada intensidad.

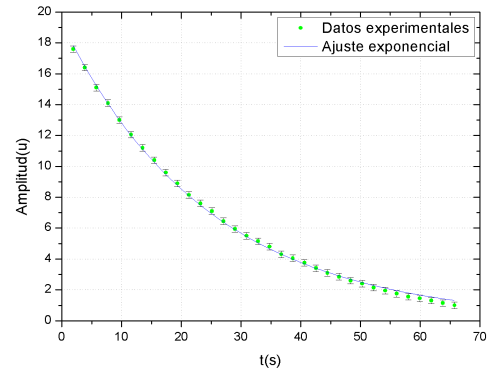
I($\pm 0,0058$)(A)	T($\pm 0,060$)(s)	w(s^{-1})	u(w)(s^{-1})
0,0000	1,939	3,241	0,025
0,2000	1,934	3,25	0,10
0,4000	1,931	3,25	0,10
0,6000	1,939	3,24	0,14
0,8000	1,948	3,23	0,25

Los datos parecen indicar una ligera disminución de la frecuencia para las intensidades más altas (por tanto un mayor coeficiente de amortiguamiento) de forma que concuerda con la teoría explicada en la introducción. Aun así no podemos concluir que esto sea así ya que las variaciones que observamos están cubiertas por las incertidumbres consideradas, por lo que sería lógico poder pensar que la frecuencia no varía con el coeficiente de amortiguamiento en vista de estos datos. Si quisiésemos llegar a alguna conclusión en este apartado deberíamos de tomar un rango de intensidades mayor y en un péndulo que nos permitiese medir más oscilaciones para obtener una medida del período más precisa a medida que aumentamos el coeficiente de amortiguamiento.

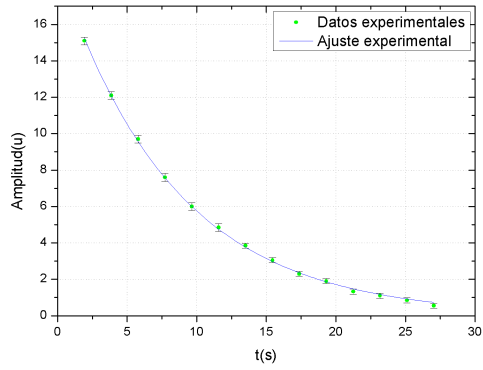
A continuación mostramos las gráficas correspondientes a las amplitudes medidas en función del tiempo para distintos amortiguamientos. La sexta gráfica es una comparación de los distintos casos estudiados para ver como afecta el amortiguamiento a la amplitud en función del tiempo.



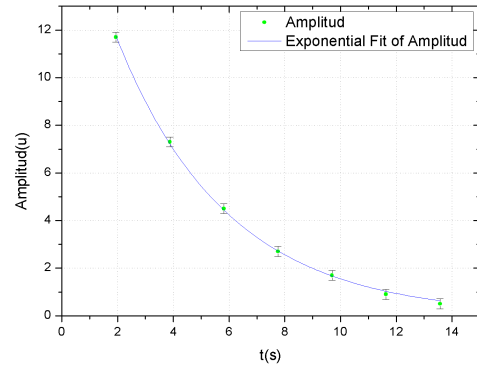
(a) Intensidad 0 A



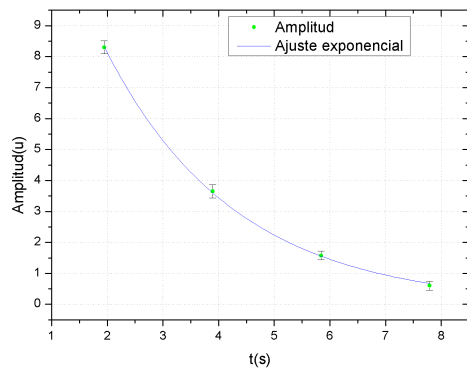
(b) Intensidad 0,2 A



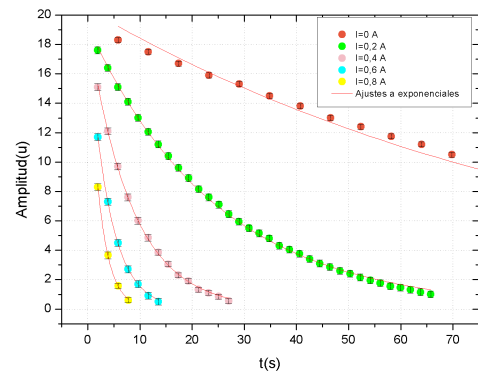
(c) Intensidad 0,4 A



(d) Intensidad 0,6 A



(e) Intensidad 0,8 A



(f) Comparación para los distintos amortiguamientos

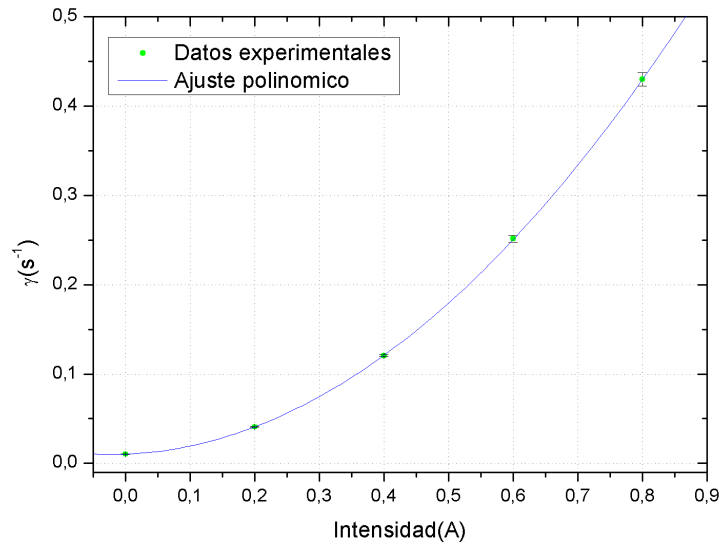
Figura 1: Gráficas de la amplitud frente al tiempo con ajuste a $A = A_0 e^{-\gamma t}$

$I(\pm 0,0058)(A)$	A_0	$u(A_0)$	$\gamma(s^{-1})$	$u(\gamma)(s^{-1})$	χ^2	D.O.F.	Percentil
0,0000	20,41	0,25	0,01020	0,00018	256,7620	36	-
0,2000	19,293	0,093	0,04082	0,00029	13,1506	32	0,99
0,4000	19,24	0,16	0,1207	0,0011	3,9796	12	0,98
0,6000	19,14	0,25	0,2514	0,0036	0,9160	5	0,95
0,8000	19,21	0,40	0,4298	0,0075	0,3597	2	-

Cuadro 1: Parámetros del ajuste a $A = A_0 e^{-\gamma t}$

A primera vista podemos observar como a medida que el coeficiente de amortiguamiento crece la amplitud se va a cero con mayor rapidez, hecho que nos indica que cada vez nos acercamos más al amortiguamiento crítico, donde el movimiento se extingue sin llegar a completarse una oscilación. Los valores de χ^2 no se muestran en el primer caso debido al valor tan alto que hemos obtenido, y en el último debido a que disponemos de muy pocos datos y tan solo dos grados de libertad, por lo que carece de sentido dar su valor².

En la siguiente gráfica aparece representado el coeficiente de amortiguamiento frente a la intensidad de corriente con un ajuste a $\gamma = a + bI + cI^2$. He decidido escoger este ajuste porque la fuerza generada por un electroimán de características similares al utilizado en la práctica genera una fuerza proporcional³ al cuadrado de la intensidad de corriente que circula por él.



$$a = (0,01020 \pm 0,00018) s^{-1} \quad b = (0,02919 \pm 0,0031) A^{-1}s^{-1} \quad c = (0,6191 \pm 0,0098) A^{-2}s^{-1}$$

²Los percentiles mostrados en la tabla para χ^2 han sido obtenidos de [4, pag.256] debido a que en [3] no estaban los percentiles necesarios.

³Ver [5, pag.403-405]

Y en efecto, el ajuste muestra que el término que domina es el cuadrático como supusimos en base a [5]. Cabe destacar que el término independiente no tiene que tender a cero, puesto que aunque no tengamos al electroimán amortiguando el movimiento, el péndulo no es ideal y existen pérdidas de energía que no somos capaces de ver para tenerlas en cuenta en el tratamiento de los datos.

4.4. Oscilador amortiguado y forzado

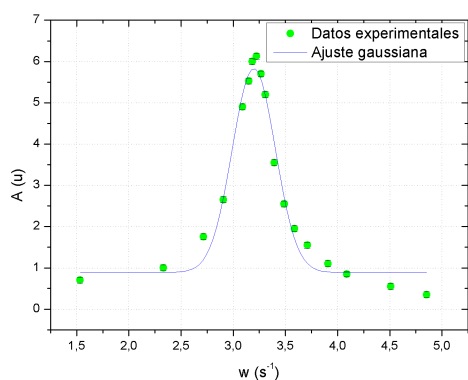
Para esta parte de la práctica fijamos una intensidad de corriente por el electroimán de $(0,4350 \pm 0,0058)$ A y variamos la diferencia de potencial aplicada al motor para cambiar la frecuencia del movimiento forzado. Para calcular la frecuencia tomábamos tres medidas del tiempo de 10 oscilaciones y posteriormente hacíamos la media de ellas con el objetivo de obtener un valor preciso de la frecuencia.

Antes de tomar la medida de la amplitud del movimiento esperábamos en torno a medio minuto, debido a que en el movimiento forzado, primero tenemos que esperar a que el término transitorio desaparezca para poder empezar a tomar datos sobre el movimiento forzado. El tiempo de espera escogido se debe a que en el estudio del movimiento amortiguado, el tiempo que este tardaba en desaparecer para una corriente de 0,4 A estaba entre los 25 y 30 segundos.

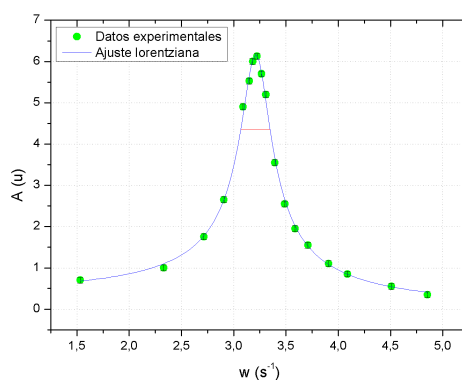
Como el objetivo de esta parte era el estudio de la amplitud del movimiento forzado en función de la frecuencia de oscilación, tomamos unos datos que cubriesen el espectro de frecuencias más significativo. Debido a que la parte más importante de este estudio de las frecuencias del movimiento forzado era la curva de resonancia volvimos sobre los valores próximos a estas frecuencias para tener un estudio más detallado de esta parte.

A continuación mostramos los datos recogidos y los dos ajustes realizados: uno a una función gaussiana $A(w) = A_0 + \frac{S}{b\sqrt{\pi/2}}e^{-2\frac{(w-w_c)^2}{b^2}}$ y otro a una función lorentziana

$$A(w) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(w^2-w_0^2)^2+4\gamma^2w^2}}.$$



(a) Intensidad 0 A



(b) Intensidad 0,2 A

Los valores obtenidos de χ^2 para el ajuste a la curva gaussiana y lorentziana fueron

310,7824 y 28,0146 respectivamente. Por tanto, en base al valor obtenido de χ^2 podemos concluir que el ajuste a la curva lorentziana se ajusta mejor a los datos que obtuvimos con sus incertidumbres correspondientes. Mostramos a continuación los coeficientes resultantes del ajuste a la curva lorentziana:

$$F_0/m = (5,458 \pm 0,098) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad w_0 = (3,2164 \pm 0,0026) \text{ s}^{-1} \quad \gamma = (0,1375 \pm 0,0032) \text{ s}^{-1}$$

En la segunda gráfica también podemos ver una línea roja sobre la curva de resonancia. Esta hace referencia a la anchura de la curva, que como vimos en la introducción resulta ser dos veces el coeficiente de amortiguamiento. Su valor viene determinado por el ancho que toma la curva a una altura de $h = \frac{A}{\sqrt{2}}$, donde A es el valor máximo que toma la amplitud. Su valor lo obtenemos sustituyendo w_0 en la expresión de la curva:

$$A(w_0) = 6,1620 \text{ u} \quad \Rightarrow \quad h = 4,3572$$

El valor que hemos obtenido para la anchura de la curva es⁴ 0,271 y por tanto el coeficiente de amortiguamiento obtenido es:

$$\gamma = \frac{0,271}{2} = 0,1355$$

que como vemos es un valor que entra dentro de la incertidumbre del obtenido en el ajuste de la curva.

4.5. Amortiguamiento crítico

Tras hacer varias pruebas soltando el péndulo y observando como se comportaba, llegamos a la conclusión de que la intensidad a la que se produce el amortiguamiento crítico es:

$$I_c = (2,0950 \pm 0,0058) \text{ A}$$

y teniendo cuenta la relación que obtuvimos anteriormente, el coeficiente de amortiguamiento crítico es:

$$\gamma_c = 2,789 \pm 0,12 \text{ s}^{-1}$$

5. Conclusiones

5.1. Oscilador amortiguado

La amplitud desde la que soltábamos el péndulo era $(19,3 \pm 0,1) \text{ u}$ y como podemos ver, a excepción del dato obtenido para la intensidad nula, todas las amplitudes de los ajustes

⁴El ancho de la curva fue determinado mediante el programa de análisis de datos Origin

coinciden con ésta teniendo en cuenta la incertidumbre de cada dato. El error que se produce en el ajuste hecho para $I=0$ A viene producido porque la pérdida de energía que se produce en este caso no sabemos si es proporcional a la amplitud, a la velocidad del péndulo, o a derivadas superiores del desplazamiento respecto del tiempo. Por esta razón, obtenemos un valor tan alto de χ^2 para este ajuste, lo que significa⁵ que cualquier otra función es posible que se ajuste mejor a estos datos con estas incertidumbres. Respecto a los otros ajustes podemos observar que, al contrario que antes, tenemos siempre mínimo un 95 % de posibilidades de no encontrar un ajuste mejor para esos datos con esas incertidumbres, por tanto podemos concluir que la hipótesis de que la fuerza de rozamiento (el amortiguamiento generado por el electroimán) es proporcional a la velocidad, es válida. En el último caso hemos omitido el valor de χ^2 ya que al tener tan pocos datos y sólo dos grados de libertad, el análisis de χ^2 resultaba poco relevante.

5.2. Oscilador amortiguado y forzado

La primera conclusión que se extrae del análisis realizado es que la curva lorentziana se ajusta mejor a nuestros datos. Primero porque podemos ver como en la gaussiana ambas asíntotas tienden hacia el mismo valor y los datos no parecen comportarse así. Y segundo porque el valor obtenido de χ^2 nos indica que la desviación de los datos en el ajuste de la curva lorentziana es mucho menor. Aún así el ajuste no supera el test de χ^2 para ningún percentil de las tablas de [4]. Esto se debe principalmente a los errores cometidos en la determinación de la amplitud y a que cuando la frecuencia aumenta el muelle se desacopla del movimiento al que lo fuerza el motor. Es decir, para frecuencias altas, el muelle no es capaz de reaccionar lo suficientemente rápido al movimiento del motor, por lo que las oscilaciones tenderán a desaparecer cuando $w \rightarrow \infty$.

Por otro lado los valores obtenidos para los coeficientes en el ajuste deberían de concordar con la frecuencia característica y el coeficiente de amortiguamiento relacionado con la intensidad de corriente utilizada.

$$w_{01} = (3,241 \pm 0,025) \text{s}^{-1} \quad w_{02} = (3,2164 \pm 0,0026) \text{s}^{-1}$$

dónde el subíndice 1 hace referencia a la frecuencia obtenida al comienzo de la práctica y el 2 al determinado en la sección de oscilaciones forzadas. Como podemos ver ambos valores son muy cercanos y entran en el intervalo de confianza de cada uno. La pequeña variación observada puede venir determinada por un distinto comportamiento del muelle cuando se encuentra amortiguado por el electroimán o no, o simplemente por algún error que hayamos arrastrado en las medidas.

En el caso de los coeficientes de amortiguamiento tenemos los siguientes resultados:

$$\gamma_1 = (0,140 \pm 0,057) \text{s}^{-1} \quad \gamma_2 = 0,1355 \text{s}^{-1}$$

dónde el primero de ellos ha sido determinado mediante el ajuste realizado para los coeficientes de amortiguamiento frente a la intensidad debido a que la intensidad utilizada en las

⁵Ver [3].

oscilaciones forzadas no coincidía con ninguna de las utilizadas anteriormente, y la segunda es la calculada mediante el ancho de la curva de resonancia. Como vemos los resultados obtenidos son muy buenos, entrando el segundo valor dentro del intervalo de confianza del primero. La pequeña diferencia que existe entre ambos valores puede venir de que el primer coeficiente ha sido obtenido a partir de un ajuste realizado con tan sólo 5 datos y del cual desconocíamos su comportamiento, por lo que tampoco es un dato del que podamos fiarnos mucho (por esta razón obtenemos una incertidumbre tan alta). Aun así cabe destacar que si sería normal obtener un valor menor en el procedimiento empleado para las oscilaciones forzadas, ya que estamos manteniendo una corriente permanente por el electroimán que con el paso del tiempo va calentando el imán por el efecto Joule, reduciendo así su efecto sobre el péndulo.

5.3. Amortiguamiento crítico

El valor obtenido para el coeficiente de amortiguamiento crítico fue:

$$\gamma_c = 2,789 \pm 0,13 \text{ s}^{-1}$$

el cual debería de coincidir con la frecuencia característica, $w_{01} = (3,241 \pm 0,025)\text{s}^{-1}$. Quizá en este apartado el rozamiento propio del muelle puede que influya en el resultado frenándolo antes de tiempo, aún así la diferencia con la frecuencia característica sigue siendo bastante considerable.

6. Propagación de incertidumbres

Con el fin de facilitar una lectura de la práctica, se muestran a continuación las propagaciones de errores utilizadas a lo largo del documento:

6.1. Frecuencia característica

$$u(t) = 0,6 \text{ s} \quad u(T) = \frac{t}{n^{\circ}\text{oscilaciones}} \text{ s} \quad u(w) = \frac{2\pi}{T^2} u(T) \text{ s}^{-1}$$

6.2. Oscilaciones amortiguadas

$$\delta(I) = 0,02 \text{ A} \quad u(I) = \frac{\delta(I)}{\sqrt{12}} = 0,0058 \text{ A}$$

Para la amplitud, como hicimos el promedio de dos valores, primero tenemos que

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta(A) = 0,3 \text{ u} \quad \Rightarrow \quad u_1(A) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(A) = 0,14 \text{ u}$$

y como tuvimos que restarle una amplitud inicial a cada valor de $(0,5 \pm 0,1)$ u tenemos que:

$$u(A) = \sqrt{u_1^2(A) + u_2^2(A)} = \sqrt{0,14^2 + 0,1^2} = 0,17 \text{ u}$$

Esta determinación de la incertidumbre se corresponde con el valor de γ que se obtiene a partir del ajuste realizado en esta parte:

$$u(\gamma) = \sqrt{u^2(a) + u^2(b)I^2 + u^2(c)I^2 + (b + 2cI)^2 u^2(I)}$$

Referencias

- [1] Taylor, J.R. . *Classical Mechanics*; University Science Books, 2005
- [2] J. B. Marion: *Dinámica clásica de las partículas y los sistemas*. Ed. Reverté, 2000.
- [3] L. M. Varela, F. Gómez, J. Carrete. *Tratamiento de Datos Físicos*. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico. Universidade de Santiago. 2010.
- [4] Revington, P.R; Robinson, D. K. . *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. Mc Graw Hill, 3rd Edition, 2003.
- [5] Merzouki, Rochdi; Samantaray, Arun Kumar; Pathak, Pushparaj Mani. *Intelligent Mechatronic Systems: Modeling, Control and Diagnosis*. Springer Science & Business Media, 2012.