Giróscopo (3)

Daniel Pérez Curros

1 Descripción de los momentos y las fuerzas de un giróscopo

Al poner a rotar el disco del giróscopo y aplicar una fuerza perpendicular suave a sus ejes, una cosa era evidente: el movimiento del brazo era perpendicular a ambos. Así, si suponemos que el disco rotaba en sentido antihorario (ω // $\mathbf{L}$ // $\mathbf{x}$) y la fuerza $\mathbf{F}$ se aplicaba en el lado del eje más cercano al disco y en dirección $\mathbf{y}$, el vector d$\mathbf{L}$ iba en la dirección $\mathbf{z}$ (es decir, el disco se movía "hacia arriba"). Esto se puede ver más fácilmente en el dibujo de la figura 1. Como el torque $\mathbf{N}$ tenía también la dirección $\mathbf{z}$, entonces queda claro que d$\mathbf{L}$ // $\mathbf{N}$.

2 Obtención directa y teórica del momento de inercia I_3

Sabemos que, si enrollamos una cuerda al disco pequeño del giróscopo y colgamos una pesa de él, la ecuación que relaciona el movimiento resultante con el momento de inercia del giróscopo respecto de su eje de simetría es:

$$I_3 = \frac{\tau r^2}{2h} t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2hI_3}{\tau r^2}} = \sqrt{\frac{2hI_3}{mgr^2}} \tag{1}$$

Siendo I_3 el momento de inercia, r el radio del disco pequeño, m la masa de la pesa y h y t la altura y tiempo de la caída. Se deduce, por lo tanto, que entre t y h puede haber una función $y = \sqrt{ax} + b$ tal que $I_3 = \frac{1}{2}amgr^2$.

Medimos que $m = 0,100 \pm 0,001$ kg y $r = 0,029 \pm 0,001$ m, y anotamos h y t. Con la medida de t, sin embargo, vamos a hacer una aclaración.

Habitualmente, al calcular la incertidumbre de tipo B de una medida, suponemos que el valor medido está en el centro de una distribución (que puede ser normal, rectangular...), siendo la σ de dicha distribución el valor que asignamos como incertidumbre. Esto es razonable, porque en

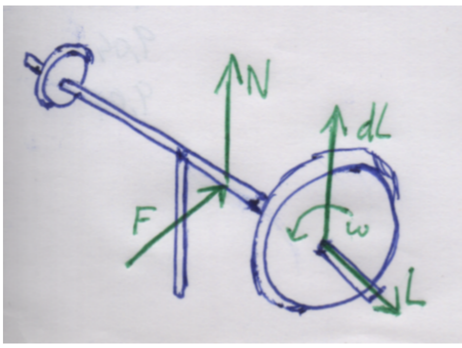
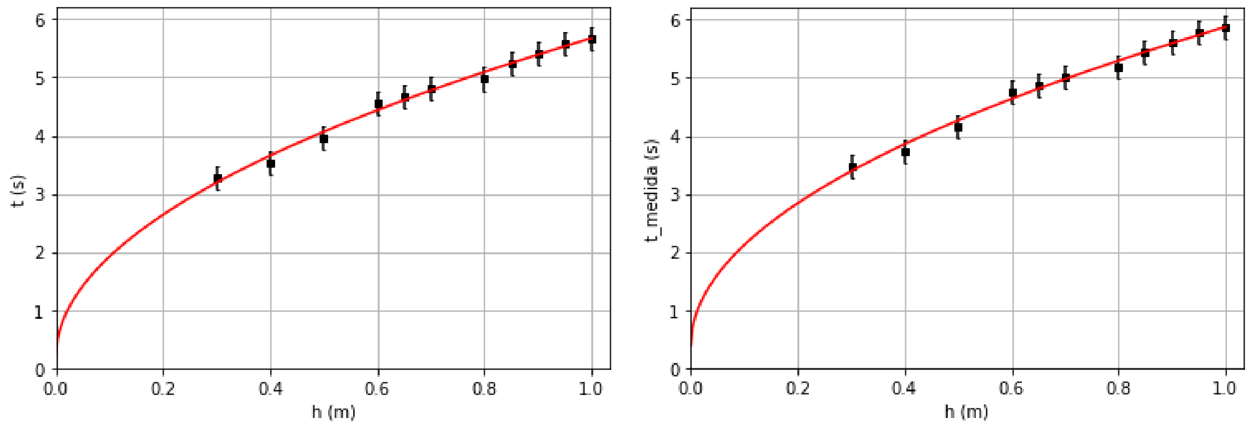


Figura 1: esquema que ilustra la respuesta de un giróscopo a una fuerza perpendicular a sus ejes principales. Se puede ver la fuerza F, el torque N, el momento angular L y su variación dL.



Figuras 2 y 3: en ambas gráficas se ve la relación entre la altura y el tiempo de caída. En la de la derecha vemos los datos crudos, mientras que en la izquierda los vemos corregidos y desplazados hacia abajo.

principio no hay ninguna razón para suponer que es más probable que el valor "real" esté a un lado que al otro de la medida. En este caso, sin embargo, primero observamos que la pesa toca el suelo y después paramos el cronómetro. Es decir, que, independientemente de todo lo que dijimos antes, hay una desviación sistemática de los datos, ya que la mayor parte de las veces el tiempo medido será mayor que el real, dependiente de nuestro tiempo de reacción.

Es cierto que puede argumentarse que esta desviación sucede tanto al comienzo como al final de la medida, y por lo tanto no se debe tener en cuenta. Pero eso solo sucede si quien maneja el cronómetro también está reaccionando al inicio de la caída de la pesa. En este caso, tanto la pesa como el cronómetro comenzaban cada medida con la misma señal verbal, con lo que no hay razón para pensar que una empezase antes que la otra de forma sistemática.

Teniendo todo esto en cuenta, lo que hay que preguntarse ahora es qué valor debemos restarle a t_{medida} para tener una serie de datos más exactos. El tiempo de reacción humano es del orden de 0,25-0,30 s, por lo que parece razonable corregir las medidas como mínimo 0,2 s.

Analicemos ahora el ajuste. Los parámetros de la curva son:

$$a = 30 \pm 2\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m} \quad b = 0,2 \pm 0,2\,\mathrm{s}$$

Sin hacer la corrección del tiempo, el parámetro a es idéntico, pero b sube hasta 0,4 s (recordemos que debería ser 0). No es un cambio muy relevante y probablemente sea innecesario, pero sí indica que va en la dirección correcta. Y con todo esto obtenemos que:

$$I_3 = 0,013 \pm 0,001\,\mathrm{kgm}^2$$

Ahora calculemos I_3 de forma teórica. Si tenemos en cuenta solo el disco y suponemos que su densidad es constante, deducimos que:

$$I_3 = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_s r^3 dr d\phi = \frac{2\pi}{4} R^4 \rho_s = \frac{1}{2} M R^2 \tag{2}$$

Donde M es la masa del disco y R su radio. Ahora bien, el radio lo conocemos, y es igual a $R = 0,123 \pm 0,001$ m...pero la masa no. No pudimos pesar el disco. Sin embargo, si suponemos[1]

[1] Esta "suposición" viene en realidad de una versión anterior del guion de la práctica. No es una forma muy ortodoxa de obtener la medida, pero es mejor que nada.

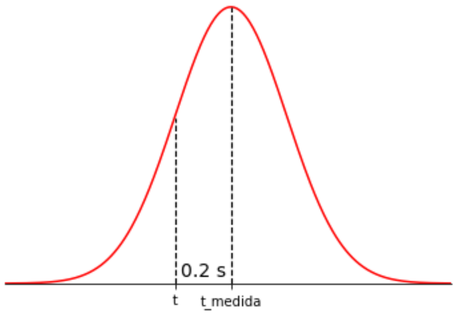


Figura 4: aquí vemos esquemáticamente (con $\sigma = 0,2$) la distribución supuesta de las medidas del tiempo en contraste con el valor "real" t. Nótese que el centro de la distribución, es decir, el valor más probable de obtener en una medida, está desviado hacia la derecha.

que M es exactamente $1,693$ kg, obtenemos que:

$$I_3 = 0,0127 \pm 0,0001 \,\mathrm{kgm}^2$$

El cual es un valor perfectamente compatible con el obtenido directamente.

3 Obtención directa y teórica del momento de inercia I_1

En esta parte, tendremos dos muelles de constante k enganchados al brazo largo del giróscopo, a una distancia D del eje asociado a I_1. Con un movimiento periódico de los muelles de frecuencia angular ω_1, sabemos que:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{I_1}}D \rightarrow I_1 = 2k\left(\frac{DT_1}{2\pi}\right)^2 \tag{3}$$

Primero, sin embargo, tenemos que hallar k. Y para eso usamos el método dinámico, según el cual

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

si colgamos una pesa y provocamos un movimiento oscilatorio. Si $m = 0,060 \pm 0,001$ kg, el valor de k que obtenemos es $16,3 \pm 1,3$ N/m.

Conociendo ya k y $D = 0,268 \pm 0,001$ m, entonces podemos aplicar (3) y concluir que:

$$I_1 = 0,048 \pm 0,004 \,\mathrm{kgm}^2$$

Ahora calculémoslo de forma teórica. Si suponemos que las masas M y m del disco y el contrapeso son puntuales, y que D y d son sus distancias al eje vertical, entonces el cálculo se reduce a:

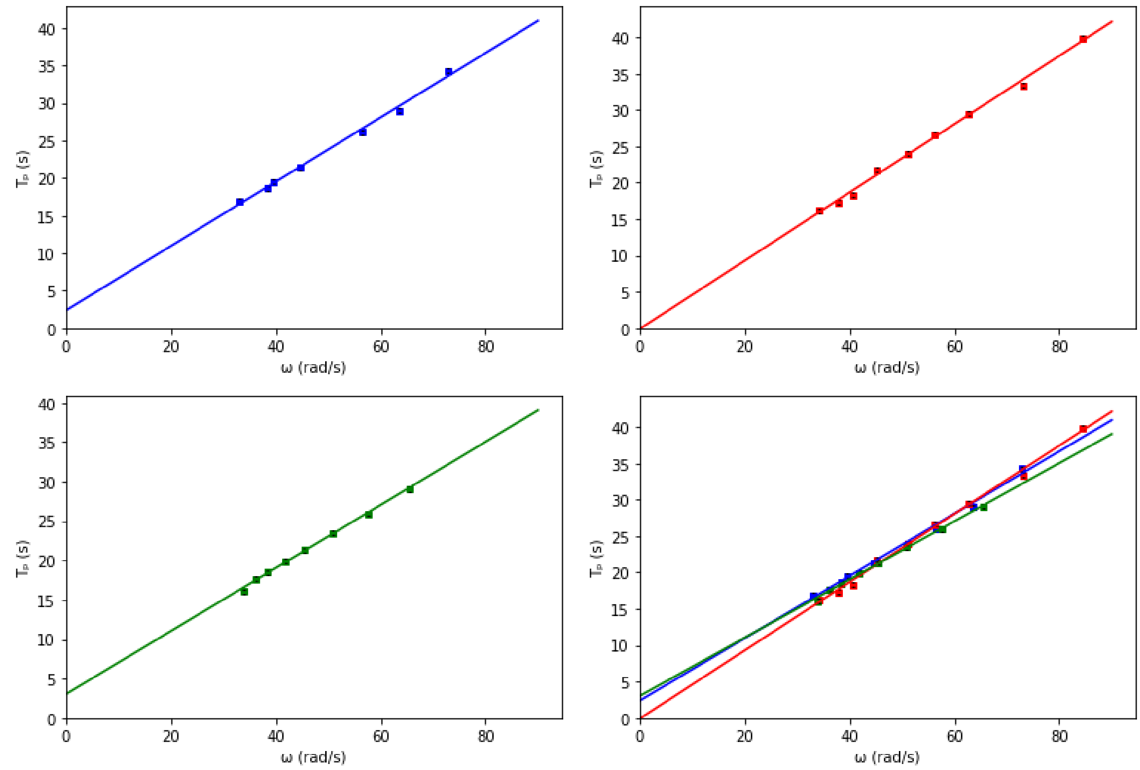
$$I_1 = \sum r_i^2 m_i = MD^2 + md^2 \tag{4}$$

Sabemos que $D = 0,125 \pm 0,001$ m y $d = 0,164 \pm 0,001$ m, y también que $M = 1,693$ kg por la suposición que hicimos al calcular I_3. Si, de la misma forma que antes[2], suponemos que $m = 0,900 \pm 0,001$ kg, entonces:

$$I_1 = 0,051 \pm 0,004 \,\mathrm{kgm}^2$$

Al igual que con I_3, la medida directa coincide bien con el cálculo teórico.

[2]Nuevamente, esto está también en un guion anterior.



Figuras 5-8: Podemos ver las 3 series de datos del periodo T_p y la frecuencia $\omega = 2\pi\nu$ con sus correspondientes rectas, además de las tres a la vez. Las barras de incertidumbre quedan tapadas por los propios puntos.

4 Obtención de I_3 a partir del movimiento de precesión

Si el disco gira con una velocidad ω y desequilibramos el montaje con una pesa de $m = 0,060 \pm 0,001$ colgada del brazo corto, la fuerza gravitatoria provocará un movimiento de precesión en torno al eje vertical del giróscopo, de tal forma que:

$$\Omega_p = \frac{mgd}{I_3\omega} \rightarrow T_p = \frac{2\pi I_3}{mgd}\omega \tag{5}$$

Donde Ω_p y T_p son la frecuencia y el periodo de precesión, respectivamente, y d la distancia al eje vertical. Midiendo estos datos se pueden ajustar fácilmente a una recta $y = ax + b$ donde $I_3 = \frac{mgda}{2\pi}$. Si lo hacemos tres veces y asignamos las incertidumbres $s(T_p) = 0,3$ s y $s(\nu) = \frac{1}{2\pi}s(\omega) = 0,2$ Hz, obtenemos que:

$$a_1 = 0,428 \pm 0,014\, s^2 \quad b_1 = 2,4 \pm 0,7\, s \rightarrow I_{3(1)} = 0,0088 \pm 0,0003\,\mathrm{kgm}^2$$

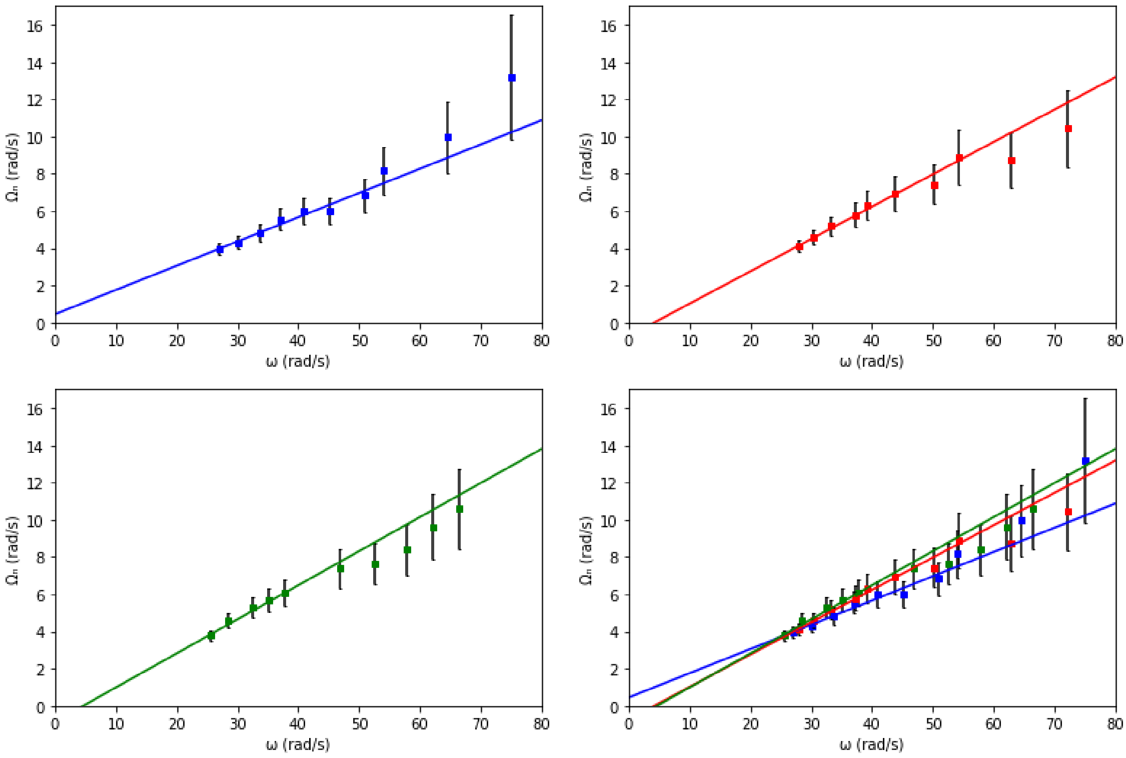
$$a_2 = 0,469 \pm 0,011\, s^2 \quad b_2 = -0,1 \pm 0,6\, s \rightarrow I_{3(2)} = 0,0096 \pm 0,0002\,\mathrm{kgm}^2$$

$$a_3 = 0,400 \pm 0,010\, s^2 \quad b_3 = 3,0 \pm 0,5\, s \rightarrow I_{3(3)} = 0,0082 \pm 0,0002\,\mathrm{kgm}^2$$

Y de aquí sacamos, mediante una media ponderada, que:

$$I_3 = 0,00879 \pm 0,00014\,\mathrm{kgm}^2$$

Este valor no coincide ni con el obtenido directamente ni con el teórico, aunque está más o menos en el mismo orden de magnitud. Es verdad que las medidas no pueden ser de mucha calidad, si tenemos en cuenta que el parámetro b de las regresiones tiende a ser demasiado alto (debería ser



Figuras 9-12: Aquí se ven las tres series de datos de la frecuencia de nutación Ω_n y la de rotación ω con sus incertidumbres. Puede verse como estas se van haciendo más grandes cuanto más grande es Ω_n.

0). ¿Puede que hubiera algún error sistemático en la forma de medir el periodo o la frecuencia? ¿Que el giroscopio no estuviera correctamente equilibrado, ya que el contrapeso se movía muy fácilmente?

5 Obtención de I_1 a partir del movimiento de nutación

El movimiento de nutación surge de desequilibrar momentáneamente un giróscopo cuyo disco esté rotando. Simplificando, podemos decir que tiende a volver a su posición inicial (en equilibrio) de la misma forma que lo hace un muelle o un planeta: con oscilaciones. Estas oscilaciones observamos que son aparentemente circulares o elípticas.

La ecuación que relaciona la frecuencia angular de nutación $\Omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$ con la del disco, $\omega = 2\pi\nu$, es:

$$\Omega_n = \frac{I_3}{I_1}\omega \tag{6}$$

Hay evidentemente una recta $y = ax + b$ que las relaciona, de modo que $I_1 = \frac{I_3}{a}$. Dado que tomamos tres series de datos, lo que vamos a hacer es conseguir la media ponderada del parámetro a y después compararlo con los tres valores de I_3 que obtuvimos. Y los parámetros de las tres rectas son:

$$a_1 = 0,130 \pm 0,008 \quad b_1 = 0,4 \pm 0,2$$

$$a_2 = 0,173 \pm 0,009 \quad b_2 = -0,7 \pm 0,3$$

$$a_3 = 0,183 \pm 0,014 \quad b_3 = -0,8 \pm 0,4$$

Con lo que el valor que tomamos es $\bar{a} = 0,156 \pm 0,006$. Si ahora lo usamos para calcular I_1 con respecto a todos los I_3, entonces:

$$I_{1(1)} = \frac{I_{3(directo)}}{\bar{a}} = 0,081 \pm 0,007\,\mathrm{kgm}^2$$

$$I_{1(2)} = \frac{I_{3(teórico)}}{\bar{a}} = 0,082 \pm 0,003\,\mathrm{kgm}^2$$

$$I_{1(3)} = \frac{I_{3(precesión)}}{\bar{a}} = 0,056 \pm 0,002\,\mathrm{kgm}^2$$

Tenemos razones para suponer que el I_3 de la precesión es un mal dato, con lo que para calcular I_1 usaremos solamente los dos primeros resultados. Y finalmente:

$$I_1 = 0,082 \pm 0,003\,\mathrm{kgm}^2$$

Al igual que nos ocurría con I_3, este es un dato que se desvía mucho de los valores directo y teórico, aunque curiosamente se acercaría más si incluyésemos el cálculo que hemos considerado como malo.

No obstante, hagamos un último inciso. Supongamos que la frecuencia ω en realidad era apenas 0,6 veces la que hemos considerado, y por lo tanto $I_1^* = 0,6 I_1$. Obtendríamos que I_1^* es del orden de 0,051, que cuadra a la perfección con los otros valores.

Esto puede parecer poco importante, pero, ¿y si hacemos lo mismo con I_3? ¿Y si cogemos el valor que obtuvimos a partir de la precesión y suponemos que $\omega^* = 0,6\omega$? En este caso, $I_3^* = \frac{I_3}{0,6}$, y lo que obtenemos es 0,0147, que es también mucho más coherente con los cálculos anteriores.

No parece descabellado suponer, por lo tanto, que la medida de la frecuencia de rotación ν con el tacómetro era sistemáticamente alrededor de 1,6-1,7 veces superior a la real, incluso después de dividir los datos entre 2 (ya que contaba cada vuelta dos veces), y que eso ha causado que los valores obtenidos a partir de la precesión y la nutación se desvíen en consecuencia. O podría ser casualidad. Al fin y al cabo, si hubiésemos querido calcular realmente la ω media habríamos tenido que hacer varias medidas para cada ciclo (algo imposible), y, si no escogimos el momento adecuado para tomar como referencia, los valores también estarían desplazados sistemáticamente sin que el tacómetro tuviera la culpa. Lo ideal, en este caso, sería tomar aún más datos en más situaciones, y observar si este cambio es consistente, pero eso excede los límites de esta práctica.

6 Conclusiones

El giróscopo es un instrumento singular, en el que el momento angular y el par aparecen en todo su esplendor. "He visto cosas que no creeríais", podría decirse, "una barra haciendo una fuerza vertical de forma directa y que el disco se mueva *hacia la izquierda*".

Pasado el desconcierto inicial, queda la fase mucho más prosaica de la toma de datos, de cómo estos movimientos más propios de la magia que de la física tienen en realidad una explicación numérica perfectamente demostrable. Gracias a ella, calculamos valores para los momentos de inercia del aparato que cuadraban con los que preveíamos...aunque no todos. Aquellos que dependían del tacómetro dieron resultados bastante anómalos, aunque si fue culpa del instrumento o de algún otro factor está por ver. Por eso, la parte de la precesión y nutación es mucho menos satisfactoria en comparación con la medida directa de los momentos de inercia con la polea o los muelles.

Sin embargo, para concluir, cabe quedarse con lo positivo, con los cálculos que parecen acertados y con lo que hemos aprendido sobre el giróscopo y la mecánica clásica.