

Medida de la constante dieléctrica

Gonzalo Bastos González

Técnicas experimentales II-Laboratorio de electromagnetismo

Índice

1. Objetivos e introducción teórica	2
2. Materiales y metodología	2
3. Resultados experimentales y tratamiento de datos	5
3.1. Determinación de la permitividad del vacío	5
3.1.1. Voltaje constante	5
3.1.2. Distancia constante	7
3.2. Determinación de la permitividad de un dieléctrico	8
4. Conclusiones	10
5. Bibliografía	10

1. Objetivos e introducción teórica

El objetivo de esta práctica es determinar la permitividad del vacío, ϵ_0 , estudiando la relación entre carga y voltaje de un condensador plano. Además de eso, determinaremos la permitividad de un dieléctrico con el mismo método.

Para todas estas medidas partiremos de un condensador plano-paralelo, que supondremos ideal, ya que su superficie es mucho mayor que la distancia a la que estarán separadas las placas en todo momento y, por tanto, podremos despreciar los efectos de borde. La capacidad de nuestro condensador plano-paralelo ideal en el vacío viene dada por la siguiente expresión:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (1)$$

Donde S es la superficie de las placas y d la distancia entre ellas. En un medio dieléctrico la capacidad es:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (2)$$

Donde ϵ_r es la permitividad relativa del dieléctrico. Cabe destacar también que durante toda nuestra práctica estamos trabajando con la aproximación de que estamos en el vacío, que es válida teniendo en cuenta que la permitividad relativa del aire tiene el siguiente valor:

$$\epsilon_r = 1,0005364 \simeq 1 \quad (3)$$

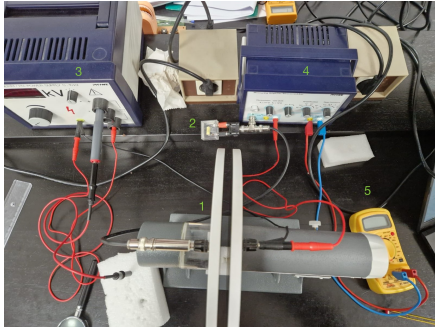
De las ecuaciones (1) y (2) se deduce la siguiente relación para la permitividad relativa de nuestro dieléctrico:

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (4)$$

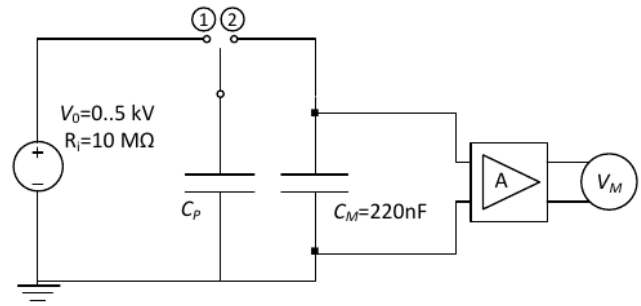
2. Materiales y metodología

Los materiales e instrumentos empleados durante la práctica fueron:

1. Condensador plano-paralelo de radio $r = 13 \text{ cm}$. Este es el condensador que usaremos para medir, donde variaremos la distancia y introduciremos el dieléctrico.
2. Condensador de medida, C_M . Lo emplearemos como referencia y tiene una capacidad conocida de 220 nF , que es mucho mayor que la del condensador plano.
3. Fuente de alimentación, proporciona una diferencia de potencial V_0 de entre 1 y 5 kV .
4. Amplificador de señal. Se emplea con ganancia unidad, su función es permitir la medida del voltaje en el condensador de medida C_M a través de una alta impedancia de entrada. De este modo evitamos la descarga de C_M durante la medida.
5. Polímetro que con el que mediremos la diferencia de potencial del condensador de medida.
6. Resistencia de $10 \text{ M}\Omega$, que se conectará con la fuente en serie por motivos de seguridad.
7. Cables de conexión.



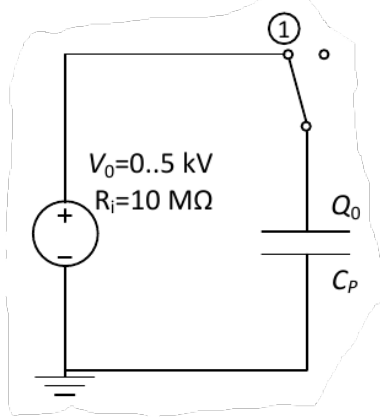
(a) Montaje en el laboratorio



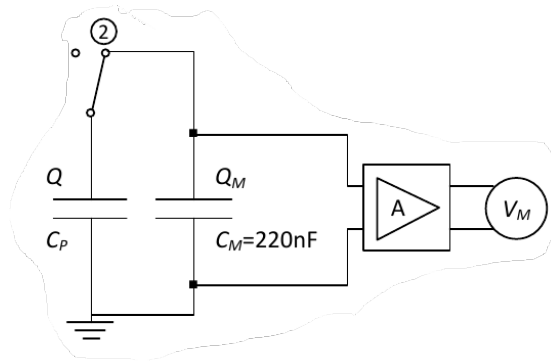
(b) Esquema del circuito

Figura 1: Montaje experimental

Esta es la configuración general, según la conexión que realicemos en 1-2 los circuitos concretos con los que trabajaremos son:



(a) Configuración 1, carga



(b) Configuración 2, descarga

Figura 2: Circuitos empleados

Estas dos configuraciones representan el procedimiento experimental que vamos a llevar a cabo:

- **Configuración 1:** Carga del condensador plano C_P aplicándole un voltaje V_0 , adquiriendo una carga $Q_0 = C_P V_0$.
- **Configuración 2:** Descarga del condensador plano y carga del condensador de medida C_M , previamente descargado, conectándolos en paralelo. Posteriormente demostraremos que por la diferencia de órdenes de magnitud que hay entre las capacidades de los dos condensadores casi la totalidad de la carga pasará al condensador de medida, $Q_M \simeq Q_0$, por lo que midiendo el potencial del condensador de medida, V_M , podemos calcular la carga del condensador plano.

El procedimiento será el siguiente:

1. Empezamos con el condensador plano descargado y lo conectamos según la configuración 1 para cargarlo con Q_0 .
2. Desconectamos el condensador de la fuente de alimentación y lo conectamos según la configuración 2, para medir el voltaje V_M con el condensador de medida.
3. Una vez tengamos la medida de V_M descargamos el condensador con el amplificador y volvemos a repetir el proceso.

Para demostrar que el condensador plano se descarga totalmente en el condensador de medida vamos a partir del hecho de que $C_M \gg C_P$ y de que están conectados en paralelo. La carga inicial es Q_0 , por lo que las cargas que hay en los condensadores verifican $Q_0 = Q_m + Q_P$. Además por estar en paralelo la diferencia de potencial en ambos condensadores es la misma, por lo que:

$$V = \frac{Q_P}{C_P} = \frac{Q_M}{C_M} \Rightarrow Q_M \gg Q_P \quad (5)$$

Como $Q_0 = Q_m + Q_P$ podemos despreciar Q_P y hacer la siguiente aproximación:

$$Q_0 \simeq Q_M \quad (6)$$

Por último, cabe destacar que durante toda la práctica estamos cargando y descargando los condensadores, proceso que no es instantáneo ni mucho menos, sino que sigue un comportamiento exponencial. En concreto la diferencia de potencial, magnitud con la que trabajamos toda la práctica y que estamos midiendo obedece la relación:

$$V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (7)$$

Como podemos ver en la imagen, el voltaje del condensador tiende a estabilizarse después de cierto período de tiempo. Es por eso que a la hora de realizar las medidas del voltaje del condensador de medida, V_m esperamos un tiempo de carga prudencial de unos 15 s en cada medida, para situarnos en el mismo punto de la curva y tomar medidas consistentes.

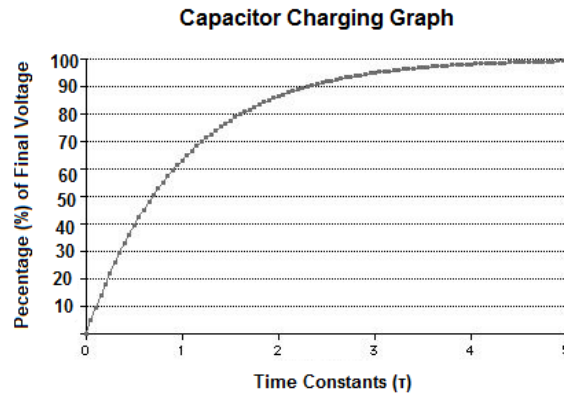


Figura 3: Curva de carga, $V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Además de eso es importante destacar también que el proceso de descarga sigue una exponencial negativa del tipo:

$$V = V_0 e^{\frac{-t}{RC}} \quad (8)$$

Por lo que a la hora de cambiar el circuito de la configuración 1 a la 2 es importante hacerlo de forma rápida y eficaz, para minimizar la posible pérdida de carga en el proceso.

3. Resultados experimentales y tratamiento de datos

3.1. Determinación de la permitividad del vacío

En primer lugar estudiaremos la permitividad del vacío, ϵ_0 , para lo que trabajaremos con el condensador sin dieléctrico. Para ello emplearemos dos métodos diferentes. En primer lugar fijaremos el voltaje y variamos la distancia entre las placas para realizar un ajuste de C_P frente a $1/d$. En el otro método procederemos al revés, fijaremos la distancia y variamos el voltaje para hacer un ajuste de Q_0 frente a V_0 .

3.1.1. Voltaje constante

Para este método partimos de la relación:

$$C_P = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (9)$$

Donde $Q_0 = C_M V_M$ como ya demostramos antes. Por tanto necesitamos medir los diferentes valores de V_M para las diferentes distancias que fijamos. En la siguiente tabla podemos ver los datos obtenidos para un voltaje $V_0 = 1500 \pm 10 \text{ V}$:

$d \pm 0,01 \text{ (cm)}$	$V_M \pm 0,02 \text{ (V)}$	$Q_0 \pm 4,4 \text{ (nC)}$
0,20	2,04	448,8
0,22	1,84	404,8
0,24	1,72	378,4
0,26	1,63	358,6
0,28	1,49	327,8
0,30	1,38	303,6

Tabla 1: Datos experimentales a voltaje fijo

Donde $s(Q_0)$ se obtiene trivialmente como $s(Q_0) = C_M s(V_M) = 4,4 \text{ nC}$. A partir de estos datos podemos obtener las magnitudes necesarias para nuestra regresión lineal, que se basará en la expresión (9):

$$C_P = \frac{\epsilon_0 S}{d} \sim a + b \frac{1}{d} \quad (10)$$

Donde la pendiente de la recta de regresión tiene la siguiente expresión:

$$b = \epsilon_0 S \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{b}{S} \quad s(\epsilon_0) = \frac{s(b)}{S} \quad (11)$$

Los datos empleados para las regresiones fueron:

$1/d \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$1/d \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$s(1/d) \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$C_P \text{ (F)}$	$C_P \text{ (pF)}$	$s(C_P) \text{ (pF)}$
500	5,00	0,50	$2,992 \cdot 10^{-10}$	299,2	3,5
455	4,55	0,41	$2,699 \cdot 10^{-10}$	269,9	3,4
417	4,17	0,35	$2,523 \cdot 10^{-10}$	252,3	3,4
385	3,85	0,30	$2,391 \cdot 10^{-10}$	239,1	3,3
357	3,57	0,26	$2,185 \cdot 10^{-10}$	218,5	3,3
333	3,33	0,22	$2,024 \cdot 10^{-10}$	202,4	3,2

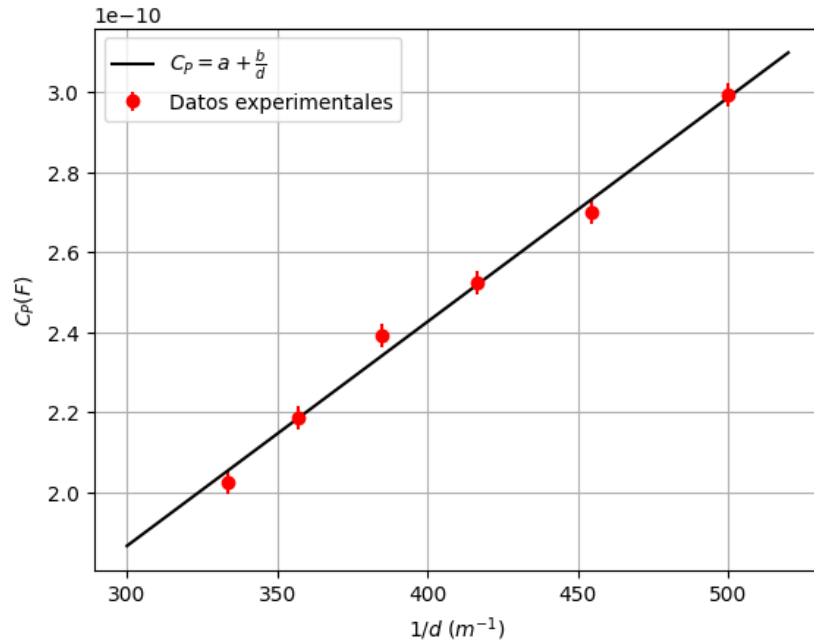
Tabla 2: Datos empleados para las regresiones

Las incertidumbres de $1/d$ y C_P se obtienen por propagación de incertidumbres a partir de las expresiones:

$$s\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{s(d)}{d^2}$$

$$s(C_P) = \sqrt{\left(\frac{s(V_0)Q_0}{V_0^2}\right)^2 + \left(\frac{s(Q_0)}{V_0}\right)^2} \quad (12)$$

En la siguiente figura podemos ver la recta de regresión obtenida:

Figura 4: Regresión lineal para $V_0 = 1,5 \text{ kV}$

Los parámetros de la recta de regresión son los siguientes:

$$a = (1,85 \pm 0,99) \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad b = (5,60 \pm 0,24) \cdot 10^{-13} \text{ F} \cdot \text{m} \quad r = 0,996 \quad (13)$$

El valor teórico de la ordenada en el origen debería ser cero, con nuestros datos de la regresión podemos afirmar que es despreciable. Una vez tenemos la pendiente de nuestra recta podemos calcular ya el valor de la constante de permitividad:

$$\epsilon_0 = (1,055 \pm 0,045) \cdot 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (14)$$

3.1.2. Distancia constante

Para calcular ϵ_0 a distancia constante partimos de la ecuación (9) y despejamos Q_0 como función lineal de V_0 , lo que nos permite realizar una nueva regresión lineal para calcular ϵ_0 :

$$Q_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} V_0 \sim a + b V_0 \Rightarrow b = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (15)$$

A partir de esta regresión es inmediato calcular ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = \frac{bd}{S} \quad s(\epsilon_0) = \sqrt{\left(\frac{b \cdot s(d)}{S}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot s(b)}{S}\right)^2} \quad (16)$$

Los valores de Q_0 se obtienen a partir de los voltajes del condensador de medida V_M , partiendo de la aproximación de que $Q_0 \simeq Q_M$:

$$Q_0 \simeq Q_M = C_M V_M \Rightarrow s(Q_0) = C_M s(V_M) \quad (17)$$

Por tanto, las medidas realizadas fueron de V_M para diferentes valores de V_0 tomando una distancia fija $d = 0,25 \pm 0,01 \text{ cm}$. En la siguiente tabla podemos ver los datos obtenidos:

$V_0 \pm 10 \text{ (V)}$	$V_M \pm 0,02 \text{ (V)}$	$Q_0 \pm 0,044 \cdot 10^{-7} \text{ (C)}$	$Q_0 \pm 4,4 \text{ (nC)}$
500	0,86	$1,892 \cdot 10^{-7}$	189,2
1000	1,17	$2,574 \cdot 10^{-7}$	257,4
1500	1,44	$3,168 \cdot 10^{-7}$	316,8
2000	1,65	$3,630 \cdot 10^{-7}$	363,0
2500	1,80	$3,960 \cdot 10^{-7}$	396,0
3000	2,04	$4,488 \cdot 10^{-7}$	448,8

Tabla 3: Datos experimentales a distancia fija

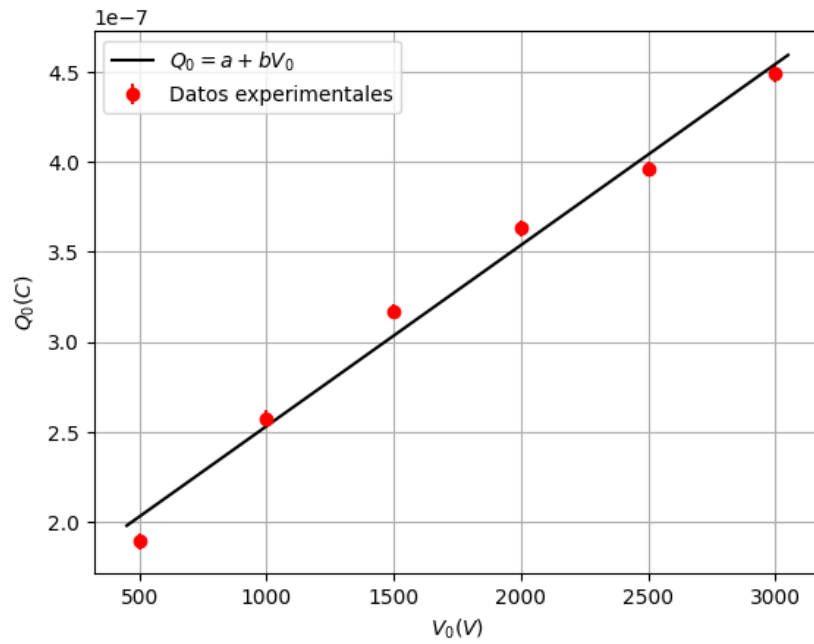
Con estos datos ya podemos realizar nuestra regresión lineal, cuya recta de regresión podemos observar en la siguiente figura.

Los parámetros de la recta de regresión son:

$$a = 1,53 \pm 0,11 \cdot 10^{-8} \text{ C} \quad b = 1,006 \pm 0,057 \cdot 10^{-10} \text{ F} \quad r = 0,993 \quad (18)$$

Como en el apartado anterior, el término independiente puede ser despreciado si lo comparamos con los valores de Q_0 con los que trabajamos, estando un orden de magnitud por debajo. A partir de estos valores podemos calcular ϵ_0 con la ecuación (16):

$$\epsilon_0 = (4,74 \pm 0,33) \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \quad (19)$$

Figura 5: Regresión lineal para $d = 0,25 \text{ cm}$

3.2. Determinación de la permitividad de un dieléctrico

Para la determinación de la permitividad de nuestro dieléctrico, una lámina de plástico, el procedimiento es igual que en el apartado anterior, ajustamos el dieléctrico y tomamos medidas de V_M y V_0 con una distancia fija, en este caso $d = 1,04 \pm 0,01 \text{ cm}$. Para estudiar la permitividad relativa repetimos las medidas con la misma sustancia pero ahora sin dieléctrico. El cociente de las permitividades medidas, con y sin dieléctrico, nos permitirá obtener el valor de la permitividad relativa de la lámina de dieléctrico según la ecuación 4. Las capacidades necesarias se obtienen como pendiente de la recta de regresión de Q_0 frente a V_0 , donde $Q_0 = C_M V_M$.

En las siguientes tablas podemos ver las medidas tomadas con y sin el dieléctrico, a partir de las que haremos las regresiones

$V_0 \pm 10 \text{ (V)}$	$V_M \pm 0,05 \text{ (V)}$	$Q_0 \pm 0,11 \cdot 10^{-7} \text{ (C)}$	$Q_0 \pm 11 \text{ (nC)}$
1000	0,78	$1,72 \cdot 10^{-7}$	172
2000	1,41	$3,10 \cdot 10^{-7}$	310
3000	2,51	$5,52 \cdot 10^{-7}$	552
4000	3,20	$7,04 \cdot 10^{-7}$	704
5000	3,81	$8,38 \cdot 10^{-7}$	838

Tabla 4: Datos experimentales con el dieléctrico

$V_0 \pm 10$ (V)	$V_M \pm 0,05$ (V)	$Q_0 \pm 0,11 \cdot 10^{-7}$ (C)	$Q_0 \pm 11$ (nC)
1000	0,32	$0,70 \cdot 10^{-7}$	70
2000	0,68	$1,50 \cdot 10^{-7}$	150
3000	0,97	$2,13 \cdot 10^{-7}$	213
4000	1,26	$2,77 \cdot 10^{-7}$	277
5000	1,56	$3,43 \cdot 10^{-7}$	343

Tabla 5: Datos experimentales sin el dieléctrico

A partir de estos datos podemos hacer nuestras regresiones lineales de Q_0 frente a V_0 , como en el apartado anterior. En la siguiente gráfica podemos ver las dos rectas de regresión obtenidas, lo que nos permitirá apreciar la gran diferencia que existe entre las permitividades:

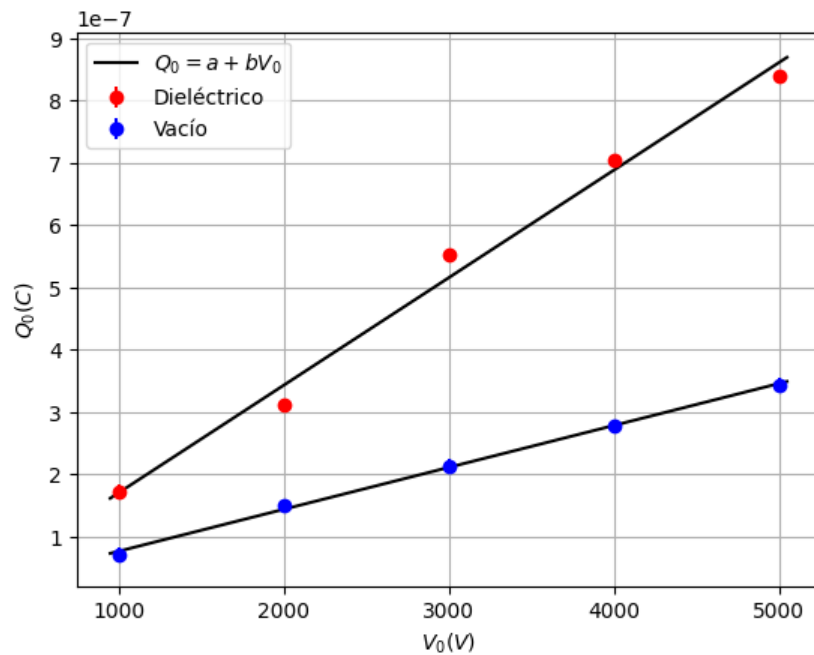


Figura 6: Regresiones lineales con y sin dieléctrico

En la siguiente tabla se especifican los parámetros obtenidos con las regresiones, la capacidad C se corresponde con la pendiente de la recta de regresión, b :

	Dieléctrico	Vacío
$a \pm s(a)$ (C)	$(-0,3 \pm 3,4) \cdot 10^{-8}$	$(8,8 \pm 5,5) \cdot 10^{-9}$
$b \pm s(b)$ (F)	$(1,73 \pm 0,10) \cdot 10^{-10}$	$(6,73 \pm 0,17) \cdot 10^{-11}$
r	0,994	0,9990

Tabla 6: Parámetros de las regresiones

Una vez más, como en los apartados anteriores podemos despreciar el término independiente de nuestras regresiones, pues es muy pequeño en comparación de los valores de Q_0 que manejamos. Una vez conocidas las capacidades del condensador, con y sin dieléctrico, podemos calcular la permitividad relativa de nuestro medio, ϵ_r , con la ecuación (4):

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} = 2,57 \pm 0,17 \quad (20)$$

La incertidumbre de ϵ_r se obtiene por propagación a partir de la siguiente expresión:

$$s(\epsilon_r) = \sqrt{\left(\frac{s(C)}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{s(C_0)C}{C_0^2}\right)^2} \quad (21)$$

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos son, en general, bastante satisfactorios. En primer lugar vamos a analizar los valores obtenidos para ϵ_0 , comparando el valor tabulado con los valores calculado con las regresiones lineales a voltaje y distancia constante, respectivamente, además de con la media ponderada de estos valores, que nos permitirá obtener un valor más preciso.

Valor tabulado ($\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$)	$8,854187815 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Voltaje constante	$(1,055 \pm 0,045) \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$
Distancia constante	$(4,74 \pm 0,33) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Media ponderada	$(7,64 \pm 0,27) \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Tabla 7: Comparación de los valores de ϵ_0

Se puede ver claramente que los resultados experimentales están muy próximos del valor tabulado, estando en el mismo orden de magnitud la constante calculada a distancia constante y muy próxima la calculada a voltaje constante. Si comparamos la media ponderada de las dos regresiones con el valor tabulado podemos ver que el resultado es aún mejor, los valores están en el mismo orden de magnitud y muy próximos.

El otro gran resultado de la práctica fue calcular la permitividad relativa de nuestro dieléctrico, una lámina de plástico. La composición de la lámina es a priori desconocida pero por ser un plástico podemos tomar como referencia los polímeros orgánicos, cuya permitividad relativa a temperatura ambiente oscila entre 2 y 3 para la mayoría de compuestos. El valor obtenido es $\epsilon_r = 2,57 \pm 0,17$, que se encuentra en el rango de valores esperados para un polímero orgánico, como es nuestra lámina de plástico.

Teniendo todo esto en cuenta podemos afirmar que los resultados experimentales se corresponden con los resultados que esperábamos obtener, son coherentes con la realidad.

5. Bibliografía

- Haynes, W. *Handbook of Chemistry and Physics, 91st Edition*. (CRC Press, 2010).
- *Capacitor charging- explained*. (s. f.). <https://www.learningaboutelectronics.com/Articles/Capacitor-charging.php>
- *Guiones de Prácticas*. (Departamento de electromagnetismo, 2023)