



FACULTAD DE INGENIERIA

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

## FACULTAD DE INGENIERÍA

CATEDRA: MECANICA APLICADA

UNIDAD 01: FATIGA EN MATERIALES

Ing. Sebastian M. Lazo

[sebastian.lazo@ingenieria.uncuyo.edu.ar](mailto:sebastian.lazo@ingenieria.uncuyo.edu.ar)

Agosto 2020

## INDICE

1. Introducción .....	3
2. Método de cálculo “esfuerzo-vida” .....	5
3. Resumen de el procedimiento de calculo.....	7
4. Límite de resistencia a la fatiga.....	8
4.1. Límite de resistencia a la fatiga para la probeta .....	8
4.2. Límite de resistencia a la fatiga para la pieza o elemento de maquina .....	10
5. Esfuerzos fluctuantes aplicados a la pieza .....	15
5.1. Esfuerzos simples de flexión.....	15
5.2. Concentración del esfuerzo y sensibilidad a la muesca .....	16
5.3. Esfuerzos combinados en piezas con discontinuidades .....	16
6. Verificación de los esfuerzos de fatiga aplicados a una pieza .....	18
7. Daño acumulativo por fatiga.....	20
7.1. Regla de Palmgren Miner .....	20
7.2. Regla de Manson.....	22
8. Anexo 1: Propiedades mecánicas de algunos aceros .....	23
9. Anexo 2: Factores de concentración de tensiones .....	24
10. Bibliografía .....	35

Nota: la siguiente simbología indica los ítems revisados desde el apunte del año anterior.



## 1. Introducción

La Revolución Industrial estaba en pleno apogeo en el siglo XIX. El carbón se extraía de las minas, se convertía en coque y se usaba para fundir hierro a partir del mineral natural. El hierro se usaba para construir puentes, vías férreas y trenes que llevaban más carbón a las ciudades, permitiendo así que se produjera mas coque, en una espiral de producción creciente. Pero los puentes, los monumentos a la ingeniería, empezaron a fallar. Peor aun, comenzaron a fallar en formas extremadamente confusas. A las 10 en punto de la mañana, una locomotora de 50 toneladas pasaría sobre el puente sin ningún incidente; a las 11 en punto, un granjero que conducía una carreta llena de forraje tirada por caballos causaría que el puente se colapsara. El miedo se apoderó de la población, pues la gente creía que la muerte acechaba en los puentes.

Actualmente, ya no existe la “infraestructura envejecida”. La construcción de caminos y los trabajos de mejoramiento que detienen el tráfico de vez en cuando hacen que los colapsos en la ingeniería civil, como los puentes, resulten verdaderamente raros. Pero las **fallas por fatiga**, como se conocen en la actualidad, no son extrañas. **La fatiga constituye la causa individual más grande de rotura en los metales, la cual se estima que es el 90% de todas las fallas metálicas.** Las fallas por fatiga, especialmente en las estructuras, **resultan catastróficas e insidiosas, y ocurren repentinamente, a menudo sin advertencia.** Por esa razón es que se requiere un estudio muy minucioso por parte de ingenieros y técnicos para evitar estas fallas.

En la mayoría de los ensayos para determinar las propiedades de los materiales que se relacionan con el diagrama esfuerzo-deformación (ver figura 1), la carga se aplica en forma gradual, para proporcionar suficiente tiempo a fin de que la deformación se desarrolle en su totalidad. Además, la muestra se ensaya hasta su destrucción, por lo cual los esfuerzos sólo se aplican una vez. Por ello, los ensayos de esta clase se aplican bajo lo que se conoce como **condiciones estáticas** que se aproximan en gran medida a las condiciones reales a las que se someterán muchos elementos estructurales y de máquinas.

El **límite proporcional** es donde se indica el esfuerzo  $S_e$ . Éste es el punto en el que la curva comienza a desviarse de una línea recta. Si la carga se retira en este punto, no podrá observarse alguna deformación permanente en la probeta. En el rango lineal, la relación uniaxial esfuerzo-deformación unitaria está dada por la ley de Hooke como:

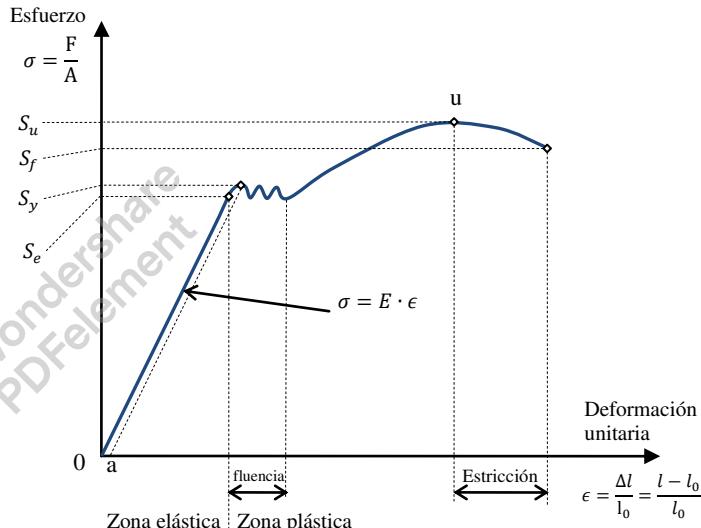
$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

donde la **constante de proporcionalidad E**, la pendiente de la parte lineal de la curva de esfuerzo-deformación unitaria, se llama **módulo de Young** o **módulo de elasticidad**. E es una medida de la rigidez de un material, y como la deformación unitaria no tiene dimensión, las unidades de E son las mismas del esfuerzo. Por ejemplo, el acero tiene un módulo de elasticidad de alrededor de 200 GPa sin que importe el tratamiento térmico, el contenido de carbono o la aleación. El acero inoxidable tiene un módulo de alrededor de 190 GPa.

Durante la prueba de tensión, muchos materiales llegan a un punto en el que la deformación unitaria comienza a crecer muy rápidamente sin que se observe un incremento correspondiente en el esfuerzo. Éste se denomina **punto de fluencia**. No todos los materiales tienen un punto de fluencia obvio, especialmente los materiales frágiles. Por esta razón, a menudo la resistencia a la fluencia  $S_y$  se define mediante un método de corrimiento como se muestra en la figura 1. El punto a corresponde a una cantidad definida o establecida de deformación unitaria, usualmente 0.2 % de la longitud calibrada original de la probeta ( $\epsilon = 0.002$ ), aunque en ocasiones se usan también 0.01, 0.1 y 0.5 por ciento.

La resistencia última, o de tensión,  $S_u$  corresponde al punto u en la figura 1 y es el esfuerzo máximo alcanzado en el diagrama de esfuerzo-deformación.

Sin embargo, con frecuencia existe una condición en la cual los esfuerzos varían o fluctúan entre ciertos niveles. Por ejemplo, una fibra particular en la superficie de un eje rotación que se somete a la acción de cargas flexionantes experimenta tensión y compresión por revolución del eje. Si éste es una parte de un motor eléctrico que gira a 1500 rpm, la



**Figura 1 – Diagrama esfuerzo deformación para materiales dúctiles**

fibra se somete a un esfuerzo de tensión y compresión 1500 veces en cada minuto. Si además el experimenta una carga axial (como sería el caso, por ejemplo, de un engrane helicoidal o un tornillo sinfín), una componente axial del esfuerzo se superpone a la componente flexionante. En este caso, siempre está presente determinado esfuerzo en una fibra, pero ahora el **nivel de esfuerzo es fluctuante**. Estas y otras clases de carga que ocurren en elementos de máquina producen **esfuerzos que se llaman esfuerzos variables, repetidos, alternantes o fluctuantes**.

A menudo, se encuentra que los elementos de máquinas han fallado bajo la acción esfuerzos repetidos o fluctuantes; no obstante, el análisis más cuidadoso revela que los esfuerzos máximos reales estuvieron por **debajo de la resistencia última del material** y con mucha frecuencia incluso por **debajo de la resistencia a la fluencia**. La característica más notable estas fallas consiste en que los esfuerzos se repitieron un gran número de veces. Por lo tanto, la falla se le llama **falla por fatiga**. Este tipo de fallas es peligrosa, ya que se produce de forma intempestiva, total, sin aviso, ya que no hay una deformación apreciable a simple vista, como sucede en una falla estática.

Una falla por fatiga tiene una apariencia similar a la fractura frágil, dado que las superficies de la fractura son planas y perpendiculares al eje del esfuerzo con la ausencia de adelgazamientos (estricción). Sin embargo, las características de **fractura de una falla por fatiga** son muy diferentes a la **fractura frágil estática** y surgen a partir de tres etapas de desarrollo:

**Etapa I:** es el inicio de una o más microgrietas debido a la deformación plástica cíclica seguida de propagación cristalográfica que se extiende de dos a cinco granos alrededor del origen. Normalmente, las grietas de la etapa I no pueden verse a simple vista.

En la **etapa II** las microgrietas se convierten en macrogrietas y forman superficies paralelas en forma de mesetas separadas por crestas longitudinales.

**Etapa III** ocurre durante el ciclo de esfuerzo final cuando el material restante no puede soportar las cargas, lo que resulta en una fractura súbita y rápida. Una fractura en la etapa III puede ser frágil, dúctil o una combinación de ambas.

En la figura 2 se observa un perno que falló por fatiga, que estuvo sometido a flexión repetida. La falla comenzó en A, se propagó casi de lado a lado en la sección transversal, lo cual se muestra en las marcas de playa en B, y la sección final es la marcada con C, la cual no pudo soportar la carga, y se produjo la fractura.

**¿Dónde se inicia una falla por fatiga?** Es fundamental en este tipo de estudios, el conocimiento de las zonas donde en el elemento de maquina se puede dar inicio a una falla por fatiga. **La falla por fatiga se debe a la formación y propagación de grietas. Por lo general, una grieta de fractura se inicia en una discontinuidad del material donde el esfuerzo cíclico es máximo.** Las discontinuidades pueden surgir debido a:

- El diseño de cambios rápidos en la sección transversal, chaveteros, orificios, etc., donde ocurren concentraciones del esfuerzo.
- Elementos que giran y/o se deslizan entre sí (rodamientos, engranes, levas, etc.) bajo presión alta constante, lo que desarrolla esfuerzos de contacto concentrados por debajo de la superficie, los cuales pueden causar picaduras o astilladuras después de muchos ciclos de carga.
- Falta de cuidado en las ubicaciones de estampados, marcas de herramienta, raspaduras y rebabas; diseño defectuoso de juntas; ensamblaje inapropiado; y otros errores de fabricación.
- La propia composición del material después de su proceso de laminado, forjado, fundido, estirado, calentado, etc. Surgen discontinuidades microscópicas y submicroscópicas en la superficie o por debajo de ella, así como inclusiones de material extraño, segregaciones de aleación, huecos, precipitaciones de partículas duras y discontinuidades cristalinas.

Entre las diferentes condiciones que pueden acelerar el inicio de la grieta se destacan las temperaturas elevadas, ciclos de temperaturas, un entorno corrosivo y ciclos de alta frecuencia.

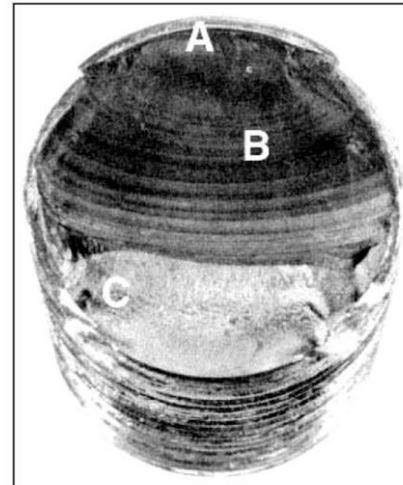
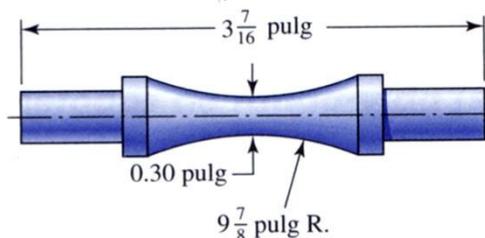


Figura 2: Falla por fatiga

## 2. Método de cálculo “esfuerzo-vida”

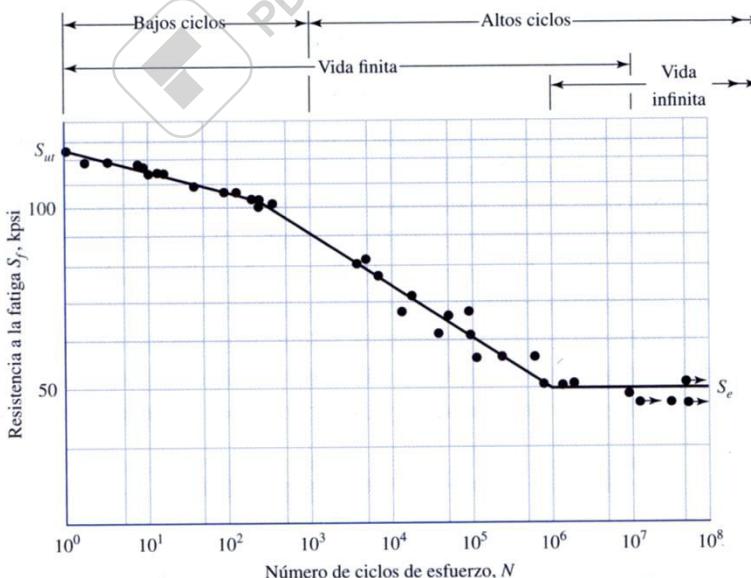
Existen varios métodos para la determinación o predicción de una falla por fatiga. El más usado, por su facilidad, es el método “esfuerzo-vida”, en el cual nos centramos en esta sección. Éste método es el menos exacto, especialmente en aplicaciones de bajos ciclos. Sin embargo, es el método más tradicional, puesto que es el más fácil de implementar para una amplia variedad de aplicaciones de diseño, tiene una gran cantidad de datos de soporte y representa una manera adecuada a las aplicaciones de altos ciclos.

Para determinar la resistencia de materiales bajo la acción de cargas de fatiga, las probetas se someten a fuerzas repetidas o variables de magnitudes especificadas, mientras se cuentan los ciclos o inversiones del esfuerzo hasta su destrucción. El dispositivo de ensayo a la fatiga que se emplea con más frecuencia es la máquina de viga rotativa de alta velocidad de R.R.Moore. En esta máquina la muestra se somete a flexión pura (sin cortante transversal) mediante pesos. La pieza de prueba, como la que se muestra en la figura 3, se maquina y se pulle con mucha meticulosidad, con un pulido final en una dirección axial para evitar rayaduras circunferenciales. Se dispone de otras máquinas de ensayo a la fatiga para aplicar esfuerzos axiales fluctuantes o inversos, esfuerzos de torsión o esfuerzos combinados a las muestras de ensayo.



**Figura 3: Probeta normalizada para máquina de viga rotatoria**

Para establecer la **resistencia a la fatiga de un material**, se necesita un número muy grande de ensayos debido a la naturaleza estadística de la fatiga. En el caso del ensayo con viga rotativa, se aplica una carga constante de flexión y se registra el número de revoluciones (inversiones del esfuerzo) de la viga hasta que se presente la falla. El primer ensayo se hace con un esfuerzo que es un poco menor que la resistencia última del material. El segundo ensayo se realiza a un esfuerzo que es menor que el primero. Este proceso se continúa y los resultados se grafican como un diagrama S-N (figura 4). La gráfica se hace en papel semilogarítmico o en papel log-log.



**Figura 4: Diagrama S-N para una probeta de Acero SAE 4130**

La ordenada del diagrama S-N se llama **resistencia a la fatiga S**, cuyo enunciado siempre se debe acompañar por su número de ciclos correspondiente **N**.

Pronto se verá que diagramas S-N se determinan para una **muestra de ensayo** o para un **elemento mecánico real**. Aunque el material de la muestra de prueba y el del elemento mecánico sean idénticos, habrá diferencias significativas entre los diagramas de los dos.

En el caso de los aceros, se presenta un cambio brusco de dirección en la gráfica, y más allá de este cambio no ocurrirá la falla, sin importar qué tan grande sea el número de ciclos. La resistencia correspondiente al cambio en la gráfica se llama **límite de resistencia S<sub>e</sub>** o **límite de fatiga**. La gráfica de la figura 4 nunca se hace horizontal en el caso de metales no ferrosos y aleaciones; de aquí que estos materiales no tengan un límite de fatiga. Las aleaciones de aluminio tienen un

comportamiento diferente, la diferencia radica en que no tiene un límite de resistencia a la fatiga, normalmente la resistencia a la fatiga  $S_f$  se presenta a un número específico de ciclos.

Se observa que un ciclo de esfuerzos ( $N = 1$ ) constituye una sola aplicación y un retiro de una carga y luego otra aplicación y remoción de la carga en la dirección opuesta. De esta manera,  $N = \frac{1}{2}$  significa que la carga se aplica una vez y luego se quita, que es el caso de la prueba a la tensión simple.

El conjunto de conocimientos disponible sobre la falla a la fatiga, desde  $N = 1$  hasta  $N = 1000$  ciclos, por lo general se clasifica como fatiga de bajos ciclos, como se indica en la figura 4. En consecuencia, la fatiga de altos ciclos se relaciona con la falla correspondiente a ciclos de esfuerzos mayores que  $10^3$  ciclos.

En la figura 4 también se hace una distinción entre región de vida finita y región de vida infinita. La frontera entre las regiones no se puede definir con claridad excepto para un material específico, pero se ubica en algún punto entre  $10^6$  y  $10^7$  ciclos en el caso de los aceros, como se ilustra en la figura 4.

El propósito principal cuando se estudia la fatiga es entender por qué ocurren las fallas, de tal manera que se puedan evitar de manera óptima. Por esta razón, los métodos analíticos de diseño que se presentan en este apunte (y en la bibliografía de referencia), no producen resultados precisos. Los resultados deben tomarse como una guía, como algo que indica lo que es importante y lo que no lo es cuando se diseña para evitar la falla por fatiga.

Como se estableció anteriormente, el método del esfuerzo-vida es el enfoque menos exacto, especialmente en el caso de las aplicaciones de bajos ciclos. Sin embargo, es el método más tradicional, con una gran cantidad de datos publicados. Es el más fácil de implementar para un amplio rango de aplicaciones de diseño y representa las aplicaciones de altos ciclos de manera adecuada. Sin embargo, debe tenerse cuidado cuando se le utilice en aplicaciones de bajos ciclos puesto que el método no es válido para el comportamiento verdadero de esfuerzo-deformación cuando ocurre fluencia localizada.

### 3. Resumen de el procedimiento de calculo

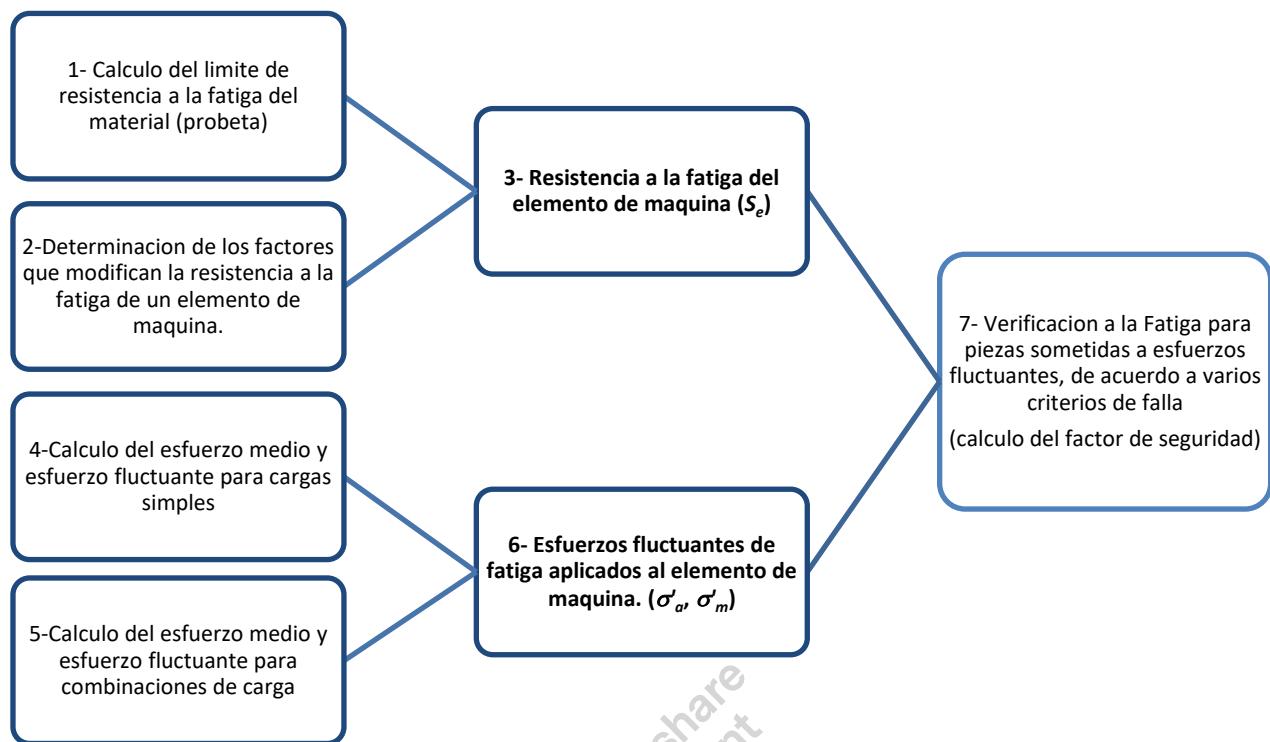


Figura 5: Resumen del procedimiento de cálculo

#### 4. Límite de resistencia a la fatiga

En la actualidad, determinar los límites de resistencia mediante ensayos a la fatiga es una rutina, aunque resulta un procedimiento extenso. En general, para los límites de resistencia los ensayos de esfuerzo se prefieren a los ensayos de deformación.

Para el diseño preliminar y de prototipos, así como para algunos análisis de falla, se requiere un método rápido para estimar los límites de resistencia. Existen grandes cantidades de datos en la literatura técnica sobre los resultados de ensayos con viga rotativa y de ensayos a la tensión simple de muestras tomadas de la misma barra o lingote. Si se grafican estos datos, como en la figura 6, se verá si hay alguna correlación entre los dos conjuntos de resultados. La gráfica parece sugerir que el límite de resistencia a la fatiga varía desde aproximadamente 40 hasta 60% de la resistencia a la tensión para aceros, y hasta alrededor de 210 kpsi (1450 MPa). Comenzando en alrededor de  $S = 210$  kpsi (1450 MPa), la dispersión parece incrementarse, pero aparentemente la tendencia se nivela, como lo sugiere la línea horizontal discontinua en  $S = 105$  kpsi.

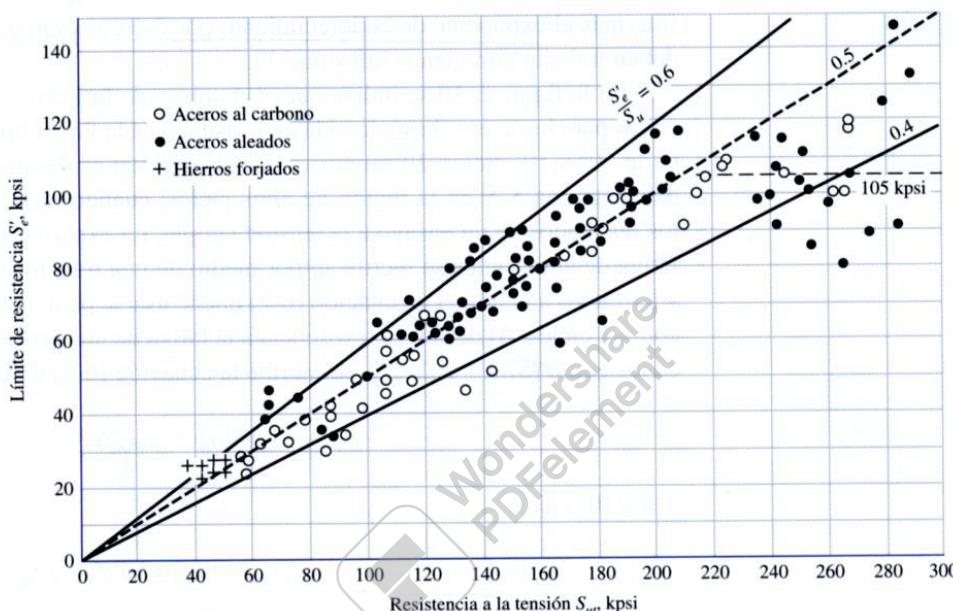


Figura 6: Grafica de límites de resistencia a la fatiga en función de límite de resistencia a la tensión para varia aleaciones de hierro.

En el caso de los aceros, al simplificar la observación de la figura 6, se estimará el límite de resistencia como:

$$S'_e = \begin{cases} 0.5S_{ut} & S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi (1400 MPa)} \\ 100 \text{ kpsi} & S_{ut} > 200 \text{ kpsi} \\ 700 \text{ MPa} & S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases} \quad \text{Ecuación 4-1}$$

donde  $S_{ut}$  es la resistencia a la tensión mínima. El símbolo de prima en  $S'_e$  en esta ecuación se refiere a la propia muestra de viga rotativa. Se desea reservar el símbolo sin prima  $S_e$  para el límite de resistencia de un elemento de máquina particular sujeto a cualquier tipo de carga. En la siguiente sección se aprenderá que las dos resistencias pueden ser muy diferentes.

##### 4.1. Límite de resistencia a la fatiga para la probeta

En esta sección se tratará como trazar el diagrama  $S-N$  para cualquier material. Como se muestra en la figura 4, una región de fatiga de bajos ciclos se extiende desde  $N = 1$  hasta casi  $10^3$  ciclos. En esta región la resistencia a la fatiga  $S_f$  sólo es un poco menor que la resistencia a la tensión  $S_{ut}$ . El punto inicial, es decir la ordenada al origen, es de fácil determinación, ya que corresponde a la resistencia última del material  $S_{ut}$  que aparece en las tablas del anexo 1 de este texto. Esta tensión corresponde a la rotura del material para el ensayo estático.

El segundo punto de la grafica, cuando  $N=1000$  ciclos, la tensión límite de fatiga se determina como:

$$S_{f10^3} = S_{ut} \cdot f \quad \text{Ecuación 4-2}$$

El factor  $f$  se obtiene de la figura 7, en función de la resistencia ultima del material  $S_{ut}$ :

Podemos calcular el límite de fatiga para cualquier valor entre 1 y 1000 ciclos con la siguiente ecuación:

$$S_{f1...10^3} = S_{ut} \cdot N^{(\log f)/3} \quad \text{Ecuación 4-3}$$

Hasta el momento hemos obtenido la primera parte del la grafica S-N.

Para vida infinita, la resistencia a la fatiga se calcula como esta indicado en la 4-2. Recordamos que vida infinita empieza a los  $10^6$  ciclos.

Al igual que hicimos para bajos ciclos, podemos calcular el límite de fatiga para cualquier valor entre  $10^3$  y  $10^6$  ciclos con la siguiente ecuación:

$$S_{f10^3...10^6} = a \cdot N^b \quad \text{Ecuación 4-4}$$

Siendo:

$$a = \frac{(f \cdot S_{ut})^2}{S_e} \quad \text{Ecuación 4-5} \quad (1)$$

y

$$b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{f \cdot S_{ut}}{S_e} \right) \quad \text{Ecuación 4-6} \quad (1)$$

Asimismo, con un determinado esfuerzo aplicado completamente invertido a una probeta, podemos determinar cuantos ciclos pondrá sobrevivir antes de manifestar signos de falla. Esta cantidad de ciclos la calculamos como:

$$N = \left( \frac{\sigma_{fa}}{a} \right)^{1/b} \quad \text{Ecuación 4-7}$$

La ecuación 4-7 aplica solamente cuando tenemos entre  $10^3$  y  $10^6$  ciclos.

(1) En la figura 8 se resumen las formulas que se aplican para calcular cada valor y poder trazar la grafica S-N de manera completa. Se debe tener en cuenta, que todo lo calculado **esta referido a la probeta**. Si quisieramos componer la misma grafica pero **aplicado a una pieza particular**, bastaría con utilizar en las ecuaciones 4-5 y 4-6 el límite a la fatiga para la pieza  $S_e$  en vez del límite a la fatiga de la probeta  $S'_{e'}$ . El límite a la fatiga para la pieza o elemento de máquina  $S_e$  se desarrollará en la siguiente sección.

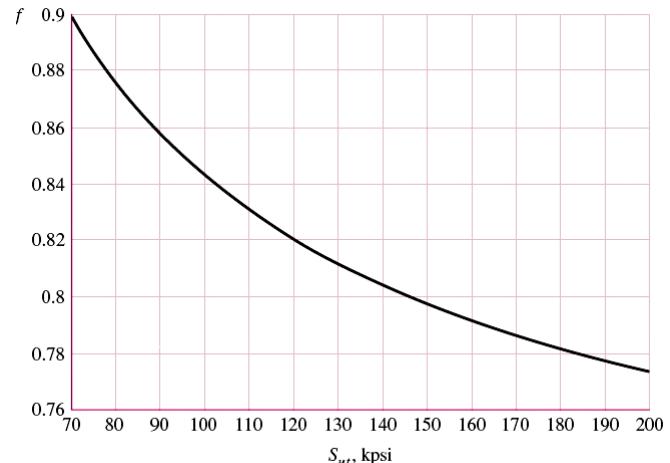


Figura 7: Fracción de la resistencia ultima a los  $10^3$  ciclos

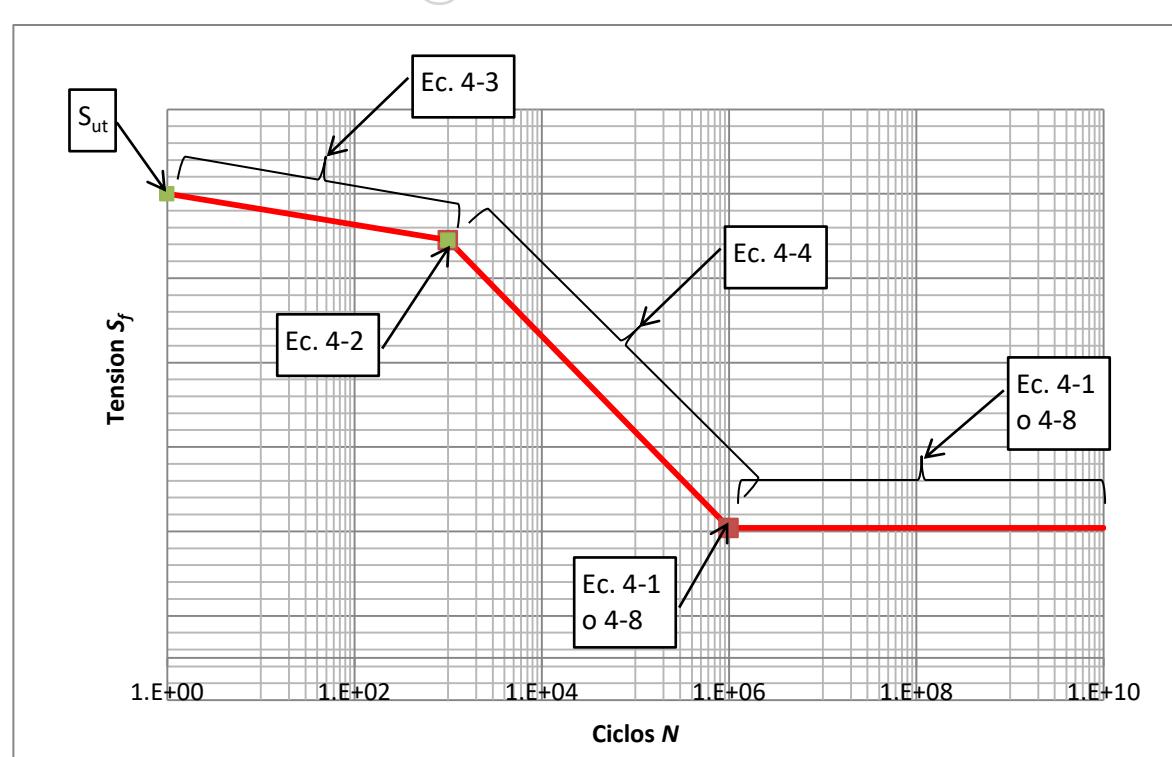


Figura 8: Curva S-N genérica

#### 4.2. Límite de resistencia a la fatiga para la pieza o elemento de maquina

Como ya se dijo en secciones anteriores, la **resistencia a la fatiga para las probetas** difiere bastante de la **resistencia a la fatiga para piezas o elementos de maquinas**. En el laboratorio, los ensayos se hacen en un ambiente sumamente controlado, con probetas muy pulidas y medidas normalizadas, materiales bien homogéneos, cargas únicamente de flexión, a temperatura controlada, y los resultados tienen un 50% de confiabilidad. Joseph Marin identifico y cuantifico algunos factores que modifican los resultados del laboratorio, para que puedan ser aplicados a elementos de maquinas. Esta fórmula se utiliza cuando no hay ensayos de fatiga para las piezas. La formula es la siguiente:

$$S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot S'_e$$

Ecuación 4-8

Siendo:

$k_a$  : factor de modificación de la condición superficial

(Depende de la superficie y de  $S_{ut}$ )

$k_b$  : factor de modificación del tamaño

(Depende de la forma y tamaño de la pieza)

$k_c$  : factor de modificación de la carga

(Depende de la dirección de la carga)

$k_d$  : factor de modificación de la temperatura

(Depende de la temperatura)

$k_e$  : factor de confiabilidad

(Depende de la confiabilidad deseada)

$k_f$  : factor de efectos diversos

(Depende de varios factores externos)

$S'_e$  : tensión límite de fatiga de la probeta

(se calcula con la ecuación 4-1)

$S_e$  : tensión límite de fatiga de la pieza o elemento de maquina

#### Factor de Superficie $k_a$

La muestra de viga giratoria se pule al espejo (ademas dicho pulido se hace de en dirección axial, para eliminar cualquier ranura circunferencial) para excluir las imperfecciones superficiales que actúen como incrementadores de esfuerzo. Por lo general, no es práctico dar un acabado costoso como éste a una pieza real. Los acabados rugosos disminuyen la resistencia a la fatiga debido a la introducción de concentraciones de esfuerzos y/o por la alteración de las propiedades físicas de la capa superficial. La superficie de la probeta rotativa esta muy pulida, y. El factor de modificación depende de la calidad de la superficie de la parte, y de la resistencia ultima a la tensión. Se calcula de la siguiente manera:

$$k_a = a \cdot (S_{ut})^b$$

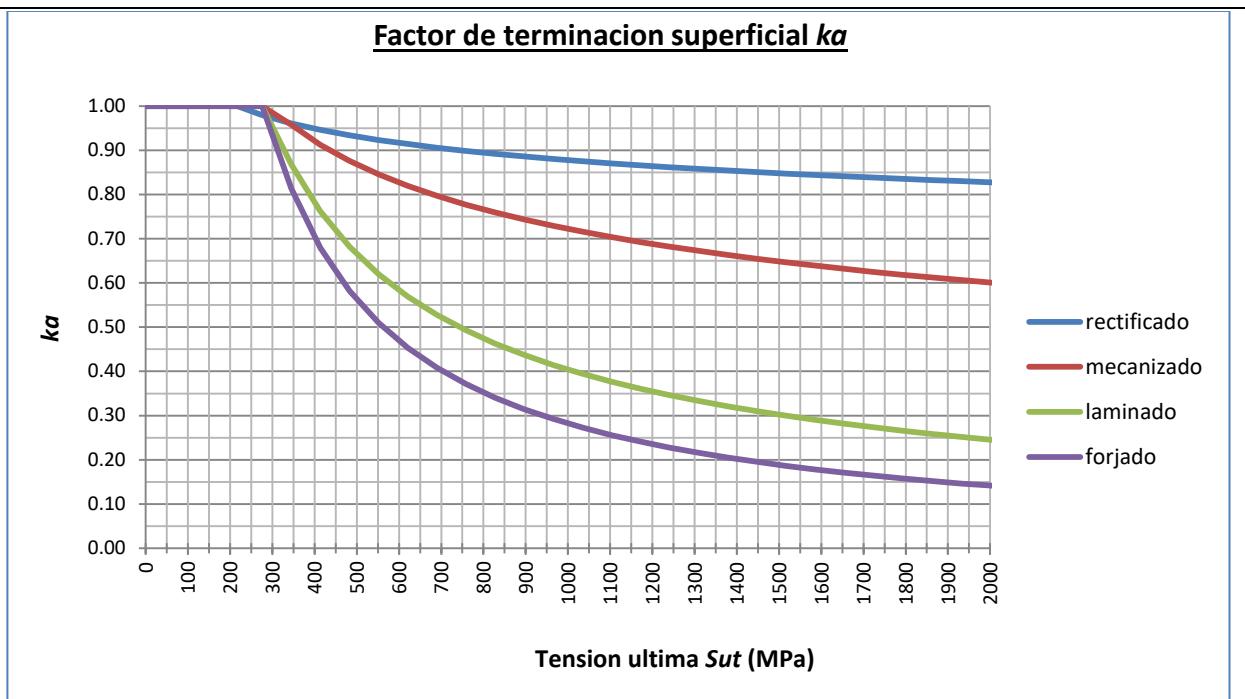
Ecuación 4-9

Siendo:

Terminación Superficial	Factor $a$		Exponente $b$
	$S_{ut}$ en kpsi	$S_{ut}$ en MPa	
Rectificado	1,34	1,58	-0,085
Mecanizado o laminado en frío	2,70	4,51	-0,265
Laminado en caliente	14,4	57,7	-0,718
Forjado (en bruto)	39,9	272	-0,995

Tabla 1

Como referencia, el grafico 4-1 muestra la evolución de el **factor de terminación superficial  $k_a$**  en función de la resistencia ultima del material. Para el desarrollo de los cálculos, puede utilizarse la ecuación 4-9 o la gráfica.



**Grafico 4-1**

**Factor de Tamaño  $kb$**

Las muestras de prueba de las vigas giratoria y estática son pequeñas (cerca de 0.3 in de diámetro). Si la pieza es mayor que esa dimensión, se necesita aplicar un factor de tamaño de reducción de resistencia, para considerar el hecho de que piezas más grandes fallan con menores esfuerzos, debido a la probabilidad más alta de que se presente un defecto en el volumen más grande sometido al esfuerzo. Luego de muchos ensayos, se llega a la conclusión que el factor de tamaño para flexión y torsión para ejes cilíndricos macizos rotatorios, puede expresarse como

$$k_b = \begin{cases} (d/0.3)^{-0.107} = 0.879d^{-0.107} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ in} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \leq 10 \text{ in} \\ (d/7.62)^{-0.107} = 1.24d^{-0.107} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \leq 254 \text{ mm} \end{cases}$$

**Ecuación 4-10**

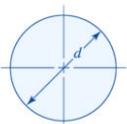
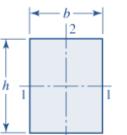
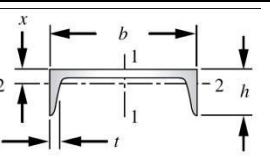
Siendo  $d$  = diámetro del eje.

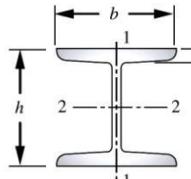
Para el caso de **cargas puramente axiales**:

$$k_b = 1$$

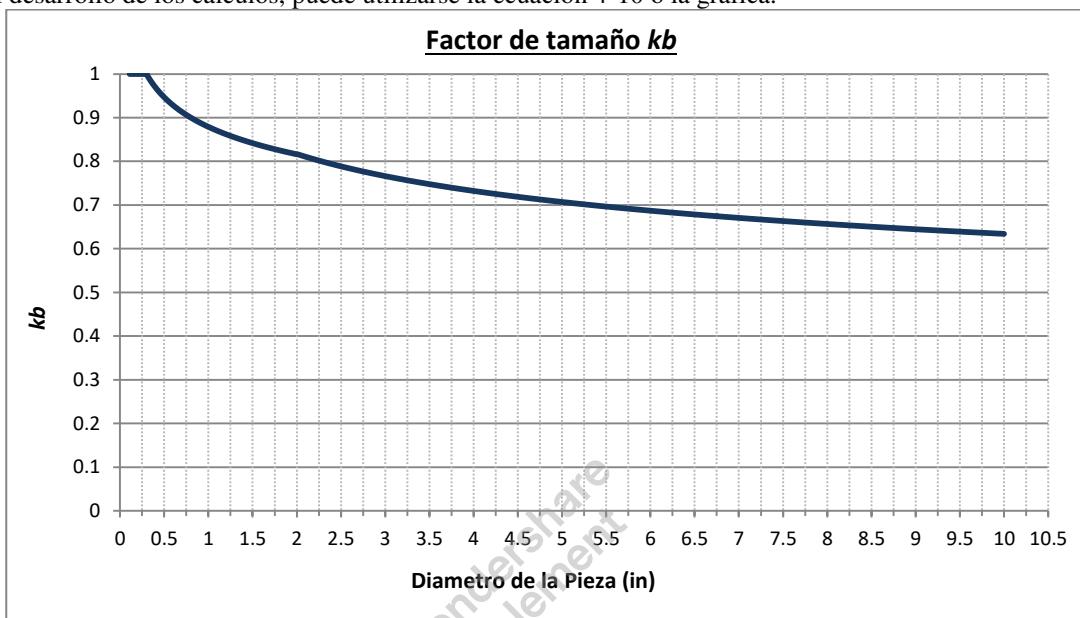
**Ecuación 4-11**

A continuación, se presentan otras fórmulas para otras situaciones

Gometria	Estado	Formula	Diametro efectivo
 Cilindrica sólida o hueca	No rotativa	<a href="#">Ecuación 4-12</a>	$d_e = 0,370 \cdot d$
 Rectangular sólida	No rotativa	<a href="#">Ecuación 4-13</a>	$d_e = 0,808 \cdot \sqrt{h \cdot b}$
 Eje 1-1: $d_e = 0,808 \cdot \sqrt{h \cdot b}$ Eje 2-2: $d_e = 3,61 \cdot \sqrt{(0,052 \cdot x \cdot b) + (0,1 \cdot t \cdot (h - x))}$	No rotativa	<a href="#">Ecuación 4-14</a> <a href="#">Ecuación 4-15</a>	

	No rotativa	<b>Ecuación 4-16</b> <b>Ecuación 4-17</b>	Eje 1-1: $d_e = 1,14 \cdot \sqrt{b \cdot t}$ Eje 2-2: $d_e = 0,81 \cdot \sqrt{b \cdot h}$
---	-------------	--	--

Como referencia, el grafico 4-2 muestra la evolucion de el **factor de tamaño  $kb$**  en funcion de las dimensiones de la pieza. Para el desarrollo de los calculos, puede utilizarse la ecuacion 4-10 o la grafica.



**Grafico 4-2**

#### Factor de Carga $k_c$

Como ya sabemos, los ensayos sobre probetas en laboratorio se hacen sobre una probeta rotatoria, con cargas de flexion repetida invertida. Para otros casos, deben aplicarse los siguientes factores:

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{flexión} \\ 0.85 & \text{axial} \\ 0.59 & \text{torsión}\sup{17} \end{cases} \quad \text{Ecuación 4-18}$$

Los coeficientes anteriores se usan únicamente cuando están presentes **esfuerzos puros** (cuando solo hay un esfuerzo aplicado). Si se presentan **esfuerzos combinados**, dichos coeficientes son contemplados en la ecuación de Von Misses, por lo tanto:

$$k_c = 1$$

**Ecuación 4-19**

#### Factor de Temperatura $k_d$

La gran cantidad de ensayos y los resultados disponibles han determinado que el límite de resistencia a la fatiga de los aceros se **incrementa** levemente a medida que la temperatura aumenta desde la temperatura ambiente, hasta aproximadamente los 250°C. Luego comienza a **disminuir**. Para temperaturas inferiores a la temperatura ambiente, existe una posibilidad muy alta de que la fractura sea **fragil**, por lo tanto se necesitan estudios mas complejos.

En la mayoria de los casos, las temperaturas de operación no superan los 250°C, por lo tanto la temperatura no será una variable influyente en gran parte de los estudios de fatiga realizados en proyectos de elementos de maquinas.

Para obtener el factor de temperatura se usa la siguiente tabla:

Temperatura °C	<i>kd</i>
20	1
50	1,01
100	1,02
150	1,025
200	1,02
250	1
300	0,975
350	0,943
400	0,9
450	0,843
500	0,768
550	0,672
600	0,549

**Tabla 2**

Con un criterio conservador, cuando las temperaturas de operación se encuentran entre los 20°C y los 250°C, podemos asumir que:

$$k_d = 1$$

**Ecuación 4-20**

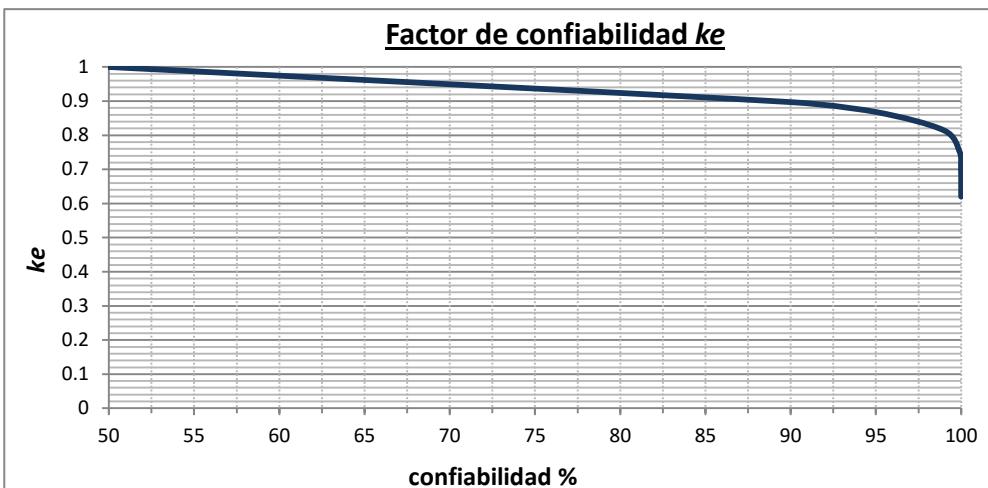
#### Factor de Confiabilidad *ke*

La teoria de la resistencia limite a la fatiga tiene una confiabilidad del 50%, ya que partimos de la afirmacion de que la resistencia limite a la fatiga para una probeta es la mitad de la resistencia ultima para falla estatica. Debido a esto, y luego de extensos estudios acerca del tema, se utiliza la siguiente tabla para la selección del factor *k<sub>e</sub>* cuando se necesita una confiabilidad mayor:

Confiabilidad %	Factor de Confiabilidad <i>k<sub>e</sub></i>
50	1
90	0,897
95	0,868
99	0,814
99,9	0,753
99,99	0,702
99,999	0,659
99,9999	0,62

**Tabla 3**

Como referencia, el grafico 4-3 muestra la evolucion del **factor de confiabilidad *ke*** en funcion del nivel de confiabilidad requerido para un elemento de maquina en estudio. Para el desarrollo de los calculos, puede utilizarse la tabla 3 o la grafica.



**Grafico 4-3**

Factor de Efectos diversos  $k_f$

El límite de resistencia a la fatiga se puede ver reducido por factores que no han sido contemplados anteriormente.

Estos pueden ser:

- Corrosión
- Recubrimiento Electrolítico
- Metalizado por Aspersión
- Frecuencia Cíclica
- Corrosión por Frotamiento:

Cuando no se tiene mayor información acerca de dichas influencias:

$$k_f = 1$$

Ecuación 4-21



## 5. Esfuerzos fluctuantes aplicados a la pieza

### 5.1. Esfuerzos simples de flexión

A menudo, los esfuerzos fluctuantes sobre la maquinaria adoptan la forma de un patrón sinusoidal debido a la naturaleza de algunas máquinas rotatorias. Sin embargo, también ocurren otro tipo de patrones, algunos muy irregulares. Se ha determinado que en los patrones periódicos que presentan un solo máximo y un solo mínimo de la fuerza, la forma de la onda no resulta fundamental, pero los picos en el lado alto (máximo) y en el lado bajo (mínimo) son importantes. En consecuencia,  $F_{\max}$  y  $F_{\min}$  en un ciclo de fuerza se emplean para caracterizar el patrón de la fuerza. También es cierto que al variar por arriba y debajo de alguna línea base resulte igualmente eficaz para caracterizar el patrón de la fuerza. Si la fuerza mayor es  $F_{\max}$  y la fuerza menor es  $F_{\min}$ , se construye una componente uniforme y una alterante como sigue:

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}$$

$$F_a = \left| \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} \right|$$

donde  $F_m$  es la componente de intervalo medio de la fuerza y  $F_a$  es la componente de la amplitud de la fuerza.

En la figura 9 se ilustran algunos de los varios registros esfuerzo-tiempo que ocurren: a) esfuerzo fluctuante con pulsaciones de alta frecuencia; b) y c) esfuerzo fluctuante no sinusoidal; d) esfuerzo fluctuante sinusoidal; e) esfuerzo repetido; f) esfuerzo sinusoidal completamente invertido.

Las componentes del esfuerzo, algunas de las cuales están en la figura , son:

$\sigma_{\min}$  = esfuerzo mínimo

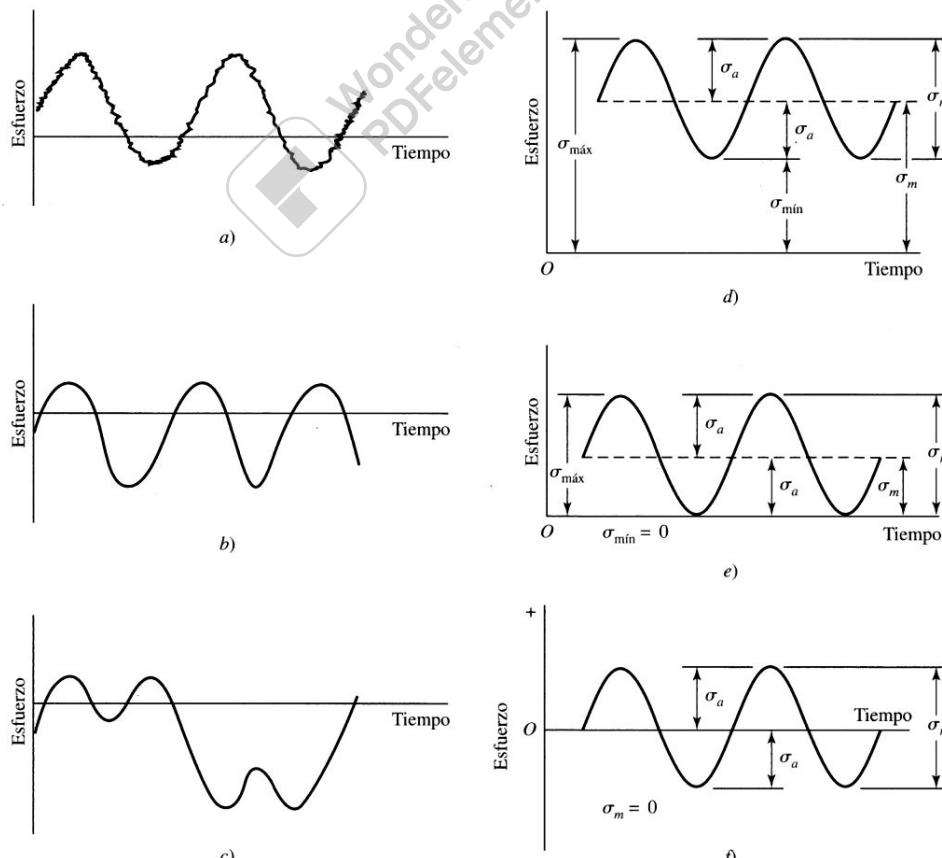
$\sigma_a$  = componente de la amplitud

$\sigma_r$  = intervalo de esfuerzo

$\sigma_{\max}$  = esfuerzo máximo

$\sigma_m$  = componente de esfuerzo medio

$\sigma_s$  = esfuerzo estático



**Figura 9: Algunas relaciones Esfuerzo-tiempo**

El **esfuerzo constante**, o estático, no es el mismo que el **esfuerzo medio**; de hecho, puede tener cualquier valor entre  $\sigma_{\min}$  y  $\sigma_{\max}$ . El estado constante existe debido a una carga fija o a una precarga aplicada a la parte, y por lo general es independiente de la parte variante de la carga. Por ejemplo, un resorte helicoidal de compresión siempre está cargado en un espacio más corto que la longitud libre del resorte. El esfuerzo creado por esta compresión inicial se llama componente constante o estática del esfuerzo. No es la misma que el esfuerzo medio.

Las siguientes relaciones resultan evidentes en la figura 9:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right|$$

Ecuación 5-1

Para esfuerzos de Torsión:

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}$$

$$\tau_a = \left| \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} \right|$$

Ecuación 5-2

### 5.2. Concentración del esfuerzo y sensibilidad a la muesca

Como ya se estudió en Resistencia de los Materiales, la existencia de irregularidades o discontinuidades geométricas en las piezas, tales como agujeros, ranuras, muescas, hombros (cambios de diámetros en ejes), etc, incrementa de manera significativa los esfuerzos teóricos en la vecindad inmediata de la discontinuidad. En condiciones estáticas, para cuantificar este efecto se utiliza el factor de concentración de tensiones  $K_t$ , factor que multiplica y amplia el esfuerzo nominal. Éstos se encuentran en las graficas del Anexo 2 al final de este apunte. De igual manera, para estudios de fatiga, se utiliza el factor de concentración de tensiones a la fatiga  $K_f$ , y se calcula de la siguiente manera:

$$K_f = 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad (\text{para flexión y cargas axiales})$$

Ecuación 5-3

$$K_{fs} = 1 + q_{cortante} \cdot (K_{ts} - 1)$$

Ecuación 5-4

El factor  $K_f$  (ecuación 5-3) se utiliza como concentrador de esfuerzos normales, es decir para cuando existen cargas de flexión y cargas de tracción-compresión (es decir esfuerzos en dirección axial). Cuando existen cargas en ambas direcciones, se deberán calcular dos factores  $K_f$ , utilizando los correspondientes  $K_t$  de acuerdo a la carga, extraídos como se dijo anteriormente del Anexo 2..

El factor  $K_{fs}$  se utiliza para esfuerzos cortantes.

El factor  $q$  se denomina *sensibilidad a la muesca*, y se utiliza para esfuerzos de flexión, y el factor  $q_{cortante}$  para esfuerzos de torsión. Estos factores se obtienen de la siguiente figura:

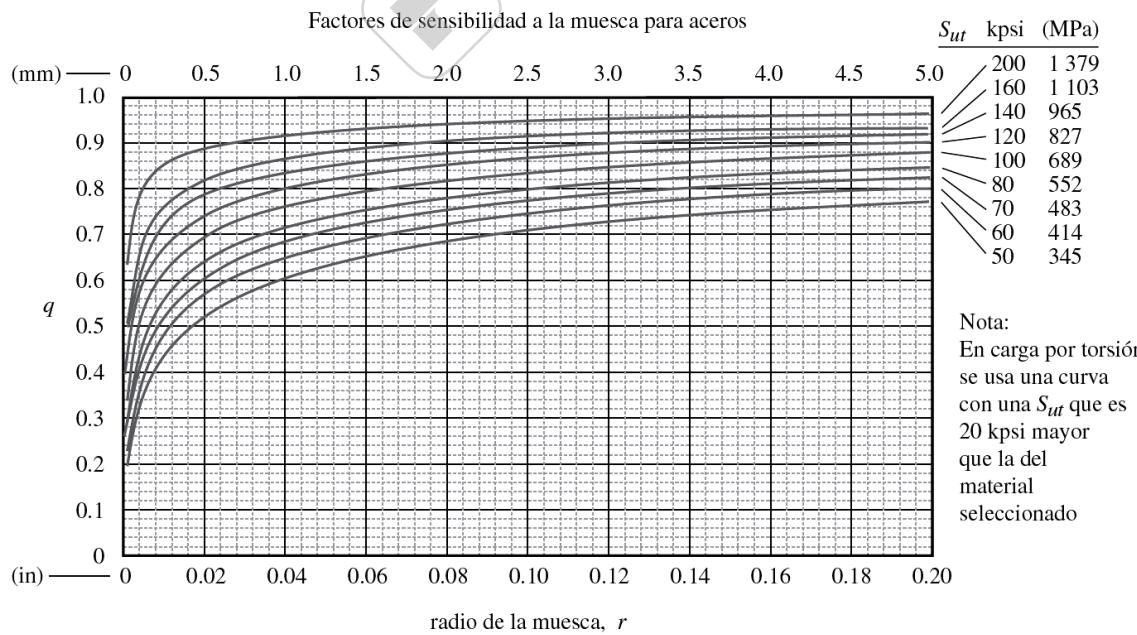


Figura 10: Factor  $q$  para flexión, tracción-compresión y Factor  $q_{cortante}$  para torsión

### 5.3. Esfuerzos combinados en piezas con discontinuidades

Cuando las piezas están sometidas a esfuerzos combinados, caso muy típico de arboles y ejes, se deben combinar los esfuerzos para obtener una tensión combinada, y el límite de. Para esto hacemos uso del análisis de la energía de la máxima distorsión de Von Misses. Esta teoría combina los esfuerzos de torsión y flexión de la siguiente manera:

$$\sigma_{combinado} = \sqrt{[\sigma]^2 + 3 \cdot [\tau]^2}$$

Aplicando la teoría de Von Misses a análisis de cargas alternantes y medias, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\sigma'_a = \sqrt{\left[ \left( K_f \cdot \sigma_{a(flexion)} \right) + \left( K_f \cdot \frac{\sigma_{a(axial)}}{0,85} \right) \right]^2 + 3 \cdot \left[ \left( K_{fs} \cdot \tau_{a(torsion)} \right) \right]^2}$$

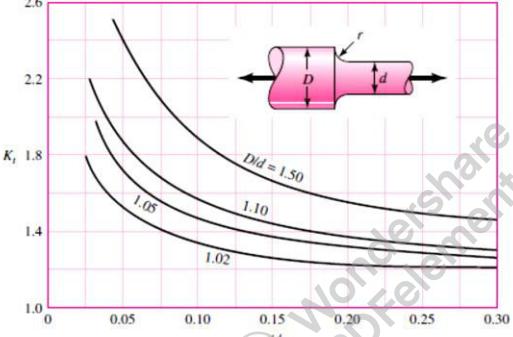
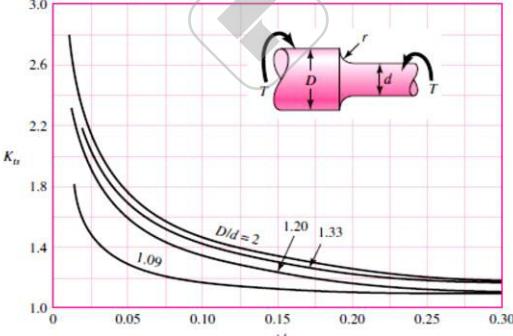
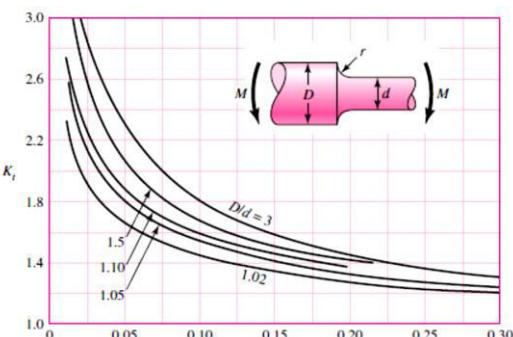
Ecuación 5-5

$$\sigma'_m = \sqrt{\left[ \left( K_f \cdot \sigma_{m(flexion)} \right) + \left( K_f \cdot \sigma_{m(axial)} \right) \right]^2 + 3 \cdot \left[ \left( K_{fs} \cdot \tau_{m(torsion)} \right) \right]^2}$$

Ecuación 5-6

Nótese que en las ecuaciones 5-5 y 5-6 se utilizaron todas las opciones de esfuerzos posibles. Deben tomarse como fórmulas generales. Si alguno de los esfuerzos fuese nulo, deberá reemplazarse dicho término por el valor cero.

Otro detalle importante a tener en cuenta y prestar especial atención, es en los **factores de concentración del esfuerzo** utilizados en las ecuaciones 5-5 y 5-6. De acuerdo a la naturaleza del esfuerzo y la forma de la discontinuidad, será el factor que deberá aplicarse. A modo de **ejemplo**, se presenta a continuación una **discontinuidad de cambio de diámetro (hombro)** en una pieza cilíndrica.

Tipo de carga	Grafica	Fórmula para factor de concentración de tensiones
AXIAL	 <p>Graph showing Factor of stress concentration <math>K_t</math> versus relative radius <math>r/d</math> for axial loading. The curves are labeled for different values of <math>D/d</math>: <math>D/d \approx 1.50</math>, <math>1.10</math>, <math>1.05</math>, and <math>1.02</math>.</p>	$K_{f\_ax} = 1 + q \cdot (K_t - 1)$
TORSION	 <p>Graph showing Factor of stress concentration <math>K_t</math> versus relative radius <math>r/d</math> for torsion. The curves are labeled for different values of <math>D/d</math>: <math>D/d \approx 2</math>, <math>1.20</math>, and <math>1.33</math>.</p>	$K_{fs} = 1 + q_{cortante} \cdot (K_{ts} - 1)$
FLEXION	 <p>Graph showing Factor of stress concentration <math>K_t</math> versus relative radius <math>r/d</math> for flexion. The curves are labeled for different values of <math>D/d</math>: <math>D/d \approx 3</math>, <math>1.5</math>, <math>1.10</math>, <math>1.05</math>, and <math>1.02</math>.</p>	$K_{f\_fle} = 1 + q \cdot (K_t - 1)$

## 6. Verificación de los esfuerzos de fatiga aplicados a una pieza

Hasta el momento tenemos caracterizados los esfuerzos de **flexión, axiales y torsionales**, a su vez **alternantes y medios**, también tenemos determinados los coeficientes de concentración de tensiones, conocemos de que material vamos a fabricar la pieza, y calculamos el límite de fatiga admisible para la pieza; con toda esta información podremos realizar una verificación para comprobar que el elemento de maquina estudiado no fallará ante esfuerzos de fatiga. Resumimos la información:

- Limite de fatiga para la pieza  $S_e$
- Limite de fluencia y rotura del material de la pieza  $S_y$  y  $S_{ut}$
- Factores de concentración de tensiones a la fatiga  $K_f$  y  $K_{fs}$ .
- Esfuerzos de flexión, axiales y torsionales (medio y alternantes)  $\sigma'_a$  y  $\sigma'_m$

Existen 5 criterios utilizados para verificar un elemento de maquina cuando esta sometido a esfuerzos de fatiga. Estos criterios se denominan: Soderberg, Goodman, ASME Eliptica, Gerber y fluencia. A continuacion se mencionan las formulas y luego la grafica que se construye para una claro analisis. Se define como  $n$  al factor de seguridad contra la falla por fatiga, y como subindice se señala el criterio usado:

Criterio	Ec. de la recta	Factor de seguridad
Soderberg	$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_y} = \frac{1}{n_{so}}$	$n_{so} = \frac{1}{\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_y}}$
Goodman	$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n_{go}}$	$n_{go} = \frac{1}{\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}}$
ASME Eliptica	$\left(\frac{n_{as} \cdot \sigma'_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n_{as} \cdot \sigma'_m}{S_y}\right)^2 = 1$	$n_{as} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sigma'_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'_m}{S_y}\right)^2}}$
Gerber	$\frac{n_{ge} \cdot \sigma'_a}{S_e} + \left(\frac{n_{ge} \cdot \sigma'_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$	$n_{ge} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S_{ut}}{\sigma'_m}\right)^2 \cdot \frac{\sigma'_a}{S_e} \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot \sigma'_m \cdot S_e}{S_{ut} \cdot \sigma'_a}\right)^2}\right]$
Fluencia	$\sigma'_a + \sigma'_m = \frac{S_y}{n_{fl}}$	$n_{fl} = \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m}$

Tabla 4

La grafica del estado tensional de fatiga para un elemento de maquina es muy util para comprobar si dicho elemento trabaja en una situacion segura o de riesgo ante las solicitudes mecanicas fluctuantes. Para trazar la grafica del estado de los esfuerzos de una pieza, ubicamos en el eje de abscisas el esfuerzo medio y en el eje de ordenadas el esfuerzo alternante. En el eje de esfuerzo medio se marcan 2 puntos: el valor de la tension de fluencia  $S_y$  y el valor de la tension ultima o rotura  $S_{ut}$ ; y en el eje de esfuerzo alternante se marca nuevamente el punto de fluencia del material  $S_y$  y el punto del limite a la fatiga para vida infinita  $S_e$ . A partir de dichos puntos se trazan las 5 curvas con las ecuaciones mostradas en la tabla 4.

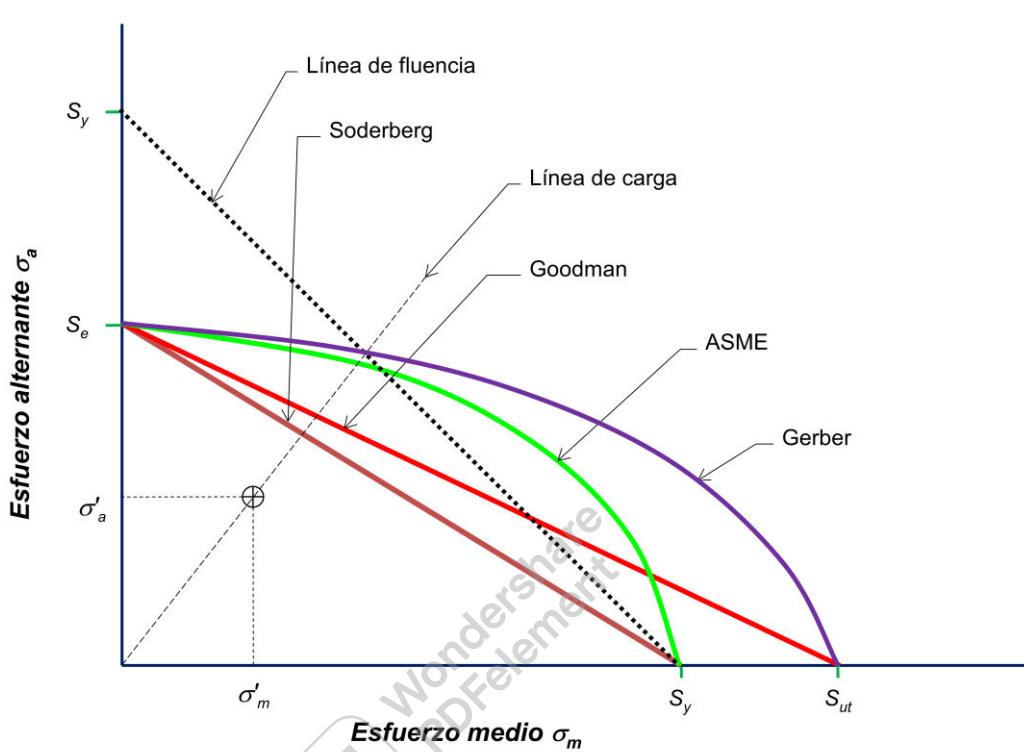
El estado tensional de la pieza queda definido por la intesección del punto  $\sigma'_a$  y  $\sigma'_m$ , el primero marcado en el eje de ordenadas y el segundo en el eje de abscisas. Si el estado tensional de la pieza se encuentra por debajo de la curva que se elija para realizar la comprobacion (veases el ejemplo del punto en la grafica siguiente), podemos afirmar que la pieza esta en una situacion segura ante los esfuerzos fluctuantes, y que no existirá falla por fatiga. En esta situacion, el factor de seguridad calculado por el mismo criterio resultara en valores mayores a 1. Si se encontrara justo sobre la curva, el fator de seguridad resultará igual a 1; y si el punto de trabajo esta por encima de la curva la pieza esta en una situacion insegura, con un alto riesgo de colapso por fatiga, y el factor de seguridad será menor a 1.

La linea de carga se basa en la ecuacion  $r = \sigma'_a / \sigma'_m$  y ofrece una referencia directa de la relación existente entre el esfuerzo alternante con el esfuerzo medio.

Se puede observar que el criterio de Soderberg es el unico que protege ante la fluencia y es el mas conservador de los 5, pero las piezas serán mas robustas.

En conclusion, se deben diseñar piezas de manera que se comporten de forma segura ante las solicitaciones que tendran en su vida, pero tambien se deberá hacer una eleccion adecuada del material. El sobredimensionamiento genera

piezas mas seguras, dado que al tener una sección mayor de material, las tensiones son menores; pero a su vez son mas pesadas, mas caras, y todas las piezas que se acoplen tambien serán mas grandes, dando como resultado un conjunto tambien mas pesado. Esto impacta en varias cuestiones, por ejemplo en el costo del equipo, en el consumo energetico durante el funcionamiento, mayores costos de transporte, etc etc. Se deja a consideracion del alumno buscar que otras implicancias puede tener el hecho de sobredimensionar piezas.



## 7. Daño acumulativo por fatiga

En vez de un bloque histórico de un solo esfuerzo completamente reversible compuesto de  $n$  ciclos, suponga que una parte de una máquina, en una ubicación crítica, se somete a

- Un esfuerzo completamente reversible  $\sigma_1$  durante  $n_1$  ciclos,  $\sigma_2$  durante  $n_2$  ciclos, ..., o
- Una recta de tiempo “oscilatoria” de esfuerzo que presenta muchos y diferentes picos y valles.

Se sabe, que cualquier **espectro de carga complicado** puede ser reemplazado por un **espectro simplificado** compuesto por varios grupos de ciclos con diferentes valores de  $\sigma_m$  y  $\sigma_a$ .

Debemos tener en cuenta que **las fisuras por fatiga se nuclean en los primeros ciclos de carga**, pero su propagación involucra muchos factores, uno de los más importantes es el gradiente de esfuerzos. Las fisuras comienzan en regiones de altas esfuerzos, pero si crecen en la dirección en que los esfuerzos disminuyen, su crecimiento es lento e incluso puede llegar a detenerse. Además, las fisuras pueden propagarse a diferentes velocidades en distintos materiales y bajo diferentes condiciones.

*El orden en el cual los niveles de esfuerzo son aplicados tiene un efecto importante en el progreso del daño por fatiga. Es lógico pensar que si aparece una fisura con la aplicación de altos niveles de esfuerzo, no se propagará rápidamente si luego se aplican esfuerzos más bajos; por el contrario, si aparece una fisura con la aplicación de bajos esfuerzos, es probable que se propague rápidamente si se aumentan los esfuerzos.* Estos efectos tienden a promediarse si los niveles de esfuerzo se aplican aleatoriamente.

La teoría del daño acumulado estipula que cada serie de ciclos de esfuerzo se calcula como una cierta fracción del daño total, y cuando estas fracciones sumadas llegan a la **unidad**, ocurre la fractura. La fracción del daño total ocasionado por una serie de ciclos a un determinado nivel de esfuerzo está dado por la relación entre el número de ciclos aplicados (a ese nivel de esfuerzo), y la vida en fatiga a ese esfuerzo (relación de ciclos  $C = n_i / N_i$ , donde  $N$  se obtiene de las curvas S-N) Matemáticamente:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} + \dots + \frac{n_i}{N_i} = C$$

Ecuación 7-1

### 7.1. Regla de Palmgren Miner

Fue Palgrem en 1924 quien presentó primero esta teoría de fatiga acumulada y posteriormente Miner en 1945, por ello se la conoce como regla de Palmgren Miner (a veces sólo como regla de Miner). Se han realizado numerosas comprobaciones de esa regla, se han propuesto modificaciones y adaptaciones, han aparecido otro tipo de criterios pero la realidad en lo que se refiere a diseño mecánico sigue siendo **una herramienta potente de análisis y una de los criterios más usados para prevenir el fallo por daño acumulativo**.

La regla de Miner o de daño acumulado, que es como mejor se la conoce, **es una teoría que sirve para estimar la vida a la fatiga a partir del historial de esfuerzos o deformaciones a la que el elemento mecánico se ha visto afectado**. La estimación la realiza reduciendo los datos de carga a una secuencia de “picos y valles”, haciendo un conteo de los ciclos y **calculando la vida a fatiga**.

Es decir, que **el análisis de fatiga bajo el enfoque de Palgrem-Miner básicamente se divide en tres pasos:**

1. Una reducción de los picos o valles.
2. Se realiza un conteo de los ciclos basándose en la gráfica simplificada.
3. En base al número de ciclos contados se puede hacer una estimación de la vida a la fatiga.

En este apunte no profundizaremos con la definición de los puntos 1 y 2 debido a su complejidad. Describiremos como se hace la estimación de vida a la fatiga, teniendo caracterizados los ciclos y los esfuerzos.

**Debemos agrupar los datos obtenidos en  $\sigma_i$  y  $N_i$ , siendo  $\sigma_i$  los valores de esfuerzos y  $N_i$  la cantidad de ciclos a la que se produciría la falla.** En base a ellos y en su observación se puede afirmar que si para alguno de los bloques se cumple que  $n_i$  es superior o igual a  $N_i$  se produce el fallo de la pieza. La duda surge cuando esto no ocurre, es ahí cuando se debe tener en cuenta el concepto de **daño acumulativo**.

La regla de Palgrem-Miner establece que la falla ocurre cuando:

$$\sum_{i=1}^I \frac{n_i}{N_i} = C_{pm}$$

Ecuación 7-2

Notese que ahora se reemplaza el coeficiente C por el coeficiente Cpm, éste ultimo haciendo alusión al coeficiente de la regla de Palmgren Miner. En la práctica se ha observado que el valor unidad que se menciono anteriormente no es siempre adecuado, ya que para aceros oscila aproximadamente entre 0,7 y 2,2, por lo que la fórmula se puede reescribir.

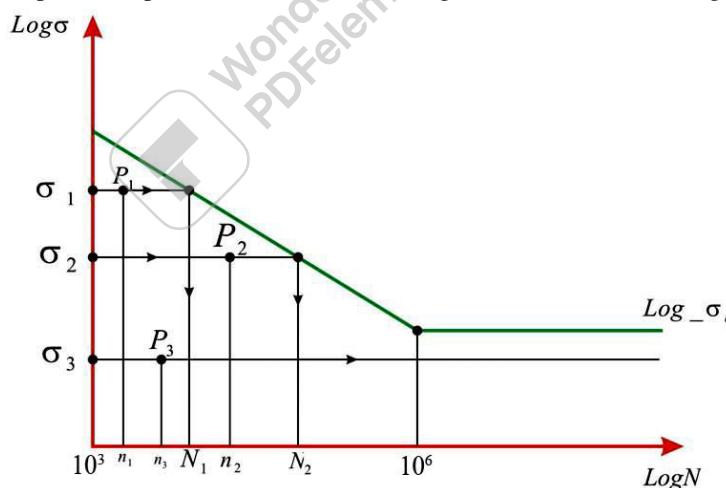
$$0,7 \leq C_{pm} \leq 2,2$$

Ecuación 7-3

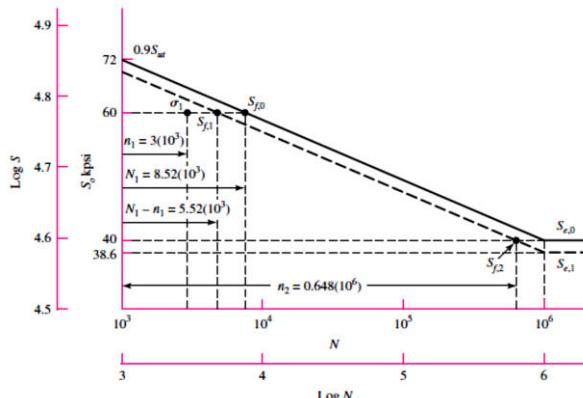
En el caso de que se carezcan de datos específicos para un determinado material, se suele admitir el valor unidad, que es un valor conservador cercano a 0.7 y por tanto un valor que está orientado a la seguridad.

Cuando se aplica la fórmula de Palmgren Miner hay que tener en cuenta algunos aspectos que esta no contempla, o que lo hace de forma que no se corresponde totalmente con las observaciones empíricas. El conocimiento de sus limitaciones nos permite realizar un diseño con criterio y en algunos casos realizar correcciones o adoptar medidas paliativas de las deficiencias de este método.

Una de las principales deficiencias de la aplicación Palmgren-Miner es que no tiene en cuenta la secuencia de aplicación de esfuerzos, es decir que para efectos del método da lo mismo aplicar al principio o al final 1000 ciclos con un determinado esfuerzo al principio o al final de la vida útil de un elemento mecánico. Es decir, que los subíndices de orden no tienen ninguna importancia en el resultado final del método y no tienen ninguna importancia tal y como se comprueba por la suma directa de cocientes de ciclos. Esto es debido a que las duraciones para la rotura se miden siempre en el diagrama S - N de la pieza sin deteriorar tal y como se muestra en la siguiente figura, en la que se comprueba también que los bloques de esfuerzos de amplitud inferior al valor del límite de fatiga de la pieza  $\sigma_i < S_e$ , no producen ninguna influencia en el deterioro de la pieza (son un sumando nulo por tener un valor infinito en el denominador, y ello independientemente del momento en que se apliquen). Ver ejemplo en capítulo 6, apartado 15, en Diseño en Ingeniería Mecánica de Shigley, 8th. Ed.



La segunda deficiencia del método es que considera que el límite de fatiga para  $10^3$  ciclos se ve reducido en la misma proporción, esto no se corrobora con los ensayos. En la siguiente figura podemos ver en linea de trazo el nuevo límite de fatiga entre  $10^3$  y  $10^6$  ciclos para un ejemplo. Nótese que el nuevo límite es paralelo al diagrama de la pieza sin ningún ciclo de esfuerzo aplicado:



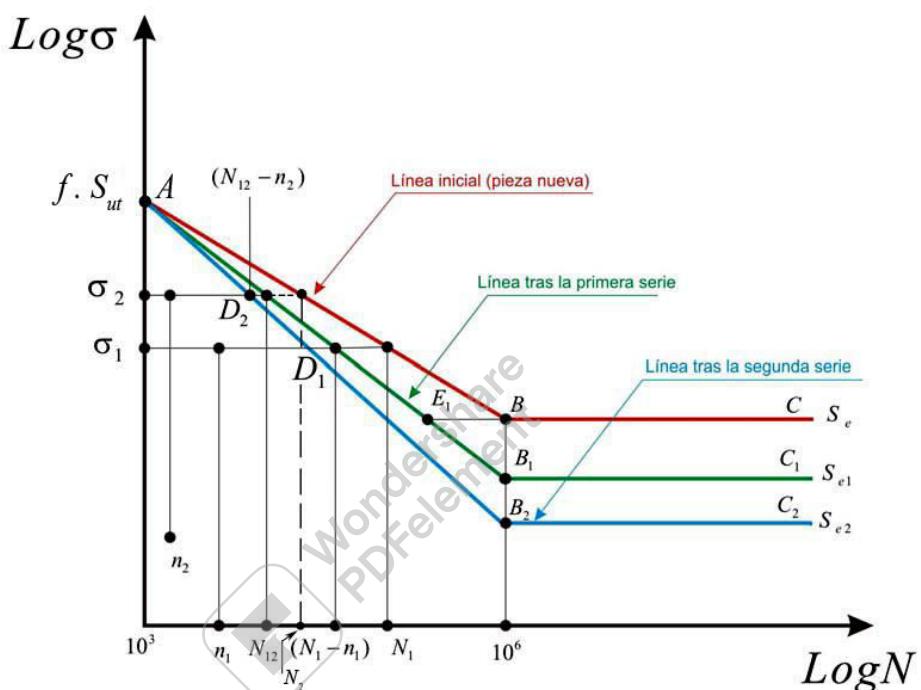
Para intentar solucionar estos inconvenientes, se desarrolló el denominado método o modificación de Manson hacia 1965.

### 7.2. Regla de Manson

En este método se supone que todas las curvas S - N pasan por el mismo punto A correspondiente a  $10^3$  ciclos, el cual se verifica de acuerdo a la ecuación 4-2:

$$S_{f10^3} = S_{ut} \cdot f$$

Además, tiene en cuenta la secuencia de aplicación de esfuerzos (no opera con bloques de esfuerzo sino con ciclos) y mide las duraciones en las curvas S - N actualizadas bloque a bloque. La siguiente figura resume el resultado gráfico de este método.



Supóngase que  $(\sigma_1; n_1)$  es cronológicamente la primera serie de esfuerzos; puede que posteriormente, tras otras series, se vuelvan a aplicar otros ciclos al mismo esfuerzo  $\sigma_1$ , pero deberán ser considerados entonces y no de forma conjunta con estos  $n_1$  primeros ciclos. La nueva línea deberá pasar por el punto A, como todas, y por el  $(\sigma_1; (N_1 - n_1))$  que es el  $D_1$  en la figura anterior. Se obtienen así el nuevo límite de fatiga  $S_{el}$  que es inferior al que predice Palmgren Miner. La siguiente serie  $(\sigma_2; n_2)$  se aplicará ahora, pero utilizando la nueva curva  $AB_1C_1$ . Por ello el nuevo número de ciclos para la rotura ya no es  $N_2$ , sino un valor inferior  $N_{12}$ ; tras esta nueva serie la curva pasa por el punto  $D_2$  que es  $(\sigma_2; (N_{12} - n_2))$  y por A. el nuevo límite de fatiga es  $S_{e2}$  a  $10^6$  ciclos.

El proceso continúa hasta finalizar todas las series, si en ninguna  $i$  de las  $(\sigma_i; n_i)$  se verifica que  $n_i$  es superior a  $N_{i,i}$ , entonces se puede afirmar que la pieza resiste las solicitudes aplicadas, en magnitud y orden de aplicación (siendo  $N_{i,i}$  el número de ciclos para la rotura a la tracción  $\sigma_i$  medido en el diagrama del material deteriorado por las  $i-1$  series precedentes).

## **8. Anexo 1: Propiedades mecánicas de algunos aceros**

Para tablas de propiedades de materiales, referirse al archivo:

[propiedades de materiales-Norton-Diseño de Máquinas.pdf](#)

almacenadas en la plataforma de la cátedra.

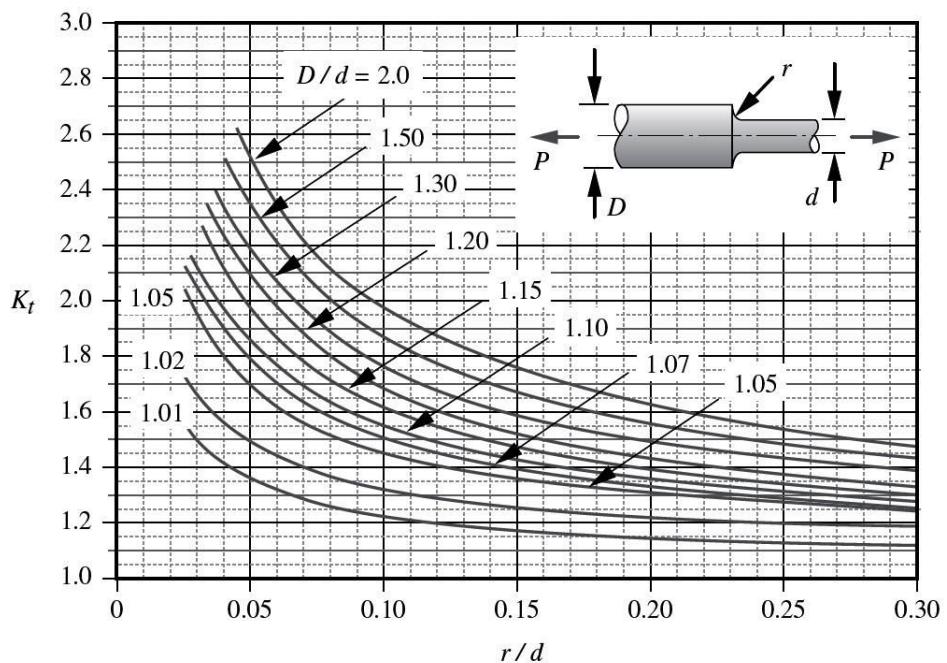


## 9. Anexo 2: Factores de concentración de tensiones

En este apéndice se presentan una serie de casos comunes de factores de concentración de esfuerzos, tanto para solicitudes axiales, de momentos torsores o momentos flectores. Todas las curvas se tomaron de 2 publicaciones: Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 8th ed y Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed.

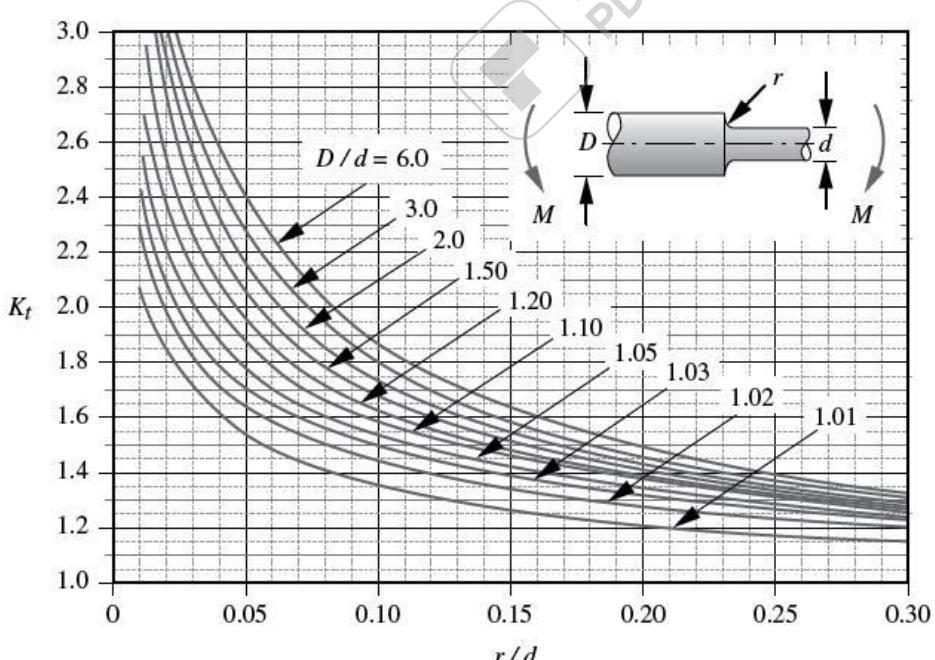
Algunas de las graficas poseen ecuaciones aproximadas para las curvas y están definidas en cada figura. Las ecuaciones fueron obtenidas como funciones computarizadas (anotadas al costado de cada grafica), de modo que se pueden incorporar a modelos por computadora y permitir así la generación automática de los factores aproximados de concentración de esfuerzos durante los cálculos. Se han preferido las tablas de Norton por tener las ecuaciones de las curvas.

<b>Figura</b>	<b>Caso</b>	<b>Fuente</b>
G-1	Eje con filete de hombro en tensión axial	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-2	Eje con filete de hombro en flexión	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-3	Eje con filete de hombro en torsion	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-4	Eje con ranura en tensión axial	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-5	Eje con ranura en flexion	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-6	Eje con ranura en torsion	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-7	Eje con orificio transversal en flexión	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-8	Eje con orificio transversal en torsión	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-9	Barra plana con filete en tensión axial	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-10	Barra plana con filete en flexión	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-11	Barra plana con muesca en tensión axial	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-12	Barra plana con muesca en flexión	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-13	Barra plana con orificio transversal en tensión axial	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
G-14	Barra plana con orificio transversal en flexión	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed
A-15-16	Eje redondo con ranura de fondo plano en flexión y/o tensión.	Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 8th ed
A-15-17	Eje redondo con ranura de fondo plano en torsión.	Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 8th ed
A-16	Barra redonda o tubo con un agujero redondo ransversal, carga en flexion.	Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 8th ed
A-16	Barra redonda o tubo con un agujero redondo transversal, carga en torsión	Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 8th ed
A-15-12	Placa cargada en tensión mediante un pasador a través de un agujero	Diseño en Ingeniería Mecánica – Shigley – 8th ed
6-16	Chavetero con extremo fresado, en torsion y flexion	Diseño de Maquinas – Norton – 4th ed



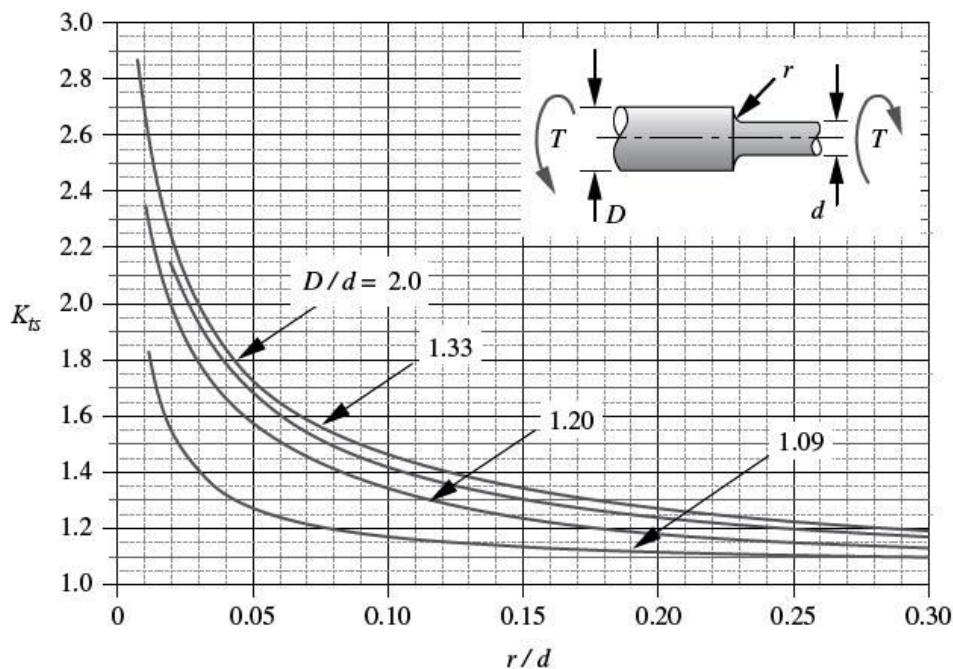
**FIGURA G-1**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con filete de hombro en tensión axial



**FIGURA G-2**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con filete de hombro en flexión



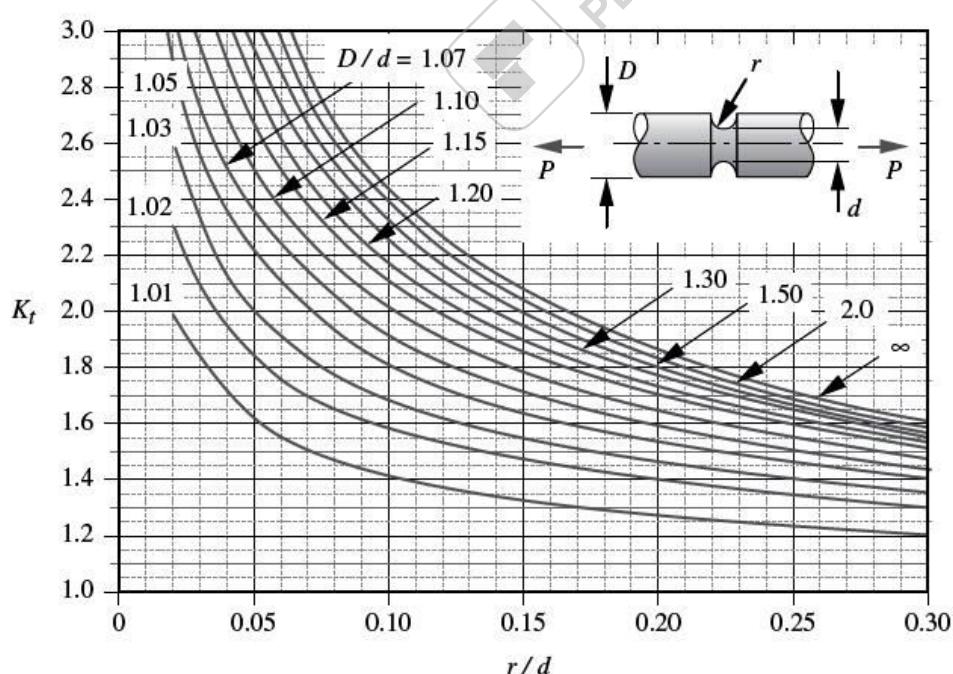
$$K_{ts} \cong A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

donde:

$D/d$	$A$	$b$
2.00	0.863 31	-0.238 65
1.33	0.848 97	-0.231 61
1.20	0.834 25	-0.216 49
1.09	0.903 37	-0.126 92

**FIGURA G-3**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con filete de hombro en torsión



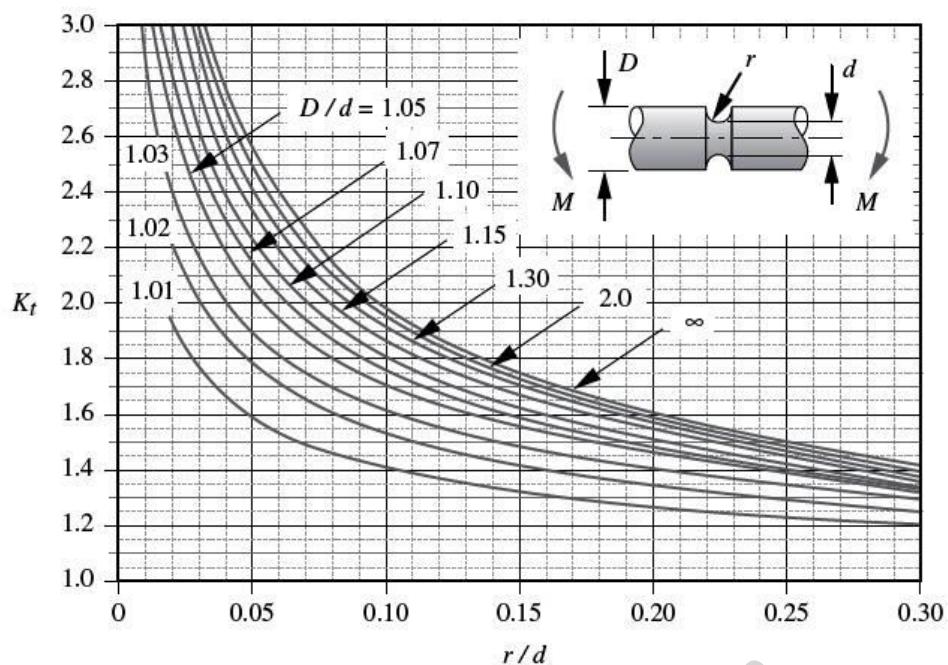
$$K_t \cong A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

donde:

$D/d$	$A$	$b$
$\infty$	0.993 72	-0.393 52
2.00	0.993 83	-0.382 31
1.50	0.998 08	-0.369 55
1.30	1.004 90	-0.355 45
1.20	1.010 70	-0.337 65
1.15	1.026 30	-0.316 73
1.10	1.027 20	-0.294 84
1.07	1.023 80	-0.276 18
1.05	1.027 20	-0.252 56
1.03	1.036 70	-0.216 03
1.02	1.037 90	-0.187 55
1.01	1.000 30	-0.156 09

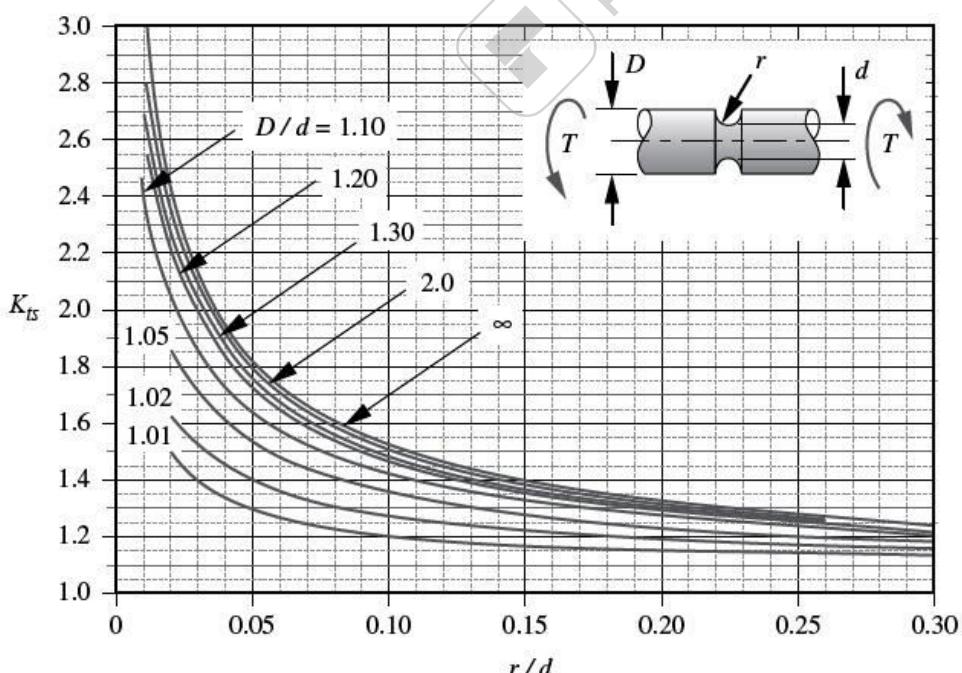
**FIGURA G-4**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con ranura en tensión axial



**FIGURA G -5**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con ranura en flexión



**FIGURE G -6**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con ranura en torsión

$$K_t \cong A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

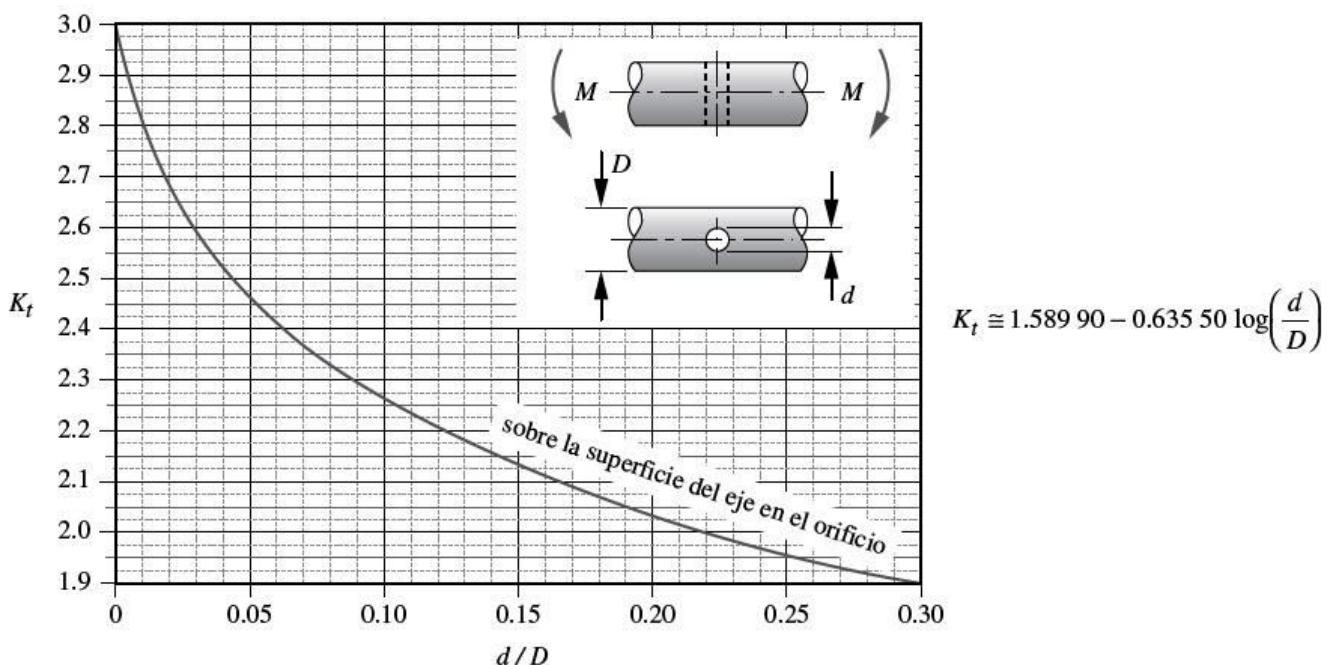
donde:

$D/d$	$A$	$b$
$\infty$	0.948 01	-0.333 02
2.00	0.936 19	-0.330 66
1.50	0.938 94	-0.323 80
1.30	0.942 99	-0.315 04
1.20	0.946 81	-0.305 82
1.15	0.953 11	-0.297 39
1.12	0.955 73	-0.288 86
1.10	0.954 54	-0.282 68
1.07	0.967 74	-0.264 52
1.05	0.987 55	-0.241 34
1.03	0.990 33	-0.215 17
1.02	0.977 53	-0.197 93
1.01	0.993 93	-0.152 38

$$K_{ts} \cong A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

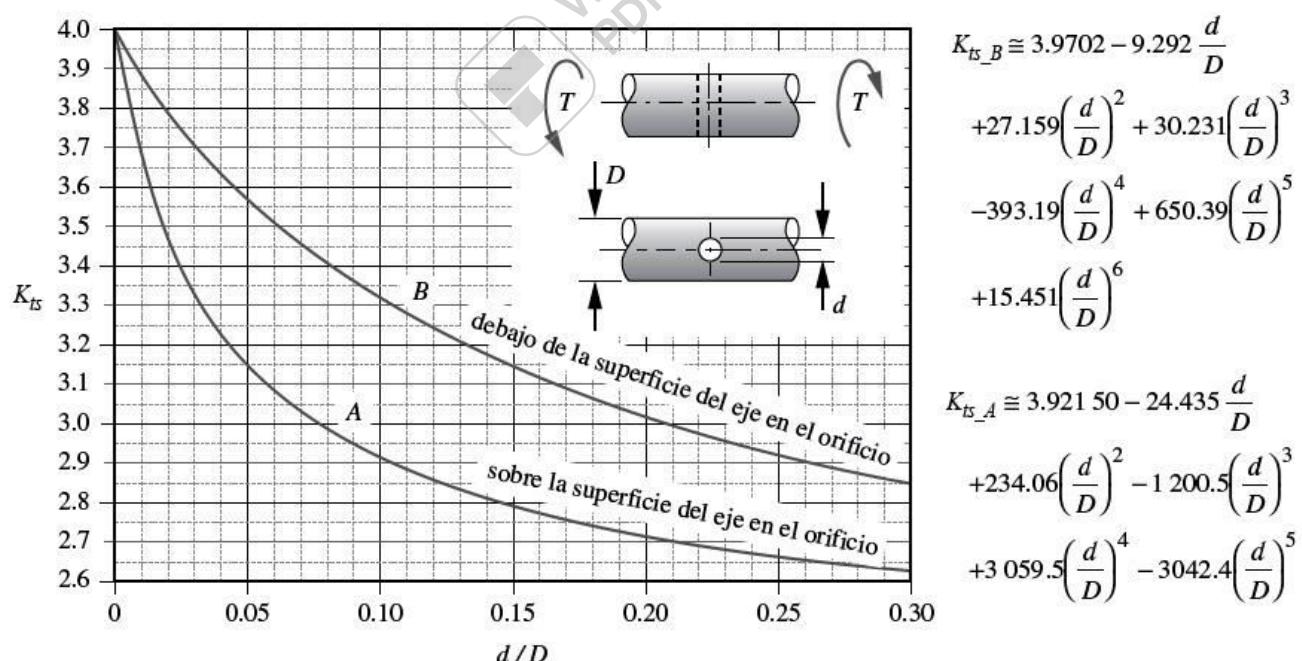
donde:

$D/d$	$A$	$b$
$\infty$	0.881 26	-0.252 04
2.00	0.890 35	-0.240 75
1.30	0.894 60	-0.232 67
1.20	0.901 82	-0.223 34
1.10	0.923 11	-0.197 40
1.05	0.938 53	-0.169 41
1.02	0.968 77	-0.126 05
1.01	0.972 45	-0.101 62



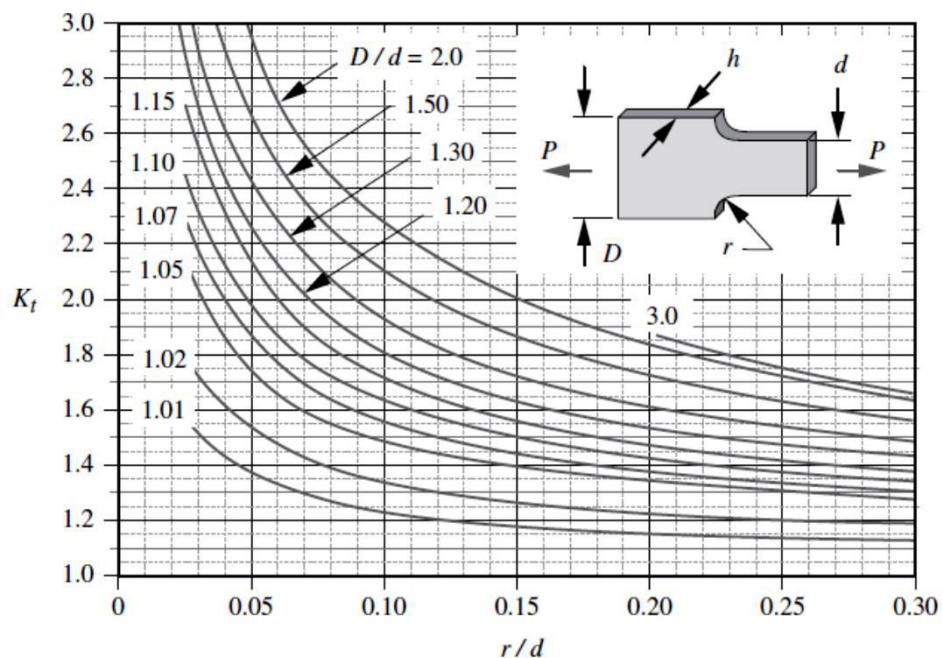
**FIGURA G-7**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con orificio transversal en flexión



**FIGURA G-8**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para un eje con orificio transversal en torsión



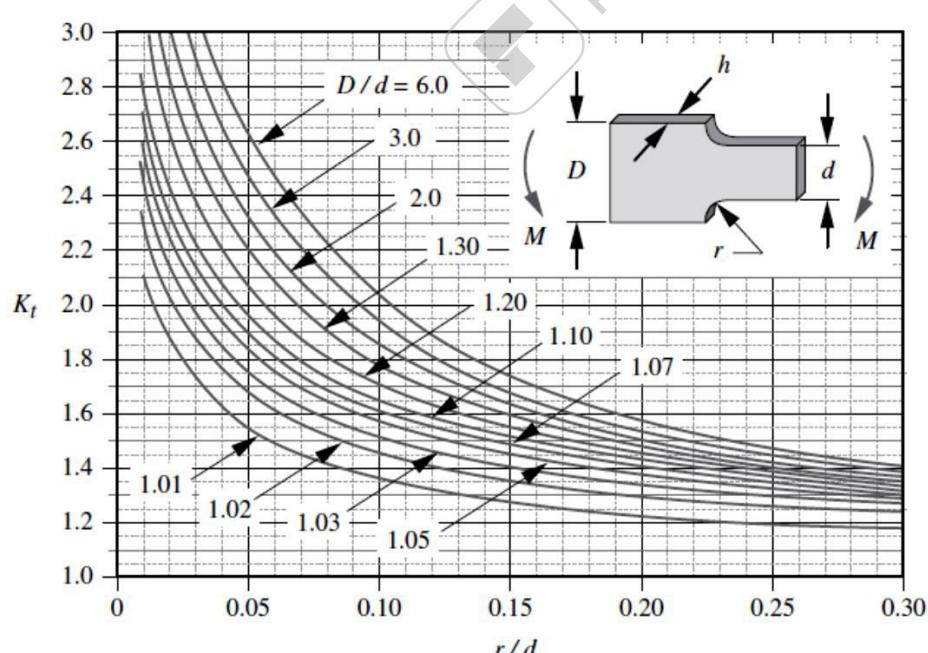
$$K_t \cong A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

donde:

$D/d$	$A$	$b$
2.00	1.099 60	-0.320 77
1.50	1.076 90	-0.295 58
1.30	1.054 40	-0.270 21
1.20	1.035 10	-0.250 84
1.15	1.014 20	-0.239 35
1.10	1.013 00	-0.215 35
1.07	1.014 50	-0.193 66
1.05	0.987 97	-0.138 48
1.02	1.025 90	-0.169 78
1.01	0.976 62	-0.106 56

**FIGURA G-9**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para una barra plana con filete en tensión axial



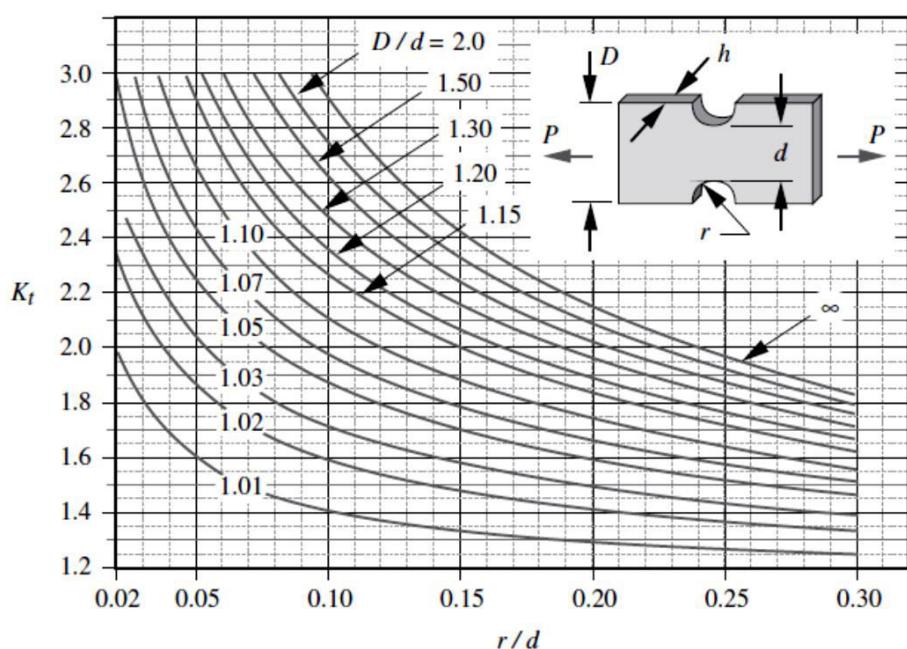
$$K_t \cong A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

donde:

$D/d$	$A$	$b$
6.00	0.895 79	-0.358 47
3.00	0.907 20	-0.333 33
2.00	0.932 32	-0.303 04
1.30	0.958 80	-0.272 69
1.20	0.995 90	-0.238 29
1.10	1.016 50	-0.215 48
1.07	1.019 90	-0.203 33
1.05	1.022 60	-0.191 56
1.03	1.016 60	-0.178 02
1.02	0.995 28	-0.170 13
1.01	0.966 89	-0.154 17

**FIGURA G-10**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para una barra plana con filete en flexión



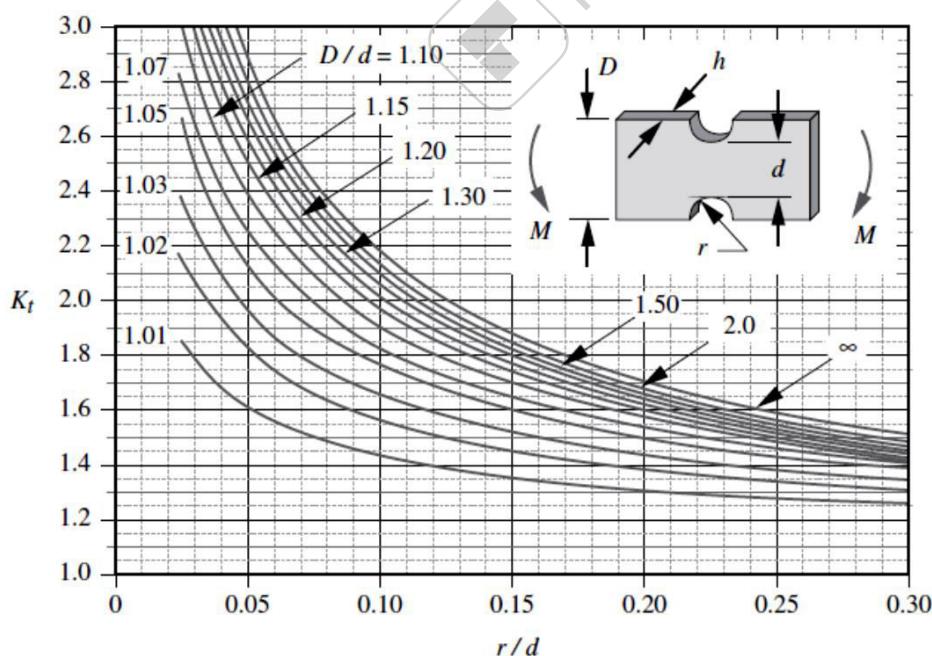
$$K_t \approx A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

donde:

$D/d$	$A$	$b$
$\infty$	1.109 50	-0.417 12
3.00	1.113 90	-0.409 23
2.00	1.133 90	-0.385 86
1.50	1.132 60	-0.365 92
1.30	1.158 60	-0.332 60
1.20	1.147 50	-0.315 07
1.15	1.095 20	-0.325 17
1.10	1.085 10	-0.299 97
1.07	1.091 20	-0.268 57
1.05	1.090 60	-0.241 63
1.03	1.051 80	-0.222 16
1.02	1.054 00	-0.188 79
1.01	1.042 60	-0.141 45

FIGURA G-11

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para una barra plana con muesca en tensión axial



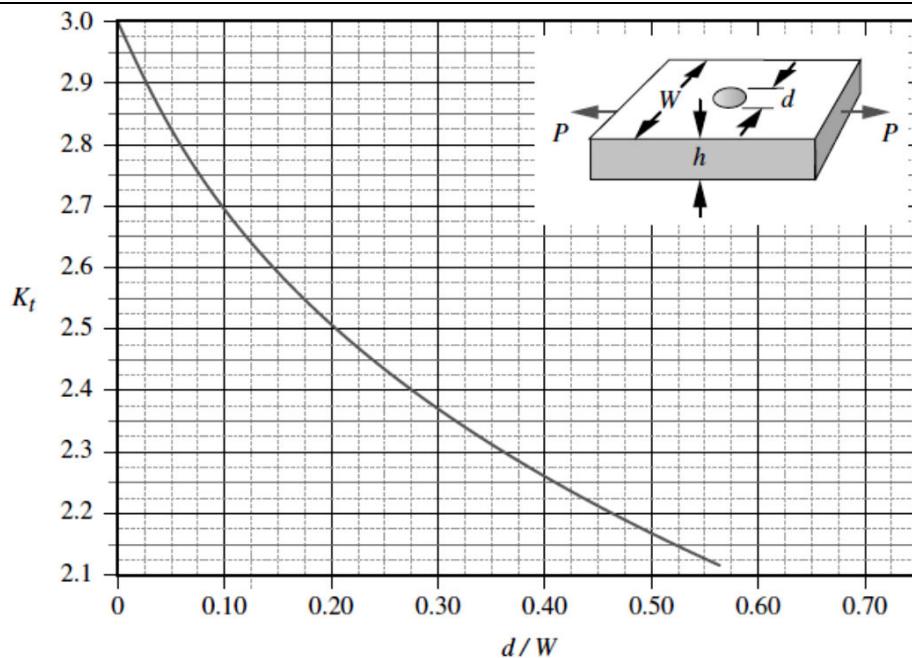
$$K_t \approx A \left( \frac{r}{d} \right)^b$$

donde:

$D/d$	$A$	$b$
$\infty$	0.970 79	-0.356 72
3.00	0.971 94	-0.350 47
2.00	0.968 01	-0.349 15
1.50	0.983 15	-0.333 95
1.30	0.982 88	-0.326 06
1.20	0.990 55	-0.313 19
1.15	0.993 04	-0.302 63
1.10	1.007 10	-0.283 79
1.07	1.014 70	-0.261 45
1.05	1.025 00	-0.240 08
1.03	1.029 40	-0.211 61
1.02	1.037 40	-0.184 28
1.01	1.060 50	-0.133 69

FIGURA G-12

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para una barra plana con muesca en flexión



**FIGURA G-13**

Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para una barra plana con orificio transversal en tensión axial

para  $\frac{d}{W} \leq 0.65$ :

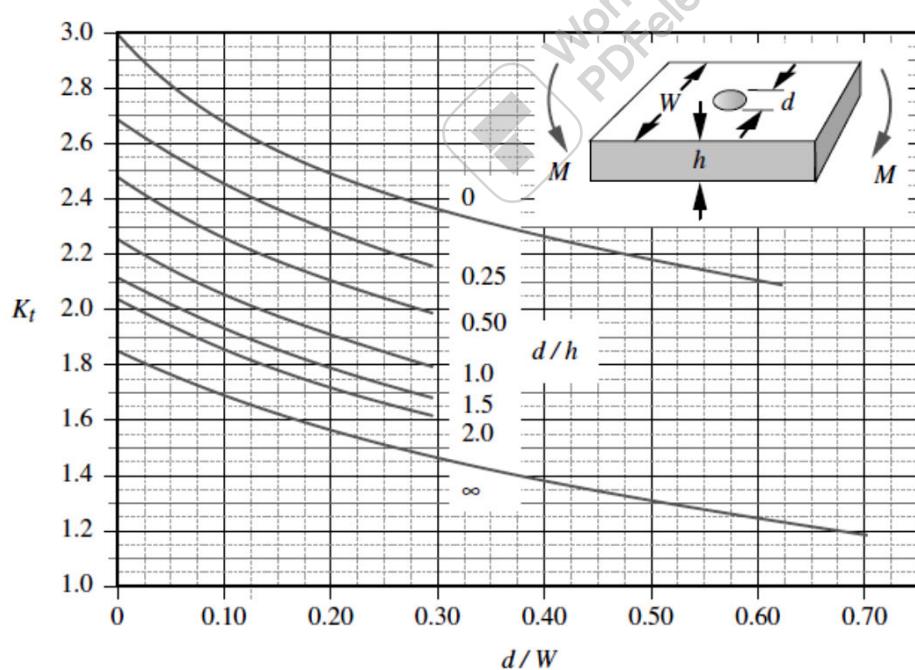
$$K_t \cong 3.0039 - 3.753 \frac{d}{W}$$

$$+ 7.9735 \left( \frac{d}{W} \right)^2$$

$$- 9.2659 \left( \frac{d}{W} \right)^3$$

$$+ 1.8145 \left( \frac{d}{W} \right)^4$$

$$+ 2.9684 \left( \frac{d}{W} \right)^5$$



para  $\frac{d}{h} = 0$  y  $\frac{d}{W} \leq 0.65$ :

$$K_t \cong 2.9947 - 3.4833 \frac{d}{W}$$

$$+ 5.8268 \left( \frac{d}{W} \right)^2 - 4.1986 \left( \frac{d}{W} \right)^3$$

para  $\frac{d}{h} \geq 0.25$ :  $K_t \cong Ae^{[b(d/W)]}$   
 donde:

$d/h$	$A$	$b$
0.25	2.68750	-0.75128
0.50	2.46620	-0.77215
1.00	2.24000	-0.78739
1.50	2.02430	-0.80821
2.00	2.10560	-0.79878
$\infty$	1.80820	-0.66702

**FIGURA G-14**

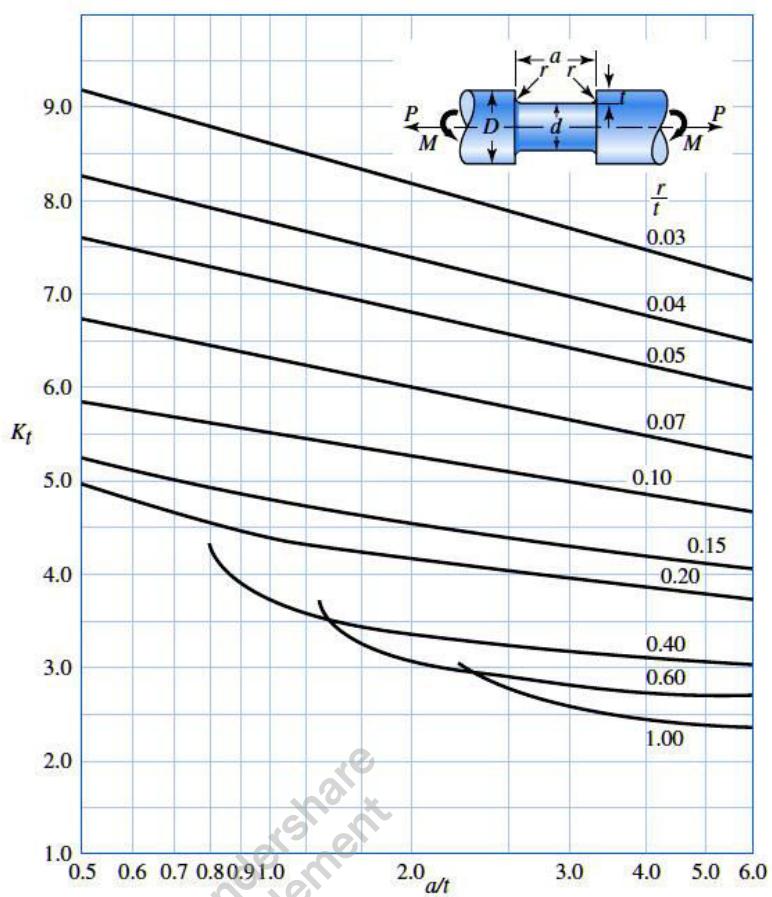
Factor geométrico de concentración de esfuerzos  $K_t$  para una barra plana con orificio transversal en flexión

### Figura A-15-16

Eje redondo con ranura de fondo plano en flexión y/o tensión.

$$\sigma_0 = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3}$$

Fuente: W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997, p. 115.

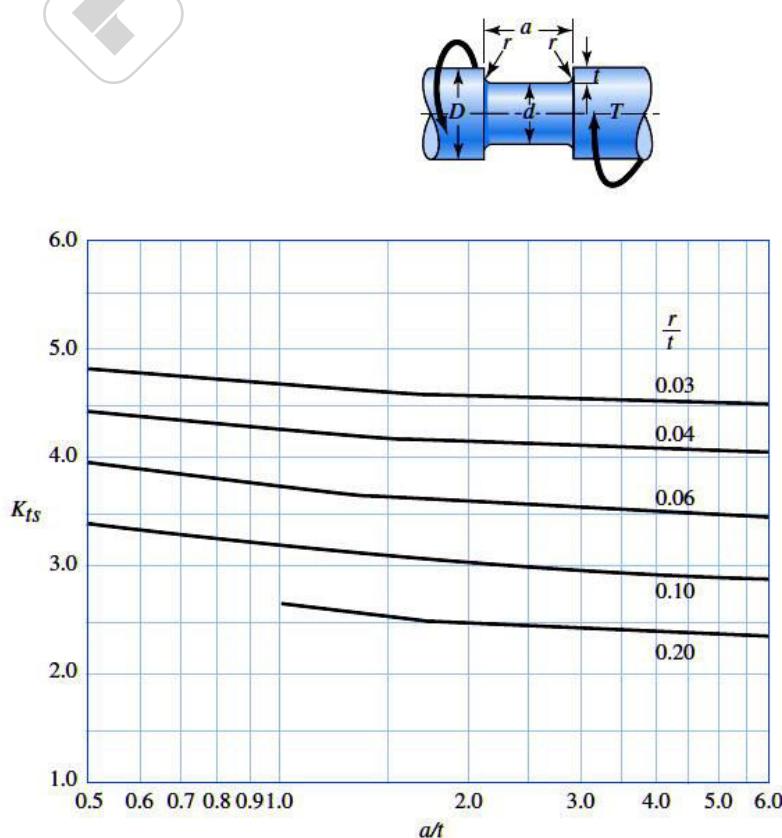


### Figura A-15-17

Eje redondo con ranura de fondo plano en torsión.

$$\tau_0 = \frac{16T}{\pi d^3}$$

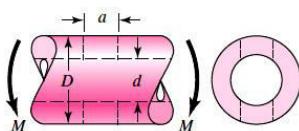
Fuente: W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997, p. 133.



**Tabla A-16**

Factores aproximados de concentración del esfuerzo,  $K_t$ , de una barra redonda o un tubo con un agujero redondo transversal, carga en flexión

Fuente: R. E. Peterson,  
*Stress Concentration Factors*,  
 Wiley, Nueva York, 1974,  
 pp. 146, 235.



El esfuerzo flexionante nominal es  $\sigma_0 = M/Z_{\text{neto}}$ , donde  $Z_{\text{neto}}$  es un valor reducido del módulo de sección y se define por

$$Z_{\text{neto}} = \frac{\pi A}{32D} (D^4 - d^4)$$

Los valores de  $A$  se listan en la tabla. En el caso de una barra sólida use  $d = 0$

$a/D$	$d/D$					
	0.9		0.6		0	
	$A$	$K_t$	$A$	$K_t$	$A$	$K_t$
0.050	0.92	2.63	0.91	2.55	0.88	2.42
0.075	0.89	2.55	0.88	2.43	0.86	2.35
0.10	0.86	2.49	0.85	2.36	0.83	2.27
0.125	0.82	2.41	0.82	2.32	0.80	2.20
0.15	0.79	2.39	0.79	2.29	0.76	2.15
0.175	0.76	2.38	0.75	2.26	0.72	2.10
0.20	0.73	2.39	0.72	2.23	0.68	2.07
0.225	0.69	2.40	0.68	2.21	0.65	2.04
0.25	0.67	2.42	0.64	2.18	0.61	2.00
0.275	0.66	2.48	0.61	2.16	0.58	1.97
0.30	0.64	2.52	0.58	2.14	0.54	1.94

**Tabla A-16 (continuación)**

Factores aproximados de concentración del esfuerzo,  $K_{ts}$ , de una barra redonda o un tubo con un agujero redondo transversal, carga en torsión Fuente: R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, Nueva York, 1974, pp. 148, 244.



El esfuerzo máximo ocurre en el interior del agujero, un poco debajo de la superficie del eje. El esfuerzo cortante nominal es  $\tau_0 = T D / 2 J_{\text{neto}}$ , donde  $J_{\text{neto}}$  es un valor reducido del segundo momento polar del área y se define por

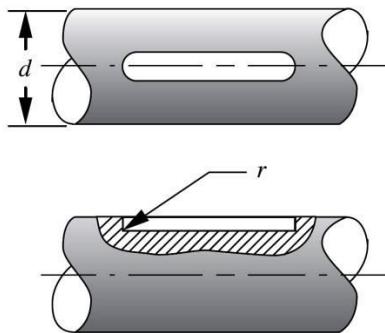
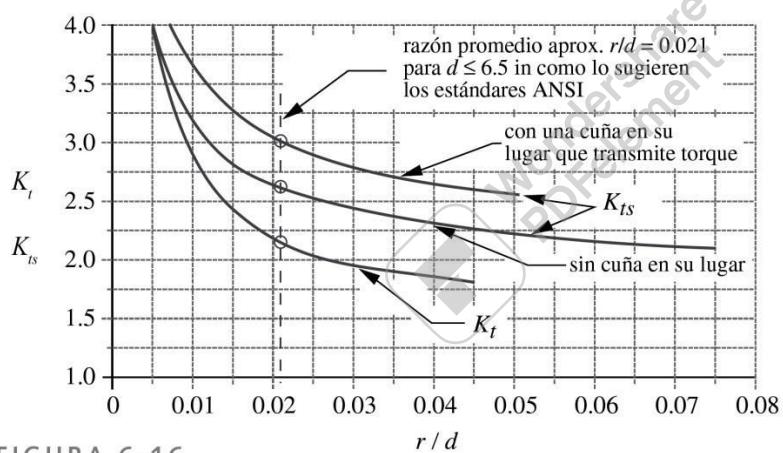
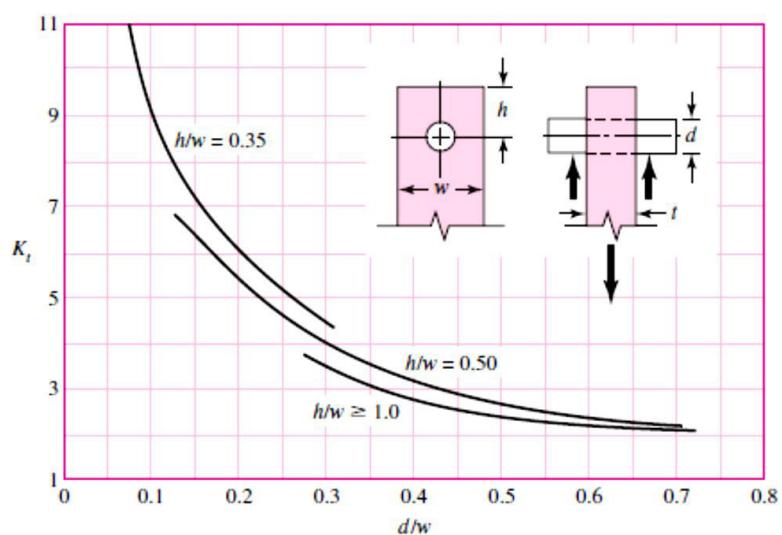
$$J_{\text{neto}} = \frac{\pi A (D^4 - d^4)}{32}$$

Los valores de  $A$  se listan en la tabla. En el caso de una barra sólida use  $d = 0$ .

$a/D$	0.9		0.8		0.6		0.4		0	
	$A$	$K_{ts}$								
0.05	0.96	1.78							0.95	1.77
0.075	0.95	1.82							0.93	1.71
0.10	0.94	1.76	0.93	1.74	0.92	1.72	0.92	1.70	0.92	1.68
0.125	0.91	1.76	0.91	1.74	0.90	1.70	0.90	1.67	0.89	1.64
0.15	0.90	1.77	0.89	1.75	0.87	1.69	0.87	1.65	0.87	1.62
0.175	0.89	1.81	0.88	1.76	0.87	1.69	0.86	1.64	0.85	1.60
0.20	0.88	1.96	0.86	1.79	0.85	1.70	0.84	1.63	0.83	1.58
0.25	0.87	2.00	0.82	1.86	0.81	1.72	0.80	1.63	0.79	1.54
0.30	0.80	2.18	0.78	1.97	0.77	1.76	0.75	1.63	0.74	1.51
0.35	0.77	2.41	0.75	2.09	0.72	1.81	0.69	1.63	0.68	1.47
0.40	0.72	2.67	0.71	2.25	0.68	1.89	0.64	1.63	0.63	1.44

**Figura A-15-12**

Placa cargada en tensión mediante un pasador a través de un agujero.  $\sigma_0 = F/A$ , donde  $A = (w - d)t$ . Cuando exista holgura incremente  $K_t$  de 35 a 50%. [M. M. Frocht y H. N. Hill, "Stress Concentration Factors around a Central Circular Hole in a Plate Loaded through a Pin in Hole", en J. Appl. Mechanics, vol 7, núm. 1, marzo de 1940, p. A-5.]



**FIGURA 6-16**

Factores de concentración de esfuerzos de cuñero, con extremo fresado, en flexión ( $K_t$ ) y en torsión ( $K_{ts}$ )

## **10. Bibliografía**

- “Diseño en Ingeniería Mecánica”, Joseph Edward SHIGLEY, Charles Mischke, Ed. Mc. Graw Hill, 8va edición.
- “Diseño de elementos de maquinas”, V.M. FAIRES, Editorial Montaner y Simon - Barcelona 4ta edición.
- “Diseño de maquinas”, Robert L. NORTON – Prentice Hall – 4ta edición
- “Elementos de Maquinas”, Bernard HAMROCK - Ed. Mc. Graw Hill, 1ra edición.

