Oscilador amortiguado forzado

Gonzalo Bastos González

1. Oscilador amortiguado

Partiremos de un péndulo de Pohl descrito por la ecuación:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t) \tag{1}$$

Donde θ_0 es la amplitud inicial del péndulo, ω_1 la frecuencia y γ es el coeficiente de amortiguamiento. Los máximos de amplitud vendrán dados por la ecuación:

$$\theta_{max}(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \tag{2}$$

1.1. Obtención experimental de ω_1 y γ

El coeficiente γ de amortiguamiento es característico del movimiento de un oscilador armónico sometido a una fuerza de rozamiento del tipo $F = -kx$, siendo γ directamente proporcional a la fuerza. En nuestro caso el amortiguamiento está causado principalmente por el electroimán, que crea las denominadas como corrientes de Foucault al suministrarle una intensidad de corriente I. Para el estudio de nuestro oscilador vamos a obtener el valor de ω_1 de forma directa a partir del tiempo de n oscilaciones y vamos a calcular γ mediante un ajuste a la ecuación (2).

Antes de empezar a exponer las medidas tomadas es importante explicar brevemente la escala de medida del péndulo de Pohl. El péndulo cuenta con una serie de marcas que van desde -20 a 20 a intervalos de $0,2$ y representan el ángulo θ de oscilación, pero las unidades de este ángulo son arbitrarias.

Otro aspecto importante a tratar antes de exponer las medidas son las incertidumbres empleadas. Para las frecuencias ω_1 la incertidumbre vendrá de la medida del tiempo de n oscilaciones a partir de propagación, tomaremos como incertidumbre de los tiempos medidos el doble del tiempo medio de reacción a un estímulo visual, ya que consideramos que el error aumentaba al tener que coordinarnos entre los compañeros para poner en marcha el péndulo, por tanto $s(t) = 0,5\ s$. Para los valores de ángulo del péndulo la incertidumbre será la longitud del intervalo de medida más pequeño, por lo que $s(\theta) = 0,2$. Por último, la incertidumbre de la intensidad viene dada por el polímetro empleado para medirla, $s(I) = 0,01\ A$.

Mediremos los valores de ω_1 para diferentes valores de intensidad, comenzando con $I_1 = 0$. Medimos el tiempo para $n = 30$ oscilaciones en 4 ocasiones y calculamos la media. A partir de ahí calculamos ω_1 y su incertidumbre:

$$\begin{gathered} \omega_1 = \frac{2\pi n}{t} \Rightarrow s(\omega_1) = \frac{s(t)}{t^2} = 0,00016\ s^{-1} \\ \omega_{11} = 3,330 \pm 0,030\ s^{-1} \end{gathered} \tag{3}$$

Para calcular γ (que depende solo del rozamiento del péndulo en este caso) vamos a ajustar los valores de amplitud máxima medidos en función del tiempo, tomando medidas cada dos períodos ($T = 2\pi/\omega_1 = 1,887\ s$). El ajuste será a una función del tipo $\theta_{max} = ae^{-bt}$, donde a es la amplitud inicial y $b = \gamma$. Obtuvimos los siguientes valores:

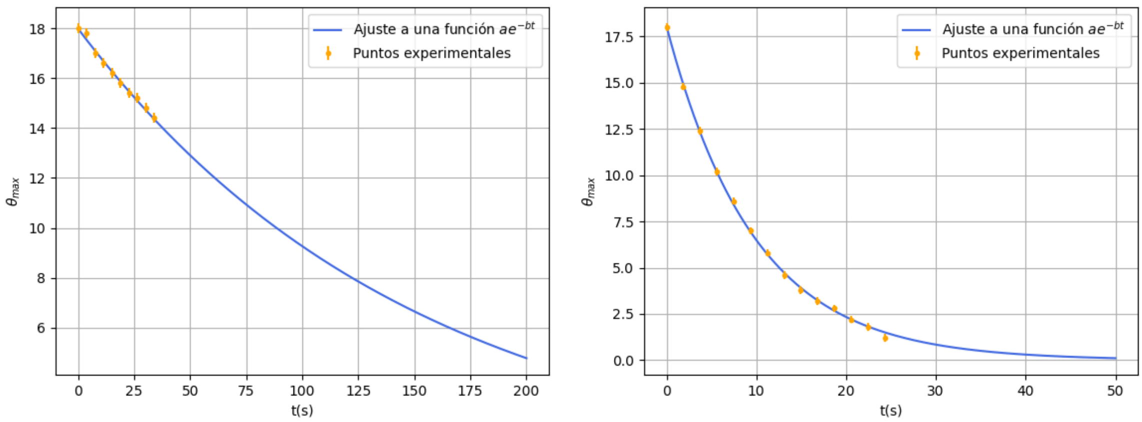
$$\begin{gathered} a = \theta_0 = 17,998 \pm 0,075\ u \\ b = \gamma_1 = 0,006642 \pm 0,00022\ s^{-1} \end{gathered} \tag{4}$$

Para $I_2 = 0,3\ A$ tomamos 5 medidas con $n = 10$ oscilaciones para calcular ω_{12}. Para medir la amplitud máxima en función del tiempo medimos estos máximos para cada período:

$$\omega_{12} = \frac{2n\pi}{t} = 3,361 \pm 0,090\ s^{-1} \tag{5}$$

Para calcular γ vamos a ajustar los datos a una curva igual que la anterior, del tipo $\theta_{max} = ae^{-bt}$ con $a \equiv \theta_0$ y $b \equiv \gamma$. Obtuvimos que:

$$\begin{aligned} a = \theta_0 &= 18,04 \pm 0,10\ u \\ b = \gamma_2 &= 0,10221 \pm 0,00092\ s^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$



(a) Medidas de θ_{max} y ajuste para $I = 0\ A$ (b) Medidas de θ_{max} y ajuste para $I = 0,3\ A$

Figura 1: Curvas de amplitudes máximas para $I = 0$ y $I = 0,3$

Para $I_3 = 0,6\ A$ y todos los siguientes valores de intensidad medimos la amplitud máxima cada semiperíodo. Esto nos va a permitir realizar otros dos ajustes, ya que medimos los máximos y los mínimos ($\theta_{min} = -\theta_0 e^{-\omega_1 t}$) de la amplitud. Gracias a esto podemos ajustar también a la función cuasiperiódica que describe el movimiento del oscilador, la Ec.1. Para medir ω_1 en este caso realizamos 5 medidas con $n = 7$ oscilaciones.

$$\omega_{13} = \frac{2n\pi}{t} = 3,50 \pm 0,14\ s^{-1} \tag{7}$$

Para medir la amplitud en función de t tomamos como inicio el lado derecho del péndulo, por lo que $\theta_0 > 0$ siempre y se corresponderá con a_{max}. Obtendremos también la curva para los mínimos y $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} a_{max} = \theta_0 = 17,44 \pm 0,38 \quad a_{min} = -\theta_0 = -18,06 \pm 0,38 \\ b_{max} = \gamma = 0,376 \pm 0,011 \quad b_{min} = \gamma = 0,3812 \pm 0,0083 \end{aligned} \tag{8}$$

Para obtener una expresión para $\theta(t)$ ajustaremos los datos a una curva del tipo $\theta = \theta_0 e^{-bt}\cos(ct + d)$, siendo b, c, d los parámetros a determinar.

$$\begin{aligned} b = \gamma &= 0,353 \pm 0,018\ s^{-1} \\ c = \omega_1 &= 3,584 \pm 0,021\ s^{-1} \\ d = \varphi_0 &= 0,147 \pm 0,069 \end{aligned} \tag{9}$$

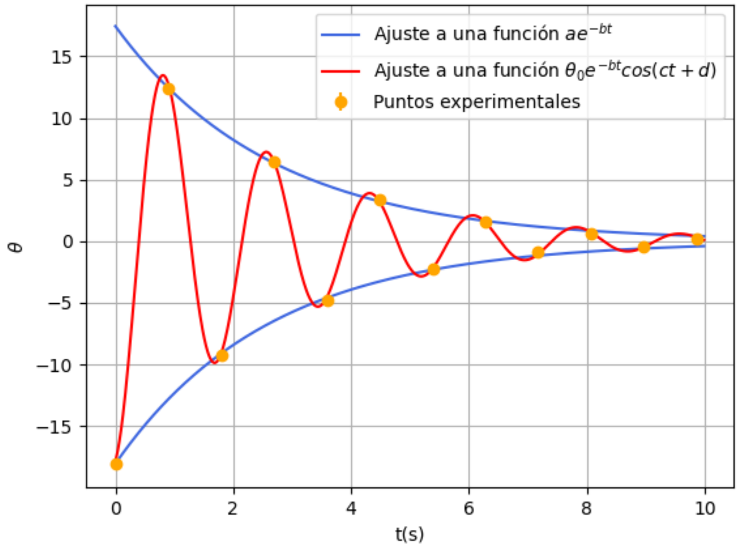


Figura 2: Medidas de θ_{max} y ajustes para $I = 0,6\ A$

Para los últimos dos valores de intensidad, $I_4 = 0,9\,A$ y $I_5 = 1,1\ A$, el procedimiento es análogo. Para $I_4 = 0,9\ A$ los resultados obtenidos fueron:

$$\begin{gathered} \omega_{14} = 3{,}35 \pm 0{,}22\ s^{-1} \\ a_{max} = \theta_0 = 19{,}80 \pm 0,71 \quad a_{min} = -\theta_0 = -18,02 \pm 0,68 \\ b_{max} = \gamma = 0,707 \pm 0,022 \quad b_{min} = \gamma = 0,681 \pm 0,022 \end{gathered} \tag{10}$$

Los coeficientes de $\theta(t)$ son:

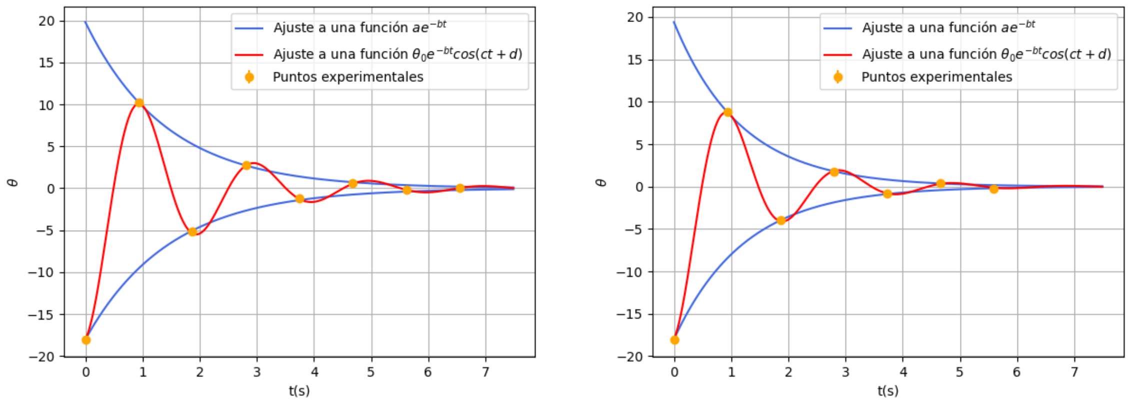
$$\begin{gathered} b = \gamma = 0,602 \pm 0,041\ s^{-1} \\ c = \omega_1 = 3,126 \pm 0,031\ s^{-1} \\ d = \varphi_0 = 0,04 \pm 0,22 \end{gathered} \tag{11}$$

Para $I_5 = 1,1\ A$ obtuvimos que:

$$\begin{gathered} \omega_{15} = 3,371 \pm 0,30\ s^{-1} \\ a_{max} = \theta_0 = 19{,}39 \pm 0,85 \quad a_{min} = -\theta_0 = -18,00 \pm 0,058 \\ b_{max} = \gamma = 0,8480 \pm 0,0082 \quad b_{min} = \gamma = 0,8112 \pm 0,0072 \end{gathered} \tag{12}$$

Los coeficientes de $\theta(t)$ son:

$$\begin{gathered} b = \gamma = 0,764 \pm 0,041\ s^{-1} \\ c = \omega_1 = 3,177 \pm 0,034\ s^{-1} \\ d = \varphi_0 = 0,02 \pm 0,23 \end{gathered} \tag{13}$$



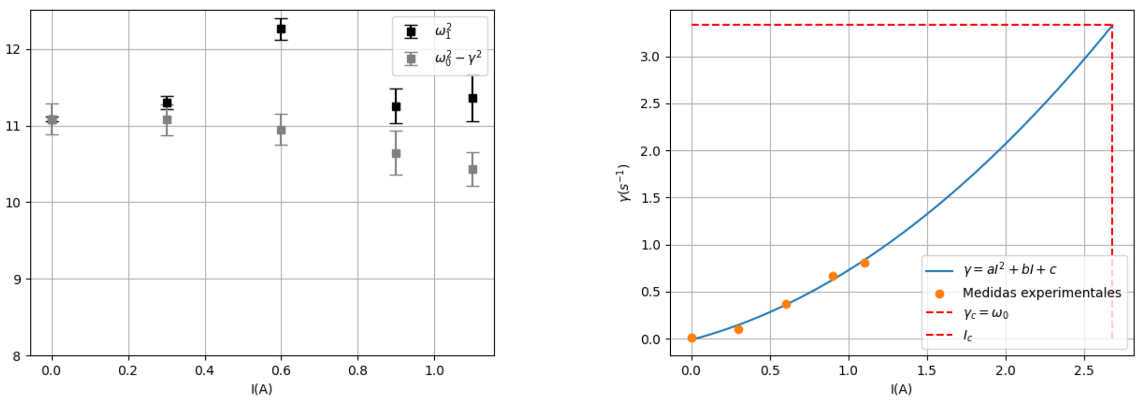
(a) Amplitudes máximas y $\theta(t)$ para $I_4 = 0,9\ A$

(b) Amplitudes máximas y $\theta(t)$ para $I_4 = 1,1\ A$

Figura 3: Ajustes no lineales para $I =,9$ y $I = 1,1$

1.2. Amortiguamiento crítico y comparación entre γ y ω_1

Una vez obtenidos los valores de γ y ω_1 podemos comprobar la veracidad de la ecuación $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Para ello tomaremos $\omega_0 \simeq \omega_{11}(I = 0\ A)$. Siguiendo esta relación podemos obtener el valor del amortiguamiento crítico, aquel que anula el término ω_1 ($\omega_0 = \gamma_c$). El valor γ_c se alcanza a una determinada intensidad que interpolaremos ajustando la relación $\gamma(I)$ a una función cuadrática ($\gamma(I) = aI^2 + bI + c$). En las siguientes gráficas podemos ver más claros los cálculos hechos.



(a) Comparación de los valores de ω_1^2 y $\omega_0^2 - \gamma^2$

(b) $\gamma(I) = aI^2 + bI + c$ y interpolación de la I_c

Figura 4: Estudio del punto de amortiguamiento crítico

Como podemos ver en la primera gráfica la relación $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ no queda del todo clara con las medidas realizadas, los valores de ω_1 medidos no decaen como era de esperar. Esto se puede explicar porque para valores más altos de intensidad medimos el tiempo para de un número pequeño de oscilaciones y el error humano a la hora de medir es en proporción mucho mayor. Por otro lado, después del ajuste cuadrático de $\gamma(I)$ la intensidad crítica, I_c, que hace que $\gamma_c = \omega_0$ es:

$$I_c = 2,680 \pm 0,015\ A \tag{14}$$

Este valor se aleja del medido en el laboratorio, $I_c = 1,85 \pm 0,01\ A$

2. Oscilador forzado

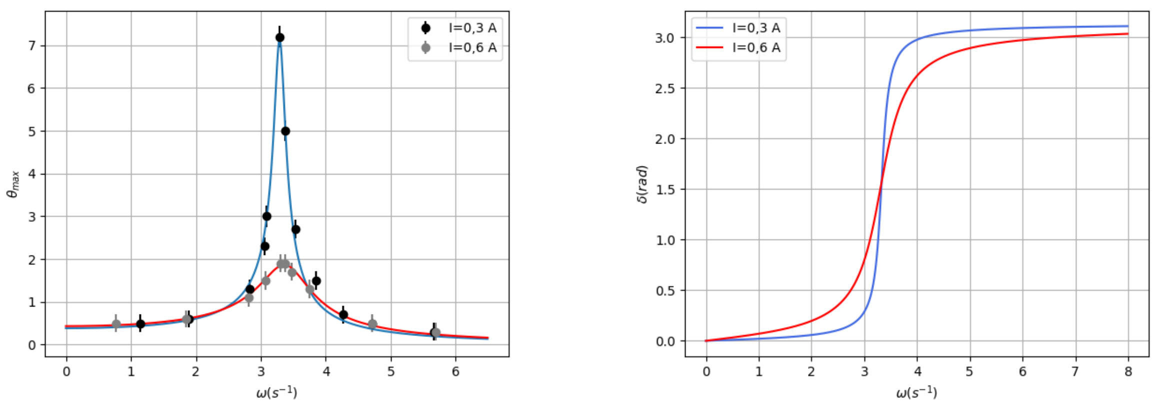
En esta parte de la práctica aplicaremos una fuerza periódica al péndulo procedente de un motor. La amplitud del péndulo depende de la frecuencia del motor, ω, de la siguiente forma:

$$A(\omega) = \frac{F_0/J}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \tag{15}$$

Donde F_0 es la fuerza máxima, J el momento de inercia, ω la frecuencia de la fuerza externa y ω_0 es la frecuencia natural del oscilador. La amplitud tiene un pico cuando ω se acerca a la denominada frecuencia de resonancia (ω_R) que sigue la siguiente relación que verificaremos:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{16}$$

Para comprobar este comportamiento medimos las amplitudes máximas para diferentes frecuencias tomando dos intensidades distintas, que provocaban diferentes valores de rozamiento, $I_1 = 0,3\ A$ y $I_2 = 0,6\ A$. Para medir las amplitudes tomamos el valor medio entre el valor máximo de los dos lados del péndulo.



(a) Medidas experimentales de $A(\omega)$ y ajuste a la Ec.15

(b) Aproximación de $\delta(\omega)$ para los dos casos estudiados

Figura 5: Estudio de la resonancia de un oscilador forzado

A partir de la gráfica podemos ver la influencia de γ en la resonancia, siendo mayor a valores de γ bajos y atenúandose mucho cuando hay mucho rozamiento. Esto se puede cuantificar empleando el factor de calidad de nuestro oscilador, que se define como $Q = \omega_R/\Delta\omega$, siendo $\Delta\omega$ la variación entre las frecuencias cuya amplitud es $A = A_R/\sqrt{2}$.

$$Q_1 = 16,288 \pm 0,026 \quad Q_2 = 4,716 \pm 0,016 \tag{17}$$

Otro aspecto interesante a estudiar es la simetría de la función (15) a ambos lados de su máximo, lo que implica estudiar los casos límite $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$. En primer lugar para el caso $\omega \to 0$ podemos ver que la amplitud tiende a un valor fijo ($\frac{F_0}{J\omega_0}$), no se va a 0. La interpretación física de esto es que en ese caso límite no habría oscilación de la fuerza, esta sería constante y desplazaría al oscilador de su posición de equilibrio. Para el otro caso límite $\omega \to \infty$ la amplitud sí que se va a 0. Este caso límite se puede entender mucho mejor si observamos el desfase (δ) que hay entre la fuerza externa y el oscilador. En el laboratorio hicimos un estudio cualitativo de esto, viendo que:

- En el caso $\omega \to 0 \Rightarrow \delta \to 0$, las oscilaciones están en fase.
- En el caso $\omega \to \omega_R \Rightarrow \delta \to \pi/2$, hay medio período de diferencia entre las oscilaciones.
- En el caso $\omega \to \infty \Rightarrow \delta \to \pi$, las oscilaciones están en oposición de fase.

Por tanto, podemos concluír que la función no es simétrica, pese a que en entornos próximos al máximo si que presenta una alta simetría. Este comportamiento se ve más claro en la Fig.5, que representa el desfase, δ, en función de ω a partir de la relación:

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{18}$$

Los valores obtenidos a partir del ajuste para los coeficientes de la Ec.15 fueron:

$$\begin{array}{ccc} (F_0/J)_{(1)} = 4,15 \pm 0,21\ s^{-1} & \omega_{0(1)} = 3,2920 \pm 0,0070 s^{-1} & \gamma_{(1)} = 0,0884 \pm 0,0060\ s^{-1} \\ (F_0/J)_{(2)} = 5,01 \pm 0,24\ s^{-1} & \omega_{0(2)} = 3,407 \pm 0,020 s^{-1} & \gamma_{(2)} = 0,397 \pm 0,022\ s^{-1} \end{array} \tag{19}$$

A partir de nuestro ajuste interpolamos el valor de ω_R para las dos intensidades, que se corresponde con el valor de ω que hace máxima la función. No tiene incertidumbre porque no se trata de un cálculo sino de una interpolación realizada con Python.

$$\omega_{R1}(I = 0,3\ A) = 3,2897\ s^{-1} \quad \omega_{R2}(I = 0,6\ A) = 3,3605\ s^{-1} \tag{20}$$

Con estos datos podemos verficar la relación (16), obteniendo resultados bastante satisfactorios. Pese a que no entran dentro del rango de incertidumbre, los valores de ω_R^2 se corresponden bastante con el valor que deberían tener según los valores de γ y ω_0 medidos anteriormente. En la siguiente tabla podemos ver también la comparación entre los valores de γ obtenidos del ajuste (γ_I) y los obtenidos en los apartados anteriores (γ_E). Para $I = 0,6\ A$ tomamos como γ la media de el valor obtenido para los máximos y para los mínimos de amplitud.

	ω_R^2 (s^{-2})	$\omega_0^2 - 2\gamma^2$ (s^{-2})	$\gamma_I(s^{-1})$	$\gamma_E(s^{-1})$
$I = 0,3\ A$	$10,8221$	$11,0652 \pm 0,0011$	$0,0884 \pm 0,0060$	$0,10221 \pm 0,00092$
$I = 0,6\ A$	$11,293$	$10,837 \pm 0,016$	$0,397 \pm 0,022$	$0,3786 \pm 0,047$

Tabla 1: Verificación de la relación $\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ y de los valores de γ obtenidos

3. Conclusión

Nuestra práctica se basa en el estudio de un movimiento oscilatorio que se ve sometido a una fuerza de rozamiento y una fuerza externa oscilante.

Cuando solo aplicamos el rozamiento pudimos obtener con éxito la función sinusoidal que describe el movimiento y la función a la que se ajustan los valores máximos de amplitud. Observamos también el fenómeno del amortiguamiento crítico, en el que pudimos ver una clara diferencia entre la I_c medida ($1,85\ A$) y la obtenida a partir de la relación $\gamma(I)(2,68\ A)$, que supusimos cuadrática.

Por otra parte, cuando aplicamos una fuerza externa oscilante nos centramos en estudiar el fenómeno de la resonancia, buscando la frecuencia que maximizaba la amplitud (ω_R). Pudimos observar también la relación entre esta amplificación y el amortiguamiento, en cuanto este subía la resonancia se volvía imperceptible.