

Resistencia de Materiales y Estructuras

Juan Miquel Canet



Resistencia de Materiales y Estructuras

Resistencia de Materiales y Estructuras

Juan Miquel Canet

Ediciones CIMNE

La presente obra fue galardonada en el octavo concurso “Ajuts a l’elaboració de material docent” convocado por la UPC

Resistencia de Materiales y Estructuras
Juan Miquel Canet
canet@cimne.upc.edu

Edición digital. Septiembre de 2012

© El autor

Edita: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Gran Capitán, s/n, 08034 Barcelona, España
www.cimne.com

ISBN: 978-84-939640-4-7

Depósito Legal: B-8450-2012

Queda rigurosamente prohibida la reproducción total o parcial de esta publicación en cualquier forma, ya sea mediante fotocopia, microfilm o cualquier otro procedimiento.

a Montse, Laura y Marc

Índice

	<u>pag.</u>
1 Fundamentos	1
1.1 Objeto de la Resistencia de Materiales y del Cálculo de Estructuras	1
1.2 El sólido como elemento resistente	1
1.3 Breve análisis del concepto de tensión	4
1.4 El tensor de tensiones	6
1.5 Ecuaciones de equilibrio interno	7
1.6 Tensiones sobre un plano cualquiera	10
1.7 Condiciones cinemáticas	12
1.8 Análisis de las deformaciones	13
1.9 Relación tensión-deformación. Ley de Hooke	19
1.10 Condiciones en la superficie del sólido	26
1.11 Solución general del problema elástico. Planteamiento	27
1.11.1 Ecuaciones de Navier	28
1.11.2 Solución en tensiones	28
1.12 Acciones	29
1.13 Energía de deformación	31
1.14 Cuestiones finales	32
2 La pieza elástica: fundamentos de análisis	35
2.1 Introducción	35
2.2 La pieza elástica	35
2.3 Reacciones y vinculaciones	37
2.4 Esfuerzos en una sección	39
2.5 Ecuaciones de equilibrio interno	44
2.5.1 Caso general	44
2.5.2 Pieza curva espacial en que los vectores locales vienen dados por el triángulo de Frenet	47

2.5.3 Pieza espacial recta	49
2.5.4 Pieza de plano medio	49
2.5.5 Pieza recta de plano medio	53
2.6 Leyes de esfuerzos	54
2.6.1 Concepto	54
2.6.2 Isostatismo e hiperestatismo	55
2.7 Principio de Saint-Venant	61
2.8 Ejercicios propuestos	63
3 Esfuerzo axil	71
3.1 Hipótesis básicas	71
3.2 Distribución de tensiones y deformaciones	72
3.3 Análisis de las deformaciones no mecánicas	76
3.4 Secciones compuestas por diferentes materiales	77
3.5 Energía de deformación	83
3.6 Ejercicios propuestos	84
4 Momento flector	91
4.1 Hipótesis básicas	91
4.2 Piezas de plano medio	92
4.3 Flexión esviada	98
4.3.1 Flexión esviada trabajando con ejes principales de inercia	99
4.3.2 Flexión esviada trabajando con ejes cualesquier	101
4.3.3 Flexión esviada directa	103
4.4 Secciones compuestas por diversos materiales	114
4.5 Tensiones y movimientos producidos en una sección debidos a deformaciones impuestas	117
4.6 Energía de deformación	122
4.6.1 Energía de deformación en piezas de plano medio	122
4.6.2 Piezas de plano medio en ejes principales	123
4.6.3 Energía de deformación con ejes cualesquier	124
4.7 Flexión compuesta	124
4.7.1 Flexión compuesta recta	124
4.7.2 Flexión compuesta esviada en ejes principales	130
4.7.3 Flexión compuesta esviada en ejes cualesquier	132
4.7.4 Estudio directo de la flexión esviada	134
4.8 Núcleo central	140
4.9 Ejercicios propuestos	146

5 Tensiones producidas por el esfuerzo cortante	153
5.1 Introducción	153
5.2 Origen de las tensiones tangenciales	153
5.3 Distribución de tensiones tangenciales en secciones macizas	157
5.3.1 Sección rectangular	157
5.3.2 Sección simétrica	159
5.3.3 Sección circular	160
5.4 Secciones abiertas de paredes delgadas	162
5.4.1 Cortante actuando en un eje principal de inercia de la sección	162
5.4.2 Distribución de tensiones tangenciales para distintos tipos de secciones	163
5.4.2.1 Sección en U	163
5.4.2.2 Sección doble T	165
5.4.2.3 Secciones unicelulares cerradas con un eje de simetría	167
5.4.3 Cortante esviado	169
5.5 Secciones cerradas de paredes delgadas unicelulares	180
5.6 Secciones multicelulares de paredes delgadas	183
5.7 Centro de esfuerzos cortantes	189
5.7.1 Centro de esfuerzos cortantes en secciones abiertas	190
5.7.2 Centro de esfuerzos cortantes en secciones cerradas	193
5.8 Secciones compuestas por varios materiales	195
5.9 Energía de deformación	196
5.10 Ejercicios propuestos	197
6 Torsión	201
6.1 Planteamiento	201
6.2 Formulación de la torsión uniforme en desplazamientos	204
6.3 Formulación de la torsión uniforme en tensiones: función de Prandtl	205
6.4 Analogía de la membrana	210
6.5 Algunas secciones de alma llena	211
6.5.1 Pieza prismática de sección circular sometida a momento torsor	211
6.5.2 Pieza prismática de sección rectangular sometida a torsión	213
6.6 Perfiles abiertos de pared delgada	215
6.7 Perfiles cerrados de pared delgada	219
6.7.1 Secciones cerradas unicelulares	219
6.7.2 Secciones multicelulares	223
6.8 Introducción a la torsión no uniforme	226
6.9 Formulación de la torsión no uniforme	227
6.9.1 Formulación de las ecuaciones	227

6.9.2	Ecuación diferencial de la torsión no uniforme	231
6.9.3	El centro de torsión	233
6.9.4	Otras comprobaciones de equilibrio	236
6.10	Cálculo de alabeos y resumen final	237
7	Energía de deformación	247
7.1	Introducción	247
7.2	Teorema de los trabajos virtuales	247
7.2.1	Formulación	247
7.2.1.1	Pieza recta	248
7.2.1.2	Pieza curva	252
7.3	Teorema de los trabajos virtuales complementarios	255
7.3.1	Formulación	255
7.3.2	Método de la fuerza unidad para la determinación de movimientos	256
7.4	Energía potencial total	260
7.5	Expresión de la energía elástica	261
7.6	Primer teorema de Castigliano	266
7.7	Segundo teorema de Castigliano	267
7.7.1	Formulación	267
7.7.2	Aplicación del segundo teorema de Castigliano a la determinación de movimientos	268
7.8	Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti	273
7.9	Minimización de la energía elástica respecto a las incógnitas hiperestáticas	277
7.10	Expresión de las deformaciones generalizadas ϵ_1, γ, χ y de los esfuerzos en función de los movimientos	278
7.11	Directriz que no pasa por el centro de gravedad de la sección	280
8	Estructuras articuladas	285
8.1	Introducción	285
8.2	Estructuras isostáticas	286
8.2.1	Metodología general de análisis. Matriz de conexión	286
8.2.2	Cálculo de movimientos	293
8.3	Estructuras hiperestáticas	298
8.3.1	Cálculo de estructuras hiperestáticas mediante el método de compatibilidad	298
8.3.2	Cálculo de estructuras hiperestáticas por el método de rigidez	303
8.4	Ejercicios propuestos	311

9 Vigas simples	317
9.1 Introducción	317
9.2 Ecuación de la elástica	317
9.2.1 Deformación de una ménsula sometida a carga uniformemente repartida	319
9.2.2 Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida	320
9.2.3 Viga empotrada en un extremo y apoyada en otro sometida a carga uniformemente repartida	321
9.2.4 Cargas no uniformes. Utilización de la función de Heaviside	322
9.2.5 Viga biapoyada sometida a una carga puntual F	325
9.2.6 Movimientos de apoyos en vigas simples	326
9.2.7 Efectos térmicos	330
9.2.8 Vigas sobre lecho elástico	334
9.3 Deformación de vigas isostáticas: teoremas de Mohr y Castigliano	340
9.3.1 Primer teorema de Mohr	340
9.3.2 Segundo teorema de Mohr	340
9.3.3 Determinación de flechas y giros utilizando los teoremas de Mohr	342
9.3.4 Cálculo de movimientos utilizando el segundo teorema de Castigliano y el método de la fuerza unidad	344
9.3.5 Efectos térmicos	348
9.4 Vigas rectas hiperestáticas. Aplicación de los teoremas de Mohr y segundo de Castigliano	349
9.4.1 Viga empotrada y apoyada	349
9.4.2 Viga biempotrada	354
9.5 Ecuaciones elásticas	358
9.5.1 Relaciones momentos - giros	358
9.5.2 Relaciones momentos - desplazamientos	359
9.5.3 Inclusión del axil y cortante. Ecuaciones elásticas	360
9.5.4 Ecuaciones elásticas cuando la directriz no coincide con la línea de centros de gravedad	365
9.6 Ecuación de la elástica	370
9.6.1 Deformación de una ménsula sometida a carga uniformemente repartida	372
9.6.2 Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida y momentos en los extremos	373
9.6.3 Viga empotrada y apoyada	374
9.6.4 Importancia relativa de los términos de cortante frente a los de flector	376
9.7 Deformación de vigas isostáticas: teoremas de Mohr generalizados	379
9.7.1 Segundo teorema de Mohr generalizado	379

9.8	Estudio de la pieza recta biempotrada	381
9.9	Ecuaciones elásticas	384
9.9.1	Relaciones momentos - giros	384
9.9.2	Relaciones momentos - desplazamientos	386
9.9.3	Inclusión del axil y del cortante. Ecuaciones elásticas	387
9.9.4	Ecuaciones elásticas cuando la directriz no coincide con la línea de centros de gravedad	389
9.10	Ecuación de la elástica en piezas curvas	390
9.11	Ejercicios propuestos	394
10	Vigas continuas	399
10.1	Introducción	399
10.2	Cálculo de vigas continuas mediante métodos de compatibilidad	400
10.2.1	Cálculo de vigas continuas tomando como incógnitas hiperestáticas las reacciones de los apoyos intermedios	400
10.2.2	Cálculo de vigas continuas tomando como incógnitas hiperestáticas los momentos flectores en los apoyos intermedios: Teorema de los tres momentos	403
10.2.3	Movimientos de apoyos: Valores conocidos de un descenso de apoyo y apoyos elásticos	405
10.3	Cálculo de vigas continuas mediante el método de rigidez	410
10.3.1	Vigas continuas con nudos fijos	410
10.3.2	Viga continua con movimientos de apoyo	415
10.4	Ejercicios Propuestos	415
11	Estructuras reticuladas	419
11.1	Introducción	419
11.2	Simetrías y Antimetrías	420
11.2.1	Simetrías	420
11.2.2	Antimetrías	421
11.3	Métodos generales de cálculo de estructuras: compatibilidad y rigidez	424
11.4	Determinación de movimientos. Fórmulas de Navier-Bresse	427
11.4.1	Movimiento relativo entre dos puntos	428
11.4.2	Movimientos totales de un punto	434
11.5	El método de compatibilidad	437
11.5.1	Planteamiento	437
11.5.2	Estructuras antifuniciares	448
11.5.3	Algunas simplificaciones	450
11.6	El método de rigidez	454

11.6.1 Planteamiento del método de rigidez	454
11.6.2 Condiciones de vinculación	460
11.6.3 Nudos de tamaño finito	462
11.6.4 Ecuaciones elásticas reducidas	466
11.7 Ejercicios propuestos	467
12 Formulación en 3D	475
12.1 Introducción	475
12.2 Relaciones fundamentales	475
12.2.1 Relación esfuerzos-deformaciones generalizadas	475
12.2.2 Relaciones deformaciones generalizadas - movimientos	483
12.3 Teoremas de trabajos virtuales	485
12.4 Determinación de movimientos	485
12.5 Estudio de las piezas rectas. Matrices de rigidez: ecuaciones elásticas	489
12.5.1 Caso general	489
12.5.2 Un caso particular: el emparrillado plano	497
12.6 Inclusión de la deformación por alabeo	499
Anejo 1. Momentos de inercia de figuras planas	503
Anejo 2. Tablas de flechas y giros de vigas simples	517
Índice Alfabético	527

1 Fundamentos

1.1 Objeto de la Resistencia de Materiales y del Cálculo de Estructuras

Cualquier disciplina en ingeniería que persiga una finalidad aplicada se basa en el concurso de dos conjuntos de conocimientos: En primer lugar una teoría rigurosamente cimentada que a partir de unas hipótesis razonables y comprobadas en lo posible, proporcione unos resultados que, por una parte, sean aceptables y, por otra aplicables a fines concretos de ingeniería. En segundo lugar es preciso disponer de una amplia experiencia que, al mismo tiempo que cubra las inevitables lagunas que tiene la teoría, interactúe con ella validándola y mejorándola.

Cuando de lo que se trata es de construir edificios, máquinas o cualquier ingenio de una cierta utilidad, es preciso garantizar que sus condiciones de resistencia sean las *adecuadas*. Y es precisamente el armazón teórico a través del cual se puede llegar a determinar y asegurar dichas condiciones de resistencia lo que constituye el objeto de la Resistencia de Materiales y del Cálculo de Estructuras.

Se ha introducido la palabra *adecuado* consciente de su ambigüedad. Por una parte, es preciso conocer los fundamentos de la resistencia y estabilidad de las construcciones a fin de reducir los costos excesivos que introduciría un dimensionamiento superabundante. Por otro lado, una construcción más cara no quiere decir que sea más segura, ya que es posible que ciertas partes o elementos estén sobredimensionados, mientras que en otros su estabilidad sea crítica. Nótese por último que la estética es también un elemento importante a tomar en consideración. A este respecto es notorio señalar que una estructura bien concebida, y adecuada toda ella y cada una de sus partes a la finalidad resistente que debe cumplir, no es extraña a un objetivo estético.

1.2 El sólido como elemento resistente

Considérese un sólido cualquiera sometido a una serie de acciones¹ tal como esquemáticamente se representa en la figura 1.1. Dicho sólido, como consecuencia de las acciones que sobre él actúan, sufre una serie de movimientos, es decir, que un punto cualquiera \mathbf{P}_o de coordenadas antes de la deformación (z_1^o, z_2^o, z_3^o) pasa a tener después de la deformación las coordenadas (z_1, z_2, z_3) (ver Fig. 1.2).

¹El concepto de acción se precisará más adelante. Por el momento y para fijar ideas puede considerarse un tipo particular de acción tal como las fuerzas externas.

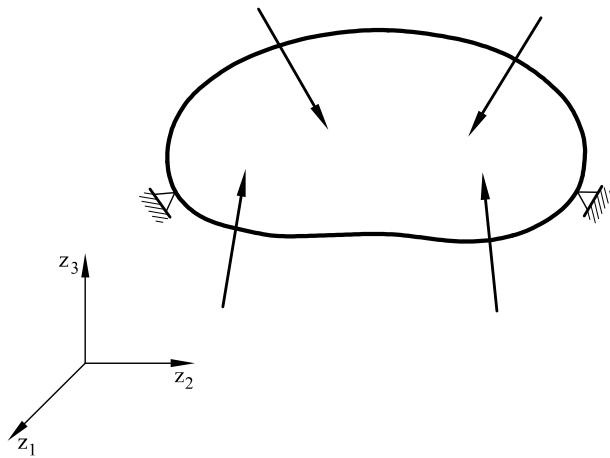


Fig. 1.1 Cuerpo deformable sometido a cargas externas

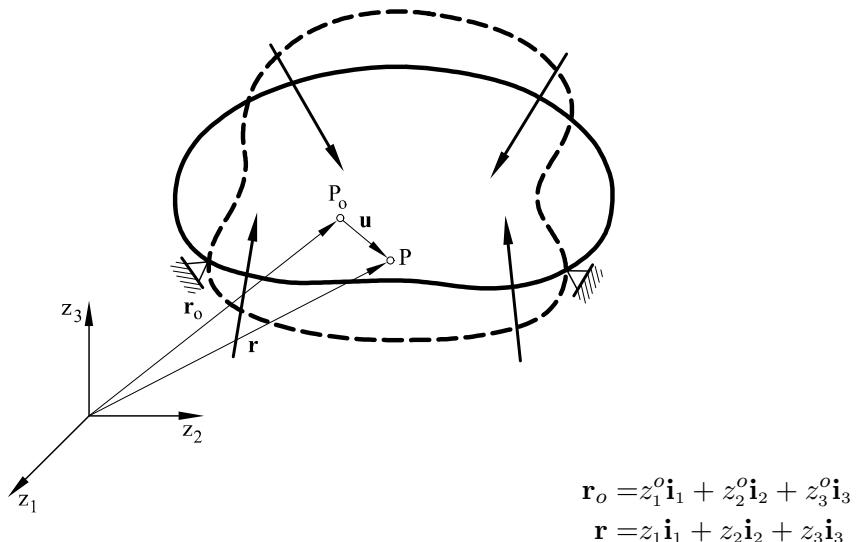


Fig. 1.2 Movimientos de un punto \mathbf{P} de un sólido deformable

De esta forma, los movimientos del punto \mathbf{P} serán

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_o = (z_1 - z_1^o) \mathbf{i}_1 + (z_2 - z_2^o) \mathbf{i}_2 + (z_3 - z_3^o) \mathbf{i}_3 = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 + u_3 \mathbf{i}_3 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 - z_1^o \\ u_2 &= z_2 - z_2^o \\ u_3 &= z_3 - z_3^o \end{aligned}$$

Por hipótesis, se va a suponer que estos movimientos son suficientemente pequeños. El término *suficientemente pequeños* se irá precisando más a lo largo de todo este libro. Se puede, por tanto y por el momento, enunciar la siguiente hipótesis:

Todo cuerpo sometido a unas ciertas acciones experimenta una serie de movimientos definidos por el vector $\mathbf{u}(z_1^o, z_2^o, z_3^o)$ que se supondrán suficientemente pequeños.

Supóngase nuevamente el sólido deformable de la figura 1.1 al que mediante una superficie ideal cualquiera π se separa en dos partes. Sea S la parte de π que pertenece al cuerpo (Fig. 1.3).

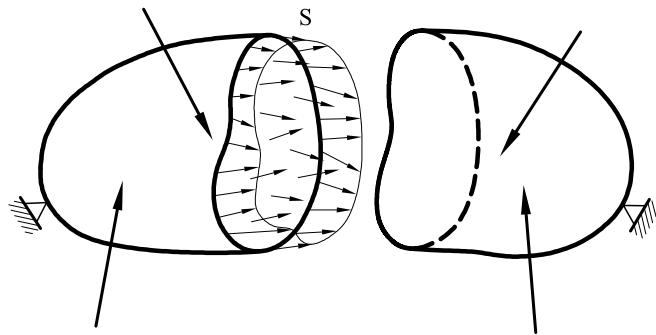


Fig. 1.3 División ideal del cuerpo elástico mediante una superficie cualquiera π

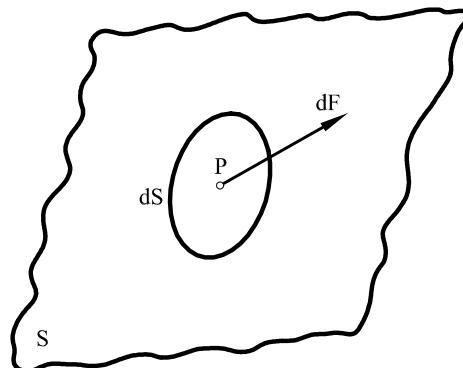


Fig. 1.4 Fuerzas existentes en un entorno de \mathbf{P} situado sobre la superficie S

Es evidente que si se quiere representar adecuadamente la interacción de una parte del cuerpo sobre la otra parte, es preciso introducir en la superficie S unas fuerzas de magnitud y dirección en principio desconocidas y cuya determinación constituye uno de los objetivos del análisis estructural. Considérese un punto cualquiera \mathbf{P} situado sobre

S , así como un entorno de \mathbf{P} situado asimismo sobre S y denominado dS (Fig. 1.4). Sea $d\mathbf{F}$ la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre dS . Al cociente \mathbf{t} entre los diferenciales $d\mathbf{F}$ y dS se le denomina *tensión en \mathbf{P} sobre la superficie S*

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (1.2)$$

El concepto de tensión es fundamental en todo el análisis estructural y a su análisis se dedican los dos apartados siguientes.

1.3 Breve análisis del concepto de tensión

El vector \mathbf{t} definido por la expresión 1.2 tiene en general tres componentes y su dirección no será en general la de la normal a dS , sino que también tendrá una componente en la dirección perpendicular a dicha normal. Sea σ la componente normal a dS y τ la componente tangencial, es decir si \mathbf{N} es el versor normal

$$\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} \quad (1.3a)$$

$$\tau = |\mathbf{t} - \sigma \mathbf{N}| \quad (1.3b)$$

A la tensión σ se le denomina tensión normal y a τ tensión tangencial. Asimismo es conveniente distinguir entre la tensión normal de compresión (si dicha tensión tiende a comprimir el material, es decir, si $\sigma \mathbf{N}$ se dirige hacia el interior del cuerpo) y la tensión normal de tracción (si esta tensión tiende a separar el material, en cuyo caso $\sigma \mathbf{N}$ se dirige hacia el exterior del cuerpo). La distinción entre todas estas tensiones responde al hecho de que se ha comprobado que un mismo material responde de forma distinta a cada una de estas tensiones. Así, por ejemplo, el hormigón resiste muy bien a las compresiones y muy mal a las tracciones, razón por la cual se le pretensa o se le arma dando lugar al hormigón pretensado y al hormigón armado, tan corriente en las construcciones habituales.

El concepto de tensión se ha definido hasta ahora asociado a un determinado punto y a una determinada superficie dS , es decir a un determinado plano dado por \mathbf{N} . Es muy interesante preguntarse si, suponiendo fijo el punto \mathbf{P} y cambiando la orientación de dS , se obtendría la misma tensión. La respuesta es negativa, dependiendo por tanto la tensión del plano de actuación. Un sencillo ejemplo aclarará tan importante concepto.

Supóngase (Fig. 1.5) una pieza de anchura unidad, longitud b , canto a y sometida en sus extremos a unas fuerzas externas de valor p por unidad de superficie. Si se corta la pieza por un plano vertical π_1 cualquiera (Fig. 1.6), por simple equilibrio se puede determinar el valor de las tensiones actuantes \mathbf{t} . En efecto, $|\mathbf{t}_1| = p$, siendo además la tensión normal $\sigma = p$ y la tensión tangencial $\tau = 0$. Evidentemente, la tensión normal σ es de tracción. O sea:

$$|\mathbf{t}_1| = p \quad (1.4)$$

Supóngase seguidamente que la misma pieza se corta por un plano π_2 que forma 60°

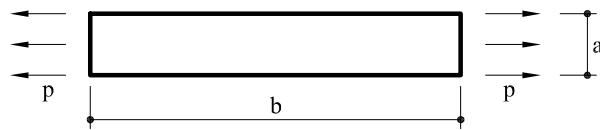


Fig. 1.5 Pieza sometida a un esfuerzo uniforme

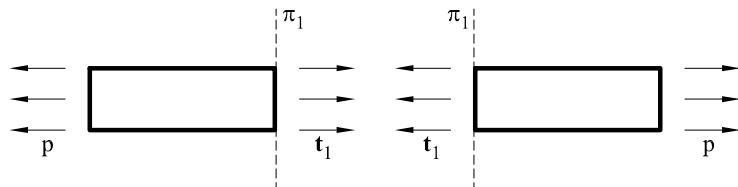


Fig. 1.6 Determinación de las tensiones según un plano vertical en una pieza sometida a un esfuerzo uniforme

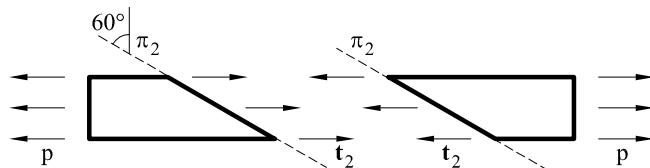


Fig. 1.7 Determinación de las tensiones según un plano que forma 60° con la vertical

con el eje vertical (Fig. 1.7).

Nuevamente, por condiciones de equilibrio, se puede escribir

$$|\mathbf{t}_2| \frac{a}{\cos 60^\circ} \times 1 = p a$$

es decir

$$|\mathbf{t}_2| = p \cos 60^\circ \quad (1.5)$$

Las tensiones normales y tangenciales se obtendrán proyectando el vector \mathbf{t}_2 según el plano π_2 y según la normal a dicho plano (Fig. 1.8).

$$\sigma = |\mathbf{t}_2| \cos 60^\circ = p \cos^2 60^\circ \quad (1.6a)$$

$$\tau = |\mathbf{t}_2| \sin 60^\circ = p \cos 60^\circ \sin 60^\circ \quad (1.6b)$$

Como puede observarse, los resultados obtenidos son muy distintos a los obtenidos anteriormente, cuando se determinaban las tensiones sobre el plano π_1 . Obviamente, para una nueva orientación del plano se obtendrán nuevos valores de las tensiones.

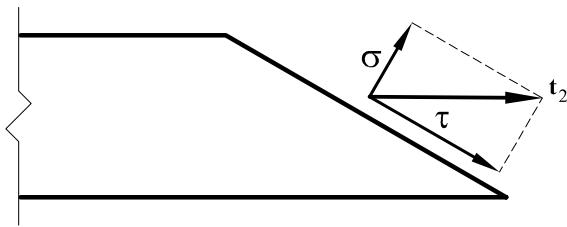


Fig. 1.8 Descomposición del vector tensión en sus componentes normal y tangencial

A partir de los resultados obtenidos, vale la pena preguntarse si es posible determinar las tensiones en un punto y sobre un plano cualquiera, conociendo en dicho punto las tensiones sobre los planos coordenados. La respuesta es afirmativa, aunque para ello es preciso definir previamente el tensor de tensiones.

1.4 El tensor de tensiones

El concepto de tensor de tensiones, uno de los más fructíferos de toda la Mecánica del Medio Continuo, fue introducido por Cauchy en una célebre memoria presentada en 1822.

Para su definición, considérese el entorno de un punto **P** perteneciente a un cuerpo deformable. Considérese asimismo dicho entorno delimitado por los tres planos coordinados $z_1 = \text{constante}$, $z_2 = \text{constante}$, $z_3 = \text{constante}$ (Fig. 1.9). En cada uno de estos planos se tendrá un vector tensión **t**, que, de acuerdo con lo visto anteriormente, será en general distinto. La tensión **t** se puede descomponer en sus componentes normal σ y tangencial τ . Asimismo se descompone también la tensión τ en las dos componentes paralelas a los correspondientes ejes. De esta forma en cada uno de los planos se tendrán tres tensiones: una normal y dos tangenciales, en total nueve valores. Al conjunto ordenado de estas nueve tensiones de acuerdo con la expresión 1.7 se le denomina tensor de tensiones

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Puede demostrarse que efectivamente la expresión definida por 1.7 tiene estructura tensorial.

Por lo que hace referencia a la nomenclatura de las componentes de **T**, se establece como sigue:

- Las componentes normales a los planos coordinados (tensiones normales) se designan por la letra σ con un subíndice. Dicho subíndice indica el plano en el que actúa. Así σ_1 significa la tensión normal que actúa sobre el plano $z_1 = \text{constante}$, y lo mismo para σ_2 y σ_3 .

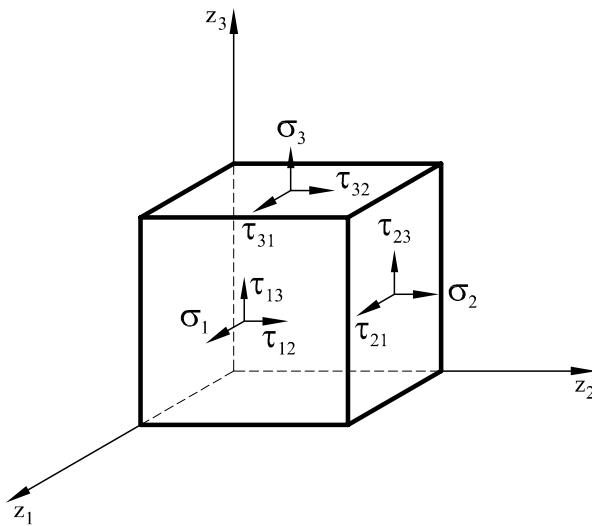


Fig. 1.9 Representación gráfica del tensor de tensiones

- Las componentes contenidas en los planos coordinados (tensiones tangenciales) se designan por la letra τ con dos subíndices. El primero de ellos indica el plano en el cual está situada, y el segundo el eje al cual es paralela. De esta forma, τ_{12} indica la tensión tangencial situada en el plano $z_1 = \text{constante}$ y cuya dirección es la del eje z_2 . Lo mismo puede decirse acerca de las tensiones τ_{21} , τ_{13} , etc.

Vale la pena, llegados a este punto, preguntarse si las componentes del tensor de tensiones son independientes entre sí, o bien, si existe alguna o algunas relaciones entre dichas componentes o entre alguna de sus derivadas. Para responder a esta cuestión debe plantearse el importante concepto del equilibrio tensional.

1.5 Ecuaciones de equilibrio interno

Sea nuevamente el sólido deformable definido previamente. Es evidente que el corte ideal realizado en él a través de la superficie π (Fig. 1.3) es arbitrario. Sin embargo, observando el trozo izquierdo del sólido, las tensiones sobre S , aunque desconocidas, deben ser tales que dicho trozo esté en equilibrio. Lo mismo sucede analizando el trozo derecho. Se puede realizar cualquier otro corte, y lo dicho hasta ahora sería válido. Incluso se podría separar el cuerpo en varias partes, y las tensiones que aparecerían en las respectivas superficies deberían ser tales que cada pieza estuviera en equilibrio.

Se puede por tanto afirmar que:

Dado un sólido deformable sometido a una serie de acciones, debe existir equilibrio en tal sólido como un todo, así como en cada una de sus partes arbitrarias en que idealmente se divida.

Esta condición *nunca debe ser violada*, independientemente de las hipótesis de comportamiento que puedan posteriormente realizarse. Deben cumplirse *siempre*.

Planteando el equilibrio a nivel local se contesta la cuestión planteada en el último párrafo del apartado anterior, demostrando la existencia de tales relaciones.

Considérese nuevamente el entorno del punto \mathbf{P} , pero desde una perspectiva ligeramente distinta, esto es, como formando parte de un continuo deformable en el cual, si en el punto \mathbf{P} de coordenadas (z_1, z_2, z_3) un determinado campo (escalar, vectorial o tensorial) toma el valor de \mathbf{Q} , en otro punto de coordenadas $(z_1 + dz_1, z_2 + dz_2, z_3 + dz_3)$ situado en sus proximidades dicho campo toma el valor $\mathbf{Q} + (\partial\mathbf{Q}/\partial z_1) dz_1 + (\partial\mathbf{Q}/\partial z_2) dz_2 + (\partial\mathbf{Q}/\partial z_3) dz_3$.

Se define un elemento diferencial de volumen, dV , al cual se le delimita sin pérdida de generalidad por los planos $z_1 = 0$; $z_1 = dz_1$; $z_2 = 0$; $z_2 = dz_2$; $z_3 = 0$; $z_3 = dz_3$ (Fig. 1.10).

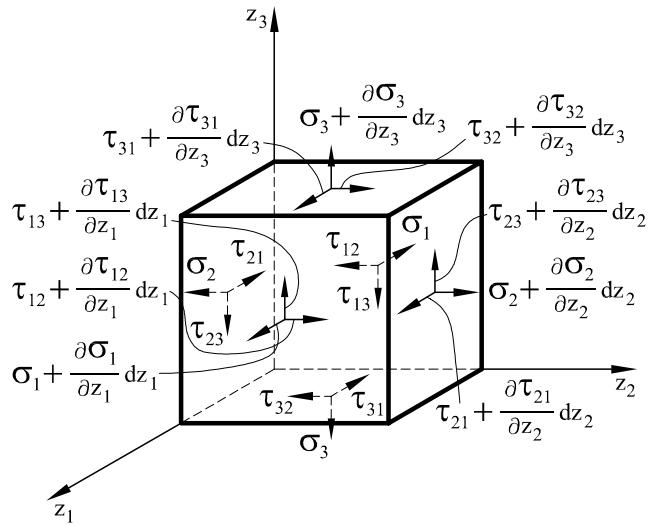


Fig. 1.10 Variación diferencial de las tensiones

Si en el plano $z_1 = 0$ se tienen las tensiones $\sigma_1, \tau_{12}, \tau_{13}$, en el plano $z_1 = dz_1$ se tendrán $\sigma_1 + (\partial\sigma_1/\partial z_1)dz_1, \tau_{12} + (\partial\tau_{12}/\partial z_1)dz_1, \tau_{13} + (\partial\tau_{13}/\partial z_1)dz_1$. Análogamente si para $z_2 = 0$ las tensiones son $\sigma_2, \tau_{21}, \tau_{23}$, para el plano $z_2 = dz_2$ su valor será $\sigma_2 + (\partial\sigma_2/\partial z_2)dz_2, \tau_{21} + (\partial\tau_{21}/\partial z_2)dz_2, \tau_{23} + (\partial\tau_{23}/\partial z_2)dz_2$. De la misma manera, si para $z_3 = 0$ se tiene $\sigma_3, \tau_{31}, \tau_{32}$, para $z_3 = dz_3$ las tensiones valdrán $\sigma_3 + (\partial\sigma_3/\partial z_3)dz_3, \tau_{31} + (\partial\tau_{31}/\partial z_3)dz_3, \tau_{32} + (\partial\tau_{32}/\partial z_3)dz_3$.

Se supondrá asimismo que en dicho elemento de volumen actúan unas fuerzas por unidad de volumen cuyas componentes, según cada uno de los tres ejes coordenados, valen b_1, b_2 y b_3 . Se está ya en condiciones de plantearse el equilibrio de este elemento diferencial. Para ello, se impondrá:

- Suma de fuerzas según cada uno de los tres ejes coordenados igual a cero.

- Suma de momentos según tres ejes paralelos a los ejes coordenados igual a cero.

Es decir:

$$\begin{aligned} \sum F_1 = 0 : & \left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial z_1} dz_1 \right) dz_2 dz_3 - \sigma_1 dz_2 dz_3 \\ & + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial z_2} dz_2 \right) dz_1 dz_3 - \tau_{21} dz_1 dz_3 \\ & + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z_3} dz_3 \right) dz_1 dz_2 - \tau_{31} dz_1 dz_2 + b_1 dz_1 dz_2 dz_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

y simplificando términos

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial z_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z_3} + b_1 = 0 \quad (1.9a)$$

Análogamente, para los ejes z_2 y z_3 , se tendrá

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial z_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z_3} + b_2 = 0 \quad (1.9b)$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial z_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z_3} + b_3 = 0 \quad (1.9c)$$

Las ecuaciones 1.9 son conocidas con el nombre de *ecuaciones de equilibrio interno* y expresan las relaciones diferenciales entre las componentes del tensor de tensiones debido al equilibrio local de fuerzas.

Por lo que respecta al equilibrio de momentos, en primer lugar se anula la suma de momentos respecto a un eje que pasa por los centros de los rectángulos situados en $z_1 = 0$ y en $z_1 = dz_1$

$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0 : & \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z_3} dz_3 \right) dz_1 dz_2 \frac{dz_3}{2} + \tau_{32} dz_1 dz_2 \frac{dz_3}{2} \\ & - \left(\tau_{23} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z_2} dz_2 \right) dz_1 dz_3 \frac{dz_2}{2} - \tau_{23} dz_1 dz_3 \frac{dz_2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Simplificando términos y despreciando infinitésimos de orden superior se tiene

$$\tau_{32} = \tau_{23} \quad (1.11a)$$

Análogamente, tomando momentos respecto a los ejes paralelos a los otros dos ejes coordinados

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (1.11b)$$

$$\tau_{13} = \tau_{31} \quad (1.11c)$$

Las expresiones 1.11 indican que el tensor de tensiones es simétrico.

El conjunto de ecuaciones 1.9 puede asimismo ser visto como un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cuyas incógnitas son las seis componentes distintas del tensor de tensiones. Tal sistema de ecuaciones diferenciales no es suficiente para determinar el tensor de tensiones, puesto que existen 6 incógnitas y 3 ecuaciones. Es preciso, por tanto, aparte de las condiciones de equilibrio, imponer otro tipo de condiciones adicionales para poder resolver el problema. Al enunciado de tales condiciones se dedica el apartado 1.7.

1.6 Tensiones sobre un plano cualquiera

Tal como se ha apuntado anteriormente, el concepto de tensión en un punto sólo tiene sentido si se hace referencia a la tensión sobre un cierto plano, o bien, al tensor de tensiones. Nótese que el tensor de tensiones está de hecho formado por las tensiones en un punto sobre tres planos ortogonales entre sí.

Se plantea a continuación el problema de determinar las tensiones en un punto sobre un plano cualquiera, suponiendo conocido en dicho punto el tensor de tensiones. Para ello, supóngase un campo de tensiones uniforme y sea π el plano sobre el cual se quiere determinar la tensión. Dicho plano vendrá dado por sus tres cosenos directores, n_1, n_2, n_3 , de forma que el versor normal \mathbf{N} vendrá dado por

$$\mathbf{N}^T = [n_1, n_2, n_3]$$

Sea \mathbf{t} , de componentes

$$\mathbf{t}^T = [t_1, t_2, t_3]$$

la tensión sobre el plano π (Fig. 1.11).

Para determinar las componentes de la tensión \mathbf{t} se realiza el equilibrio de fuerzas sobre cada uno de los ejes z_1, z_2, z_3 . Para ello:

$$\begin{aligned} \sum F_i &= 0 : \\ &- \sigma_1 \cdot \text{Area}(PCB) - \tau_{21} \cdot \text{Area}(PAC) - \tau_{31} \cdot \text{Area}(PAB) \\ &+ t_1 \cdot \text{Area}(ABC) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Si se tiene en cuenta que

$$\frac{\text{Area}(PCB)}{\text{Area}(ABC)} = n_1$$

$$\frac{\text{Area}(PAC)}{\text{Area}(ABC)} = n_2$$

$$\frac{\text{Area}(PAB)}{\text{Area}(ABC)} = n_3$$

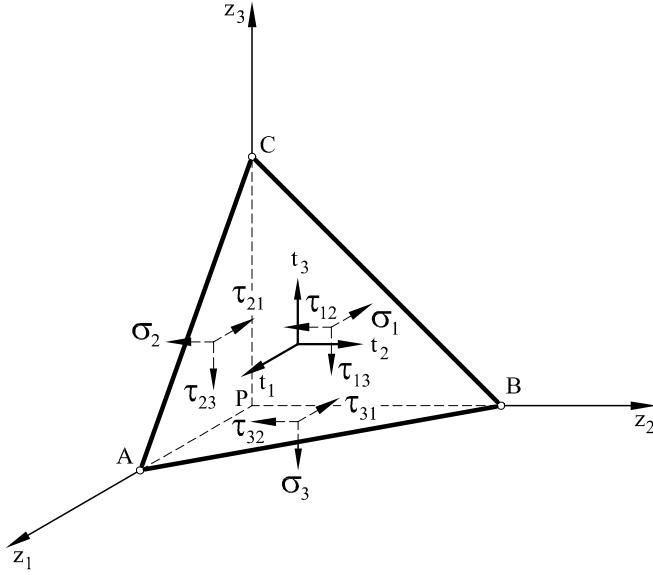


Fig. 1.11 Tensiones sobre un plano cualquiera

la expresión 1.12 puede escribirse

$$t_1 = \sigma_1 n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 \quad (1.13a)$$

Análogamente, para las otras dos componentes

$$t_2 = \tau_{12} n_1 + \sigma_2 n_2 + \tau_{32} n_3 \quad (1.13b)$$

$$t_3 = \tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \sigma_3 n_3 \quad (1.13c)$$

y expresando las relaciones 1.13 de forma matricial

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{N} \quad (1.14)$$

siendo \mathbf{T} el tensor de tensiones definido por 1.7.

Para obtener la tensión normal sobre el plano π , basta con proyectar la tensión \mathbf{t} sobre el versor normal \mathbf{N} :

$$\sigma = \mathbf{N}^T \mathbf{t} = \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} \quad (1.15)$$

Asimismo, la componente tangencial τ

$$\tau^2 = |\mathbf{t}|^2 - \sigma^2 \quad (1.16)$$

o bien

$$\tau^2 = \mathbf{t}^T \mathbf{t} - (\mathbf{N}^T \mathbf{t})^2 \quad (1.17)$$

que proporciona el valor de la tensión tangencial.

Es muy importante notar desde ahora que el equilibrio debe realizarse siempre entre las fuerzas existentes y nunca exclusivamente entre las tensiones sin tener en cuenta las superficies sobre las que actúan.

1.7 Condiciones cinemáticas

En el apartado 1.5, cuando se estudiaban las condiciones de equilibrio, se ha visto que en general éstas no son suficientes para determinar el tensor de tensiones. Puede haber, sin embargo, casos particulares en que, debido a la peculiar estructura de dicho tensor, las mencionadas condiciones de equilibrio puedan ser suficientes para su completa determinación. Tal sucede con el ejemplo desarrollado en las expresiones 1.4 a 1.6. No obstante, no son casos parecidos a éstos los más corrientes, por lo que es preciso desarrollar nuevos conceptos que fundamentarán a su vez todo un conjunto de herramientas que posibiliten la resolución de los problemas con los que se enfrente el ingeniero estructural.

Se ha hecho hincapié hasta ahora en el concepto de sólido deformable sin que se haya sacado partido alguno a su utilidad. Ello se realiza seguidamente.

Para ello, observése nuevamente el sólido de la figura 1.1, al cual se le ha dado un corte ideal a través de una superficie π cualquiera (Fig. 1.3). Recuérdese que S es la parte de π que pertenece al sólido. Supóngase seguidamente que las tensiones que se colocan (en principio de forma arbitraria) cumplen dos condiciones:

- Existe equilibrio.
- Cada una de las partes del cuerpo tendrá unos movimientos (con lo visto hasta ahora, no se dispone todavía herramientas suficientes para determinarlos) $\mathbf{u}(z_1, z_2, z_3)$. Supóngase que estos movimientos son tales que cumplen con las condiciones de sustentación (condiciones de contorno de movimientos) y hacen que las dos partes del cuerpo *encajen* mediante la superficie S . Es decir, que los movimientos de S sean los mismos en ambas partes del cuerpo.

Es evidente entonces que las tensiones \mathbf{t} , que de forma en principio arbitraria se han introducido en S , son solución del problema.²

Se ha definido, por tanto, un nuevo concepto de utilidad fundamental en la resolución del problema planteado: la compatibilidad cinemática de movimientos. De esta forma se puede establecer:

Dado un sólido deformable sometido a una serie de acciones, las tensiones que dentro de él se produzcan deben ser tales que exista en todo él, así como en su contorno, compatibilidad cinemática de movimientos.

Sin embargo, es obvio que con lo visto hasta ahora estos movimientos no pueden todavía determinarse. Para ello se necesita alguna hipótesis acerca del comportamiento

²El que estas tensiones sean solución del problema no significa que tal solución deba ser única. El problema de la unicidad de dicha solución será tratado más adelante.

del material que permita relacionar tensiones con movimientos. Tal relación vendrá a través de las deformaciones que pasan a definirse seguidamente.

1.8 Análisis de las deformaciones

A poco que se intente definir una relación *directa* (entendiendo por tal una relación algebraica) entre tensiones y movimientos, se observa que las dificultades que aparecen hacen que la existencia de tal relación sea físicamente imposible. En efecto, el sentido común ya indica que de tal hipotética relación se tendrían que quitar los movimientos de sólido rígido, pues tales movimientos no inducen ningún tipo de tensiones. Asimismo, imagínese una barra de sección constante sometida a un estado de tracción uniforme (Fig. 1.5). Es obvio que los movimientos serán variables de punto a punto, siendo asimismo mayores cuanto mayor sea la longitud de la barra. Sin embargo, las tensiones (o, hablando con mayor precisión, el tensor de tensiones) son uniformes y no varían al variar la barra de longitud.

Es preciso, por tanto, determinar unas magnitudes derivadas de los movimientos que por sus propias características o propiedades puedan ponerse en relación directa con las tensiones.³ Tales magnitudes son conocidas con el nombre de deformaciones, y a ellas, así como a su relación con los movimientos, se dedica el presente apartado.

Para la definición y formulación de las deformaciones, se realizará en primer lugar un análisis plano. Posteriormente se generalizarán a tres dimensiones los resultados obtenidos en dos. Considérese (Fig. 1.12) un elemento diferencial de sólido dS de dimensiones dz_1 y dz_2 . Sean A, B, C y D los vértices del mencionado rectángulo diferencial antes de la deformación, y las mismas letras pero con *prima* los correspondientes vértices del cuadrilátero en que se transformará dicho rectángulo por efecto de la propia deformación. Si las coordenadas del punto A son (z_1, z_2) las de los otros puntos serán:

$$A : (z_1, z_2) \quad (1.18a)$$

$$B : (z_1 + dz_1, z_2) \quad (1.18b)$$

$$C : (z_1, z_2 + dz_2) \quad (1.18c)$$

$$D : (z_1 + dz_1, z_2 + dz_2) \quad (1.18d)$$

Si \mathbf{u} es el vector cuyas componentes son los movimientos del punto A , los movimientos de todos los puntos serán:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_1} dz_1$$

³Dicha relación puede, en general, establecerse en forma total o en forma diferencial, dependiendo del comportamiento del material. En lo que sigue se considera únicamente el primer caso (ver apartado 1.9).

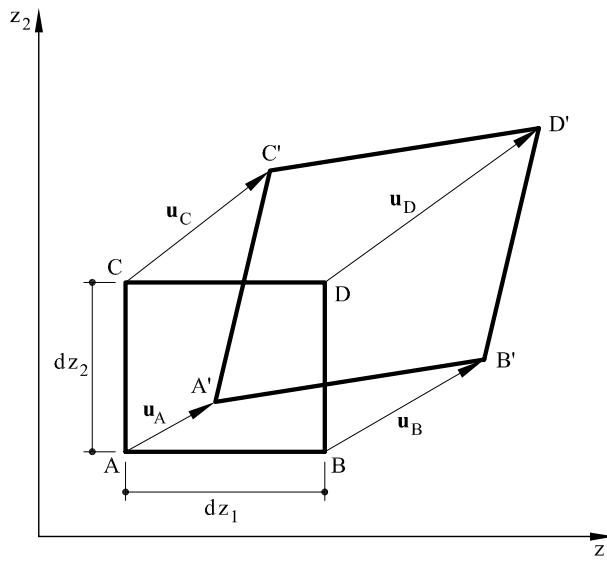


Fig. 1.12 Deformación de un elemento rectangular diferencial

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_C &= \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_2} dz_2 \\ \mathbf{u}_D &= \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z_2} dz_2\end{aligned}$$

Por lo que las coordenadas de los nuevos vértices serán:

$$A' : (z_1, z_2) + (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2) \quad (1.19a)$$

$$\begin{aligned}B' : (z_1 + dz_1, z_2) + \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} dz_1, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1 \right) \\ = \left[z_1 + u_1 + \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) dz_1, z_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1 \right] \quad (1.19b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C' : (z_1, z_2 + dz_2) + \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2} dz_2, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z_2} dz_2 \right) \\ = \left[z_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2} dz_2, z_2 + u_2 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \right) dz_2 \right] \quad (1.19c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D' : (z_1 + dz_1, z_2 + dz_2) + \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2} dz_2, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_2} dz_2 \right) \\ = \left[z_1 + u_1 + \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \right) dz_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_2} dz_2, z_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1 + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \right) dz_2 \right] \quad (1.19d)\end{aligned}$$

En la figura 1.13 pueden verse representadas geométricamente las componentes de los términos que intervienen en las expresiones anteriores. Su análisis es útil desde un punto de vista conceptual.

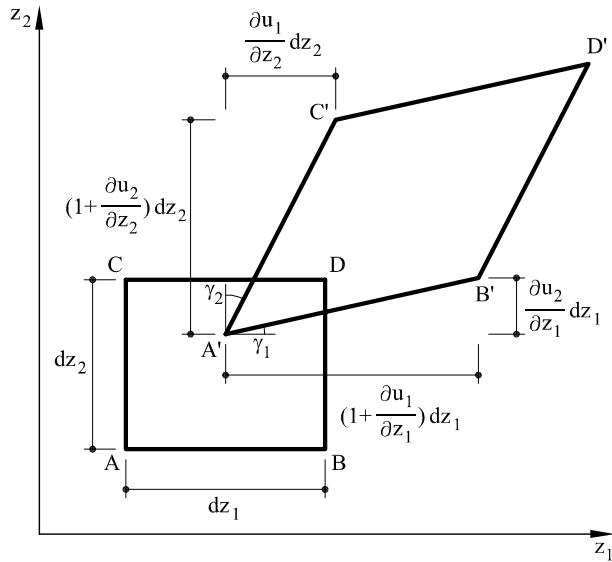


Fig. 1.13 Componentes de la deformación en un elemento rectangular diferencial

En la mencionada figura 1.12 se puede observar que la deformación del rectángulo diferencial produce dos tipos de efectos:

- Variación de la longitud de sus lados
- Variación de sus ángulos originariamente rectos

En consecuencia se definen dos tipos de deformaciones:

- Deformación longitudinal definida como incremento unitario de longitud en una dirección determinada. Concretamente para las direcciones z_1 y z_2 se tendrá las deformaciones longitudinales ε_1 y ε_2 .
- Deformación tangencial, la cual se define como el cambio de valor que, como consecuencia de la deformación, experimenta un ángulo originariamente recto. Se designa por la letra γ y para el caso contemplado en la figura 1.13 valdría para el punto A

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \widehat{C'A'B'}$$

De las definiciones dadas se deduce que para un punto cualquiera A se tendrá

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$$

Dado que se trabaja de acuerdo con las hipótesis realizadas en pequeños movimientos, se puede aproximar $\overline{A'B'}$ por su proyección sobre el eje⁴ z_1

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{AB} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right) dz_1 - dz_1}{dz_1} = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \quad (1.20a)$$

Análogamente, para ε_2

$$\varepsilon_2 = \frac{\overline{A'C'} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_2}\right) dz_2 - dz_2}{dz_2} = \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \quad (1.20b)$$

Por lo que hace referencia a la deformación tangencial y a partir de la definición que de ella se ha dado (ver Fig. 1.13):

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - C'\widehat{A'B'} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial z_2} dz_2}{\left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial z_2}\right) dz_2} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial z_1} dz_1}{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right) dz_1} \simeq \frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} \quad (1.20c)$$

Las expresiones 1.20 expresan la relación entre deformaciones y movimientos. Para el caso general tridimensional, se tendrán tres deformaciones longitudinales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ y tres deformaciones tangenciales $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$, cuyas expresiones en función de los desplazamientos valen

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \quad (1.21a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \quad (1.21b)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \quad (1.21c)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} \quad (1.21d)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z_3} + \frac{\partial u_3}{\partial z_1} \quad (1.21e)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z_3} + \frac{\partial u_3}{\partial z_2} \quad (1.21f)$$

La deducción más general en 3D de las expresiones anteriores puede consultarse en un texto de Mecánica del Medio Continuo.

Al igual que las tensiones, puede demostrarse que las deformaciones tienen estructura

⁴Se invita al lector a llegar a esta aproximación mediante un planteamiento más riguroso, determinando a partir de las expresiones 1.18 y 1.19 la verdadera longitud de $\overline{A'B'}$ y despreciando términos de orden superior.

tensorial, por lo que tiene sentido hablar del tensor de deformaciones

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Antes de cerrar este apartado, es útil hacer algunas consideraciones acerca de las deformaciones tanto longitudinales como tangenciales.

En primer lugar, nótese que la deformación longitudinal es extensiva a cualquier dirección que se elija, es decir que se puede definir la deformación longitudinal según una dirección **N** como el incremento unitario de longitud que experimenta un elemento diferencial de longitud situado en la dirección **N** (ver Fig. 1.14), es decir:

$$\varepsilon_N = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{AB}$$

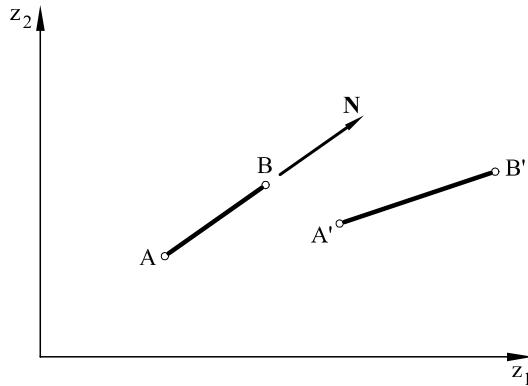


Fig. 1.14 Deformación de un elemento diferencial de longitud en la dirección **N**

Asimismo, las deformaciones tangenciales vendrían asociadas a la dirección **N** y a su perpendicular. Matemáticamente, su determinación consiste en un cambio de ejes de referencia en el tensor definido por la expresión (1.22).

En segundo lugar, es muy interesante distinguir en el distinto carácter de las deformaciones longitudinales y de las deformaciones tangenciales. Para ello, supóngase un cuerpo rectangular (Fig. 1.15) en el que idealmente se dibuja en su interior una malla arbitraria también rectangular. Si después de la deformación los rectángulos se han transformado en otros rectángulos cuyos lados tienen distintas longitudes, pero cuyos ángulos siguen siendo rectos, sólo existen deformaciones longitudinales. Por el contrario, si después de la deformación todos los lados son iguales que antes, pero sus ángulos han dejado de ser rectos, se está en presencia de deformaciones tangenciales (Fig. 1.16).

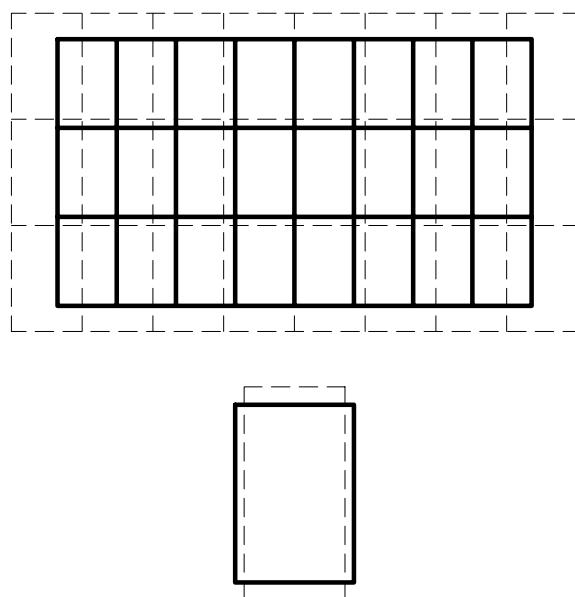


Fig. 1.15 Deformaciones longitudinales

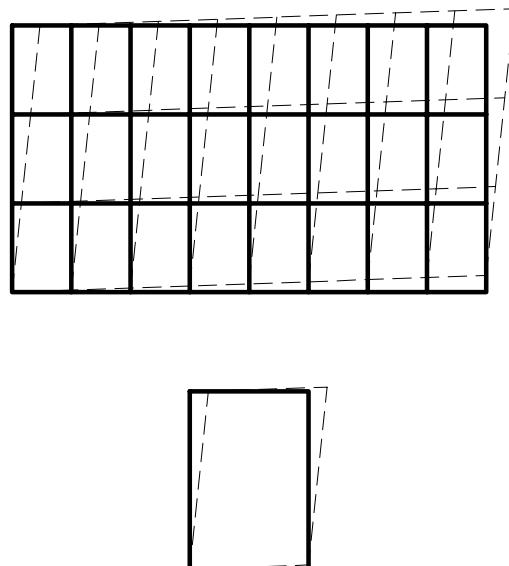


Fig. 1.16 Deformaciones tangenciales

En tercer lugar, es conveniente insistir en que el tensor de deformaciones se define con respecto a tres planos en el espacio tridimensional (dos cuando se está situado en el plano). Ello significa que respecto a unos determinados planos es posible que sólo existan deformaciones longitudinales mientras, que respecto a otros pueden coexistir deformaciones longitudinales y tangenciales.

Para profundizar más en el estudio de las deformaciones, nótese que si en un sólido elástico es conocido el campo de movimientos, a través de las expresiones 1.21 se determina el campo de deformaciones. Supóngase, sin embargo, que es conocido el campo de deformaciones y se quiere obtener el de movimientos. Las ecuaciones 1.21 representan entonces un sistema de seis ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con únicamente tres incógnitas. Ello indica que las deformaciones no son independientes, sino que están ligadas entre sí mediante una serie de ecuaciones, conocidas con el nombre de *ecuaciones de compatibilidad*. Dichas ecuaciones proceden de la eliminación de los movimientos en las ecuaciones 1.21. Su expresión es:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial z_1 \partial z_2} \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial z_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial z_2 \partial z_3} \quad (1.23b)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z_3^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial z_1 \partial z_3} \quad (1.23c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z_2 \partial z_3} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z_3} \right) \quad (1.23d)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z_1 \partial z_3} = \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z_3} \right) \quad (1.23e)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z_3} \right) \quad (1.23f)$$

conocidas, como se ha dicho, como ecuaciones de *compatibilidad de deformaciones*.

1.9 Relación tensión-deformación. Ley de Hooke

Se está ya en condiciones de establecer el tercero de los pilares básicos del Cálculo de Estructuras. Se ha estudiado hasta ahora el concepto de tensión asociándolo inmediatamente al equilibrio. En el apartado anterior se han definido las deformaciones (o, hablando con mayor propiedad, el tensor de deformaciones) asociándolas a su vez a la cinemática de la deformación. En este apartado se establecerá una relación entre ambos tensores que permitirá completar la formulación del problema fundamental del Cálculo de Estructuras: la determinación de las tensiones y movimientos a partir de las características del material y de las acciones existentes en el cuerpo.

Tal relación es característica del tipo de material, de tal forma que a las relaciones entre \mathbf{T} y $\boldsymbol{\Lambda}$ (bien en forma total o diferencial) se las denomina ecuaciones de compor-

tamiento del material o ecuaciones constitutivas. Dichas ecuaciones deben cumplir una serie de relaciones termodinámicas y estar de acuerdo con los datos aportados por la experimentación, constituyendo en la actualidad un campo de trabajo e investigación muy importante. En Elasticidad Lineal se postula una relación lineal entre tensiones y deformaciones, conocida como ley de Hooke, la cual se expresa:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{C}\mathbf{T} \quad (1.24)$$

en donde \mathbf{C} es el tensor de elasticidad. Bajo las hipótesis de isotropía y teniendo en cuenta la simetría de $\boldsymbol{\Lambda}$ y de \mathbf{T} , la relación 1.24 puede escribirse:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (1.25a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \quad (1.25b)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (1.25c)$$

$$\gamma_{12} = \tau_{12}/G \quad (1.25d)$$

$$\gamma_{13} = \tau_{13}/G \quad (1.25e)$$

$$\gamma_{23} = \tau_{23}/G \quad (1.25f)$$

Las expresiones 1.25 constituyen la forma más habitual de la ley de Hooke para materiales estructurales. En adelante se va a suponer que los materiales con los que se va a tratar se ajustan a ellas. En dichas expresiones aparecen tres constantes E , ν y G , de las cuales se demostrará más adelante que solamente dos son independientes. Estas constantes definen el material y constituyen un dato cuyo valor es proporcionado por la experimentación. Estas tres constantes son de importancia fundamental en toda la Resistencia de Materiales, pudiéndose afirmar:

Existe una relación lineal entre las tensiones y las deformaciones, viniendo dada dicha relación por la ley de Hooke

A la constante E se la denomina módulo de elasticidad del material. También es conocido con el nombre de módulo de Young. Sus unidades son las mismas que la tensión, es decir fuerza dividido por superficie. En la tabla 1.1 puede verse el valor que toma para algunos materiales. Para comprender mejor su significado, supóngase una barra recta de longitud L y sección recta A (Fig. 1.17), en la que actúa una fuerza de tracción F . Si F actúa en el centro de gravedad de la sección se verá en el Capítulo 3 que la distribución de tensiones que se produce en la sección recta es uniforme y de valor

$$\sigma = F/A$$

Si se hace coincidir el eje z_1 con el eje de la barra, se tendrá que

$$\sigma_1 = \sigma = F/A \quad (1.26a)$$

Acero	$E = 210 \text{ GPa}$
Hormigón	$E = 30 \text{ GPa}$
Aluminio	$E = 70 \text{ GPa}$
Vidrio	$E = 66 \text{ GPa}$
Bronce	$E = 106 \text{ GPa}$
Latón	$E = 92 \text{ GPa}$

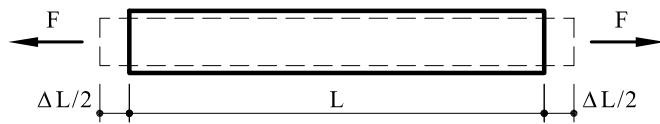
Tabla 1.1 Valor del módulo de elasticidad E para algunos materiales.

Fig. 1.17 Deformación de una barra recta

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \quad (1.26b)$$

Si la barra experimenta un incremento de longitud ΔL , la deformación ε_1 valdrá

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} \quad (1.27)$$

por lo que, de acuerdo con 1.25a, se tendrá

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{\sigma}{\Delta L/L} \quad (1.28)$$

Cuanto mayor sea el valor de E , más rígido es el material, por cuanto, de acuerdo con 1.28, el incremento de longitud ΔL es menor.

Por lo que respecta a la constante ν , es conocida con el nombre de módulo de Poisson y puede demostrarse que su valor debe ser inferior a 0,5, oscilando generalmente entre 0,12 y 0,30. Para aproximarse mejor a su significado físico, obsérvese la figura 1.18, en que un elemento rectangular de longitud L , altura unidad y anchura también unidad está sometido a una tensión de tracción $\sigma_1 = \sigma$. Se puede ver que, además de un alargamiento longitudinal ΔL , tiene una contracción lateral (en la Fig. 1.18) en sentido vertical de valor total δ . De acuerdo con 1.25b

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_1) = -\frac{\nu}{E}\sigma \quad (1.29)$$

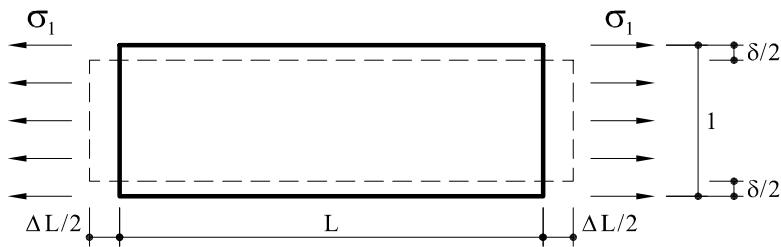


Fig. 1.18 Elemento rectangular sometido a una tensión σ_1

Si se tiene en cuenta que, de acuerdo con 1.25a

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} \quad (1.30)$$

se tendrá

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\nu \quad (1.31)$$

expresión que indica claramente el significado físico del módulo de Poisson.

Por lo que hace referencia a la tercera de las constantes introducidas en las ecuaciones 1.25, la constante G , es conocida con el nombre de *módulo de Elasticidad transversal* y relaciona las tensiones cortantes con las deformaciones tangenciales. Su valor no es independiente de E y de ν , sino que es función de ambos. Para demostrarlo, supóngase una pieza cuadrada de lado unidad con un estado de tensión uniforme (Fig. 1.19).

Sobre los planos verticales actúa una tensión de compresión σ_1 de módulo $|\sigma_1| = \sigma$ de módulo igual a σ .

De acuerdo con 1.13 y teniendo en cuenta que para el plano BC , inclinado 45° , el vector normal vale $\mathbf{N}^T = [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, la tensión en dicho plano inclinado 45° valdrá:

$$t_1 = -\sigma \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_2 = \sigma \frac{\sqrt{2}}{2}$$

con lo que a partir de 1.15

$$\sigma_N = \mathbf{N}^T \mathbf{t} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \left[\begin{array}{c} -\sigma \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sigma \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] = 0$$

$$\tau = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} = \sigma$$

Análogamente, si $\mathbf{N}^T = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, es decir, para el plano AB

$$t_1 = \sigma \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_2 = -\sigma \frac{\sqrt{2}}{2}$$

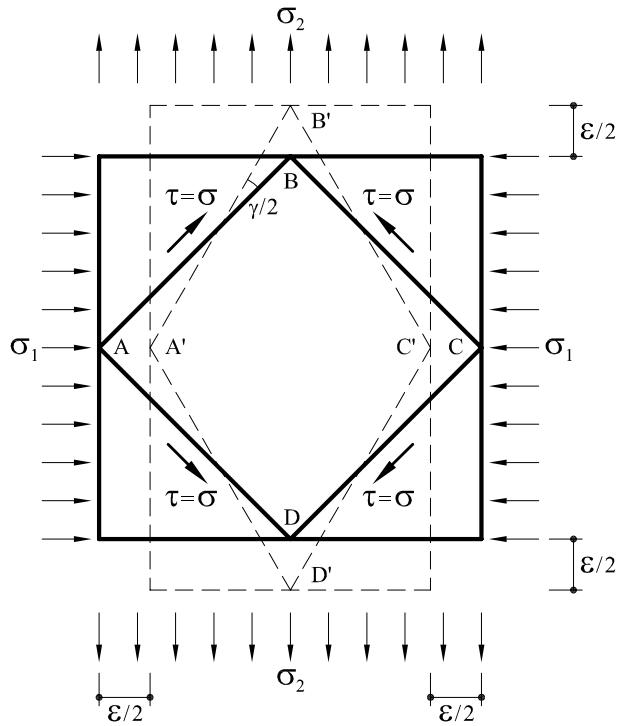


Fig. 1.19 Pieza cuadrada sometida a un estado de tensión uniforme

$$\begin{aligned}\sigma_N &= \mathbf{N}^T \mathbf{t} = 0 \\ \tau &= \sigma\end{aligned}$$

Es decir, que si se considera el cuadrado $ABCD$, inscrito en el primer cuadrado y cuyos lados forman 45° , en él solo actúan las tensiones tangenciales dibujadas en la figura 1.19, y de valor σ .

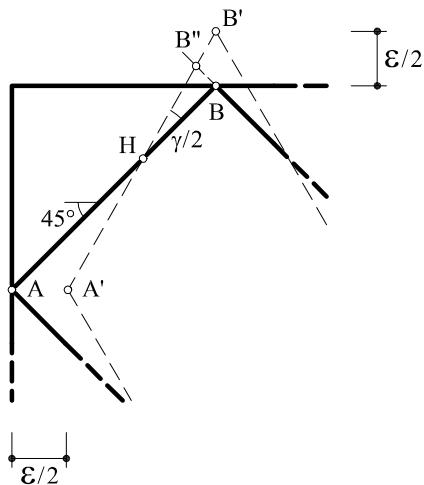
En consecuencia, la deformación dibujada puede ser vista como la deformada del cuadrado exterior debida a las tensiones σ_1, σ_2 , o bien, como la deformada del cuadrado interior debida a las tensiones τ . En el primer caso, los movimientos se calcularán a partir de las expresiones 1.25a a 1.25c, mientras que en el segundo será a partir de 1.25d a 1.25f.

Considerando el cuadrado exterior, se tendrá:

$$\overline{BB'} + \overline{DD'} = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu \sigma_1] = \frac{1}{E} (\sigma + \nu \sigma) = \frac{\sigma}{E} (1 + \nu) \quad (1.32)$$

Considerando el cuadrado interior, se tiene (Fig. 1.20)

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BB'} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4} \sqrt{2}} = 2 \cdot \overline{BB'} = 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (1.33)$$

Fig. 1.20 Cálculo de γ en función de ε

Es decir,

$$\gamma = 2\varepsilon = \frac{2\sigma}{E}(1 + \nu) \quad (1.34)$$

Por otra parte, de acuerdo con 1.25d se tiene

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{G} \quad (1.35)$$

Igualando las expresiones 1.34 y 1.35, se obtiene finalmente

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.36)$$

expresión que relaciona el módulo de elasticidad transversal con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

Por otra parte, si se invierten las expresiones 1.25, se obtienen las tensiones en función de las deformaciones

$$\sigma_1 = \lambda e + 2G\varepsilon_1 \quad (1.37a)$$

$$\sigma_2 = \lambda e + 2G\varepsilon_2 \quad (1.37b)$$

$$\sigma_3 = \lambda e + 2G\varepsilon_3 \quad (1.37c)$$

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} \quad (1.37d)$$

$$\tau_{13} = G\gamma_{13} \quad (1.37e)$$

$$\tau_{23} = G\gamma_{23} \quad (1.37f)$$

siendo

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Las anteriores expresiones se denominan *ecuaciones de Lamé*.

Para concluir con este apartado, es útil analizar el comportamiento real de los materiales y su relación con la ley de Hooke. Se estudiarán concretamente el acero y el hormigón por ser dichos materiales los más utilizados en la construcción. Supóngase en primer lugar que una probeta de acero de longitud L y sección A se somete a un ensayo de tracción (Fig. 1.21) mediante la aplicación gradual de una fuerza F . Si se está en un caso de tracción pura las tensiones valdrán

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1.38)$$

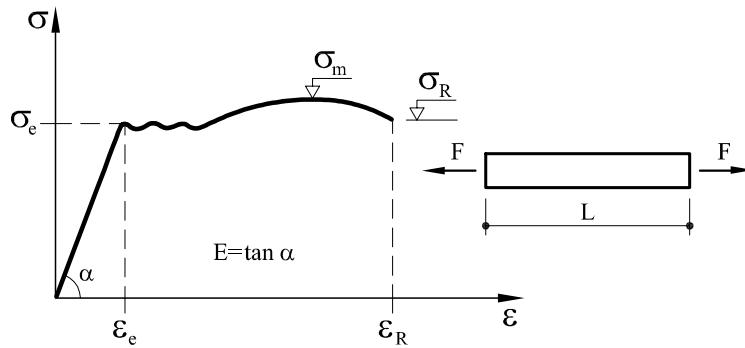


Fig. 1.21 Ensayo de tracción (acero)

Al mismo tiempo que se aplica F , se producen unos incrementos de longitud ΔL y unas deformaciones longitudinales de valor $\varepsilon = \Delta L/L$. Si en unos ejes cartesianos se representan en ordenadas la tensión y en abcisas la deformación, se obtiene la curva dibujada en la figura 1.21. Se distinguen claramente tres zonas. La primera de ellas comprende la zona limitada por el punto de tensión y deformación nulas y el punto $(\varepsilon_e, \sigma_e)$. Esta es la zona propiamente elástica, en donde existe proporcionalidad entre la tensión y la deformación longitudinales. De acuerdo con 1.25a, se tendrá que $E = \sigma/\varepsilon = \tan \alpha$. Al valor de σ_e se le denomina límite elástico. En segundo lugar, se puede observar una zona en que, sin prácticamente aumento de tensión, se produce un incremento notorio de las deformaciones. Aparece, en tercer lugar, una zona en que primeramente se produce un endurecimiento por deformación hasta llegar a la tensión máxima σ_m y, posteriormente, un ablandamiento hasta llegar a la deformación de rotura ε_R a la cual le corresponde una tensión σ_R . Se observa, por tanto, que únicamente en la primera zona se cumple la ley de Hooke, mientras que en las zonas segunda y tercera tiene lugar el fenómeno conocido con el nombre de plasticidad. De hecho, estas dos

últimas zonas constituyen una reserva de resistencia que la teoría de Resistencia de Materiales no tiene en cuenta.

Por lo que respecta al comportamiento del hormigón a compresión, supóngase ahora una probeta de hormigón de longitud L y sección A que, al igual que antes, se somete de forma gradual a una fuerza F de compresión (Fig. 1.22) y nuevamente se dibuja el diagrama tensión-deformación. El comportamiento es elástico hasta el valor σ_e , el cual resulta ser del orden del 40% de la tensión de rotura σ_m . A partir de σ_e el comportamiento ya no resulta elástico, por lo que no se cumplirá estrictamente la ley de Hooke.

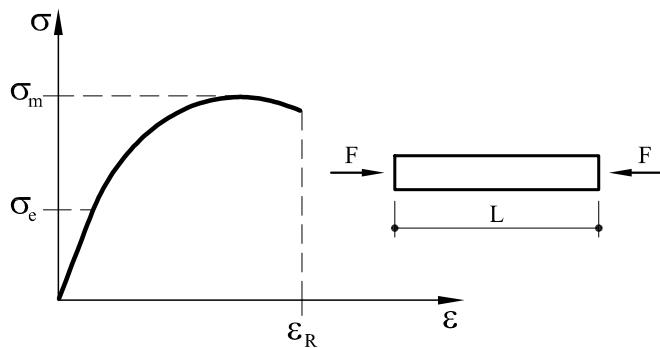


Fig. 1.22 Ensayo de compresión en el hormigón

Sin embargo, y a pesar de lo apuntado, la gran mayoría de estructuras de hormigón se calculan mediante un análisis elástico en que se admite como buena aproximación la ley de Hooke. Ello es debido a varias razones. En primer lugar, el valor de la tensión de rotura se minora por un coeficiente de seguridad del orden de 1,5; al mismo tiempo las cargas se mayoran a su vez por otro factor también del orden de 1,5. Si a ello se añade que las cargas rara vez alcanzan su valor máximo, el comportamiento del hormigón a compresión es, en servicio, prácticamente elástico (el comportamiento a tracción es más complejo y no se entra ahora en él). Además el cálculo elástico es más rápido y cómodo que el anelástico, y sobre él existe una enorme experiencia acumulada mediante la cual se sabe que el análisis elástico proporciona, en general, buenos resultados. Por todo ello la ley de Hooke se admite en la gran mayoría de los casos como una aproximación aceptable.

1.10 Condiciones en la superficie del sólido

El tratamiento del contorno (o contornos) del sólido reviste una considerable importancia en el Cálculo Estructural. Desde un punto de vista matemático, por cuanto dará las condiciones de contorno a aplicar a las diferentes ecuaciones que rigen el problema. Desde una perspectiva más física, el contorno representa aquella superficie en la cual se aplican buena parte de las cargas externas actuantes y cuyas tensiones en el interior del cuerpo debidas a las mismas interesa determinar. Asimismo en los contornos

se encuentran las vinculaciones y enlaces externos que sustentan al sólido impidiendo sus desplazamientos mediante la fijación, bien de una serie de puntos, bien de unas determinadas zonas en la superficie (Fig. 1.23).

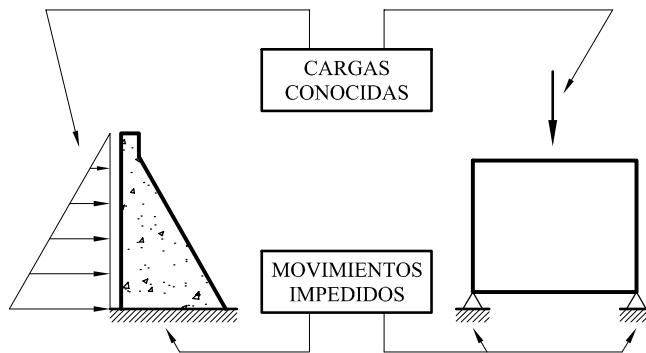


Fig. 1.23 Ejemplos de cargas y vinculaciones en distintas estructuras

En general, por tanto, las condiciones a aplicar en los contornos serán de dos tipos:

- Una zona de la superficie en que todos o algunos de los movimientos son conocidos. Dichos movimientos pueden ser nulos (caso de apoyos fijos), o bien, tener un determinado valor (caso de asiento de apoyo). En ocasiones, incluso el movimiento se supone proporcional a la reacción (apoyos elásticos).
- Otra zona de la superficie en que son conocidas las tensiones según la superficie o cargas externas que actúan. En este caso, las cargas externas deben estar en equilibrio local con las tensiones que en cada punto de la superficie se producirán. Es decir, debe verificarse la ecuación 1.14 como condición del contorno en tensiones. En este caso, \mathbf{N} será el versor normal a la superficie del cuerpo en cada punto.

Es interesante notar que, en aquellas zonas del contorno del sólido en que se imponen condiciones de contorno en tensiones, son desconocidos los desplazamientos. La recíproca es también cierta, es decir, en aquellas zonas en que los movimientos son conocidos, las tensiones constituyen una incógnita a determinar.

1.11 Solución general del problema elástico. Planteamiento

Según lo estudiado en los apartados precedentes, es posible plantear las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rigen la solución del problema elástico. Es decir, es posible plantear las ecuaciones a partir de cuya integración sería posible obtener las tensiones, deformaciones y movimientos de una determinada estructura sometida a una serie de acciones.

Si las anteriores ecuaciones se plantean de forma que las incógnitas sean los movimientos, se llega a un sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conocidas con el nombre de *ecuaciones de Navier*. Alternativamente, si las incógnitas

fueran las tensiones, el número de ecuaciones diferenciales es de seis. Dicho sistema de ecuaciones es conocido con el nombre de *ecuaciones de compatibilidad de Beltrami*. Ambas expresiones se desarrollan a continuación.

1.11.1 Ecuaciones de Navier

Si en las expresiones 1.37 se sustituyen las deformaciones por sus expresiones en función de los movimientos, se tendrá

$$\sigma_1 = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2G \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \quad (1.39a)$$

$$\sigma_2 = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2G \frac{\partial u_2}{\partial z_2} \quad (1.39b)$$

$$\sigma_3 = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2G \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \quad (1.39c)$$

$$\tau_{12} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} \right) \quad (1.39d)$$

$$\tau_{13} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_3} + \frac{\partial u_3}{\partial z_1} \right) \quad (1.39e)$$

$$\tau_{23} = G \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_3} + \frac{\partial u_3}{\partial z_2} \right) \quad (1.39f)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones de equilibrio interno 1.9, se obtiene

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z_1} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \nabla^2 u_1 + b_1 = 0 \quad (1.40a)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z_2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \nabla^2 u_2 + b_2 = 0 \quad (1.40b)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z_3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \nabla^2 u_3 + b_3 = 0 \quad (1.40c)$$

lo cual constituye la expresión de las ecuaciones de Navier.

1.11.2 Solución en tensiones

Para obtener las ecuaciones de Beltrami, se toma la Laplaciana de las ecuaciones de Lamé 1.37, obteniéndose

$$\nabla^2 \sigma_1 = \lambda \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2G \nabla^2 \varepsilon_1 \quad (1.41)$$

y lo mismo para todas las demás ecuaciones.

Si se deriva respecto a z_1 la primera de las ecuaciones 1.40, respecto a z_2 la segunda, respecto a z_3 la tercera, y se suma, se obtiene

$$(\lambda + G) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.42)$$

siendo $\mathbf{B}^T = [b_1, b_2, b_3]$

De la expresión anterior se deduce

$$\nabla^2(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\lambda + 2G} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} \quad (1.43)$$

Por otro lado, a partir de 1.40a

$$G\nabla^2\varepsilon_1 = -\frac{\partial b_1}{\partial z_1} - (\lambda + G)\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \quad (1.44)$$

y lo mismo para 1.40b y 1.40c.

Sustituyendo 1.43 y 1.44 en 1.41

$$\nabla^2\sigma_1 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} - \frac{\partial b_1}{\partial z_1} - (\lambda + G)\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \quad (1.45)$$

La ecuación anterior se repite igualmente para el resto de las tensiones.

A partir de las ecuaciones de Lamé se deduce

$$s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = (3\lambda + 2G)\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \quad (1.46)$$

Sustituyendo 1.46 en 1.45 y suponiendo que las fuerzas b_1, b_2 y b_3 son constantes

$$(1 + \nu)\nabla^2\sigma_1 + \frac{\partial^2 s}{\partial z_1^2} = 0 \quad (1.47a)$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\sigma_2 + \frac{\partial^2 s}{\partial z_2^2} = 0 \quad (1.47b)$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\sigma_3 + \frac{\partial^2 s}{\partial z_3^2} = 0 \quad (1.47c)$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\tau_{12} + \frac{\partial^2 s}{\partial z_1 \partial z_2} = 0 \quad (1.47d)$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\tau_{13} + \frac{\partial^2 s}{\partial z_1 \partial z_3} = 0 \quad (1.47e)$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\tau_{23} + \frac{\partial^2 s}{\partial z_2 \partial z_3} = 0 \quad (1.47f)$$

que son las llamadas ecuaciones de Beltrami.

1.12 Acciones

En el contexto del análisis estructural, se pueden definir las acciones como aquellos elementos capaces de producir una variación del estado tensodeformacional de un cuerpo deformable. En cierta medida se podría también decir que constituyen los datos externos del problema.

La definición y cuantificación de las acciones constituye uno de los apartados fundamentales previos al análisis estructural, ya que los resultados que se obtengan serán

consecuencia directa de las mismas. Consecuentemente, la seguridad final de una estructura dependerá de manera principal de cuáles sean las hipótesis de carga (y de sus combinaciones) bajo las cuales ha sido diseñada. Asimismo, en su fijación intervienen conceptos estadísticos, económicos, sociales, etc. tales como la importancia de la estructura, período de retorno de una acción determinada, etc.

En general, para las estructuras más usuales existen normas y códigos que prescriben las distintas acciones a considerar, sus valores, las combinaciones que deben realizarse, coeficientes de seguridad, etc. En el presente texto no se analizará todo ello, sino que solamente se presentará una breve panorámica que acerque a su estudio, así como a las formas en que estructuralmente pueden ser tratadas.

Y aunque es sabido que en cualquier clasificación hay cierta componente de arbitrariedad, las acciones se pueden agrupar, a efectos de claridad expositiva, en varios grupos:

- a) Cargas dadas por fuerzas. Dichas cargas pueden actuar en la superficie del sólido o bien en su interior. A su vez se pueden dividir en:
 - Cargas puntuales debidas a fuerzas o momentos. Como ejemplo, se citan las fuerzas que ejercen las ruedas de un vehículo sobre una estructura.
 - Cargas por unidad de longitud que actúan a lo largo de una línea.
 - Cargas repartidas por unidad de superficie. Son las más usuales. Entre ellas están el empuje del agua, del viento, etc.
 - Cargas repartidas por unidad de volumen. El caso más importante es el correspondiente al peso propio.
- b) Movimientos prescritos en ciertos puntos o zonas. En muchas ocasiones es necesario conocer en toda la estructura el estado de tensiones y movimientos producido por un movimiento dado de un punto o una zona. Un ejemplo característico corresponde a movimientos dados en los apoyos debidos a asientos del terreno. En otros casos forman simplemente parte del análisis, como correspondería a un cálculo por subestructuras.
- c) Acciones provocadas por deformaciones impuestas, es decir, deformaciones conocidas que se le imponen al sólido. Los dos casos más conocidos corresponden a los efectos térmicos (tensiones producidas por variación de la temperatura) y a los efectos debidos a la retracción del hormigón.
- d) Acciones de tipo mixto. Es decir, acciones en que interviene una relación de fuerzas y movimientos como puede ser el caso de apoyos elásticos. Existen, en efecto, casos en que debido a las especiales características del terreno de apoyo no es posible garantizar que algunos de los apoyos de la estructura sean fijos, sino que por el contrario sufrirán un movimiento proporcional a la reacción (hipótesis de Winkler), es decir

$$R = -k\delta$$

siendo R la reacción y δ el movimiento de apoyo en la dirección de R . El signo negativo proviene de que R y δ tienen la misma dirección y sentido contrario. La constante de proporcionalidad k da una idea de la rigidez del apoyo. Si $k = 0$ prácticamente es como si el apoyo no existiera, y si $k = \infty$ el apoyo es fijo, puesto que para que R sea finito es preciso que δ sea cero.

e) Existen, además de las ya comentadas, otro tipo de acciones que, si bien de hecho se engloban en la clasificación anterior, es útil comentarlas por separado: las acciones que se presentan durante el proceso constructivo. En efecto, durante la etapa de construcción pueden en general producirse dos tipos de situaciones:

- Por una parte es preciso resistir unas acciones por parte de una estructura que no es la estructura final, sino solamente una parte de la misma. Imagínese, como ejemplo (Fig. 1.24), que una viga mixta de hormigón y acero se construye de la siguiente forma: Se deposita la viga de acero sobre dos apoyos y a continuación sobre ellas se dispone la capa de hormigón de la viga mixta. Es evidente que el peso del hormigón fresco debe ser resistido en su totalidad no por la estructura final, sino solamente por una parte de ella: la subestructura formada por el acero.
- Por otro lado, existen en ocasiones acciones que tienen solamente lugar durante la construcción desapareciendo una vez finalizada la misma. Como ejemplo, imagínese un forjado de una estructura de edificación que debido al efecto de los apuntalamientos debe soportar todo el peso del forjado superior mientras éste se está construyendo.

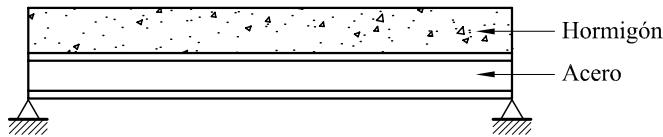


Fig. 1.24 Proceso constructivo de una viga de hormigón y acero

1.13 Energía de deformación

Supóngase (Fig. 1.25a) una viga biapoyada y que en un punto de la misma se aplica una carga puntual vertical descendente F . Se realiza la hipótesis de que dicha carga se aplica gradual y lentamente (a fin de evitar que se produzcan efectos dinámicos).

A medida que se aumenta el valor de F , aumentará también el de la flecha δ de forma proporcional (Fig. 1.25b). Si el valor final de la fuerza F es F_1 y el valor final de δ es δ_1 , el trabajo realizado en todo este proceso vendrá dado por el área sombreada de la figura 1.25b, es decir

$$U_1 = \frac{1}{2}F_1\delta_1 \quad (1.48)$$

Si se retira la fuerza, la viga vuelve a su posición inicial.

Durante el proceso de carga, se ha producido por tanto un trabajo que se ha almacenado en la estructura en forma de energía elástica. Si en un punto cualquiera los tensores de tensiones y deformaciones finales valen respectivamente \mathbf{T}_1 y $\boldsymbol{\Lambda}_1$, la energía elástica acumulada por unidad de volumen valdrá:

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_1 : \boldsymbol{\Lambda}_1 \quad (1.49)$$

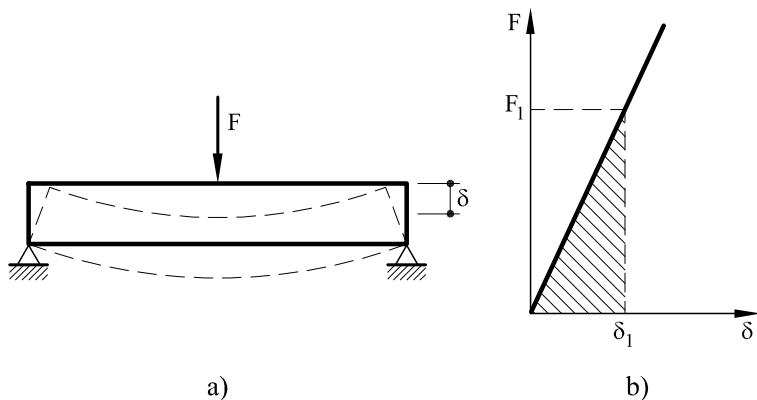


Fig. 1.25 Proceso de carga de una viga biapoyada

siendo la energía elástica total

$$W = \int_V \overset{\triangle}{\hat{W}} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T} : \boldsymbol{\Lambda} dV \quad (1.50)$$

y por el principio de conservación de la energía, es evidente que $U_1 = W$, es decir,

$$W = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T} : \boldsymbol{\Lambda} dV \quad (1.51)$$

La expresión 1.51 indica que el trabajo producido por las fuerzas externas es igual a la energía elástica de deformación, la cual en su forma general viene dada por 1.50.

La expresión 1.50 es muy importante para muchos de los desarrollos posteriores, constituyendo la base de los métodos energéticos, por lo que será ampliamente utilizada, si no directamente, sí en alguna de sus formas derivadas.

1.14 Cuestiones finales

Se puede recapitular brevemente lo estudiado hasta ahora destacando aquellos aspectos considerados más relevantes y diciendo que se han analizado las características fundamentales de un cuerpo deformable con pequeños movimientos tanto respecto a su estática (tensiones) como respecto a su cinemática (movimientos y deformaciones). Asimismo, para el caso particular de un cuerpo elástico lineal, se ha establecido mediante la ley de Hooke el nexo de unión entre ambos aspectos fundamentales.

Se puede afirmar que de la conjunción de las hipótesis establecidas nace la solución del problema elástico, y que tal solución es única.⁵ Es decir, que, dado un campo de tensiones tal que garantice el equilibrio y dé lugar a un campo de movimientos compatible, este campo de tensiones es solución del problema. Además tal solución es única.

⁵Puede verse su demostración en los textos clásicos de Elasticidad.

Por otro lado, existe linealidad no sólo entre tensiones y deformaciones, sino también entre estas últimas y los movimientos, por lo que puede afirmarse que se está en presencia de un problema lineal. Es por ello muy importante tener en cuenta que *es válida la superposición de efectos*, que reporta tanta utilidad a todo el Cálculo de Estructuras. Para la mejor comprensión de tan importante aspecto, se introduce un simple ejemplo (Fig. 1.26). Supóngase una estructura cargada con una serie de fuerzas que, *de forma completamente arbitraria*, se dividen en el conjunto de fuerzas F_i y el conjunto de fuerzas P_i . Si se analiza la estructura, se obtendrá un campo de tensiones, deformaciones y movimientos de valor respectivamente \mathbf{T} , Δ y \mathbf{u} , función todos ellos de (z_1, z_2, z_3) . Asimismo, se obtendrá un conjunto de reacciones \mathbf{R} .

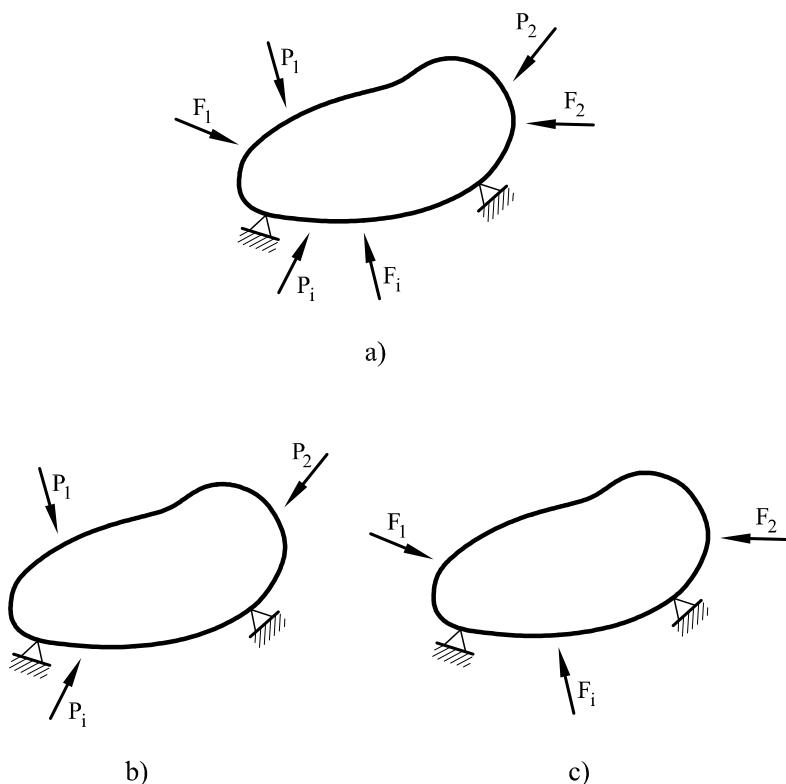


Fig. 1.26 Ejemplo de superposición de efectos

Supóngase ahora que se analiza la misma estructura sólo con las fuerzas P_i , obteniendo a su vez:

Tensiones:	\mathbf{T}_p
Deformaciones:	Δ_p
Movimientos:	\mathbf{u}_p
Reacciones:	\mathbf{R}_p

De nuevo se calcula la misma estructura, pero solamente con las fuerzas F_i . En este caso se obtendrá:

Tensiones:	\mathbf{T}_F
Deformaciones:	$\boldsymbol{\Lambda}_F$
Movimientos:	\mathbf{u}_F
Reacciones:	\mathbf{R}_F

Pues bien, de acuerdo con la superposición de efectos, se puede afirmar:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_F \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \boldsymbol{\Lambda}_p + \boldsymbol{\Lambda}_F \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_F \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_F\end{aligned}$$

Dicha superposición de efectos se utiliza ampliamente en la práctica del análisis estructural.

2 La pieza elástica: fundamentos de análisis

2.1 Introducción

En el capítulo precedente se ha realizado una breve exposición de algunos de los conceptos fundamentales e hipótesis básicas del cuerpo elástico. Tal como ha podido observarse, el planteamiento del problema conduce a la formulación de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de difícil solución por métodos analíticos. De hecho, las ecuaciones allá planteadas se resuelven sólo analíticamente para problemas de geometría muy sencilla, o bien, utilizando técnicas numéricas tales como el método de los elementos finitos.

En el presente texto se va a restringir el campo de estudio, abandonando la generalidad del cuerpo elástico, para centrarse en el estudio de piezas más sencillas, esto es, las formadas por vigas, bien sean éstas rectas o curvas. Ello conducirá a una mayor simplicidad de exposición, a la vez que a un mayor conocimiento conceptual de la forma resistente de una estructura. Para tal fin, se aprovecharán la mayoría de los conceptos expuestos en el capítulo anterior, al mismo tiempo que se formularán hipótesis adicionales que simplificarán el estudio.

Por otro lado, aunque se realizarán algunas incursiones en el espacio tridimensional, el estudio se centrará preferentemente en el plano bidimensional.

2.2 La pieza elástica

Para definir la pieza elástica, imagínese una sección plana A y un punto cualquiera de la misma G' , respecto al cual se definen unos ejes ortogonales (x_2, x_3) , situados en el plano de la sección, que se supondrán fijos en la misma. Se denomina pieza elástica al sólido engendrado cuando el punto G' recorre una curva alabeada Γ , denominada *directriz*, de forma que:

- La sección A está siempre situada en el plano normal a la curva Γ en cada punto.
- Las dimensiones máximas de la sección A son pequeñas en comparación con la longitud total de la curva Γ (Fig. 2.1).

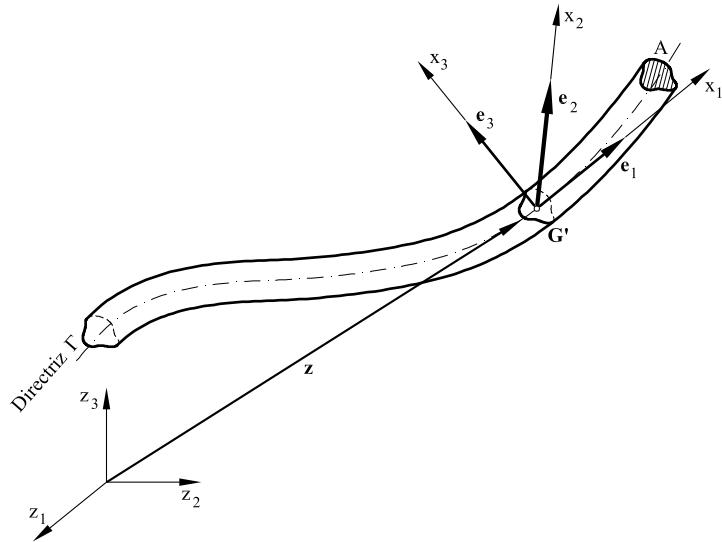


Fig. 2.1 Pieza elástica

La curva Γ será, en general, tal como se ha dicho, una curva alabeada en el espacio. Vendrá por tanto definida por sus coordenadas paramétricas

$$\begin{cases} z_1 = z_1(\theta) \\ z_2 = z_2(\theta) \\ z_3 = z_3(\theta) \end{cases}$$

o bien

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\theta)$$

siendo θ el parámetro de la curva Γ . Asimismo, en cada punto habrá definidos unos ejes locales (x_1, x_2, x_3) , los cuales llevan asociados un triedo local unitario $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, definido de forma que:

- El versor \mathbf{e}_1 es tangente a la curva Γ y viene dado por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{z}}{ds}$$

siendo s el parámetro de longitud¹.

- El versor \mathbf{e}_2 está situado en el plano perpendicular a la curva en el punto que se considera y en principio existe un grado de libertad en su definición.
- El versor \mathbf{e}_3 también está situado en el plano perpendicular y se define mediante

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

¹Nótese la equivalencia $\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \frac{d\mathbf{A}}{dx_1}$ siendo \mathbf{A} cualquier función escalar, vectorial o tensorial.

Nótese que el vector unitario \mathbf{e}_1 , tangente a la curva Γ , así como los vectores también unitarios \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 , perpendiculares a \mathbf{e}_1 , forman un triedro local de referencia en cada punto de la pieza elástica así definida. El cambio de sistema de referencia entre los ejes locales y globales vendrá dado por la matriz \mathbf{E} definida por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

de forma que un vector cualquiera \mathbf{V} de componentes $\mathbf{V}_l = [v_1, v_2, v_3]^T$ en el sistema local, se expresará como $\mathbf{V}_g = \mathbf{E}^T \mathbf{V}_l$ en el sistema global (z_1, z_2, z_3) . Como puede observarse e_{ij} es el coseno director (o componente) del vector \mathbf{e}_i respecto al eje global j .

Como casos particulares de la pieza elástica y que revisten un considerable interés pueden citarse:

- Piezas planas: Son aquellas en las cuales la directriz Γ está situada en un plano.
- Piezas de plano medio: Son aquellas piezas planas en las cuales un eje de simetría o, más generalmente, un eje principal de inercia de la sección está contenido en el plano (una definición más completa se dará en el apartado 2.5.4).

La pieza elástica así definida (recta o curva) estará en general unida a otras piezas elásticas, dando lugar a la formación de *estructuras planas o espaciales*, las cuales se idealizan representando exclusivamente la directriz de las mismas. A los puntos de unión entre diversas piezas elásticas se les denomina nudos, y juegan un papel de especial importancia en el cálculo de estructuras (Fig. 2.2).

Aunque el punto G' no tiene, en general, que coincidir con el centro de gravedad G de la sección A , lo más habitual es que sí lo haga. Se considerará, pues, si no se indica lo contrario, que la directriz pasa por el centro de gravedad G de la sección en cada punto.

2.3 Reacciones y vinculaciones

En el apartado anterior ha podido verse que una estructura es el cuerpo formado por la unión de varias piezas elásticas. Sin embargo, para que tal definición sea completa es preciso hablar de las *condiciones de vinculación*, esto es, de la forma en que dicha estructura está unida al terreno de cimentación o bien a otras estructuras. En el primer caso se hablará de *vinculaciones externas*, y en el segundo de *internas*. En dichas vinculaciones actuarán las reacciones de la estructura, las cuales representarán las fuerzas externas o acciones que la cimentación u otra estructura ejerce sobre la estructura que se está considerando.

Existen tres tipos fundamentales de vinculaciones externas (Fig. 2.3):

- *Empotramiento*. En este caso está impedido cualquier tipo de movimiento, bien sea traslación, bien sea giro. Las reacciones a considerar en este caso serán por tanto

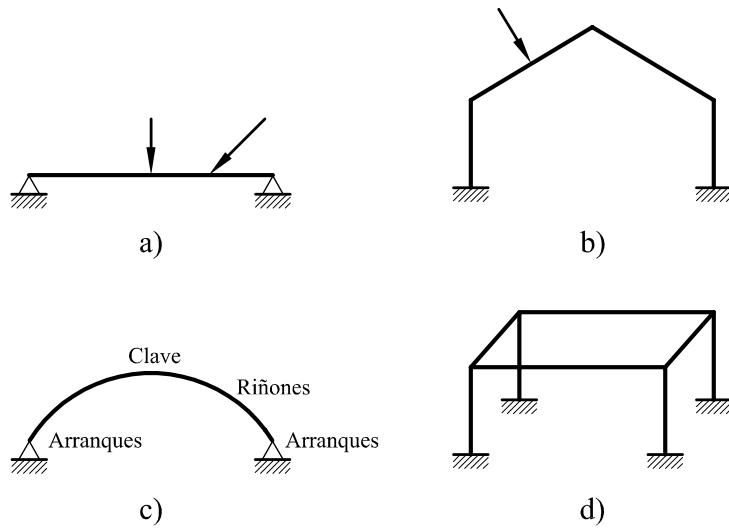


Fig. 2.2 Diversos tipos de estructuras formadas por piezas lineales: a) Viga bi-apoyada, b) Pórtico plano, c) Arco, d) Estructural espacial

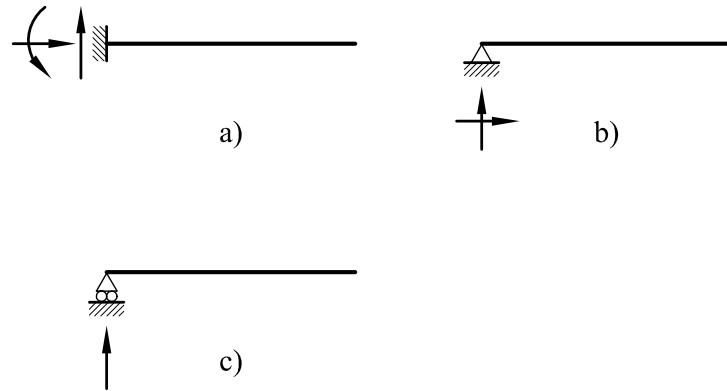


Fig. 2.3 Diferentes tipos de vinculaciones: a) Empotramiento, b) Apoyo simple, c) Apoyo deslizante

los tres momentos (uno solo en el caso de estructura plana) y las tres fuerzas (dos en el caso de estructura plana) en la dirección de cada uno de los ejes coordenados.

- *Apoyo fijo.* Se impide en este caso únicamente los movimientos de traslación, por lo que los momentos reacción serán nulos, existiendo únicamente fuerzas.
- *Apoyo deslizante o deslizadera.* El único movimiento impedido es el normal al plano de actuación de la deslizadera. Al igual que en caso anterior tampoco existirán momentos. La única reacción posible consiste en una fuerza cuya dirección es la normal al plano de la deslizadera.

Por lo que respecta a las vinculaciones internas, la más importante es la *rótula*, la cual permite el giro relativo entre las partes de la estructura que en ella concurren (Fig. 2.4). Como contrapartida, las reacciones que ejerce una parte de la estructura sobre la otra consisten únicamente en tres fuerzas (dos en el caso de piezas planas), sin que exista ningún momento.

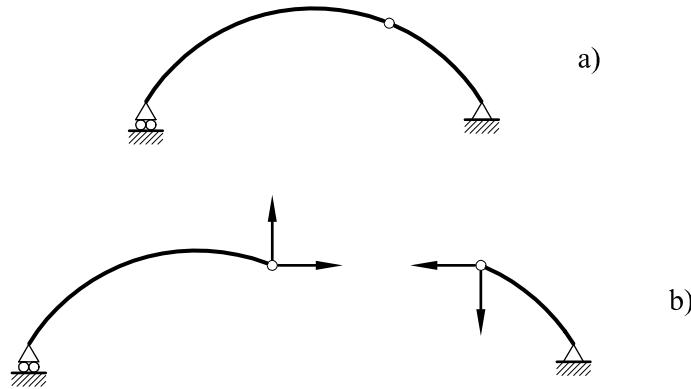


Fig. 2.4 Ejemplos de rótula y condiciones de vinculaciones externas

2.4 Esfuerzos en una sección

Considérese la pieza elástica de la figura 2.5 en la que actúan unas cargas conocidas, y sea *A* un punto cualquiera de ellas. Es evidente que dichas cargas deben estar en equilibrio. Si idealmente por este punto se corta la pieza por un plano perpendicular a la directriz, la pieza quedará dividida en dos partes: la parte I y la parte II. Lógicamente, tanto para I como para II es preciso introducir en la sección de corte unas tensiones (en principio desconocidas) y tales que:

- Garanticen la compatibilidad cinemática entre ambas partes.
- Garanticen el equilibrio de cada parte de la pieza, tanto a nivel local como global.

Las anteriores tensiones que actúan en la sección pueden reducirse estáticamente a una única fuerza \mathbf{F} y a un momento \mathbf{M} que actúen en el punto *G*, punto de intersección de la sección con la directriz de la pieza. A este conjunto de vectores se les denomina esfuerzos. Por consideraciones de equilibrio, ambos esfuerzos, considerados pertenecientes a la sección de la parte I, son la resultante de todas las fuerzas que actúan en la parte II y viceversa. Asimismo, la suma de todas las fuerzas externas y del esfuerzo \mathbf{F} que actúa en cada una de las ambas partes deberá ser cero, y lo mismo para los momentos. Escribiendo la resultante de las fuerzas que actúan en la parte II, se obtiene la siguiente expresión general

$$\mathbf{F} = \int_{II} \mathbf{p} ds + \sum_{II} \mathbf{F}_i$$

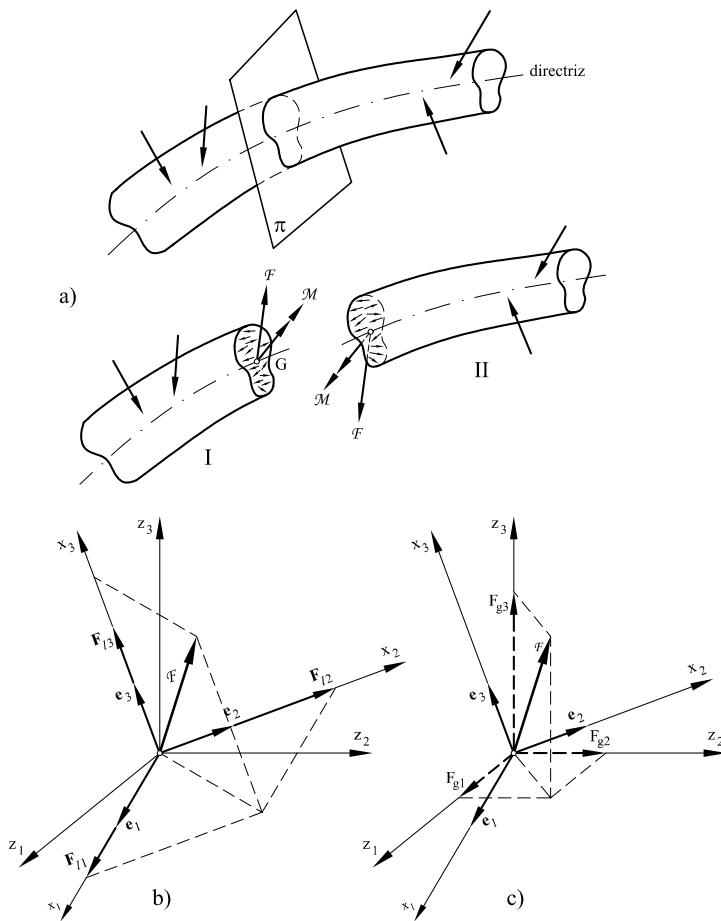


Fig. 2.5 Esfuerzos en una sección de una pieza elástica

$$\mathbf{M} = \int_{II} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_g) \times \mathbf{p} ds + \sum_{i,II} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_g) \times \mathbf{F}_i + \sum_{i,II} \mathbf{M}_i$$

siendo (ver Fig. 2.6):

- \mathbf{p} las fuerzas por unidad de longitud que actúan en la parte II de la pieza.
- \mathbf{F}_i las fuerzas concentradas que actúan en la parte II de la pieza.
- \mathbf{M}_i los momentos concentrados que actúan en la parte II de la pieza.
- \mathbf{z} la coordenada de un punto cualquiera.
- \mathbf{z}_i la coordenada de los puntos de aplicación de las fuerzas \mathbf{F}_i .
- \mathbf{z}_g la coordenada del punto respecto al cual se toman momentos.

Los esfuerzos \mathbf{F} y \mathbf{M} pueden ser expresados, bien mediante sus componentes referidas a los ejes globales Oz_1, Oz_2, Oz_3 , bien mediante sus componentes referidas a los ejes

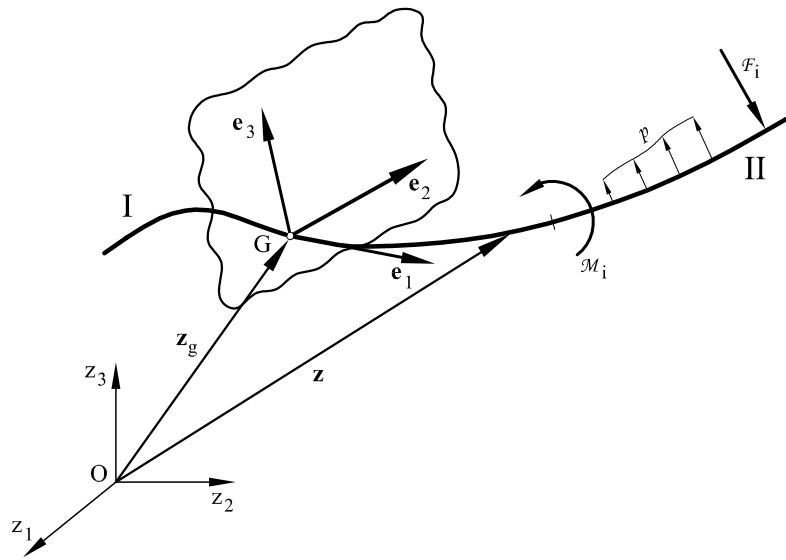


Fig. 2.6 Vectores de posición de la pieza elástica

locales Gx_1, Gx_2, Gx_3 . Para evitar confusiones, se designará por \mathbf{F}_g y \mathbf{M}_g a las componentes globales de los esfuerzos, y por \mathbf{F}_l y \mathbf{M}_l a las componentes de dichos esfuerzos en los ejes locales (ejes de la sección). De esta forma se podrá escribir:

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} M_{g1} \\ M_{g2} \\ M_{g3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} F_{g1} \\ F_{g2} \\ F_{g3} \end{bmatrix}$$

y también

$$\mathbf{M}_l = \begin{bmatrix} M_{l1} \\ M_{l2} \\ M_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_l = \begin{bmatrix} F_{l1} \\ F_{l2} \\ F_{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= F_{g1}\mathbf{i}_1 + F_{g2}\mathbf{i}_2 + F_{g3}\mathbf{i}_3 \\ \mathcal{M} &= M_{g1}\mathbf{i}_1 + M_{g2}\mathbf{i}_2 + M_{g3}\mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

y también en ejes locales:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= N\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{M} &= T\mathbf{e}_1 + M_{f2}\mathbf{e}_2 + M_{f3}\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Normalmente se trabaja con las componentes de los esfuerzos referidos a los ejes locales, lo que da lugar a la siguiente nomenclatura:

- A la componente N del esfuerzo \mathbf{F} sobre el eje local \mathbf{e}_1 se le denomina *Esfuerzo axil*.
- A las componentes Q_2 y Q_3 del esfuerzo \mathbf{F} sobre los ejes locales \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 se les denomina *Esfuerzos cortantes*.
- A la componente T del momento \mathbf{M} sobre el eje local \mathbf{e}_1 se le denomina *Momento torsor*.
- A las componentes M_{f2} y M_{f3} del momento \mathbf{M} sobre los ejes locales \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 se les denomina *Momentos flectores*.

Los esfuerzos así definidos juegan un papel de primordial importancia en todo el cálculo de estructuras y su determinación constituye uno de los problemas fundamentales del mismo.

Para aclarar los importantes conceptos definidos, considérese la ménsula plana de la figura 2.7 sometida a una fuerza \mathbf{F}_B actuando en el punto B . Supóngase que dicha ménsula se corta en el punto A por un plano perpendicular a la directriz. Sean I y II las partes en que quedará dividida la pieza.

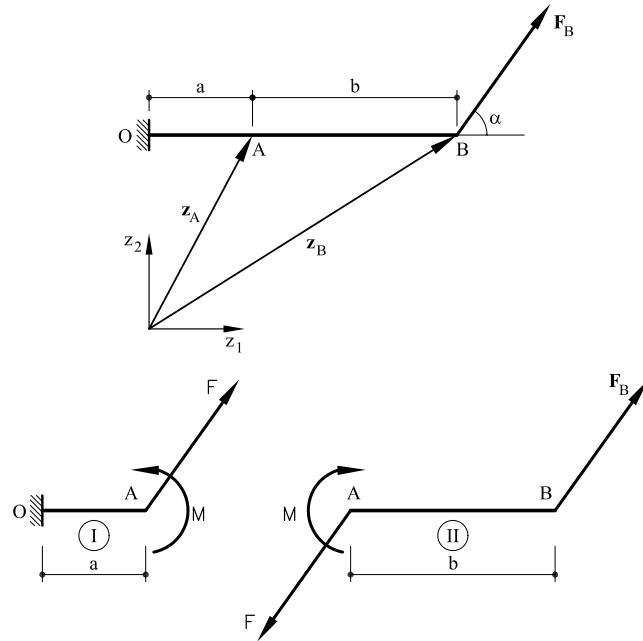


Fig. 2.7 Pieza recta cortada por un plano perpendicular a su directriz

Observando la parte I, en el punto A aparecerá una fuerza \mathbf{F} y un momento resultantes de todas las fuerzas y momentos que actúan a la derecha de A, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A) \times \mathbf{F}_B = \overline{AB} \times |\mathbf{F}_B| \sin \alpha \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Nótese que en el trozo II aparecen una fuerza y un momento iguales y contrarios a los anteriores, de forma que II esté en equilibrio.

Descomponiendo \mathbf{F} y \mathbf{M} en los ejes locales del punto A, se obtienen los esfuerzos en dicho punto (Fig. 2.8):

$$\begin{aligned}N &= |\mathbf{F}_B| \cos \alpha \\ Q &= |\mathbf{F}_B| \sin \alpha \\ M_f &= \overline{AB} |\mathbf{F}_B| \sin \alpha\end{aligned}$$

Si en vez de cortar por un plano se cortara por dos infinitamente próximos, se obtiene el sistema de esfuerzos de la figura 2.9, lógicamente equivalente al de la figura 2.8 (para este caso particular $dQ = 0$, $dN = 0$ y $dM_f = -|\mathbf{F}_B| \sin \alpha ds$).

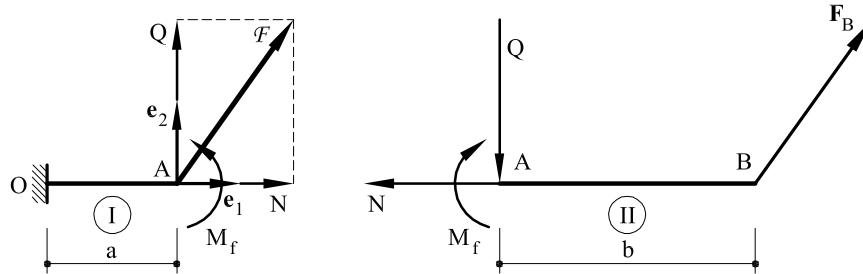


Fig. 2.8 Esfuerzos en un punto de una ménsula

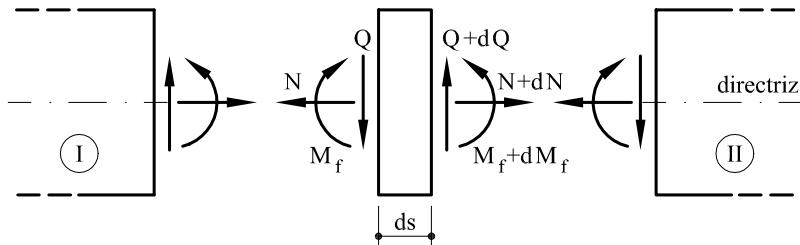


Fig. 2.9 Esfuerzos en una dovela

Por lo que hace referencia a los signos de los esfuerzos, se adoptará la convención que se describe seguidamente: Considerese la dovela de la figura 2.10. En dicha dovela, se denominará cara positiva (o cara frontal) a la de coordenada paramétrica $\theta + d\theta$, y cara negativa (o cara dorsal) a la de coordenada paramétrica θ . Un esfuerzo cualquiera será positivo si en la cara positiva de la dovela tiene el sentido positivo del correspondiente eje local, y negativo en caso contrario.

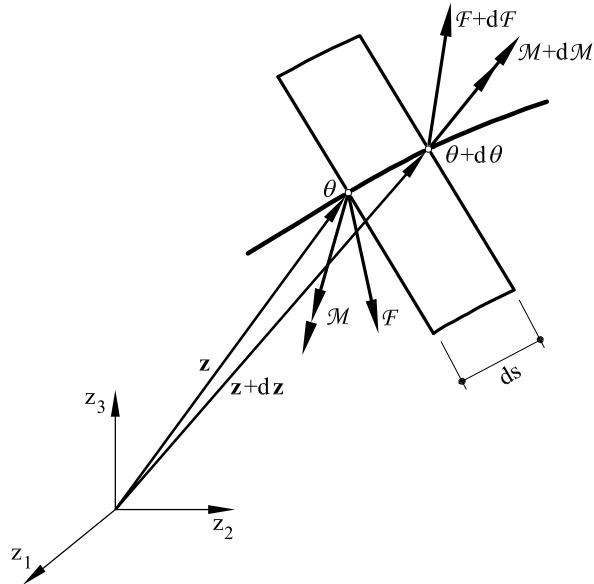


Fig. 2.10 Equilibrio de una rebanada

2.5 Ecuaciones de equilibrio interno

2.5.1 Caso general

Supóngase una pieza cualquiera en el espacio y sean N, Q_2, Q_3 el esfuerzo axil y los dos esfuerzos cortantes, y T, M_{f2}, M_{f3} los momentos torsor y flectores respectivamente en un punto cualquiera G de una pieza elástica cualquiera (Fig. 2.10). Dichos esfuerzos pueden escribirse en coordenadas locales:

$$\mathcal{F} = N\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3 \quad (2.2a)$$

$$\mathcal{M} = T\mathbf{e}_1 + M_{f2}\mathbf{e}_2 + M_{f3}\mathbf{e}_3 \quad (2.2b)$$

y como

$$\mathbf{F}_l = \begin{bmatrix} N \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

y

$$\mathbf{M}_l = \begin{bmatrix} T \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

las expresiones 2.2 pueden escribirse

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \mathbf{F}_l = \mathbf{e} \mathbf{F}_l \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \mathbf{M}_l = \mathbf{e} \mathbf{M}_l \quad (2.5b)$$

Nótese que cuando el conjunto de vectores \mathbf{e} se expresa como combinación lineal de los vectores $\mathbf{i} = [\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3]$, entonces como $\mathbf{e} = \mathbf{i} \mathbf{E}^T$, la matriz de componentes de \mathbf{e} coincide con \mathbf{E}^T .

Considérese una rebanada diferencial situada entre las coordenadas paramétricas θ y $\theta + d\theta$ (Fig. 2.10). Los esfuerzos que actúan en la cara anterior (coordenada θ) vendrán dados por \mathbf{F} y \mathbf{M} , los cuales se designan por \mathbf{F}_l y \mathbf{M}_l si sus componentes se expresan en coordenadas locales y por \mathbf{F}_g y \mathbf{M}_g si se expresan en coordenadas globales. En la cara posterior (coordenada $\theta + d\theta$) los esfuerzos serán $\mathbf{F} + (d\mathbf{F}/d\theta)d\theta$ y $\mathbf{M} + (d\mathbf{M}/d\theta)d\theta$.

Sean, por otra parte, \mathbf{p} y \mathbf{m} la fuerza y el momento por unidad de longitud que actúan en la pieza curva. Realizando el equilibrio de la rebanada diferencial se tendrá:

- Suma de fuerzas en la rebanada

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{F}}{d\theta} d\theta - \mathbf{F} + \mathbf{p} ds = 0 \quad (2.6)$$

o sea

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\theta} + \mathbf{p} \frac{ds}{d\theta} = 0 \quad (2.7)$$

- Suma de momentos en la rebanada

$$\mathbf{M} + \frac{d\mathbf{M}}{d\theta} d\theta - \mathbf{M} + \mathbf{m} ds + d\mathbf{z} \times \mathbf{F} = 0 \quad (2.8)$$

es decir

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\theta} + \mathbf{m} \frac{ds}{d\theta} + \frac{d\mathbf{z}}{d\theta} \times \mathbf{F} = 0 \quad (2.9)$$

Las expresiones 2.7 y 2.9 constituyen las ecuaciones de equilibrio interno en esfuerzos de una pieza cualquiera en el espacio. Para el caso particular en que el parámetro θ de la directriz de la pieza se tomara igual a la longitud s de la curva en cualquier punto, las expresiones 2.7 y 2.9 se reescriben

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.10a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{m} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.10b)$$

En las expresiones anteriores, y tal como se ha señalado anteriormente, los esfuerzos \mathbf{F} y \mathbf{M} pueden venir expresados en coordenadas locales o globales, siendo más conveniente la primera opción. Por tanto:

$$\frac{d(\mathbf{eF}_l)}{ds} + \mathbf{ep}_l = \mathbf{0} \quad (2.11a)$$

$$\frac{d(\mathbf{eM}_l)}{ds} + \mathbf{em}_l + \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{eF}_l) = \mathbf{0} \quad (2.11b)$$

y desarrollando

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} \mathbf{F}_l + \mathbf{e} \frac{d\mathbf{F}_l}{ds} + \mathbf{ep}_l = \mathbf{0} \quad (2.12a)$$

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} \mathbf{M}_l + \mathbf{e} \frac{d\mathbf{M}_l}{ds} + \mathbf{em}_l + \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{eF}_l) = \mathbf{0} \quad (2.12b)$$

siendo $\mathbf{p}_l = [p_1, p_2, p_3]^T$ y $\mathbf{m}_l = [m_1, m_2, m_3]^T$ las componentes en las coordenadas de la sección de las fuerzas y momentos externos, respectivamente. Teniendo presente que la derivada $d\mathbf{e}/ds$ expresada en los propios ejes locales $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ vale²

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \left[\frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \frac{d\mathbf{e}_2}{ds}, \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} \right] = \mathbf{e}\boldsymbol{\Omega} \quad (2.13)$$

siendo $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E} d\mathbf{E}^T / ds$

$$\left[\frac{d\mathbf{e}_1}{ds}, \frac{d\mathbf{e}_2}{ds}, \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} \right] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

²Para demostrarlo, derivando $\mathbf{e} = \mathbf{iE}^T$ con respecto a s se obtiene

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \mathbf{i} \frac{d\mathbf{E}^T}{ds}$$

y como $\mathbf{i} = \mathbf{eE}$, sustituyendo:

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \mathbf{eE} \frac{d\mathbf{E}^T}{ds}$$

Nótese además que, al ser la derivada de un vector base \mathbf{e}_i normal a dicho vector, debe cumplirse que $\Omega_{ii} = 0$, es decir, la diagonal principal de $\boldsymbol{\Omega}$ está formada por términos nulos. Además, puesto que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $i \neq j$:

$$0 = \frac{d}{ds} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_j}{ds} + \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} \cdot \mathbf{e}_j = \Omega_{ij} + \Omega_{ji}$$

por lo que $\Omega_{ji} = -\Omega_{ij}$. Es decir que la matriz $\boldsymbol{\Omega}$ es antisimétrica

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Las expresiones 2.12 quedan finalmente (en componentes locales)

$$\mathbf{e}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{F}_l + \mathbf{e}\frac{d\mathbf{F}_l}{ds} + \mathbf{e}\mathbf{p}_l = \mathbf{0} \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{e}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}_l + \mathbf{e}\frac{d\mathbf{M}_l}{ds} + \mathbf{e}\mathbf{m}_l + \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}\mathbf{F}_l) = \mathbf{0} \quad (2.14b)$$

o también

$$\mathbf{e} \left(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{F}_l + \frac{d\mathbf{F}_l}{ds} + \mathbf{p}_l \right) = \mathbf{0} \quad (2.14c)$$

$$\mathbf{e} \left(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}_l + \frac{d\mathbf{M}_l}{ds} + \mathbf{m}_l \right) + \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}\mathbf{F}_l) = \mathbf{0} \quad (2.14d)$$

que constituyen la expresión de las ecuaciones de equilibrio interno.

2.5.2 Pieza curva espacial en que los vectores locales vienen dados por el triedro de Frenet

Como es sabido, el triedro de vectores intrínseco de Frenet viene dado por $\mathbf{e} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}]$, siendo \mathbf{t} el vector tangente, \mathbf{n} el vector normal y \mathbf{b} el vector binormal. Es decir:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{t} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$$

De acuerdo con las fórmulas de Frenet³:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n} \quad (2.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} \quad (2.15b)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau\mathbf{n} \quad (2.15c)$$

en donde k y τ son respectivamente la curvatura y la torsión de la curva en el punto considerado.

De acuerdo con 2.15:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

³D.J. Struik: *Geometría diferencial clásica*, Ed. Aguilar

La expresión 2.14a se escribirá

$$[\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q_n \\ Q_b \end{bmatrix} + [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \frac{dN}{ds} \\ \frac{dQ_n}{ds} \\ \frac{dQ_b}{ds} \end{bmatrix} + [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} p_t \\ p_n \\ p_b \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

Expresión, que desarrollada

$$\frac{dN}{ds} - kQ_n + p_t = 0 \quad (2.18a)$$

$$kN + \frac{dQ_n}{ds} + \tau Q_b + p_n = 0 \quad (2.18b)$$

$$-\tau Q_n + \frac{dQ_b}{ds} + p_b = 0 \quad (2.18c)$$

Análogamente para la expresión 2.14b

$$[\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_{fn} \\ M_{fb} \end{bmatrix} + [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \frac{dT}{ds} \\ \frac{dM_{fn}}{ds} \\ \frac{dM_{fb}}{ds} \end{bmatrix} + [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} m_t \\ m_n \\ m_b \end{bmatrix} \\ + \mathbf{t} \times \left([\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} N \\ Q_n \\ Q_b \end{bmatrix} \right) = 0$$

Y desarrollando la expresión anterior

$$\frac{dT}{ds} - kM_{fn} + m_t = 0 \quad (2.18d)$$

$$kT + \frac{dM_{fn}}{ds} + \tau M_{fb} + m_n - Q_b = 0 \quad (2.18e)$$

$$-\tau M_{fn} + \frac{dM_{fb}}{ds} + m_b + Q_n = 0 \quad (2.18f)$$

Las expresiones 2.18 constituyen las ecuaciones de equilibrio interno cuando el triedo local viene dado por el triedo de Frenet.

2.5.3 Pieza espacial recta

Para una pieza espacial recta, al ser constantes los vectores locales \mathbf{e} , el tensor $\boldsymbol{\Omega}$ será idénticamente nulo, por lo que las ecuaciones 2.14 se escribirán

$$\mathbf{e} \frac{d\mathbf{F}_l}{ds} + \mathbf{e}\mathbf{p}_l = \mathbf{0} \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{e} \frac{d\mathbf{M}_l}{ds} + \mathbf{e}\mathbf{m}_l + \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}\mathbf{F}_l) = \mathbf{0} \quad (2.19b)$$

Expresiones que desarrolladas conducen a:

$$\frac{dN}{ds} + p_1 = 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{dQ_2}{ds} + p_2 = 0 \quad (2.20b)$$

$$\frac{dQ_3}{ds} + p_3 = 0 \quad (2.20c)$$

$$\frac{dT}{ds} + m_1 = 0 \quad (2.20d)$$

$$\frac{dM_{f2}}{ds} + m_2 - Q_3 = 0 \quad (2.20e)$$

$$\frac{dM_{f3}}{ds} + m_3 + Q_2 = 0 \quad (2.20f)$$

Expresiones que constituyen las ecuaciones de equilibrio interno.

Es útil hacer notar que en las piezas rectas los ejes locales de cada uno de sus puntos son paralelos entre sí y tienen el mismo sentido.

Por ello, en lo sucesivo, en dichas piezas rectas se colocarán unos ejes locales únicos para cada barra y con origen en uno de sus extremos, de forma que resulten equivalentes las coordenadas s y x_1 .

2.5.4 Pieza de plano medio

Se denomina pieza de plano medio a aquella pieza elástica que cumple las siguientes condiciones:

- La directriz de la pieza está contenida en un plano.
- Uno de los ejes principales de la sección recta de la pieza está situado en el mismo plano.
- Todas las cargas constituidas por fuerzas que actúan sobre la pieza están situadas en el plano. Si existen momentos repartidos o concentrados, sus correspondientes vectores son normales al plano.

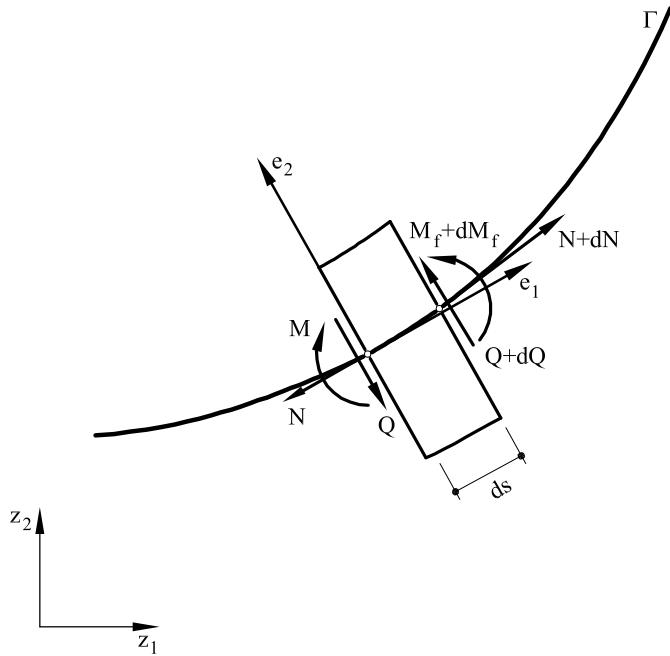


Fig. 2.11 Equilibrio en una rebanada de una pieza de plano medio

Bajo las anteriores condiciones, se tomará de ahora en adelante al eje 3 (tanto local como global) perpendicular al plano de la pieza y de tal forma que el eje 3 se dirija hacia el lector (ver Fig. 2.11). Asimismo, el eje 3 será un eje principal de inercia de la sección. Además:

$$\begin{aligned} Q_3 &= 0 & T &= 0 & M_{f3} &= 0 \\ p_3 &= 0 & m_1 &= 0 & m_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para el resto de los esfuerzos no nulos, y dado que no existe confusión en los subíndices, se escribirá:

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q & M_{f3} &= M_f \\ m_3 &= m \end{aligned}$$

En este caso la matriz Ω se escribe⁴:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

⁴Nótese que para este caso $|\Omega_{12}| = \frac{1}{R}$ siendo R el radio de curvatura de la directriz en el punto considerado.

es decir

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = -\Omega_{12}\mathbf{e}_2 \quad (2.22a)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \Omega_{12}\mathbf{e}_1 \quad (2.22b)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \mathbf{0} \quad (2.22c)$$

Las ecuaciones de equilibrio 2.14 se escribirán por tanto:

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} + [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} \frac{dN}{ds} \\ \frac{dQ}{ds} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ + [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.23a)$$

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_f \end{bmatrix} + [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dM_f}{ds} + m \\ 0 \end{bmatrix} + \\ + \mathbf{e}_1 \times \left([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} N \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \quad (2.23b)$$

Prescindiendo de las ecuaciones idénticamente nulas, las expresiones anteriores quedan reducidas a tres:

$$\frac{dN}{ds} + \Omega_{12}Q + p_1 = 0 \quad (2.24a)$$

$$-\Omega_{12}N + \frac{dQ}{ds} + p_2 = 0 \quad (2.24b)$$

$$\frac{dM_f}{ds} + m + Q = 0 \quad (2.24c)$$

Las expresiones anteriores constituyen las ecuaciones de equilibrio interno para las piezas de plano medio.

Es interesante notar que, para el caso bidimensional, no es conveniente adoptar el triángulo de Frenet como sistema local de ejes. Ello es debido a que el vector base \mathbf{e}_2 va siempre dirigido hacia la concavidad de la curva, por lo que al cambiar ésta, el eje 3 cambia de sentido.

- ♣ **Problema resuelto P2.1** Determinar el momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo axil en un punto cualquiera en la pieza de la figura P2.1.1 y comprobar que cumpla las ecuaciones de equilibrio interno.

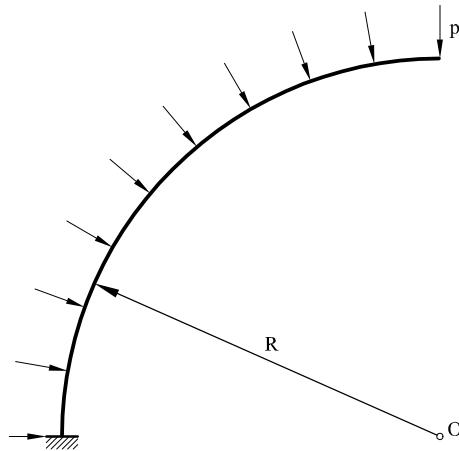


Fig. P2.1.1 Estructura correspondiente al problema resuelto P2.1

Solución

Se eligen unos ejes globales que pasen por O . Asimismo, los ejes locales son los representados en la figura P2.1.2.

Los ejes locales vendrán dados por

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

con lo que

$$\mathbf{E}^T = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E} \frac{d\mathbf{E}^T}{ds} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = -\frac{1}{R} \mathbf{e}_2 \quad ; \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{e}_1$$

expresiones que pueden obtenerse directamente.

Para obtener las leyes de esfuerzos en un punto cualquiera de coordenada θ será preciso obtener la contribución de un elemento diferencial

$$\begin{aligned} dN &= -p R \sin \alpha d\alpha \\ dQ &= -p R \cos \alpha d\alpha \\ dM_f &= -p R d\alpha R \sin \alpha = -p R^2 \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

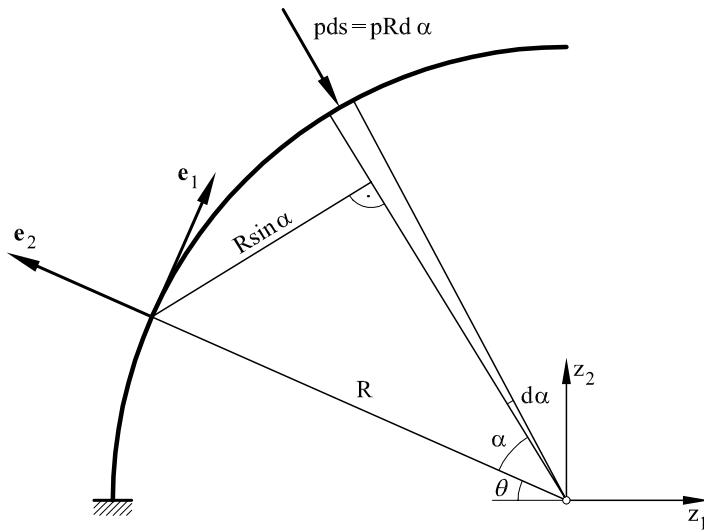


Fig. P2.1.2 Sistemas de ejes para el problema resuelto P2.1

E integrando

$$N = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} p R \sin \alpha d\alpha = p R (\sin \theta - 1)$$

$$Q = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} p R \cos \alpha d\alpha = -p R \cos \theta$$

$$M_f = - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} p R^2 \sin \alpha d\alpha = p R^2 (\sin \theta - 1)$$

y como fácilmente puede comprobarse, los anteriores esfuerzos cumplen las ecuaciones de equilibrio interno.

2.5.5 Pieza recta de plano medio

En el caso de que la pieza de plano medio fuera una recta (ver Fig. 2.12), la curvatura k es nula y el radio de curvatura R infinito, por lo que las expresiones 2.24 se transforman en

$$\frac{dN}{ds} + p_1 = 0 \quad (2.25a)$$

$$\frac{dQ}{ds} + p_2 = 0 \quad (2.25b)$$

$$\frac{dM_f}{ds} + m + Q = 0 \quad (2.25c)$$

Las mismas expresiones 2.25 se obtienen a partir de 2.20, o bien, directamente, a partir de la rebanada de la figura 2.12 realizando el equilibrio de fuerzas y momentos.

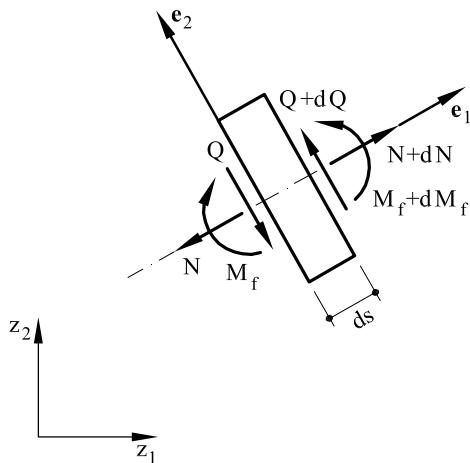


Fig. 2.12 Equilibrio de una rebanada de una pieza recta de plano medio

2.6 Leyes de esfuerzos

2.6.1 Concepto

De acuerdo con lo visto en los apartados anteriores, en cada sección de una pieza espacial se tendrán seis esfuerzos: un esfuerzo axil, dos esfuerzos cortantes, un momento torsor y dos momentos flectores. Para una pieza de plano medio, los anteriores esfuerzos se reducen a tres: esfuerzo axil, esfuerzo cortante y momento flector. Tales esfuerzos no pueden ser independientes, sino que están ligados entre sí mediante las ecuaciones de equilibrio de la sección. El valor de los mismos dependerá de las características de la estructura y de las acciones actuantes en la misma.

La importancia de los esfuerzos actuantes en una sección radica en el hecho de que constituyen un paso intermedio para la determinación de las tensiones en la sección. En efecto, los siguientes cuatro capítulos están dedicados a analizar cuál es la distribución de tensiones y deformaciones que provoca cada uno de los esfuerzos, por lo que conocidos los valores de éstos, es posible determinar las tensiones y los movimientos.

Es por tanto de capital importancia para todo el cálculo de estructuras, la determinación de los esfuerzos en cada una de las secciones de la estructura, es decir, la determinación de las *leyes de esfuerzos*.

2.6.2 Isostatismo e hiperestatismo

Para la determinación de tales leyes de esfuerzos se utilizarán en primer lugar los recursos de la estática. Ahora bien, en determinados tipos de estructuras dichos recursos no son suficientes, por lo que será necesario recurrir a la compatibilidad cinemática de movimientos. Es, por tanto, importante antes de seguir adelante, establecer las siguientes definiciones:

- Estructuras *isostáticas* son aquellas en las cuales es posible determinar todas las leyes de esfuerzos en cada punto utilizando únicamente los recursos de la Estática.
- Estructuras *hiperestáticas* son aquellas en las cuales no es posible determinar todas las leyes de esfuerzos con los solos recursos de la Estática, siendo preciso tener en cuenta además la compatibilidad cinemática de desplazamientos.
- Grado de *hiperestatismo* de una estructura es el número mínimo de reacciones externas o internas (enlaces) que es preciso conocer para transformar la estructura en isostática.

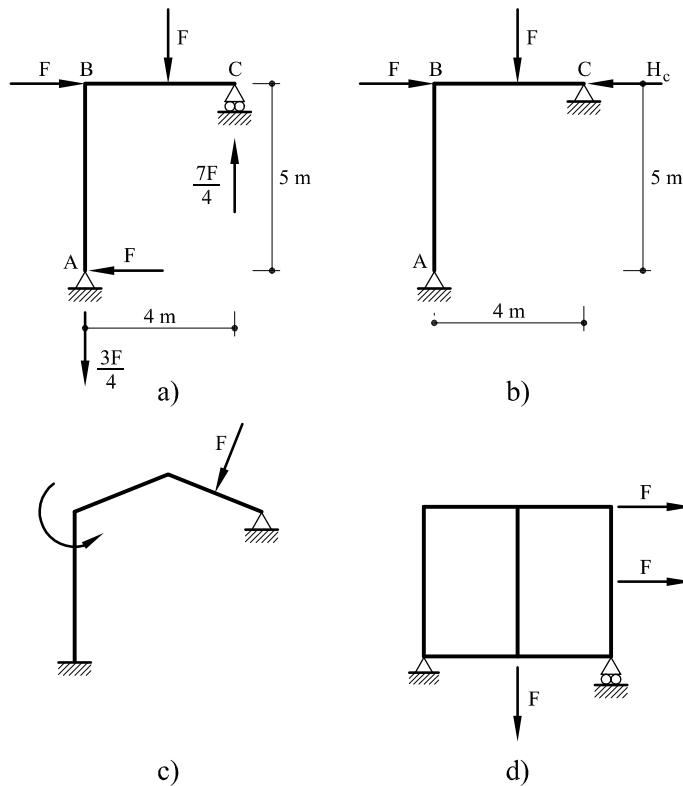


Fig. 2.13 Estructuras isostáticas e hiperestáticas

En la figura 2.13a puede analizarse una estructura isostática, ya que es posible determinar las reacciones y todas las leyes de esfuerzos. Si en la misma estructura el

apoyo C se convierte en fijo (Fig. 2.13b), entonces la estructura es hiperestática. El grado de hiperestatismo es uno, ya que, conocida una reacción (por ejemplo la reacción horizontal en C), sería posible determinar las leyes de esfuerzos. A la reacción horizontal en C se la denominaría incógnita hiperestática. Las estructuras de las figuras 2.13c y 2.13d son respectivamente dos y seis veces hiperestáticas. Hay que señalar además que las estructuras hiperestáticas, a su vez, pueden ser *hiperestáticas externas*, *hiperestáticas internas* o ambas cosas a un tiempo.

Una estructura se denomina hiperestática externa si sus únicas incógnitas hiperestáticas son reacciones externas. Análogamente, una estructura será hiperestática interna si sus únicas reacciones hiperestáticas están constituidas por reacciones internas. De esta forma, las estructuras de las figuras 2.13b y 2.13c son hiperestáticas externas, mientras que la estructura de la figura 2.13d será hiperestática interna.

A partir de todo lo anterior, es posible ver que el hecho de calcular una estructura supone determinar sus leyes de esfuerzos y en ocasiones también sus movimientos.

En los ejemplos que siguen se determinan las leyes de esfuerzos de estructuras isostáticas planas. La determinación de las leyes de esfuerzos de estructuras hiperestáticas es el objeto de los capítulos siete y siguientes.

♣ **Problema resuelto P2.2** Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos de la ménsula de la figura P2.2.1.

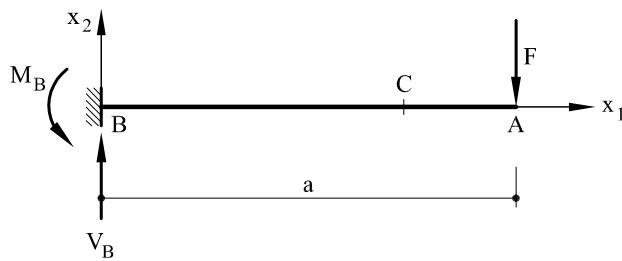


Fig. P2.2.1 Pieza recta correspondiente al problema resuelto P2.2

Solución

Las reacciones valdrán $V_B = F$; $M_B = aF$.

Para determinar las leyes de esfuerzos, se corta idealmente la estructura por un punto arbitrario C de abcisa x_1 (Fig. P2.2.2). La fuerza resultante será vertical e igual al cortante, mientras que el momento de las fuerzas situadas a la derecha de C valdrá $M_f = -F(a - x_1)$. Las leyes de esfuerzos serán por tanto

$$\begin{aligned} Q &= -F \\ M_f &= -F(a - x_1) \end{aligned}$$

Dichas leyes pueden verse representadas en las figuras P2.2.3a y P2.2.3b, respectivamente.

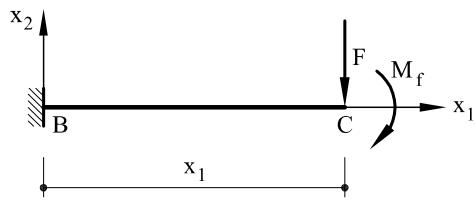


Fig. P2.2.2 Corte por C de la estructura de la figura P2.2.1

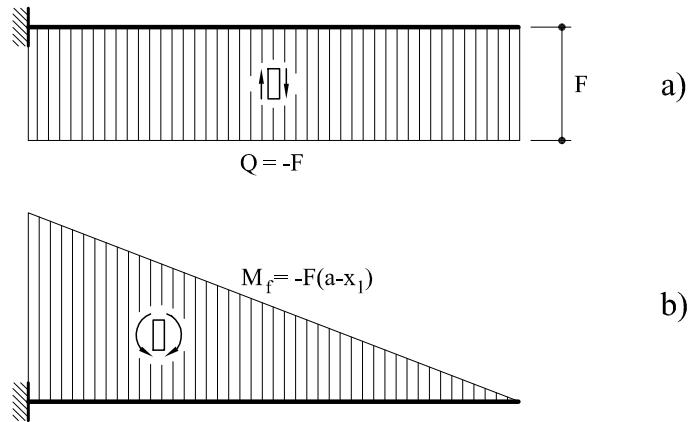


Fig. P2.2.3 Leyes de esfuerzos. a) Esfuerzos cortantes b) Momentos flectores

♣ **Problema resuelto P2.3** Determinar las leyes de esfuerzos en la pieza de la figura P2.3.1.

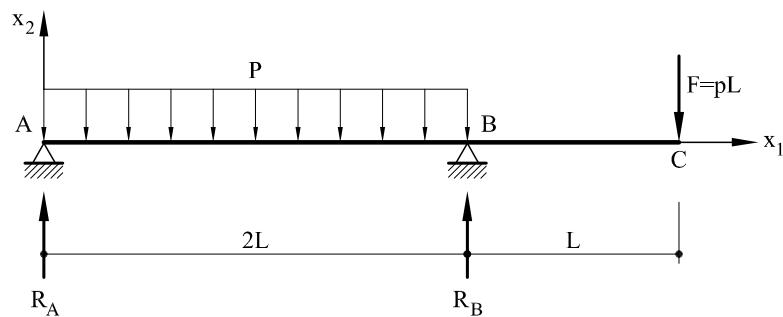


Fig. P2.3.1 Viga biapoyada del problema resuelto P2.3

Solución

Por equilibrio, se obtienen los valores de las reacciones en A y B

$$R_A = 0,5 pL$$

$$R_B = 2,5 pL$$

Cortando idealmente la pieza por un punto situado entre B y C , y de coordenada x_1 los esfuerzos valdrán

$$M_f|_B^C = (3L - x_1)pL$$

$$Q|_B^C = - pL$$

$$N|_B^C = 0$$

Cortando nuevamente la pieza por cualquier punto entre A y B y de coordenada x_1 se obtiene

$$M_f|_A^B = -(3L - x_1) pL - \frac{(2L - x_1)^2}{2} p + (2L - x_1) R_B = -p \frac{x_1^2}{2} + 0,5 p x_1 L$$

$$Q|_A^B = - pL + R_B - p (2L - x_1) = -0,5 p L + p x_1$$

$$N|_A^B = 0$$

En la figura P2.3.2 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

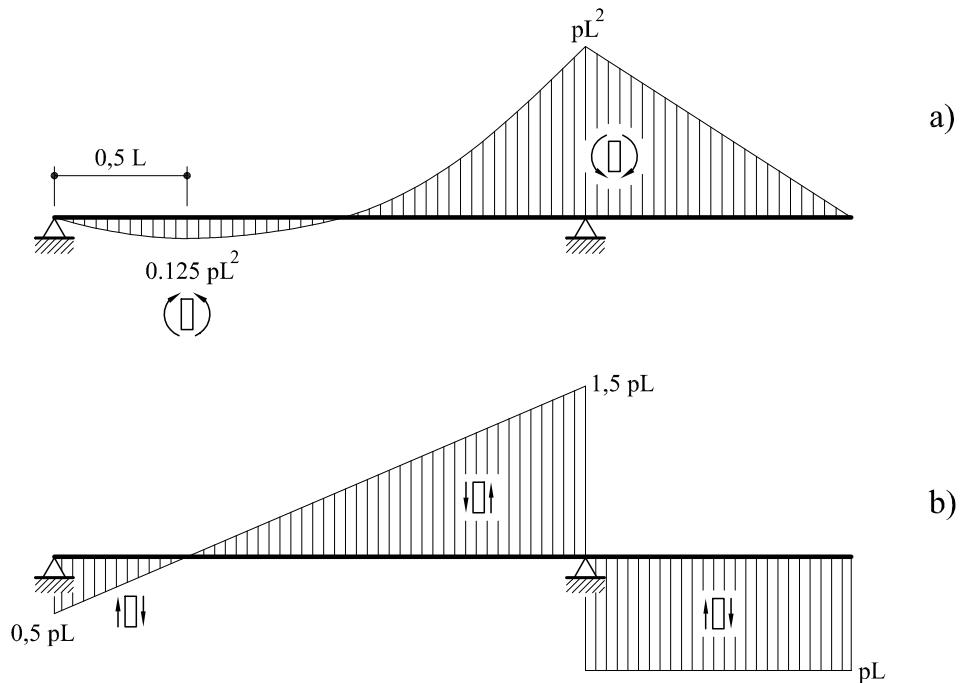


Fig. P2.3.2 Leyes de esfuerzos. a) Momento flector b) Esfuerzo cortante

♣ **Problema resuelto P2.4** Determinar las leyes de esfuerzos del pórtico de la figura P2.4.1

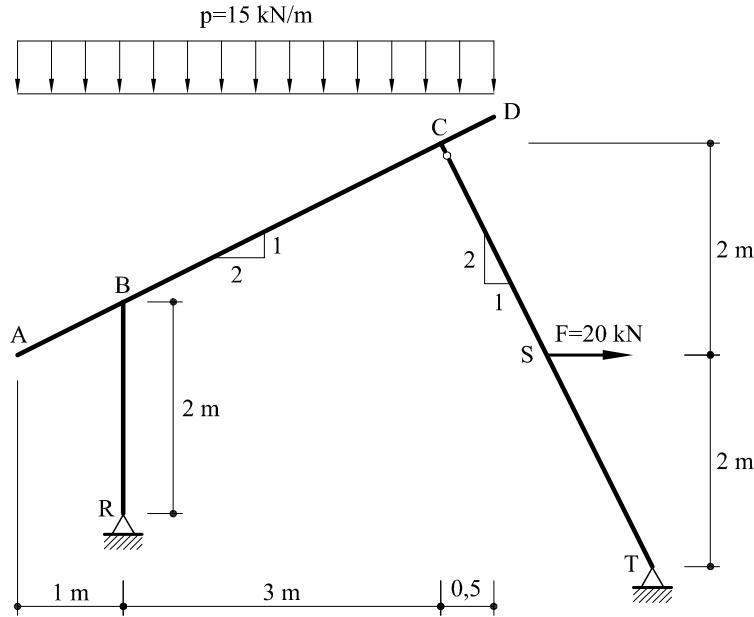


Fig. P2.4.1 Pórtico isostático correspondiente al problema resuelto P2.4

Solución

En la figura P2.4.2 pueden verse dibujadas las reacciones, así como los ejes locales de cada barra.

Las tres ecuaciones de equilibrio se escriben:

- Suma de momentos respecto al punto R : $\sum M_R = 0$

$$-67,5 \times 1,25 - 20 \times 1,5 + V_T 5 - H_T 0,5 = 0$$

es decir

$$10V_T - H_T = 228,75$$

- Suma de fuerzas verticales: $\sum F_V = 0$

$$V_R + V_T = 67,5$$

- Suma de fuerzas horizontales: $\sum F_H = 0$

$$H_R + H_T = 20$$

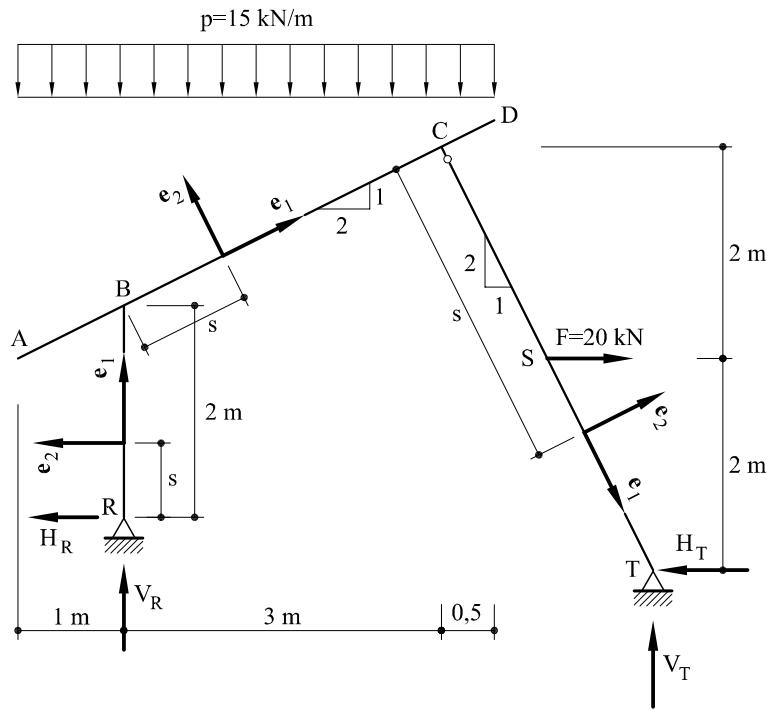


Fig. P2.4.2 Reacciones y ejes locales

La rótula en C proporciona una nueva ecuación: Suma de momentos respecto al punto C de todas las fuerzas y reacciones que hay en CT

$$\begin{aligned} 2V_T - 4H_T + 2 \times 20 &= 0 \\ V_T - 2H_T &= -20 \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores proporcionan un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Resolviéndolo:

$$V_T = 25,13 \text{ kN}$$

$$H_T = 22,57 \text{ kN}$$

$$V_R = 42,37 \text{ kN}$$

$$H_R = -2,57 \text{ kN}$$

A partir de estos valores es posible obtener las leyes de esfuerzos.

a) Momentos flectores

$$\begin{aligned}
 M_f|_S^T &= -40 + 8,94s \quad kNm \\
 M_f|_C^S &= -8,94s \quad kNm \\
 M_f|_A^B &= -6 s^2 \quad kNm \\
 M_f|_B^C &= 23,3s - 12,64 - 6 s^2 \quad kNm \\
 M_f|_C^D &= -1,88 + 6,71s - 6 s^2 \quad kNm \\
 M_f|_R^B &= -2,57s \quad kNm
 \end{aligned}$$

b) Esfuerzos cortantes

$$\begin{aligned}
 Q|_S^T &= -8,94 \quad kN \\
 Q|_C^S &= 8,94 \quad kN \\
 Q|_A^B &= 12s \quad kN \\
 Q|_B^C &= 12s - 23,3 \quad kN \\
 Q|_C^D &= -6,7 + 12s \quad kN \\
 Q|_R^B &= 2,57 \quad kN
 \end{aligned}$$

c) Esfuerzos axiles

$$\begin{aligned}
 N|_S^T &= -32,6 \quad kN \\
 N|_C^S &= -23,65 \quad kN \\
 N|_A^B &= 6s \quad kN \\
 N|_B^C &= 14,54 + 6s \quad kN \\
 N|_C^D &= -3,3 + 6s \quad kN \\
 N|_R^B &= -42,37 \quad kN
 \end{aligned}$$

En las figuras P2.4.3, P2.4.4. y P2.4.5 pueden verse representadas las leyes anteriores.

2.7 Principio de Saint-Venant

Las tensiones, deformaciones y movimientos, en una estructura formada por piezas lineales, pueden ser calculadas utilizando los principios y desarrollos generales de la Elasticidad expuestos en el Capítulo 1. Sin embargo, tal como se vio, su aplicación directa conduce a ecuaciones excesivamente complejas para su utilización en la práctica de la ingeniería.

No obstante, estableciendo unos pocos principios adicionales (suficientemente contrastados por la práctica) acerca del comportamiento de las piezas lineales, es posible llegar a expresiones más sencillas, directas y fácilmente resolubles. El primero de tales principios es el de Saint-Venant, el cual establece que *el estado tensodeformacional de*

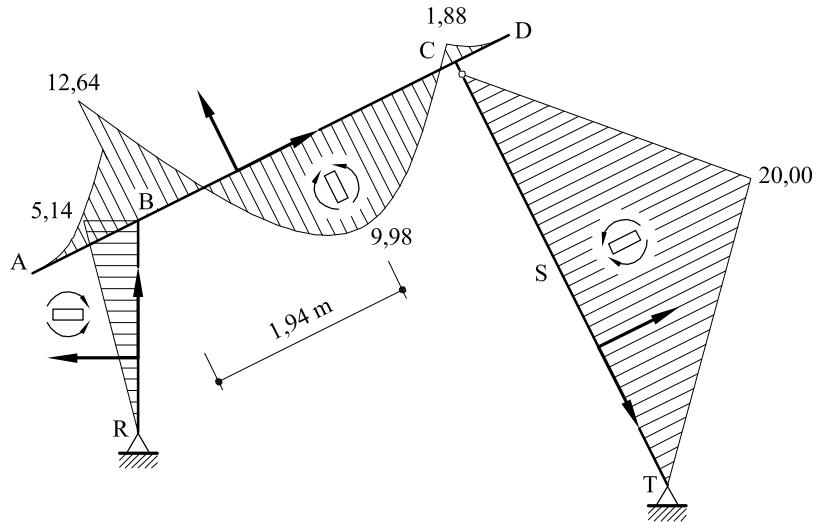


Fig. P2.4.3 Leyes de momentos flectores

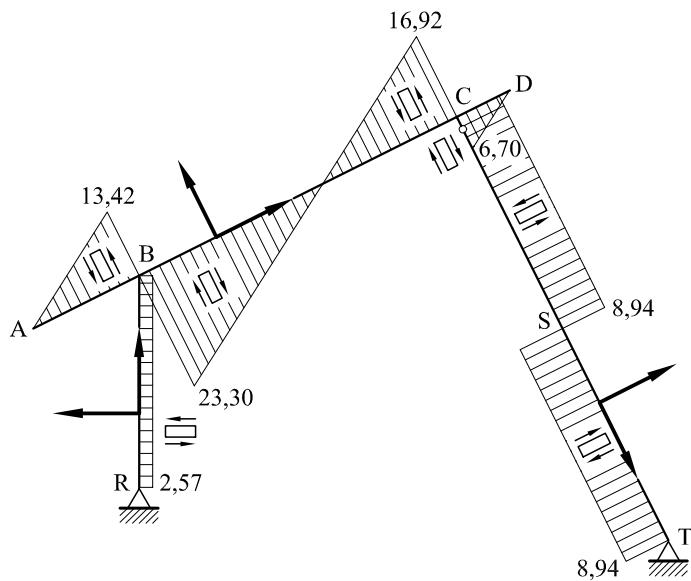


Fig. P2.4.4 Leyes de esfuerzos cortantes

una pieza lineal depende exclusivamente de los esfuerzos. Es decir, que diferentes sistemas de acciones o cargas que produzcan los mismos esfuerzos darán lugar a tensiones y deformaciones iguales. Este principio es fundamental en el Cálculo de Estructuras.

Lógicamente, el principio no será cierto en las proximidades de cargas puntuales que

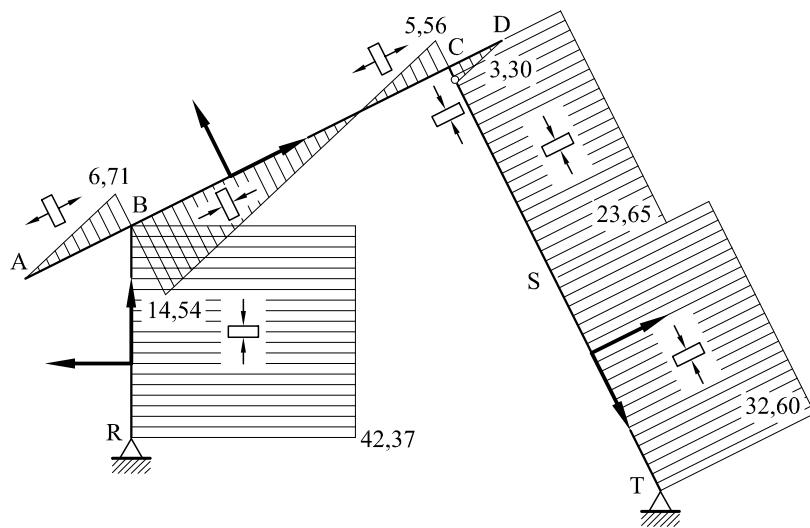


Fig. P2.4.5 Leyes de esfuerzos axiles

den lugar a concentraciones de tensiones, pudiéndose no obstante ser aplicado a una distancia prudencial del punto de aplicación de tales cargas (del orden del canto).

Si se aplica de forma indiscriminada (como sucede en la práctica usual del cálculo de estructuras, y como se aplicará a lo largo de este texto), es preciso posteriormente tomar en el diseño las disposiciones constructivas necesarias para absorber o minorar las mencionadas tensiones concentradas (colocando por ejemplo rigidizadores, refuerzos, etc.). De hecho, este es el proceso habitual de cálculo de una estructura.

2.8 Ejercicios propuestos

♣ **Ejercicio propuesto EP2.1** Determinar y dibujar las leyes de esfuerzos en las tres vigas que se representan en la figura EP2.1.

Valores de control:

a) Para la viga superior:

- Momento en el empotramiento: $280 \text{ kN} \times \text{m}$
- Reacción vertical en el empotramiento: 70 kN (descendente)

b) Para la viga inferior:

- Momento flector en el apoyo izquierdo: $-90 \text{ kN} \times \text{m}$
- Reacción vertical en el apoyo izquierdo: 120 kN (ascendente)

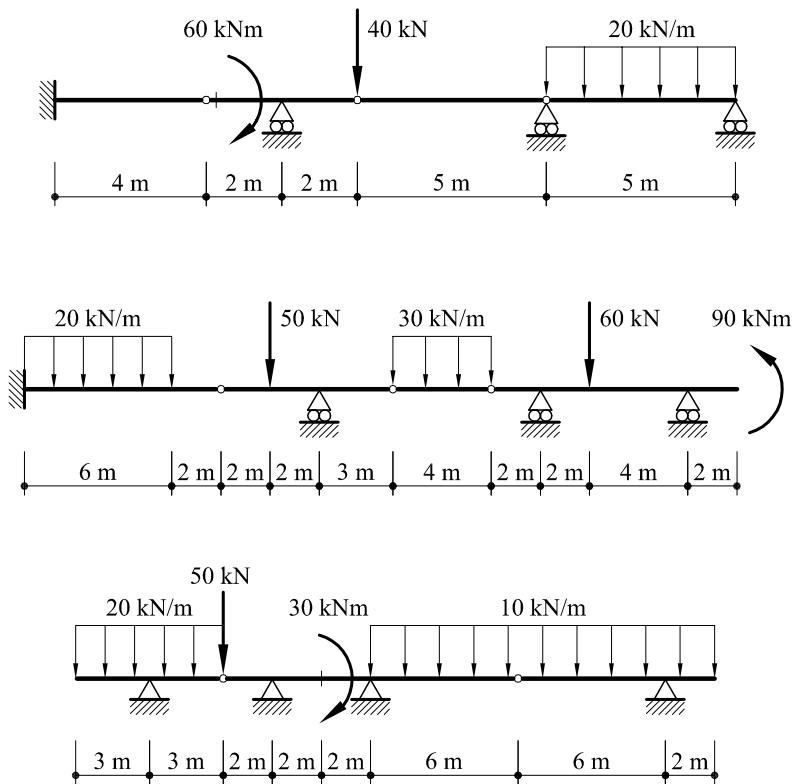


Fig. EP2.1

♣ **Ejercicio propuesto EP2.2** Determinar las reacciones y leyes de esfuerzos en todos los puntos de la estructura de la figura EP2.2.

Valores de control:

- Reacción horizontal del apoyo izquierdo: 7,4 kN (hacia la izquierda)
- Reacción vertical del apoyo derecho: 130,2 kN (hacia arriba)

♣ **Ejercicio propuesto EP2.3** Determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones en el pórtico de la figura EP2.3.

Valores de control:

- Momento flector en el punto de aplicación de la carga puntual $M_f = 16,4 \text{ kN} \times \text{m}$ (traccionante el exterior del pórtico)
- Axil en el apoyo derecho: 83,1 kN (compresión)

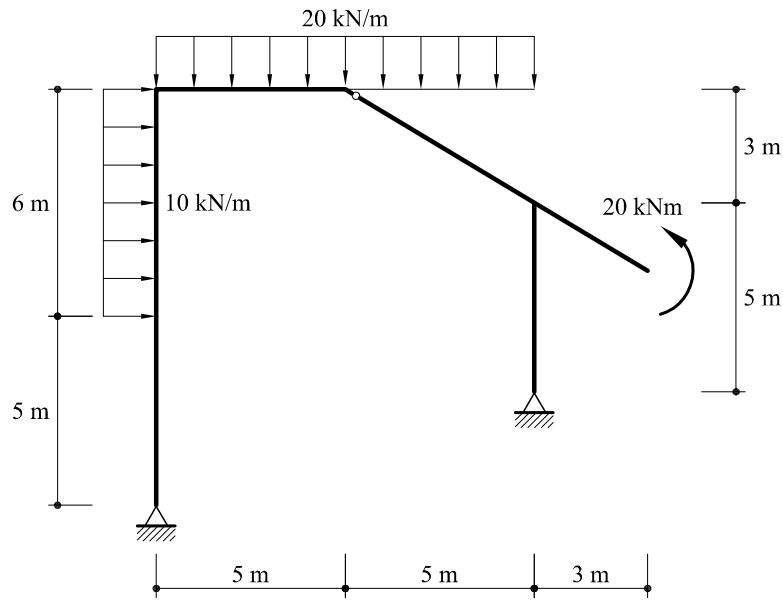


Fig. EP2.2

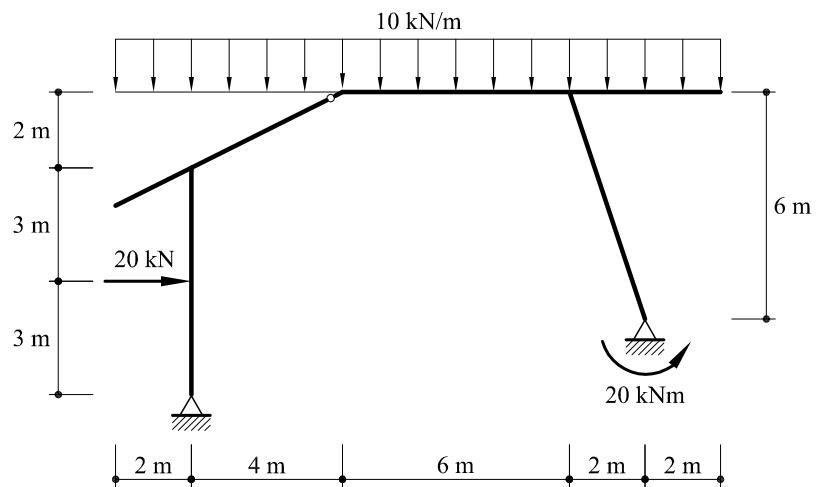


Fig. EP2.3

♣ **Ejercicio propuesto EP2.4** Determinar y dibujar las leyes de esfuerzos en el pórtico de la figura EP2.4, acotando los puntos más significativos.

Valor de control:

- Momento reacción en el empotramiento: $450 \text{ kN} \times \text{m}$

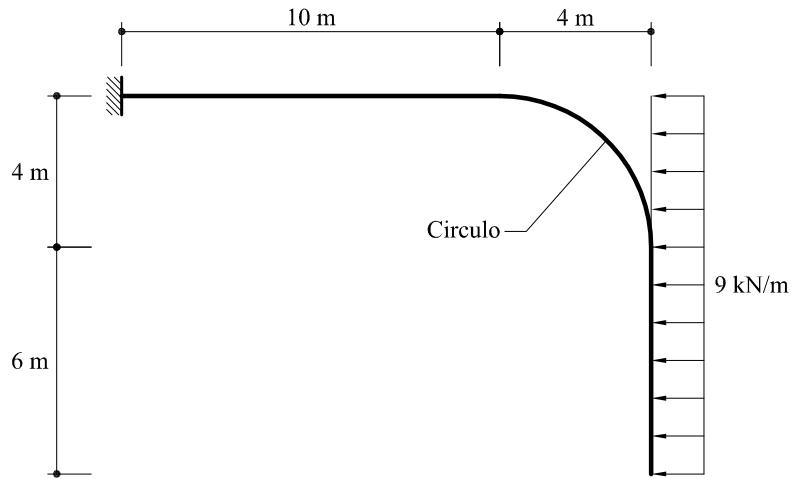


Fig. EP2.4

♣ **Ejercicio propuesto EP2.5** En la estructura de la figura EP2.5, hallar la expresión analítica y el dibujo de las leyes de esfuerzos.

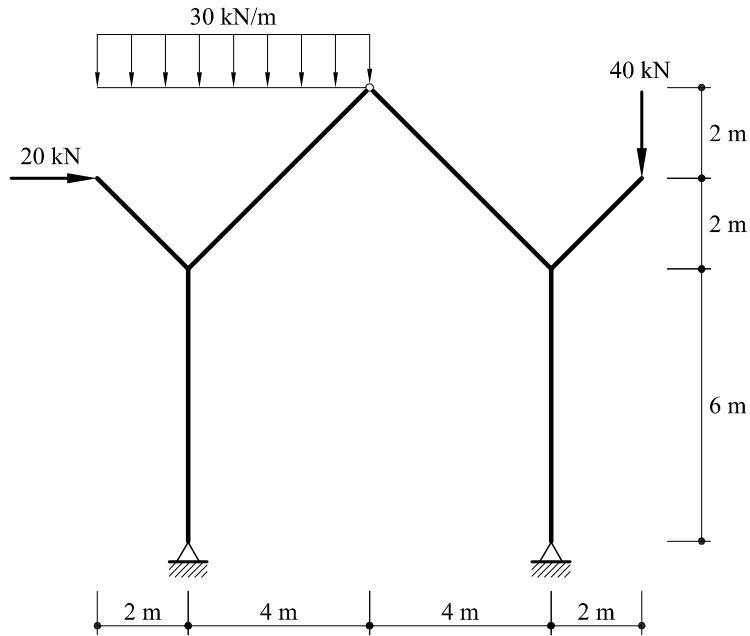


Fig. EP2.5

Valores de control:

- Reacción horizontal en el apoyo derecho: $13,0 \text{ kN}$ (hacia el interior)
- Reacción vertical del apoyo izquierdo: 127 kN (hacia arriba)
- Momento flector en el punto más elevado del soporte derecho: $78,0 \text{ kN} \times \text{m}$ (traccionante el exterior del pórtico)

♣ **Ejercicio propuesto EP2.6** Determinar las leyes de esfuerzos y las reacciones en la estructura de la figura EP2.6.

Valores de control:

- Momento de empotramiento: $173 \text{ kN} \times \text{m}$ (sentido horario)
- Momento flector en el punto de aplicación de la fuerza concentrada de 40 kN : $40 \text{ kN} \times \text{m}$

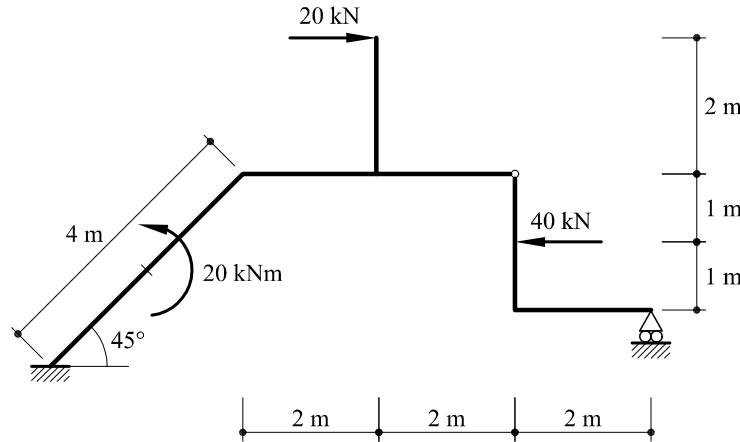


Fig. EP2.6

♣ **Ejercicio propuesto EP2.7** Calcular las reacciones y las leyes de esfuerzos en la estructura de la figura EP2.7.

Valores de control:

- Reacción vertical del apoyo izquierdo: $31,5 \text{ kN}$ (sentido ascendente)
- Reacción horizontal en D: $5,3 \text{ kN}$ (dirigida hacia la izquierda)
- Momento flector en B: $53 \text{ kN} \times \text{m}$ (traccionante el exterior del pórtico)

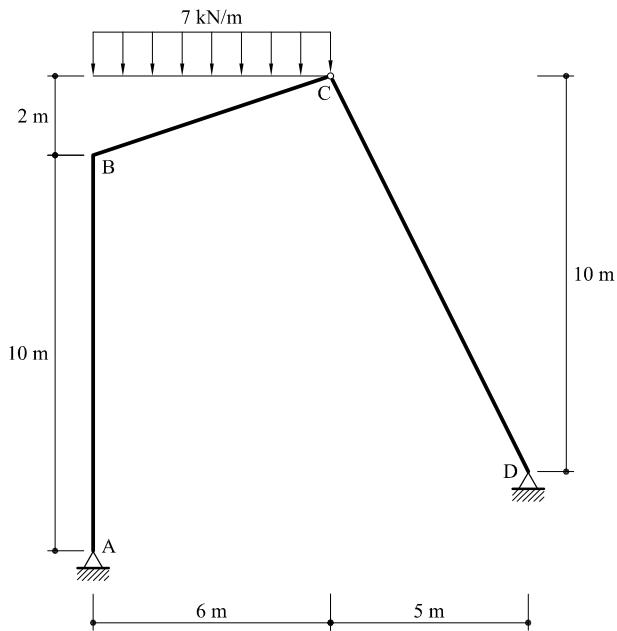


Fig. EP2.7

♣ **Ejercicio propuesto EP2.8** En la estructura de la figura, determinar y dibujar (acotándolas debidamente) las leyes de esfuerzos.

Valor de control:

- Momento flector en B de la pieza AB: $33,2 \text{ kN} \times \text{m}$ (traccionando el interior del pórtico)

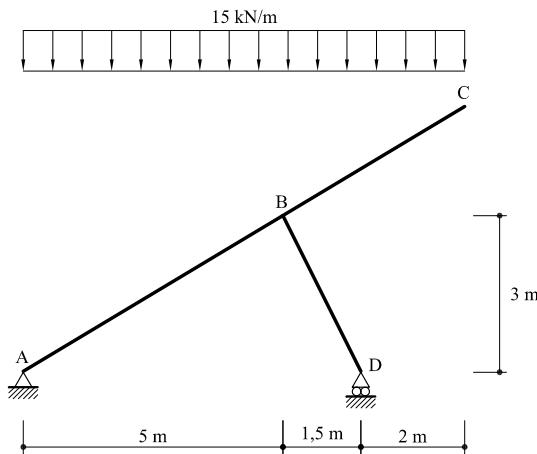


Fig. EP2.8

♣ **Ejercicio propuesto EP2.9** En la estructura que se acota en la figura, hallar y dibujar las reacciones y las leyes de esfuerzos.

Valores de control:

- Reacción vertical del apoyo izquierdo: $0,67 \text{ kN}$ (sentido ascendente)
- Momento flector en la parte superior del pilar: $165,92 \text{ kN} \times \text{m}$ (tracciona la fibra izquierda)

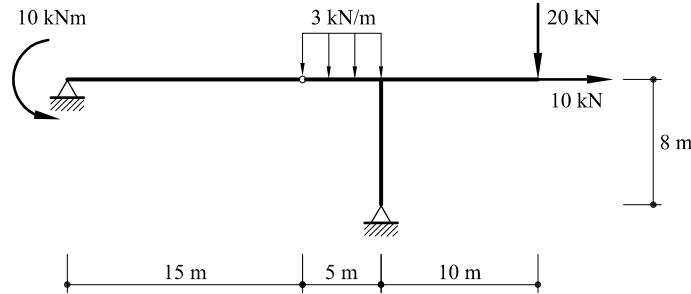


Fig. EP2.9

♣ **Ejercicio propuesto EP2.10** En la estructura que se acota en la figura EP2.10, determinar las reacciones y las leyes de esfuerzo.

Valores de control:

- Reacción horizontal del apoyo izquierdo : $3,25 \text{ kN}$ (dirigida hacia la izquierda)
- Momento flector en la parte superior del soporte derecho: $34,63 \text{ kN} \times \text{m}$ (tracciona la fibra derecha)

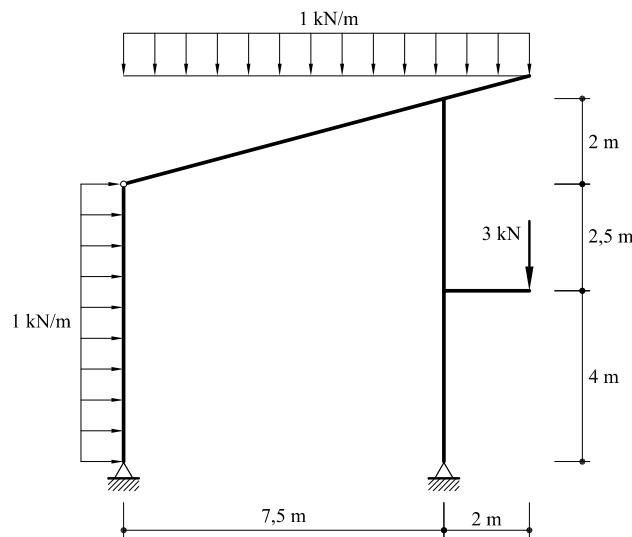


Fig. EP2.10

3 Esfuerzo axial

3.1 Hipótesis básicas

Se dice que una sección de una pieza está sometida a esfuerzo axial cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre dicha sección es normal a ella (y por tanto tiene la dirección de la tangente a la directriz) y pasa por el centro de gravedad.

Para iniciar el estudio de los efectos producidos por el esfuerzo axial en una sección, considérese, en primer lugar, el caso de una pieza recta de sección constante y longitud L sometida a un esfuerzo axial constante de valor N (Fig. 3.1).

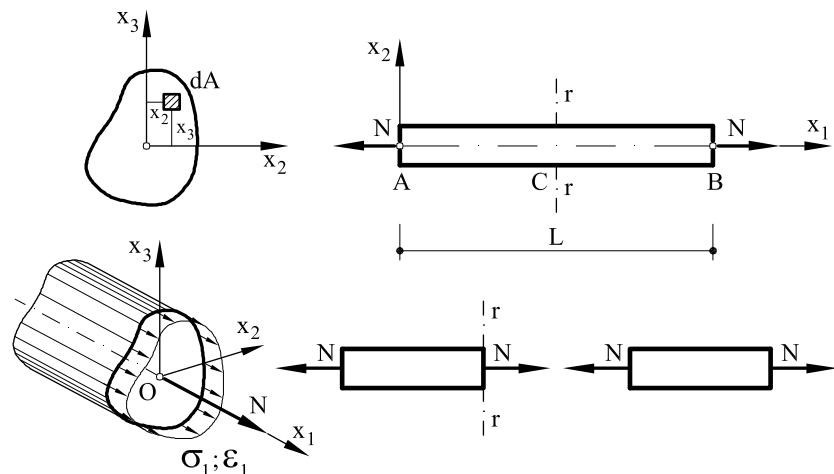


Fig. 3.1 Pieza recta sometida a un esfuerzo axial constante

Por efecto de dicho esfuerzo axial, la pieza experimentará un incremento de longitud de valor v_1 . Si se observa la deformación de la sección media de la pieza, es evidente que por condiciones de simetría debe permanecer plana y perpendicular a la pieza después de la deformación. Si seguidamente se separa idealmente la pieza en dos mediante un plano perpendicular a la misma por el punto C (punto medio de AB), por las mismas razones

expuestas anteriormente, las secciones medias de CA y de CB deben permanecer planas y perpendiculares a la pieza. El proceso anterior puede repetirse realizando sucesivos cortes ideales a los distintos trozos en que va quedando dividida la pieza original, llegándose a la conclusión de que las correspondientes secciones permanecen planas. Ello constituye la *hipótesis de Navier*. La *hipótesis de Navier*, también denominada *hipótesis de Navier-Bernouilli*, establece que en el caso más general de una pieza elástica sometida a un esfuerzo axil *las secciones permanecen planas después de la deformación*.

La hipótesis de Navier constituye el punto de partida para el estudio de los efectos producidos por el esfuerzo axil en una sección. Constituye asimismo una de las hipótesis fundamentales de la Resistencia de Materiales.

La hipótesis de Navier, aunque ha sido formulada y justificada para piezas rectas, es también aplicable a piezas curvas. Toda la formulación que se desarrolla en este capítulo se realiza para elementos diferenciales de piezas rectas, admitiéndose no obstante su validez para el caso de piezas curvas de radios de curvatura grandes.

3.2 Distribución de tensiones y deformaciones

Supóngase una pieza elástica de sección cualquiera, de la que se aísla una rebanada de longitud ds . Supóngase asimismo que esta rebanada está sometida exclusivamente a un esfuerzo axil N . De acuerdo con la hipótesis de Navier, la distribución de deformaciones en una sección valdrá

$$\varepsilon_1(x_2, x_3) = \alpha x_2 + \beta x_3 + \epsilon_1 \quad (3.1)$$

y por tanto las tensiones

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 E = \alpha E x_2 + \beta E x_3 + \epsilon_1 E \quad (3.2)$$

siendo α , β y ϵ_1 parámetros a determinar.

Es decir, la distribución de tensiones en la sección está contenida en un plano.

Dado que las únicas tensiones y deformaciones normales que aparecerán en lo sucesivo son las que hacen referencia al eje x_1 , se usarán indistintamente σ y σ_1 así como ϵ y ϵ_1 , siempre que no dé lugar a confusión.

Nótese además que el símbolo ϵ_1 hace referencia a la deformación en cualquier punto de la sección, mientras que ϵ_1 se refiere a la deformación en el punto de corte de la directriz de la pieza con la sección recta considerada.

Dado que los momentos flectores M_{f2} y M_{f3} deben ser nulos, por equilibrio deberá cumplirse que:

$$N = \int_A \sigma_1 dA = \alpha E \int_A x_2 dA + \beta E \int_A x_3 dA + \epsilon_1 E \int_A dA \quad (3.3a)$$

$$M_{f3} = \int_A x_2 \sigma_1 dA = \alpha E \int_A x_2^2 dA + \beta E \int_A x_2 x_3 dA + \epsilon_1 E \int_A x_2 dA = 0 \quad (3.3b)$$

$$M_{f_2} = \int_A x_3 \sigma_1 dA = \alpha E \int_A x_2 x_3 dA + \beta E \int_A x_3^2 dA + \epsilon_1 E \int_A x_3 dA = 0 \quad (3.3c)$$

Dado que los ejes x_2, x_3 pasan por el centro de gravedad, se cumplirá que

$$\int_A x_2 dA = \int_A x_3 dA = 0 \quad (3.4)$$

Por lo que, a partir de las ecuaciones 3.3b y 3.3c se deduce que $\alpha = \beta = 0$.

Se deduce, por tanto, que en una pieza sometida a esfuerzo axil las deformaciones ϵ_1 en una sección cualquiera son constantes. Análogamente, también serán constantes las tensiones, es decir:

$$\sigma_1 = \epsilon_1 E \quad (3.4)$$

Por lo que a partir de 3.3.a

$$N = \epsilon_1 EA = \sigma_1 A \quad (3.5)$$

y también

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{N}{EA} \quad (3.6)$$

y el alargamiento de la rebanada valdrá

$$dv_1 = \epsilon_1 ds = \frac{N}{EA} ds \quad (3.7)$$

El alargamiento total de la pieza puede escribirse

$$v_1 = \int_0^L \frac{N}{EA} ds \quad (3.8)$$

y si el esfuerzo axil en la misma es constante, entonces el alargamiento valdrá

$$v_1 = \frac{NL}{EA} \quad (3.9)$$

♣ Problema resuelto P3.1 Supóngase dos piezas OA y OB de longitudes $L_{OA} = 4\text{ m}$ y $L_{OB} = 6\text{ m}$. Ambas piezas están unidas entre sí por uno de sus extremos mediante una rótula, existiendo un apoyo fijo en el otro extremo (Fig. P3.1.1). Los módulos de elasticidad valen respectivamente $E_{OA} = 210\text{ GPa}$, $E_{OB} = 180\text{ GPa}$, siendo las áreas $A_{OA} = 4\text{ cm}^2$, $A_{OB} = 5\text{ cm}^2$.

En el punto O actúa un esfuerzo F de valor $F = 40\text{ kN}$. Se desea determinar:

- a) Ley de esfuerzos axiles en cada una de las barras
- b) Tensiones en cada barra
- c) Movimiento del punto O

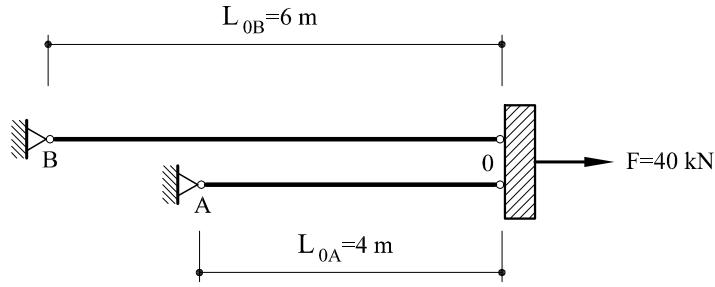


Fig. P3.1.1 Barras sometidas a esfuerzo axil

Solución

Primeramente se homogeneizan todas las unidades:

$$E_{OA} = 210 \text{ GPa} = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$E_{OB} = 180 \text{ GPa} = 180 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$A_{OA} = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{OB} = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Sean N_{OA} y N_{OB} los esfuerzos axiles de cada una de las barras. Evidentemente por equilibrio

$$N_{OA} + N_{OB} = F = 40 \text{ kN} = 40000 \text{ Newton} \quad (a)$$

Los desplazamientos v_{OA} y v_{OB} de cada una de las barras deben ser iguales por condiciones de compatibilidad, es decir

$$v_1 = v_{OA} = \frac{N_{OA}L_{OA}}{E_{OA}A_{OA}} = \frac{N_{OA} \times 4}{210 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-4}} = 4,76 \times 10^{-8} N_{OA}$$

$$v_1 = v_{OB} = \frac{N_{OB}L_{OB}}{E_{OB}A_{OB}} = \frac{N_{OB} \times 6}{180 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-4}} = 6,66 \times 10^{-8} N_{OB}$$

Igualando se obtiene

$$4,76 \times 10^{-8} N_{OA} = 6,66 \times 10^{-8} N_{OB} \quad (b)$$

Las expresiones (a) y (b) definen un sistema de ecuaciones que permite obtener los valores de N_{OA} y N_{OB} .

$N_{OA} = 23327 \text{ Newton} = 23,33 \text{ kN}$
$N_{OB} = 16672 \text{ Newton} = 16,67 \text{ kN}$

Las tensiones producidas por el esfuerzo axil valdrán en cada barra

$$\sigma_{OA} = \frac{N_{OA}}{A_{OA}} = \frac{23,33}{4 \times 10^{-4}} = 58\,250 \text{ kN/m}^2 = 58,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{OB} = \frac{N_{OB}}{A_{OB}} = \frac{16,67}{5 \times 10^{-4}} = 33\,400 \text{ kN/m}^2 = 33,4 \text{ MPa}$$

Por lo que respecta al corrimiento del punto O, éste valdrá

$$v_1 = 4,76 \times 10^{-8} N_{OA} = 4,76 \times 10^{-8} \times 23\,327 = 0,0011 \text{ m} = 0,11 \text{ cm}$$

o bien

$$v_1 = 6,66 \times 10^{-8} N_{OB} = 6,66 \times 10^{-8} \times 16\,672 = 0,0011 \text{ m} = 0,11 \text{ cm}$$

♣ **Problema resuelto P3.2** La pieza recta de la Figura P3.2.1 tiene longitud total $2L$. En el tramo AB el área de la sección recta vale A , mientras que en el BC vale $2A$. El conjunto está sometido a un esfuerzo axil N de tracción. Determinar:

- a) Distribución de tensiones
- b) Movimiento de los puntos B y C

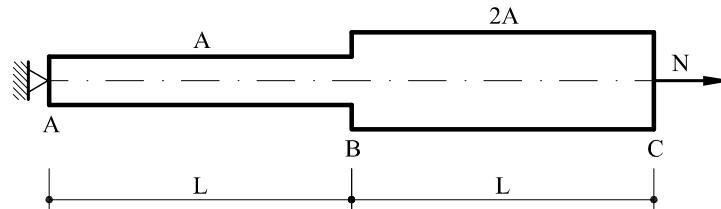


Fig. P3.2.1 Pieza correspondiente al problema resuelto P3.2

Solución

En ambos tramos la distribución de tensiones será constante en el interior de la sección y de valor:

- Tramo AB: $\sigma_{AB} = \frac{N}{A}$

- Tramo BC: $\sigma_{BC} = \frac{N}{2A}$

Por lo que respecta a los movimientos, el del punto B valdrá $(v_1)_B = \frac{NL}{EA}$, mientras que el del punto C será:

$$(v_1)_C = \frac{NL}{EA} + \frac{NL}{2EA} = \frac{3NL}{2EA}$$

3.3 Análisis de las deformaciones no mecánicas

Sea ϵ_1^{nt} la deformación longitudinal de una barra producida por causas distintas a las tensionales, como por ejemplo: retracción, temperatura, etc.

Las deformaciones totales en cada punto serán

$$\epsilon_1^t = \epsilon_1 + \epsilon_1^{nt} \quad (3.10)$$

por lo que el alargamiento total de una rebanada valdrá

$$dv_1^t = \epsilon_1 ds + \epsilon_1^{nt} ds = \frac{\sigma_1}{E} ds + \epsilon_1^{nt} ds = \frac{N}{EA} ds + \epsilon_1^{nt} ds \quad (3.11)$$

e integrando

$$v_1^t = \int_o^L \frac{N}{EA} ds + \int_o^L \epsilon_1^{nt} ds \quad (3.12)$$

y si la pieza es recta y el esfuerzo axil constante

$$v_1^t - \int_o^L \epsilon_1^{nt} ds = \frac{NL}{EA} \quad (3.13)$$

expresión más completa que 3.9.

♣ **Problema resuelto P3.3** Considérese una pieza recta biapoyada de longitud L , sección recta constante A y módulo de Elasticidad E (Fig. P3.3.1a). Dicha viga está sometida a una deformación longitudinal de acortamiento ϵ_1^{nt} producida por la retracción, y de forma que $\epsilon_1^{nt} = -0,0035$. Determinar las tensiones en la pieza así como el valor del esfuerzo axil.

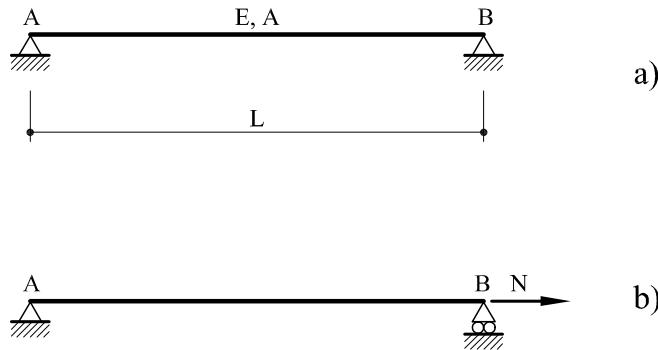


Fig. P3.3.1 Pieza biapoyada sometida a retracción

Solución

Al tener la pieza ambos extremos impididos y no poder desarrollarse el acortamiento debido a la retracción, aparecerá un esfuerzo axil. Para calcularlo, se libera el punto *B* introduciéndose el esfuerzo axil *N* (Fig. P3.3.1b). Lógicamente el movimiento total del punto *B* debe ser nulo, por lo que de acuerdo con 3.13

$$0 - \int_o^L (-0,0035) \, ds = \frac{NL}{EA}$$

es decir

$$N = 0,0035 EA$$

Como puede verse, el valor del esfuerzo axil es independiente de la longitud de la pieza.

3.4 Secciones compuestas por diferentes materiales

En la práctica de la construcción, aparecen con cierta frecuencia piezas compuestas por diversos materiales, cada uno de ellos con sus propias características tensodeformacionales, como por ejemplo las estructuras mixtas de hormigón y acero, el hormigón pretensado, etc.

Para analizar los efectos producidos por el esfuerzo axil en este tipo de secciones, supóngase que, en el caso más general, el módulo de elasticidad en la sección es función del punto, es decir

$$E = E(x_2, x_3) \quad (3.14)$$

De acuerdo con la hipótesis de Navier, la ley de deformaciones será la misma que la dada por 3.1, mientras que las tensiones vendrán dadas por

$$\sigma_1 = \epsilon_1 E(x_2, x_3) \quad (3.15)$$

Las expresiones 3.3 quedarán

$$N = \alpha \int_A x_2 E(x_2, x_3) \, dA + \beta \int_A x_3 E(x_2, x_3) \, dA + \epsilon_1 \int_A E(x_2, x_3) \, dA \quad (3.16a)$$

$$M_{f3} = \alpha \int_A x_2^2 E(x_2, x_3) \, dA + \beta \int_A x_2 x_3 E(x_2, x_3) \, dA + \epsilon_1 \int_A x_2 E(x_2, x_3) \, dA = 0 \quad (3.16b)$$

$$M_{f2} = \alpha \int_A x_2 x_3 E(x_2, x_3) \, dA + \beta \int_A x_3^2 E(x_2, x_3) \, dA + \epsilon_1 \int_A x_3 E(x_2, x_3) \, dA = 0 \quad (3.16c)$$

Obsérvese que la diferencia entre las expresiones 3.16 y 3.3 radica en el hecho de que los valores del módulo de elasticidad *E* no pueden sacarse fuera de la integral al no ser constantes.

Si por comparación con el caso de sección de material homogéneo se admite la hipótesis de que las deformaciones ϵ son constantes en toda la sección, es preciso que las siguientes integrales se anulen

$$\int_A x_2 E(x_2, x_3) dA = \int_A x_3 E(x_2, x_3) dA = 0 \quad (3.17)$$

Ello implica que el origen de los ejes y el punto de actuación del esfuerzo axil debe ser el centro de gravedad *mecánico* de la sección. Dicho centro de gravedad se obtiene dando a cada punto de la sección una *densidad*

$$\rho = E(x_2, x_3) \quad (3.18)$$

Al igual que anteriormente, se cumplirá que $\alpha = \beta = 0$. Análogamente,

$$N = \int_A \sigma_1 dA = \int_A \epsilon_1 E(x_2, x_3) dA = \epsilon_1 \int_A E(x_2, x_3) dA \quad (3.19)$$

por lo que

$$\epsilon_1 = \frac{N}{\int_A E(x_2, x_3) dA} \quad (3.20)$$

Las tensiones en cada punto vendrán por tanto dadas por

$$\sigma_1(x_2, x_3) = E(x_2, x_3)\epsilon_1 = \frac{NE(x_2, x_3)}{\int_A E(x_2, x_3) dA} \quad (3.21)$$

y el alargamiento de la rebanada

$$dv_1 = \epsilon_1 ds = \frac{N ds}{\int_A E(x_2, x_3) dA} \quad (3.22)$$

Las expresiones 3.20 a 3.22 proporcionan la respuesta en deformaciones, tensiones y movimientos al problema planteado. Dichas expresiones suelen sin embargo escribirse en muchos casos en forma ligeramente diferente. Para ello, supóngase que se fija un módulo de elasticidad de referencia \bar{E} (en general coincide con el módulo de elasticidad menor de entre todos los materiales que forman la sección), y sea por definición

$$n = \frac{E(x_2, x_3)}{\bar{E}} \quad (3.23)$$

Se tendrá entonces que

$$\int_A E(x_2, x_3) dA = \int_A n \bar{E} dA = \bar{E} \int_A n dA = \bar{E} A^* \quad (3.24)$$

siendo $A^* = \int_A n dA$ el *área mecánica* de la sección.

Con estas nuevas definiciones las expresiones 3.20 a 3.22 quedarán

$$\epsilon_1 = \frac{N}{\bar{E}A^*} \quad (3.25)$$

$$\sigma_1 = n \frac{N}{A^*} \quad (3.26)$$

$$dv_1 = \frac{Nds}{\bar{E}A^*} \quad (3.27)$$

y el alargamiento total de la sección en el caso en que la pieza sea recta

$$v_1 = \int_A \frac{Nds}{\bar{E}A^*} \quad (3.28)$$

♣ **Problema resuelto P3.4** Una determinada viga de hormigón pretensado de $30 \times 30 \text{ cm}^2$ (sección cuadrada) se fabrica de la siguiente forma: Se tensan cuatro cables de acero de $0,8 \text{ cm}^2$, cada uno de ellos dispuestos en las esquinas de un cuadrado de lado 25 cm . La tensión de cada cable es de 1400 MPa . Posteriormente se hormigonan la sección y una vez endurecida se cortan los cables, con lo cual el hormigón queda comprimido (Figs. P3.4.1 y P3.4.2). Se desea conocer:

- a) Tensiones de compresión finales en el hormigón
- b) Tensiones finales en el acero
- c) Acortamiento de la pieza al cortar los cables

Una vez fabricada la pieza, se la somete a un esfuerzo axil de tracción de valor $N = 720 \text{ kN}$. Se pregunta:

- d) Tensiones finales en el acero y en el hormigón
 - e) Alargamiento de la pieza como consecuencia de la aplicación de la carga N de 720 kN .
- Módulo de Elasticidad del acero $E_a = 210 \text{ GPa}$
- Módulo de Elasticidad del hormigón $E_h = 30 \text{ GPa}$
- Longitud de la pieza $L = 4 \text{ metros}$

Solución

La sección así formada está compuesta por dos materiales: hormigón y acero. Sea $\bar{E} = E_h$ y $E_a = nE_h = n\bar{E}$. Obviamente

$$n = \frac{E_a}{E_h} = \frac{210}{30} = 7$$

Por otro lado, el área del hormigón (descontando la porción de acero) será

$$A_h = 30 \times 30 - 4 \times 0,8 = 896,8 \text{ cm}^2$$

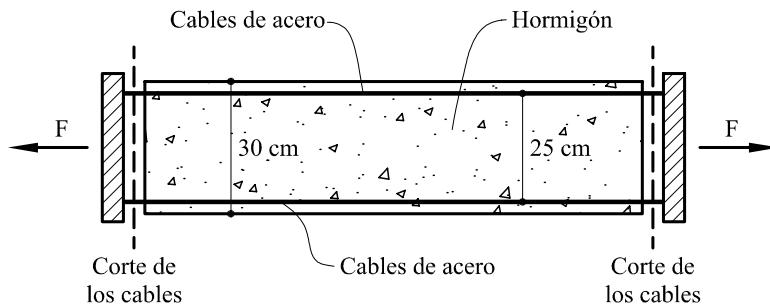


Fig. P3.4.1 Barras sometidas a esfuerzo axil

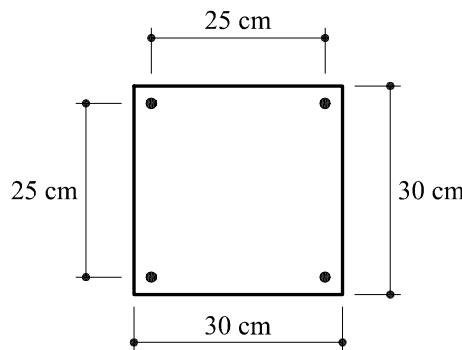


Fig. P3.4.2 Pieza de hormigón pretensado

Se enfocará la resolución de la primera parte del problema (apartados a), b) y c)) utilizando dos procedimientos diferentes:

Procedimiento 1

Los esfuerzos iniciales en cada uno de los cables valdrán

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1400 \text{ MPa} \times 0,8 \text{ cm}^2 = 112 \text{ kN}$$

con lo que la fuerza total será

$$F = 4 \times 112 = 448 \text{ kN}$$

Cuando se cortan los cables, parte de este esfuerzo será transmitido al hormigón, con lo que el hormigón se acortará una cantidad Δ (Fig. P3.4.3). El hormigón quedará por tanto comprimido y sometido a un esfuerzo axil de valor N . Obviamente, por consideraciones de equilibrio, al no existir ninguna fuerza externa, la fuerza final total que actuará sobre el acero será también N . Además, por compatibilidad, el acortamiento del hormigón debe ser el mismo que el del acero. Es decir:

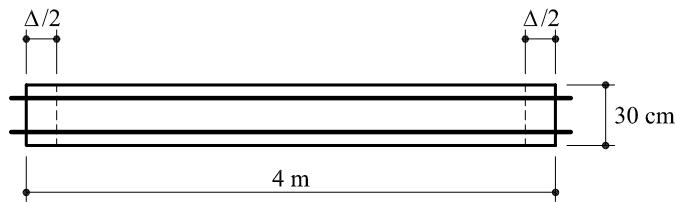


Fig. P3.4.3. Acortamiento de la pieza una vez cortados los cables

- Acortamiento del hormigón

$$\Delta = \frac{NL}{E_h A_h} = \frac{N \times 4 m}{30 GPa \times 896,8 \text{ cm}^2} = \frac{N \times 4 m}{30 \times 10^6 kN/m^2 \times 896,8 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$= 1,487 \times 10^{-6} N (\text{metros})$$

- Acortamiento del acero

$$\Delta = \frac{(F - N)L}{E_a A_a} = \frac{(448 kN - N) \times 4 m}{210 GPa \times 4 \times 0,8 \text{ cm}^2} = \frac{(448 kN - N) \times 4 m}{210 \times 10^6 kN/m^2 \times 4 \times 0,8 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$= 0,02667 - 0,5952 \times 10^{-4} N (\text{metros})$$

Obsérvese que el acortamiento del acero viene dado por la pérdida de tensión, es decir, por la diferencia entre el esfuerzo inicial F y el esfuerzo final N .

Como ambos alargamientos deben ser iguales

$$1,487 \times 10^{-6} N = 0,02667 - 0,5952 \times 10^{-4} N$$

de donde se obtiene $N = 437,16 kN$.

Las tensiones finales de compresión en el hormigón valdrán

$$\sigma_h = \frac{N}{A_h} = \frac{437,16 kN}{896,8 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 4,874 MPa \text{ (compresión)}$$

Las tensiones finales en el acero serán

$$\sigma_a = \frac{N}{A_a} = \frac{437,16 kN}{4 \times 0,8 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 1365,9 MPa \text{ (tracción)}$$

Como puede observarse

$$\sigma_h A_h = \sigma_a A_a = 437,16 kN$$

Por lo que respecta al acortamiento de la pieza, puede determinarse bien a partir del hormigón, bien a partir del acero.

A partir del hormigón:

$$\Delta = \frac{NL}{E_h A_h} = 1,487 \times 10^{-6} \times 437,16 = 0,65 \times 10^{-3} m = 0,65 mm$$

A partir del acero

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{(F - N)L}{E_a A_a} = 0,02667 - 0,5952 \times 10^{-4} N \\ &= 0,02667 - 0,5952 \times 10^{-4} \times 437,16 = 0,65 \times 10^{-3} m = 0,65 mm\end{aligned}$$

Obviamente ambas cantidades coinciden.

Procedimiento 2

El hecho de cortar los cables puede mirarse bajo el punto de vista de mantener las fuerzas de pretensado sobre los mismos y aplicar sobre la sección mixta de hormigón y acero una fuerza F , igual a la suma de las fuerzas de pretensado, cambiada de signo y aplicada en el punto de aplicación de la resultante de dichas fuerzas de pretensado.

El centro de gravedad geométrico y mecánico de la sección coinciden en este caso.

La resultante F vale

$$F = 4 \times 112 = 448 kN$$

A partir de 3.26 se obtienen las tensiones sobre el hormigón y sobre el acero debidas al hecho de cortar los cables

$$A^* = n_h A_h + n_a A_a = 1 \times 896,8 + 7 \times 4 \times 0,8 = 919,2 cm^2 = 0,09192 m^2$$

por lo que

$$\sigma_h = n_h \frac{F}{A^*} = 1 \times \frac{448}{0,09192} = 4873,8 kN/m^2 = 4,8738 MPa \text{ (compresión)}$$

$$\Delta\sigma_a = n_a \frac{F}{A^*} = 7 \times \frac{448}{0,09192} = 34116 kN/m^2 = 34,116 MPa \text{ (compresión)}$$

El valor anterior $\Delta\sigma_a$ representa la pérdida de tensión en los cables como consecuencia del pretensado.

Por lo que las tensiones finales en el acero valdrán

$$\sigma_a = 1400 - \Delta\sigma_a = 1400 - 34,116 = 1365,884 MPa \text{ (tracción)}$$

Por lo que respecta al acortamiento de la pieza al cortar los cables, de acuerdo con 3.28 se tendrá

$$\Delta = \int_0^L \frac{F ds}{E A^*} = \int_0^4 \frac{448}{30 GPa \times 0,09192 m^2} ds = 0,65 \times 10^{-3} m = 0,65 mm$$

valor que coincide con el obtenido anteriormente.

Para contestar a los apartados d) y e), se aplican directamente las fórmulas vistas anteriormente:

Las tensiones debidas al esfuerzo de 720 kN valdrán

- En el hormigón

$$\Delta\sigma_h = n_h \frac{N}{A^*} = 1 \times \frac{720}{0,09192} = 7833 \text{ kN/m}^2 = 7,833 \text{ MPa} \text{ (tracción)}$$

- En el acero

$$\Delta\sigma_a = n_a \frac{N}{A^*} = 7 \times \frac{720}{0,09192} = 54830 \text{ kN/m}^2 = 54,83 \text{ MPa} \text{ (tracción)}$$

Por lo tanto, las tensiones finales valdrán

- En el hormigón

$$\sigma_h^f = -4,8738 + 7,833 = 2,959 \text{ MPa} \text{ (tracción)}$$

- En el acero

$$\sigma_a^f = 1365,884 + 54,83 = 1420,714 \text{ MPa} \text{ (tracción)}$$

Por último, para ver el alargamiento de la pieza debido a la carga de 720 kN, se utiliza la expresión 3.28

$$\Delta = \int_0^L \frac{NdS}{EA^*} = \int_0^4 \frac{720 \text{ kN}}{30 \text{ GPa} \times 0,09192 \text{ m}^2} ds = 1,04 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,04 \text{ mm}$$

3.5 Energía de deformación

El objetivo de este apartado es obtener una expresión que permita expresar la energía de deformación de una pieza en función de la ley de esfuerzos axiles de la misma. Para ello, se parte de la expresión 1.49 que proporciona la energía de deformación de un cuerpo elástico en función de las tensiones y deformaciones existentes en el mismo. Partiendo de esta expresión, se puede escribir que la energía de deformación por unidad de volumen vale

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.29)$$

y puesto que las únicas tensiones existentes son las tensiones $\sigma_1 = \sigma$, la anterior expresión se escribe

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (3.30)$$

Si 3.30 se integra para toda la sección, se obtendrá la energía de deformación por unidad de longitud. Y puesto que tanto las tensiones como las deformaciones son constantes en la sección

$$\overset{\triangle}{W}_N = \int_A \overset{\triangle}{W} dA = \frac{1}{2} \int_A \sigma \epsilon dA = \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 A = \frac{1}{2} N \epsilon = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \quad (3.31)$$

La energía elástica de deformación de toda la pieza, se obtendrá integrando $\overset{\triangle}{W}_N$ a lo largo de la misma

$$W_N = \int_0^L \overset{\triangle}{W}_N ds = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds \quad (3.32)$$

En el caso de piezas compuestas por diversos materiales, la expresión anterior se escribirá

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{\bar{E}A^*} ds \quad (3.33)$$

Las anteriores expresiones 3.32 y 3.33 serán utilizadas posteriormente cuando se estudien los teoremas generales acerca de la deformación de piezas elásticas.

3.6 Ejercicios propuestos

♣ **Ejercicio propuesto EP3.1** Una pieza de hormigón de 6 m. de longitud, tiene una sección rectangular de dimensiones $0,3 \times 0,4 m^2$. En su centro de gravedad se aplica una fuerza F .

Determinar:

- Valor máximo de F si las tensiones no pueden superar los $12,7 MPa$
- Movimiento Δ de un extremo de la pieza respecto al otro
- Energía de deformación de la pieza

Nota: El módulo de elasticidad del hormigón se tomará igual a $E_h = 30 GPa$.

Valores de control:

$$F = 1524 kN ; \Delta = 2,54 mm ; W_N = 1935,48 julios$$

♣ **Ejercicio propuesto EP3.2** Una pieza de hormigón pretensado de longitud $L = 5$ metros, y sección cuadrada de $0,4 \times 0,4 m^2$ se construye de la siguiente forma:

- Se tensan cuatro cables de sección ω cada uno a una tensión $\sigma_{a1} = 800 MPa$.
- Una vez tensados los cables, se hormigonan.
- Una vez endurecido el hormigón se cortan los cables por AA' y BB' (ver Fig. EP3.2).

Determinar:

- Sección ω de cada uno de los cables de forma que la tensión final en el hormigón sea de $5 MPa$
- Tensión final en cada uno de los cables
- Energía elástica del conjunto

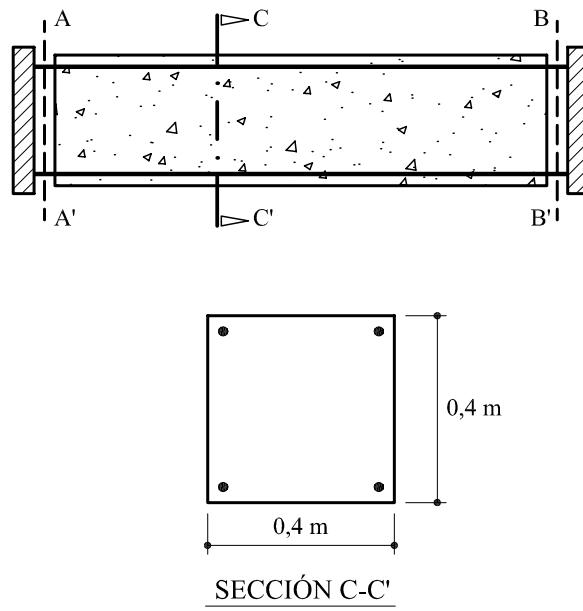


Fig. EP3.2

Una vez se ha fabricado la pieza, se aplica una fuerza F de compresión de 260 kN .

Hallar

- d) Tensión final en el hormigón y en los cables
- e) Energía elástica total

Se descarga la fuerza F de compresión y el conjunto se somete a un incremento de temperatura de valor $t = 30^\circ \text{C}$. **Determinar** los incrementos de tensión que se producen como consecuencia de dicha variación térmica.

$$E_a = 210 \text{ GPa}$$

$$E_h = 30 \text{ GPa}$$

$$\alpha_a = 1,2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_h = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Valores de control:

- Sección w de cada uno de los cables: $2,6 \text{ cm}^2$
- Tensión final en cada uno de los cables: 765 MPa
- Tensión final en el hormigón y en los cables:

$$\sigma_{fh} = 6,56 \text{ MPa} \quad \text{compresión}$$

$$\sigma_{fa} = 754,02 \text{ MPa} \quad \text{tracción}$$

♣ **Ejercicio propuesto EP3.3** Una pieza de hormigón tiene las siguientes características:

- Área de la sección de hormigón: A_c
- Área de la sección de acero: A_a
- Módulo de elasticidad del hormigón: E_c
- Módulo de elasticidad del acero: E_a

Si el acortamiento que experimenta por retracción el hormigón en masa es ε_c , demostrar que el acortamiento de la pieza de hormigón armado, por efecto de la retracción, vale: $\varepsilon_t = \varepsilon_c/(1 + n\varphi)$

siendo $n = E_a/E_c$ y $\varphi = A_a/A_c$.

Determinar asimismo las tensiones que se producen en el hormigón y en el acero como consecuencia de la retracción.

Valores de control:

- Tensiones en el acero $\sigma_a = \epsilon_c E_a / (1 + n\varphi)$
- Tensiones en el hormigón $\sigma_h = \epsilon_c \varphi E_a / (1 + n\varphi)$

♣ **Ejercicio propuesto EP3.4** La sección de hormigón que se representa en la figura se postensa en dos fases:

- En la primera, se tensan los tendones 1 y 2 con una fuerza F , anclándose a continuación.
- En la segunda, se tensan los tendones 3 y 4 con la misma fuerza F , anclándose a continuación.

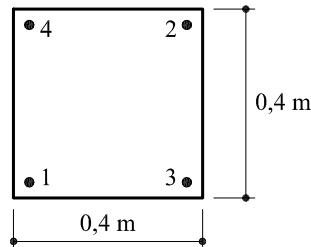


Fig. EP3.4

Si se desea que la máxima tensión en el hormigón sea de 10 MPa y en los tendones de postensar sea de 500 MPa .

Hallar:

- Valor de la fuerza F

- b) Área A_a de cada uno de los tendones
- c) Tensión final en cada uno de los tendones 1, 2, 3 y 4
- d) Tensión en el hormigón después de realizada la primera fase de postensado

$$E_h = 35 \text{ GPa}$$

$$E_a = 210 \text{ GPa}$$

Valores de control:

- Valor de la fuerza F : $403,64 \text{ kN}$
- Área A_a de cada uno de los tendones: $8,07 \text{ cm}^2$
- Tensión final en cada uno de los tendones:

$$\begin{aligned}\sigma_a^{(1)} &= 471,18 \text{ MPa} & \sigma_a^{(2)} &= 471,18 \text{ MPa} \\ \sigma_a^{(3)} &= 500 \text{ MPa} & \sigma_a^{(4)} &= 500 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- Tensión en el hormigón después de realizar la primera fase de pretensado: $\sigma_h = 5,07 \text{ MPa}$

♣ **Ejercicio propuesto EP3.5** Se da la pieza prismática de la figura, en la cual se efectúa un pretensado con unos cables de secciones ω_1 y ω_2 . La tensión en el hormigón al final del proceso de pretensado es uniforme y vale 10 MPa . Sabiendo que en los cables de igual sección el esfuerzo de pretensado es el mismo, calcular las fuerzas de pretensado en cada uno de los cables.

$$\omega_1 = 10 \text{ cm}^2$$

$$\omega_2 = 15 \text{ cm}^2$$

$$n = \frac{E_a}{E_h} = 10$$

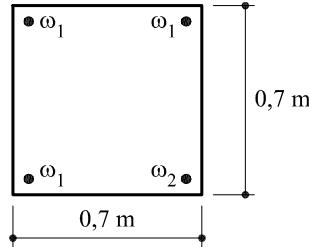


Fig. EP3.5

Valores de control:

- Fuerzas de pretensado en cada uno de los cables uno: 1315 kN
- Fuerza de pretensado en el cable dos: 1360 kN

- ♣ **Ejercicio propuesto EP3.6** Sobre un soporte vertical de hormigón armado actúa una fuerza centrada y vertical de 1000 kN. El soporte de 2,5 metros de altura es de sección recta, cuadrada de 30 cm. de lado, y está armado con ocho redondos verticales de ϕ 20 mm., según se indica en la figura adjunta. De esta forma, la sección neta de hormigón es de 875 cm^2 y la del acero de 25 cm^2 .

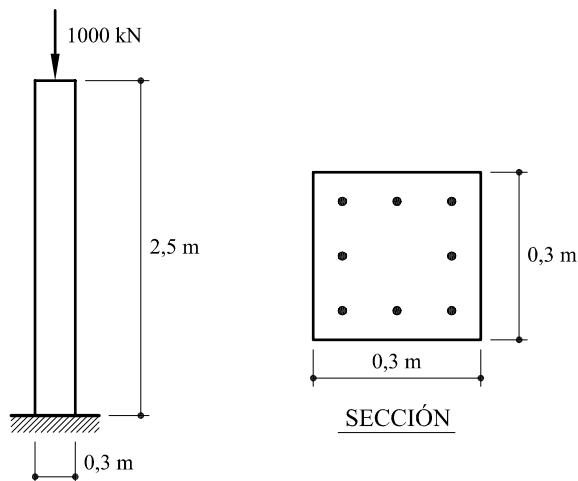


Fig. EP3.6

Teniendo en cuenta que los módulos de elasticidad del hormigón y del acero son 25 GPa y 210 GPa , respectivamente,

Hallar

- Tensiones a que está sometido el hormigón y el acero
- Acortamiento del soporte por efecto de la fuerza aplicada

Valores de control:

- Tensiones a que está sometido el hormigón: $9,2 \text{ MPa}$
- Tensiones a que está sometido el acero: $77,4 \text{ MPa}$
- Acortamiento del soporte: $0,924 \text{ mm}$

- ♣ **Ejercicio propuesto EP3.7** Una pieza recta está constituida por una viga de hormigón de sección cuadrada de 20 cm de lado, pretensada por unos cables de sección $\omega = 0,5 \text{ cm}^2$ cada uno.

Hallar

- La tensión con que se debe tensar cada cable para que la pieza recta pueda soportar una tracción de 80 kN, quedando entonces el hormigón a una compresión de $0,4 \text{ MPa}$, con el fin de evitar fisuras por donde el aire ambiente pueda atacar el acero.

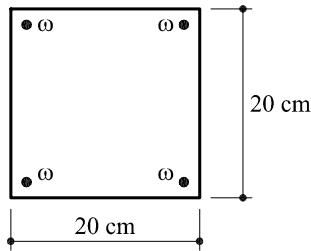


Fig. EP3.7

- b) Cuando actúa esta fuerza, la tensión a que está sometida el cable.

NOTA: Tomar la relación $E_a/E_h = 7$

Valores de control:

- Fuerza a la que se debe tensar cada cable: $24,12 \text{ kN}$
- Cuando actúa la fuerza de 80 kN la tensión a la que está sometido cada cable vale $479,6 \text{ MPa}$

♣ **Ejercicio propuesto EP3.8** En la estructura de la figura, la pieza AB es de longitud indefinida e infinitamente rígida. Sobre ella, actúa una fuerza vertical de valor $F = 200 \text{ kN}$.

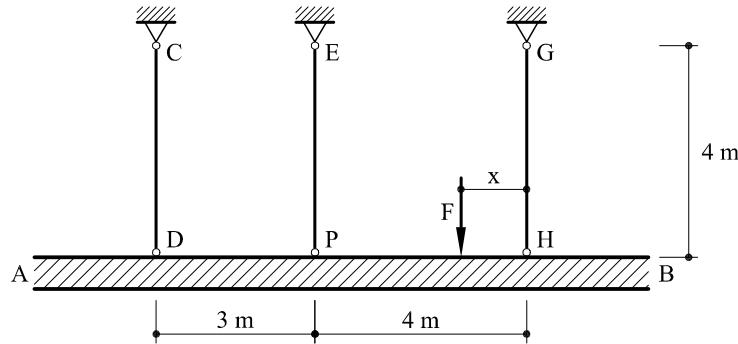


Fig. EP3.8

Las piezas verticales están articuladas en sus dos extremos, y tienen una sección de 5 cm^2 y un módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$.

Hallar

- Para $x = 3,5 \text{ m}$ esfuerzos en las barras verticales
- Valor de x para que la barra CD no tenga esfuerzos. En este caso hallar los esfuerzos en las otras barras

- c) Valor de x para que el esfuerzo en GH sea de 50 kN de compresión. Valor de los esfuerzos en las otras dos barras

Valores de control:

- Para $x = 3,5 \text{ m}$: $N_{CD} = 62,2 \text{ kN}$; $N_{EF} = 66,2 \text{ kN}$; $N_{GH} = 71,6 \text{ kN}$
- Si $N_{CD} = 0$: $x = 1,2 \text{ m}$; $N_{EF} = 60 \text{ kN}$; $N_{GH} = 140 \text{ kN}$
- Si $N_{GH} = -50 \text{ kN}$: $x = 7,59 \text{ m}$; $N_{CD} = 172,7 \text{ kN}$; $N_{EF} = 77,3 \text{ kN}$

♣ **Ejercicio propuesto EP3.9** La pieza recta de la figura tiene 4 metros de longitud y su sección recta es un cuadrado de 30 cm. de lado. En dos de sus caras opuestas se produce un incremento de temperatura de valor $\Delta t = 20^\circ\text{C}$, de tal forma que produce una distribución de temperaturas en la sección tal como muestra la figura.

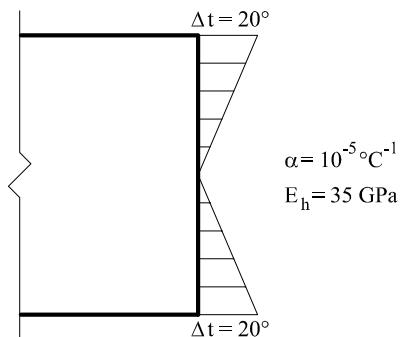
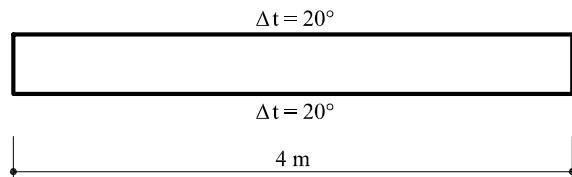


Fig. EP3.9

Admitiendo que se cumple la hipótesis de Navier, y que $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y $E_h = 35 \text{ GPa}$,

Hallar

- Tensiones que se producen en la sección
- Incremento (o decremento) de longitud de la pieza

Valores de control:

- Máxima tensión de tracción: $3,5 \text{ MPa}$
- Máxima tensión de compresión: $3,5 \text{ MPa}$
- Variación de longitud de la pieza: $0,4 \text{ mm}$ (alargamiento)

4 Momento flector

4.1 Hipótesis básicas

Los momentos flectores que actúan en una pieza son en la gran mayoría de los casos los responsables de las tensiones de mayor importancia que se producen en la misma. Por ello, el estudio de las tensiones y movimientos producidos por el momento flector tiene mucha importancia para el estudio resistente de dichas piezas.

A los solos efectos de definición se denomina:

- Flexión pura: Se dice que una pieza está sometida a flexión pura cuando en ella sólo actúa momento flector. La ley de deflectores será por tanto constante.
- Flexión simple: Una pieza está sometida a flexión simple cuando en ella actúa, además de momento flector, esfuerzo cortante. Constituye el caso más frecuente de flexión.
- Flexión compuesta: Cuando además de momento flector actúa esfuerzo axil.

Para determinar los efectos producidos por el momento flector, se estudiará la flexión pura en piezas rectas, para seguidamente suponer que los resultados obtenidos son válidos para los otros tipos de flexión. En la gran mayoría de los casos dicha extrapolación es perfectamente aceptable y se procede en general así para el cálculo de estructuras.¹

El punto de partida fundamental para el estudio de la flexión lo constituye la hipótesis de Navier, ya anunciada anteriormente. Para flexión pura puede visualizarse dicha hipótesis de la siguiente forma (Fig. 4.1): Supóngase una pieza sometida a flexión pura. La deformación será de la forma que aparece en la figura. Si idealmente se corta la pieza por el eje de simetría, las dos secciones A y A' deben cumplir la doble condición de ser simétricas y superponibles. Por ello A y A' deben permanecer planas. El mismo razonamiento puede repetirse cortando por el plano de simetría de cada una de las dos mitades, y así sucesivamente. Este razonamiento confirma la validez de la hipótesis de Navier, al mismo tiempo que demuestra que, cuando el momento flector es constante, la deformada es un círculo.

¹Es preciso advertir, sin embargo, que cuando los radios de curvatura son pequeños, la presente teoría necesita ser corregida.

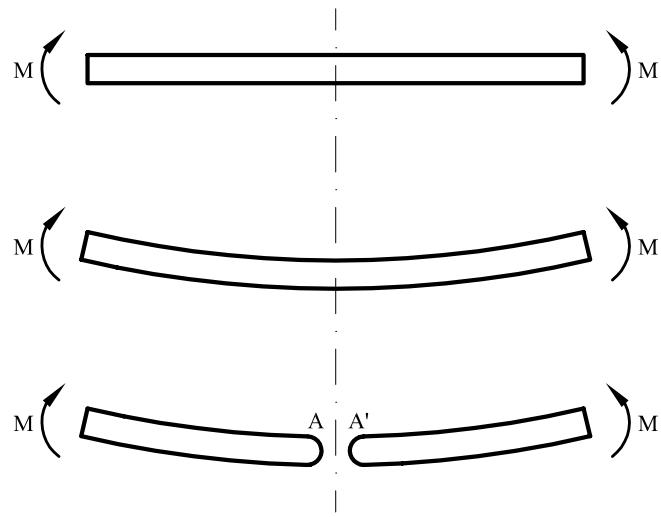


Fig. 4.1 Deformación de una pieza recta sometida a flexión pura

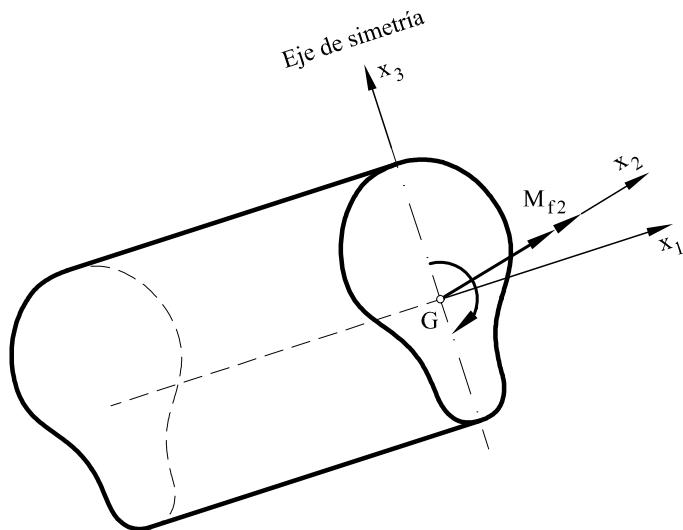


Fig. 4.2 Momento flector actuando en el plano de simetría de una sección

4.2. Piezas de plano medio

Para iniciar el estudio de la flexión, supóngase una sección con un eje de simetría (Fig. 4.2) en la que actúa un momento flector M_{f2} situado en dicho plano de simetría (esto es, el eje del momento está en el eje perpendicular) y dicho eje de simetría coincide con el eje local x_3 .

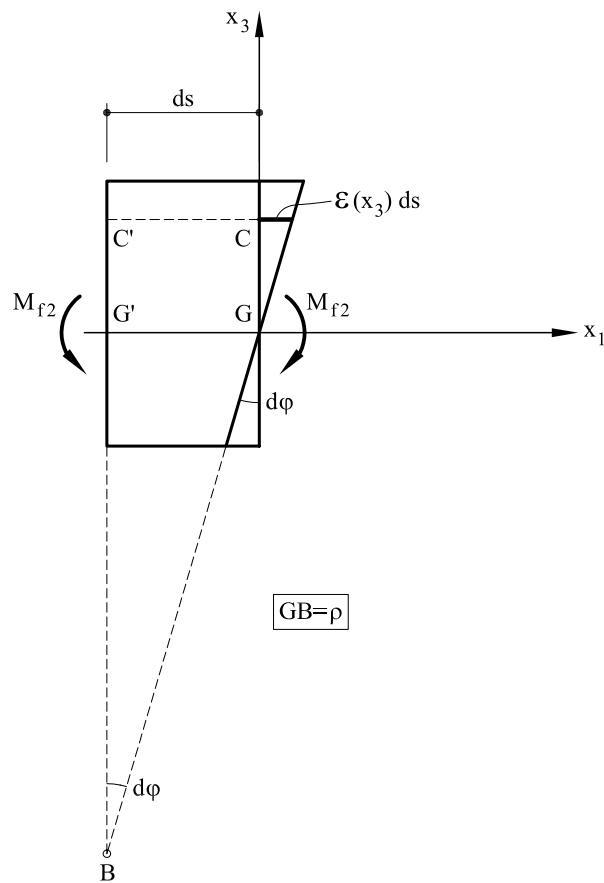


Fig. 4.3 Deformación de una dovela sometida a momento flector

Si se corta idealmente la pieza en un punto cualquiera por dos planos perpendiculares a la directriz y separados una distancia ds , se tendrá una dovela diferencial de la que interesa estudiar su deformación (Fig. 4.3). Por ello, obsérvese primeramente que no todas las tensiones normales en el interior de la sección pueden tener el mismo signo, ya que al ser nulo el esfuerzo axil, por equilibrio

$$\int_A \sigma_1 dA = 0 \quad (4.1)$$

De acuerdo con la hipótesis de Navier, las deformaciones deben ser lineales dentro de la sección y ser función exclusivamente de x_3 , es decir

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x_3) = \alpha x_3 + \beta \quad (4.2)$$

Al ser lineales las deformaciones, también lo serán las tensiones, de acuerdo con la ley de Hooke. Si las tensiones son lineales y no todas del mismo signo, debe existir una recta que separe las compresiones de las tracciones. A tal recta se le denomina *fibra*

neutra o también *eje neutro*. Obviamente por razones de simetría dicho eje debe ser paralelo al eje local x_2 . De acuerdo con 4.2, la ley de tensiones será

$$\sigma_1 = \sigma_1(x_3) = E\alpha x_3 + E\beta \quad (4.3)$$

Introduciendo 4.3 en 4.1

$$E\alpha \int_A x_3 dA + E\beta \int_A dA = 0 \quad (4.4)$$

y puesto que los ejes pasan por el centro de gravedad de la pieza, el primer término de 4.4 es nulo, por lo que también debe serlo el segundo, es decir $\beta = 0$, o sea, que de acuerdo con 4.2 y 4.3, la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección.

Asimismo, en la figura 4.3 puede observarse la deformación de una dovela, estando representados los movimientos de una sección respecto a la sección anterior. Observando que el movimiento de una fibra cualquiera C vale $\varepsilon_1(x_3) ds$, se tiene

$$d\varphi = \frac{\varepsilon_1(x_3) ds}{x_3} = \frac{ds}{\rho} \quad (4.5)$$

siendo $\rho = GB$ el radio de curvatura de la dovela. A partir de 4.5 se obtiene

$$d\varphi = \frac{\varepsilon_1(x_3)}{x_3} ds \quad (4.6a)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_1(x_3)}{x_3} \quad (4.6b)$$

Es decir, que el valor de α de la expresión 4.2 vale $\alpha = 1/\rho$, es decir

$$\varepsilon_1(x_3) = \frac{x_3}{\rho} \quad (4.7)$$

Asimismo y dado que la curvadura χ_2 de cualquier curva es igual a la inversa del radio de curvatura, $\chi_2 = 1/\rho$, a partir de 4.6 y 4.7 se puede escribir

$$\chi_2 = \frac{\varepsilon_1(x_3)}{x_3} \quad (4.8a)$$

$$\varepsilon_1(x_3) = \chi_2 x_3 \quad (4.8b)$$

Además, por equilibrio

$$M_{f2} = \int_A \sigma_1 x_3 dA = \int_A E \varepsilon_1 x_3 dA = \int_A E \chi x_3^2 dA = E \chi \int_A x_3^2 dA = E \chi_2 I_2 = EI_2 \chi_2 \quad (4.9a)$$

y también

$$d\varphi_2 = \frac{M_{f2}}{EI_2} ds \quad (4.9b)$$

siendo I_2 el momento de inercia de la sección respecto al eje x_2 . La expresión anterior establece una relación lineal entre el momento flector y la curvatura de la pieza producida por dicho momento flector. Obviamente si M_{f2} es constante, también lo será χ_2 , por lo que en el caso de flexión pura la deformada de la pieza es un círculo, tal como se vio al final del apartado anterior.

Sustituyendo 4.8a en 4.9a

$$M_{f2} = EI_2 \chi_2 = EI_2 \frac{\varepsilon_1(x_3)}{x_3} = EI_2 \frac{\sigma}{Ex_3} = \frac{I_2}{x_3} \sigma_1 \quad (4.10)$$

y despejando σ_1 , se obtiene la fórmula fundamental de la flexión²

$$\sigma = \frac{M_{f2} x_3}{I_2} \quad (4.11)$$

que proporciona la distribución de tensiones en la sección a partir del momento flector. Las tensiones máximas vendrán dadas por

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{f2}(x_3)_{\max}}{I_2} = \frac{M_{f2}}{I_2/(x_3)_{\max}} = \frac{M_{f2}}{W_2} \quad (4.12)$$

siendo $W_2 = I_2/(x_3)_{\max}$ el *módulo resistente* de la sección. La expresión 4.12 da asimismo una idea de la idoneidad de distintas secciones para resistir el momento flector.

Dado que σ_{\max} es una característica del material, el máximo momento flector que puede resistir una sección viene dado por

$$(M_{f2})_{\max} = W_2 \sigma_{\max} \quad (4.13)$$

es decir, que es proporcional al módulo resistente. Obviamente, para una misma área de la sección recta, diferentes formas de la sección darán lugar a diferentes módulos resistentes.

Al alcanzarse la máxima tensión en las fibras extremas, el material situado cerca del eje neutro, tiene muy mal aprovechamiento, pues la fuerza que actúa sobre una determinada dA de área es proporcional a x_2 , y el momento de esta fuerza proporcional a x_2^2 .

²Recuérdese lo apuntado en el capítulo anterior acerca de la indiferencia, en lo sucesivo, de la notación σ_1 o σ .

La forma óptima será, pues, aquella que distribuya la mayor cantidad de material posible en las fibras extremas, y que den a la sección la mayor altura posible. Los perfiles normales dobles T de acero laminado están diseñados de acuerdo con esta doble condición.

En definitiva, la mejor forma será aquella que para un área determinada A de la sección, de mayor valor del módulo resistente.

El valor máximo del módulo resistente –para un área y canto dado– se alcanza para una sección, ideal simétrica, en la que la materia está concentrada en las fibras extremas. Este valor máximo es

$$\frac{I}{(x_3)_{\max}} = \frac{2 \left(\frac{A}{2}\right) \left(\frac{h}{2}\right)^2}{\frac{h}{2}} = \frac{A \cdot h}{2}$$

siendo h el canto de la sección.

En una sección cualquiera se puede escribir $I/(x_3)_{\max} = R \cdot A \cdot h/2$. Al coeficiente sin dimensiones R (siempre menor que 1) se le denomina el *rendimiento geométrico de la sección*.

Está claro, por tanto, que para un área dada, el módulo de resistencia crece proporcionalmente con el canto h y con el rendimiento geométrico R . Si A y h son dados, el módulo es proporcional a R .

Las formas constructivas que dan el rendimiento geométrico más alto serán aquellas que concentran la materia en las zonas alejadas del eje neutro, unidas entre ellas por un alma delgada. Se llega así a los perfiles dobles T , laminados (en serie) o compuestos.

Se dan a continuación los rendimientos R para los tipos más habituales de secciones.

- En las dobles T de acero laminado $R \approx 2/3$
- En los perfiles en U y carriles de ferrocarril es $R = 3/5$
- El anillo circular delgado, que es la mejor forma a dar a un tubo, que debe resistir momentos contenidos en cualquier plano diametral, tiene un rendimiento R algo inferior a $1/2$
- El rendimiento geométrico del rectángulo es bajo $R = 1/3$
- Más bajo es aún el del círculo $R = 1/4$ y pésimo el del rombo con $R = 1/6$

Nótese, finalmente, que aumentar el área de la sección recta no motiva necesariamente la disminución la tensión máxima de flexión.

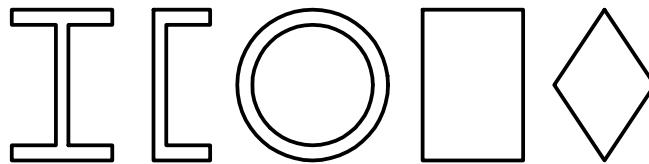


Fig. 4.4 Diferentes secciones rectas de una pieza

Es interesante, finalmente, preguntarse si todas las expresiones anteriores son sólo válidas cuando el plano del momento contiene el eje de simetría de la sección o si existen también otros casos en que también pueden aplicarse. Para ello supóngase que los ejes x_2 y x_3 son ejes cualesquiera. Todas las fórmulas deducidas serán válidas siempre que el momento M_3 de todas las tensiones respecto al eje x_3 sea nulo, ya que $M_{f3} = 0$

$$M_{f3} = - \int_A \sigma x_2 dA = 0 \quad (4.14a)$$

El motivo por el cual dichas fórmulas serían válidas viene dado por el hecho de que cumplirían las condiciones de equilibrio y las condiciones cinemáticas de compatibilidad y que el problema elástico tiene solución única. Por lo tanto, a partir de 4.14a

$$\int_A \sigma x_2 dA = \int_A \frac{M_{f2}x_3}{I_2} x_2 dA = \frac{M_{f2}}{I_2} \int x_3 x_2 dA = \frac{M_{f2}}{I_2} I_{23} \quad (4.14b)$$

La expresión anterior se anula si $I_{23} = 0$, es decir, si I_2 e I_3 son ejes principales de inercia. Se puede por tanto afirmar que las expresiones deducidas en este apartado son válidas siempre que el plano del momento flector contenga uno de los ejes principales de inercia de la sección.

♣ **Problema resuelto P4.1** La sección doble T de la figura P4.1.1 está sometida a un momento flector M_{f2} situado en un plano vertical y de valor $M_{f2} = 70 \text{ kN} \times \text{m}$. El signo del momento es tal que produce compresiones en la zona superior. Determinar la distribución tensiones.

Suponiendo conocido el módulo de elasticidad, hallar: curvatura, diferencial de giro y radio de curvatura de la sección.

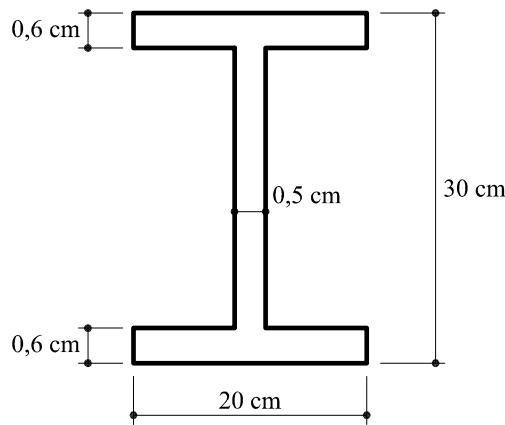


Fig. P4.1.1 Sección doble T

Solución

El momento de inercia vale $I_2 = 6\,182,21\,cm^4$. Las tensiones máximas valdrán:

$$\sigma_{\max} = \frac{70\,kNm \times 15\,cm}{6\,182,21\,cm^4} = 169,84\,MPa$$

La distribución de tensiones puede verse representada en la figura P4.1.2.

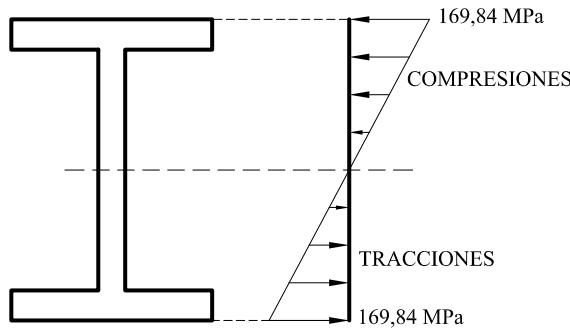


Fig. P4.1.2 Distribución de tensiones

De acuerdo con 4.9a, la curvatura valdrá

$$\chi_2 = \frac{M_{f2}}{EI_2} = \frac{70\,kNm}{E \times 6\,182,21\,cm^4}$$

y admitiendo $E = 210\,GPa = 210 \times 10^6\,kN/m^2$

$$\chi = \frac{70\,kNm}{210 \times 10^6 \times 6\,182,21 \times 10^{-8}\,m} = 0,00539\,m^{-1}$$

El radio de curvatura será

$$\rho = \frac{1}{\chi_2} = \frac{1}{0,00539} = 185,47\,m$$

y el diferencial de giro

$$d\varphi_2 = \chi_2\,ds = 0,00539\,ds$$

4.3 Flexión esviada

Se dice que una sección está sometida a flexión esviada si el plano del momento no contiene ninguno de los dos ejes principales de inercia de la sección. En este caso, las fórmulas deducidas en el apartado anterior no son válidas, puesto que en general el plano del momento y la fibra neutra no serán perpendiculares. Se van a plantear tres caminos alternativos para resolver el problema.

4.3.1 Flexión esviada trabajando con ejes principales de inercia

Considérese la sección de la figura 4.5 en la que los ejes $G\hat{x}_2$, $G\hat{x}_3$ son ejes principales de inercia. En este caso, el momento flector M_f se puede descomponer en sus dos componentes \hat{M}_{f2} y \hat{M}_{f3} , siendo

$$\hat{M}_{f2} = M_f \cos \alpha \quad (4.15a)$$

$$\hat{M}_{f3} = M_f \sin \alpha \quad (4.15b)$$

Obviamente, a cada una de estas componentes se les pueden aplicar las expresiones deducidas en el apartado anterior, es decir

$$\hat{M}_{f2} = EI_2 \hat{\chi}_2 \quad (4.16a)$$

$$\hat{M}_{f3} = EI_3 \hat{\chi}_3 \quad (4.16b)$$

y también

$$d\hat{\varphi}_2 = \frac{\hat{M}_{f2}}{EI_2} ds \quad (4.17a)$$

$$d\hat{\varphi}_3 = \frac{\hat{M}_{f3}}{EI_3} ds \quad (4.17b)$$

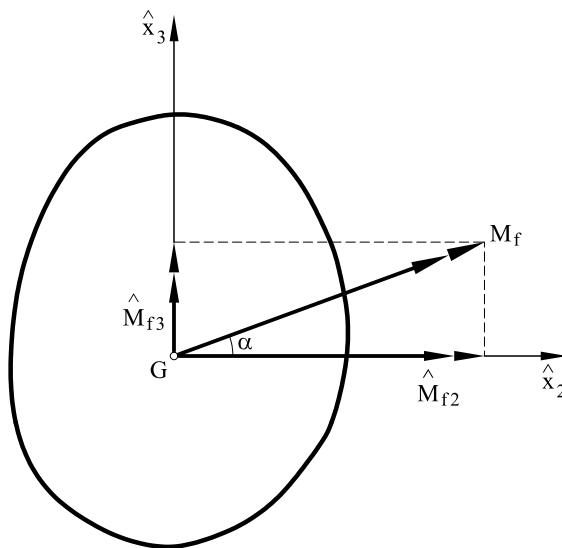


Fig. 4.5 Sección sometida a flexión esviada. Los ejes $G\hat{x}_2$, $G\hat{x}_3$ son principales de inercia

El giro total valdrá

$$d\varphi = \sqrt{(d\hat{\varphi}_2)^2 + (d\hat{\varphi}_3)^2} = ds \sqrt{\left(\frac{\hat{M}_{f2}}{E\hat{I}_2}\right)^2 + \left(\frac{\hat{M}_{f3}}{E\hat{I}_3}\right)^2} = \frac{M_f}{E} ds \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\hat{I}_2^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\hat{I}_3^2}} \quad (4.18)$$

En la figura 4.6 puede verse dibujado el giro $d\varphi$ y sus componentes $d\hat{\varphi}_2$, $d\hat{\varphi}_3$. Como puede observarse, la dirección de los vectores $d\varphi$ y M_f no es coincidente, sino que forman un ángulo β . Debido al hecho de que el vector $d\varphi$ está situado sobre la fibra neutra, es evidente, por tanto, que dicha fibra neutra no es en general perpendicular al plano del momento.

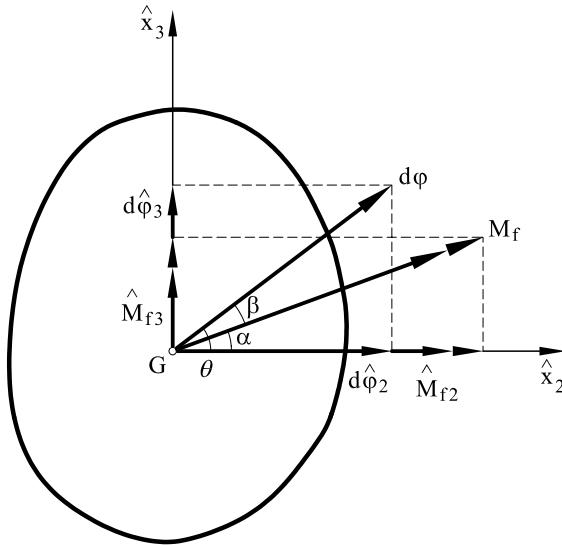


Fig. 4.6 Momento flector y giro en una sección sometida a flexión esviada

El ángulo θ que forma el vector $d\varphi$ con el eje \hat{x}_2 vendrá dado por

$$\tan \theta = \frac{d\hat{\varphi}_3}{d\hat{\varphi}_2} = \frac{\sin \alpha / \hat{I}_3}{\cos \alpha / \hat{I}_2} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_3} \tan \alpha \quad (4.19)$$

Obviamente también el ángulo θ es el que forma la fibra neutra con el eje \hat{x}_2 , dado que la sección gira alrededor de la fibra neutra, por lo que la expresión de la misma será

$$\hat{x}_3 = \hat{x}_2 \tan \theta = \frac{\hat{I}_2 \sin \alpha}{\hat{I}_3 \cos \alpha} \hat{x}_2$$

es decir

$$\hat{x}_3 \hat{I}_3 \cos \alpha - \hat{x}_2 \hat{I}_2 \sin \alpha = 0 \quad (4.20)$$

La curvatura total valdrá

$$\chi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_f}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\hat{I}_2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\hat{I}_3}} \quad (4.21)$$

y el radio de curvatura

$$\rho = \frac{1}{\chi} \quad (4.22)$$

Por lo que respecta a las tensiones σ

$$\sigma = \sigma(\hat{x}_2, \hat{x}_3) = \frac{\hat{M}_{f2}\hat{x}_3}{\hat{I}_2} - \frac{\hat{M}_{f3}\hat{x}_2}{\hat{I}_3} = M_f \left(\frac{\cos \alpha}{\hat{I}_2} \hat{x}_3 - \frac{\sin \alpha}{\hat{I}_3} \hat{x}_2 \right) \quad (4.23)$$

Lógicamente, la fibra neutra puede también obtenerse anulando σ en la expresión anterior, es decir

$$\frac{\cos \alpha}{\hat{I}_2} \hat{x}_3 - \frac{\sin \alpha}{\hat{I}_3} \hat{x}_2 = 0$$

y también

$$\hat{x}_3 \hat{I}_3 \cos \alpha - \hat{x}_2 \hat{I}_2 \sin \alpha = 0 \quad (4.24)$$

expresión que coincide con la deducida anteriormente

4.3.2 Flexión esviada trabajando con ejes cualesquiera

Supóngase una sección sometida a un momento flector M_f de dirección cualquiera y en la que los ejes Gx_2 y Gx_3 no son en general principales de inercia (Fig. 4.7).

De acuerdo con la hipótesis de Navier, la distribución de deformaciones vendrá dada por la expresión

$$\varepsilon_1(x_2, x_3) = \alpha x_2 + \beta x_3 \quad (4.25)$$

siendo α y β parámetros a determinar. Se puede, sin embargo, escribir la expresión anterior de otra forma, al mismo tiempo que se proporciona una interpretación física a α y β . Para ello, obsérvese que el eje de giro de la sección y la fibra neutra nn' coinciden (Fig. 4.7). El movimiento $d\mathbf{v}_1$ de un punto cualquiera P de coordenadas (x_2, x_3) respecto a la sección anterior tendrá la dirección perpendicular a la sección y valdrá $\delta d\varphi$, es decir, $r d\varphi \sin \gamma$, o sea

$$d\mathbf{v}_1 = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} \quad (4.26)$$

y dado que $d\mathbf{v}_1 = \varepsilon_1(x_2, x_3) ds \mathbf{e}_1$, la expresión anterior se puede escribir

$$\varepsilon_1 ds = x_3 d\varphi_2 - x_2 d\varphi_3 \quad (4.27)$$

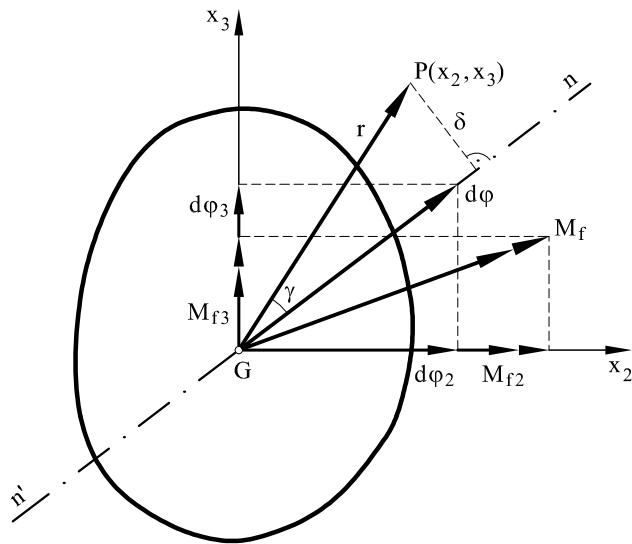


Fig. 4.7 Momento flector y giro en una sección sometida a flexión esviada

es decir

$$\varepsilon_1 = x_3 \frac{d\varphi_2}{ds} - x_2 \frac{d\varphi_3}{ds} \quad (4.28)$$

siendo $d\varphi_2$ y $d\varphi_3$ los diferenciales de giro de la sección respecto a los ejes x_2 y x_3 . También se puede escribir

$$\varepsilon_1 = x_3 \chi_2 - x_2 \chi_3 \quad (4.29)$$

y

$$\sigma = \sigma(x_2, x_3) = \varepsilon_1 E = x_3 E \chi_2 - x_2 E \chi_3 \quad (4.30)$$

Es preciso seguidamente imponer las condiciones de equilibrio

$$M_{f2} = \int_A \sigma(x_2, x_3) x_3 dA \quad (4.31)$$

$$-M_{f3} = \int_A \sigma(x_2, x_3) x_2 dA \quad (4.32)$$

o sea

$$\begin{aligned} M_{f2} &= \int_A (x_3 E \chi_2 - x_2 E \chi_3) x_3 dA = E \chi_2 \int_A x_3^2 dA - E \chi_3 \int_A x_2 x_3 dA = \\ &= E \chi_2 I_2 - E \chi_3 I_{23} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$M_{f3} = - \int_A \sigma x_2 dA = \int_A (-x_3 E \chi_2 + x_2 E \chi_3) x_2 dA = -E \chi_2 I_{23} + E \chi_3 I_3 \quad (4.34)$$

A partir de 4.33 y 4.34 se obtiene

$$E\chi_2 = E \frac{d\varphi_2}{ds} = \frac{M_{f2}I_3 + M_{f3}I_{23}}{I_2I_3 - I_{23}^2} \quad (4.35)$$

$$E\chi_3 = E \frac{d\varphi_3}{ds} = \frac{M_{f2}I_{23} + M_{f3}I_2}{I_2I_3 - I_{23}^2} \quad (4.36)$$

Con lo que a partir de 4.30 la distribución de tensiones será

$$\begin{aligned} \sigma &= x_3 \frac{M_{f2}I_3 + M_{f3}I_{23}}{I_2I_3 - I_{23}^2} - x_2 \frac{M_{f2}I_{23} + M_{f3}I_2}{I_2I_3 - I_{23}^2} = \\ &= \frac{1}{I_2I_3 - I_{23}^2} [M_{f2}(x_3I_3 - x_2I_{23}) + M_{f3}(x_3I_{23} - x_2I_2)] \end{aligned} \quad (4.37)$$

expresión que proporciona la distribución de la tensión normal en ejes cualesquiera. Lógicamente 4.37 coincide con 4.23 cuando $I_{23} = 0$. Si $M_{f2} = M_f \cos \alpha$ y $M_{f3} = M_f \sin \alpha$

$$\sigma = \frac{M_f}{I_2I_3 - I_{23}^2} [(x_3I_3 - x_2I_{23}) \cos \alpha + (x_3I_{23} - x_2I_2) \sin \alpha] \quad (4.38)$$

La fibra neutra se obtendrá igualando a cero 4.37 ó 4.38, es decir

$$x_3 (I_3 \cos \alpha + I_{23} \sin \alpha) = x_2 (I_2 \sin \alpha + I_{23} \cos \alpha) \quad (4.39)$$

que a su vez coincide con 4.24 cuando $I_{23} = 0$.

4.3.3 Flexión esviada directa

La flexión esviada puede también estudiarse directamente tomando como referencia la fibra neutra. Supóngase para ello (Fig. 4.8a) que un momento flector M_f actúa en el plano mm' . Como consecuencia de ello se produce un diferencial de giro $d\varphi$, cuyo vector coincide con la dirección de la fibra neutra nn' (Fig. 4.8b).

La distribución de deformaciones en la sección vendrá dada por

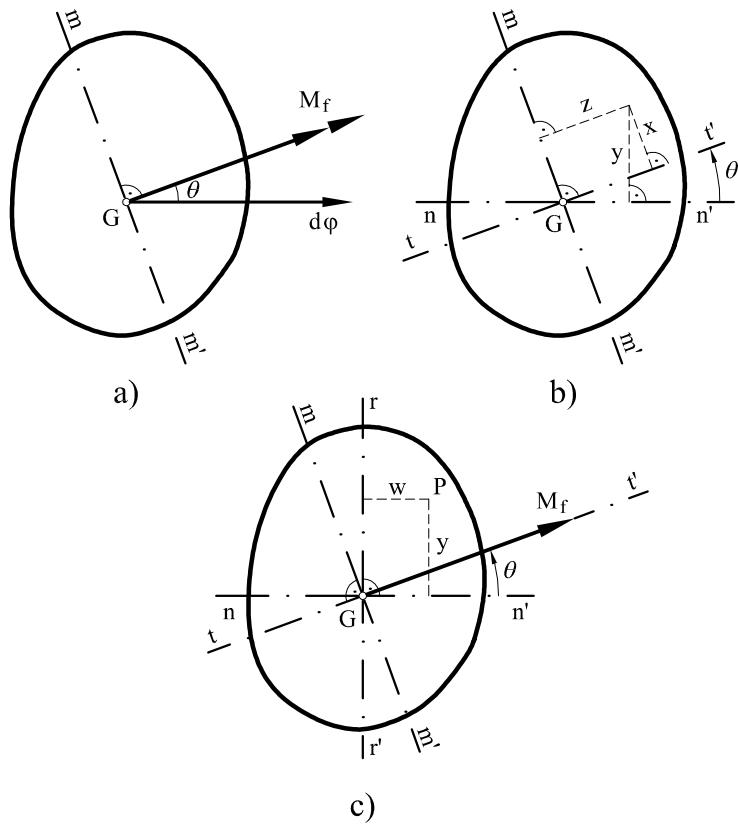
$$\varepsilon_1 ds = y d\varphi \quad (4.40)$$

es decir

$$\varepsilon_1 = \frac{d\varphi}{ds} y = \chi y \quad (4.41)$$

y las tensiones

$$\sigma = E \chi y \quad (4.42)$$

Fig. 4.8 Sección sometida a un momento flector M_f

Tomando momentos de las fuerzas internas (tensiones) y de las externas (momento flector) respecto de nn' , se obtiene

$$M_f \cos \theta = \int_A \sigma y \, dA = E\chi \int_A y^2 \, dA = E\chi I_{nn'} \quad (4.43)$$

siendo $I_{nn'}$ el momento de inercia de la sección respecto al eje nn' . Despejando χ

$$\chi = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_f}{EI_{nn'}/\cos \theta} = \frac{M_f}{E\tilde{I}_{nn'}} \quad (4.44)$$

siendo $\tilde{I}_{nn'} = I_{nn'}/\cos \theta$.

Las tensiones valdrán

$$\sigma = E\chi y = \frac{M_f y}{\tilde{I}_{nn'}} \quad (4.45)$$

La expresión anterior permite determinar la distribución de tensiones siempre que se conozca la posición de la fibra neutra. Para determinarla, se toman momentos respecto

al eje mm'

$$0 = \int_A \sigma z \, dA = \int_A \frac{M_f}{\tilde{I}_{nn'}} yz \, dA = \frac{M_f}{\tilde{I}_{nn'}} \int_A yz \, dA \quad (4.46)$$

es decir,

$$I_{nm} = \int_A yz \, dA = 0 \quad (4.47)$$

De la figura 4.8b se deduce

$$y = x \cos \theta + z \sin \theta \quad (4.48)$$

y sustituyendo en 4.47

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \int_A yz \, dA = \int_A z(x \cos \theta + z \sin \theta) \, dA = \cos \theta \int_A xz \, dA + \sin \theta \int_A z^2 \, dA = \\ &= I_{tm} \cos \theta + I_{mm'} \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\tan \theta = -\frac{I_{tm}}{I_{mm'}} \quad (4.49a)$$

La expresión anterior proporciona la dirección de la fibra neutra.

La fibra neutra puede también obtenerse gráficamente a partir del círculo de Mohr representado en la figura 4.9: Para construir el círculo de Mohr se lleva sobre el eje x_3 el momento de inercia I_2 (segmento GB) y a continuación I_3 (segmento BA). A partir del punto B y según una recta paralela al eje x_2 , se lleva el producto de inercia I_{23} (segmento BC), hacia la derecha si es positivo y hacia la izquierda si es negativo. Con centro en el punto medio de AG y radio $AG/2$ se traza el círculo de Mohr. Seguidamente, para obtener la fibra neutra se traza el plano del momento mm' , y desde E se traza a su vez la línea EC que corta al círculo de Mohr en D . La recta $GD \equiv nn'$ es la fibra neutra de la sección respecto a un momento flector contenido en el plano mm' . Adicionalmente se obtiene que el segmento CD es igual a $I_{nn'}/\cos \theta = \tilde{I}_{nn'}$.

Sucede en ocasiones, sin embargo, que se conoce la posición de la fibra neutra y desea conocerse cuánto vale el ángulo θ que forma el eje del momento con la fibra neutra. Para ello, si $r - r'$ es un eje normal a la fibra neutra (Fig. 4.8), tomando momentos respecto a $r - r'$

$$M_f \sin \theta = - \int_A \sigma w \, dA = - \int_A E \chi yw \, dA = -E \chi I_{nr}$$

Dividiendo la expresión anterior por la expresión 4.43 se tendrá

$$\tan \theta = -\frac{I_{nr}}{I_{nn'}} \quad (4.49b)$$

que es el resultado buscado.

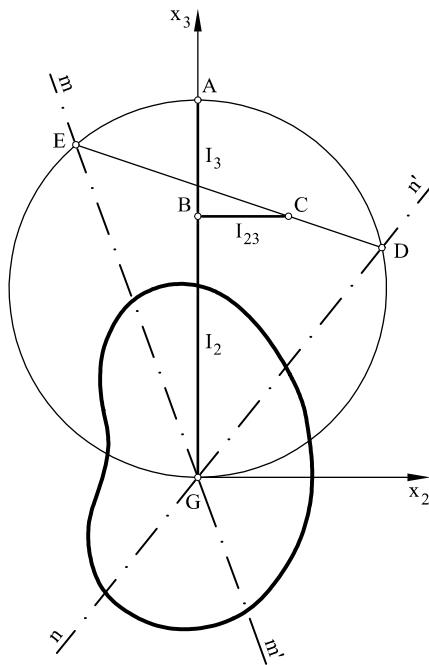


Fig. 4.9 Determinación gráfica de la fibra neutra en una sección

- ♣ **Problema resuelto P4.2** En la sección que se representa en la figura P4.2.1, actúa un momento flector M_f cuyo eje forma 30° con la horizontal hallar en ejes principales:
- Valor de M_f de forma que la tensión en A valga 20 MPa .
 - Posición de la fibra neutra
 - Distribución de tensiones en la sección, especificando los valores de dicha tensión en los puntos B y C.
 - Valores de las curvaturas $\hat{\chi}_2$ y $\hat{\chi}_3$.

Solución

En primer lugar, se determinarán los ejes principales y los momentos de inercia respecto a dichos ejes.

El ángulo que forman los ejes principales con los ejes coordenados se obtiene a partir de:

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{23}}{I_3 - I_2} = -\frac{2 \times 1292308}{4554103 - 2170256} = -1,0842$$

con lo cual

$$\begin{aligned} 2\theta &= -47,314^\circ \\ 2\theta &= -47,314^\circ + 180 = 132,686^\circ \\ \theta &= -23,657^\circ \\ \theta &= 66,343^\circ \end{aligned}$$

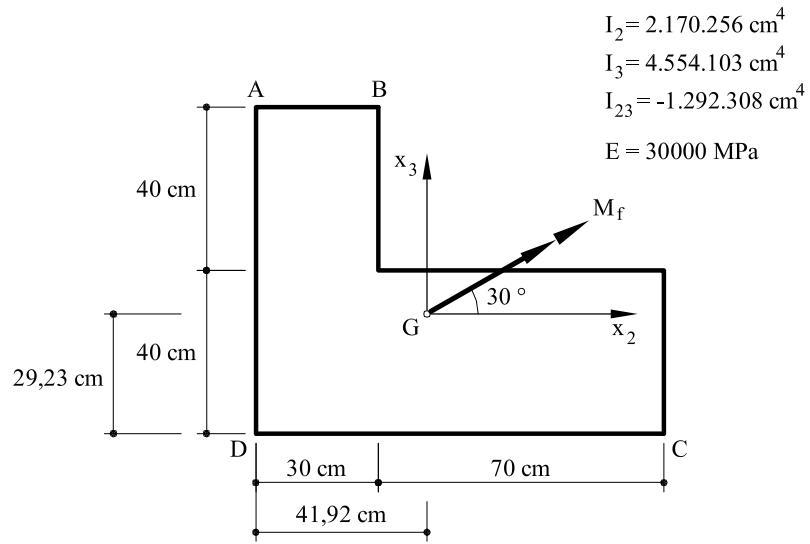


Fig. P4.2.1 Sección sometida a flexión esviada

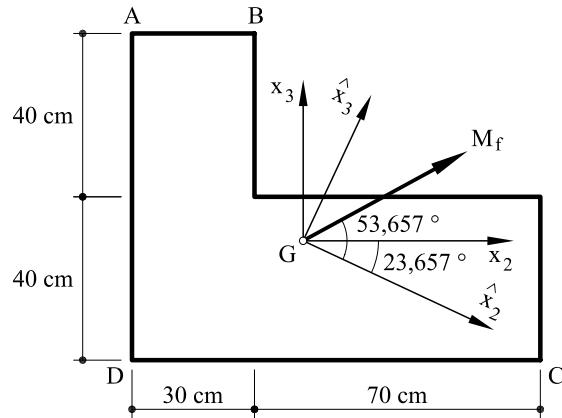


Fig. P4.2.2 Ejes principales de la sección

Los momentos principales de inercia valdrán:

$$\hat{I}_2 = I_3 \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \theta - I_{23} \sin 2\theta = 1\,604\,129 \text{ cm}^4 = 1,604 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$\hat{I}_3 = I_3 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta + I_{23} \sin 2\theta = 5\,120\,230 \text{ cm}^4 = 5,12 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

En la figura P4.2.2 se dibujan los ejes principales de inercia de la sección.

Las coordenadas de los puntos A, B y C respecto a los ejes principales se obtendrán a partir de la transformación de coordenadas

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,916 & -0,4013 \\ 0,4013 & 0,916 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

por lo que (utilizando los centímetros como unidades)

Punto A : (-58,77 ; 29,68)

Punto B : (-31,29 ; 41,72)

Punto C : (65,39 ; -3,27)

El vector M_f que actúa tendrá unas componentes respecto a los ejes principales \hat{x}_2, \hat{x}_3

$$\begin{aligned} \hat{M}_{f2} &= M_f \cos(30 + 23,657) = 0,5926 M_f \\ \hat{M}_{f3} &= M_f \sin(30 + 23,657) = 0,8055 M_f \end{aligned}$$

De acuerdo con 4.23 las tensiones valen:

$$\sigma = \frac{\hat{M}_{f2}}{\hat{I}_2} \hat{x}_3 - \frac{\hat{M}_{f3}}{\hat{I}_3} \hat{x}_2$$

por lo que las tensiones en el punto A valdrán

$$\sigma_A = \left[\frac{0,5926}{1,604 \times 10^{-2}} 0,2968 - \frac{0,8055}{5,12 \times 10^{-2}} (-0,5877) \right] M_f = 20,2113 M_f$$

y puesto que $\sigma_A = 20 \text{ MPa} = 20000 \text{ kPa}$

$$M_f = \frac{20000}{20,2113} \text{ kNm} = 989,55 \text{ kNm}$$

con lo que las componentes del momento según cada uno de los ejes vale

$$\begin{aligned} \hat{M}_{f2} &= 0,5926 M_f = 0,5926 \times 989,55 = 586,41 \text{ kNm} \\ \hat{M}_{f3} &= 0,8055 M_f = 0,8055 \times 989,55 = 797,08 \text{ kNm} \end{aligned}$$

La expresión 4.24 proporciona la ecuación de la fibra neutra

$$\hat{x}_3 \hat{I}_3 \cos 53,657 - \hat{x}_2 \hat{I}_2 \sin 53,657 = 0$$

o sea

$$3,0342 \hat{x}_3 - 1,2920 \hat{x}_2 = 0$$

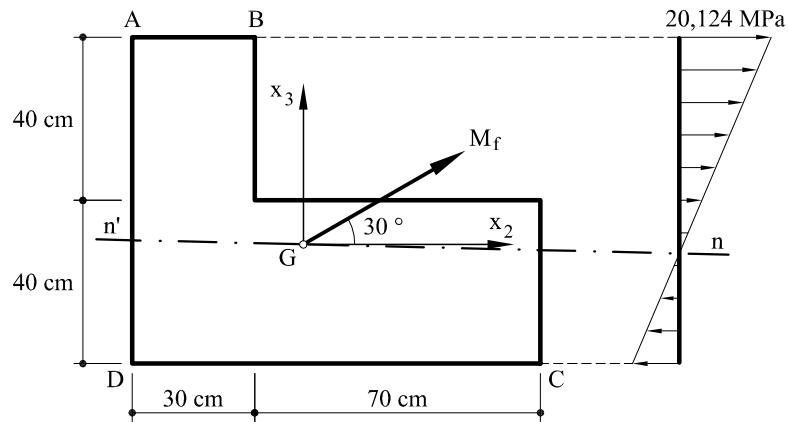


Fig. P4.2.3 Fibra neutra y distribución de tensiones

El ángulo que forma la fibra neutra con la horizontal vale

$$\gamma = \arctan \frac{1,2920}{3,0342} - 23,657 = -0,587^\circ$$

En la figura P4.2.3 puede verse dibujada la posición de la fibra neutra y la distribución de tensiones en la sección

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \left[\frac{0,5926}{1,604 \times 10^{-2}} 0,4172 - \frac{0,8055}{5,12 \times 10^{-2}} (-0,3129) \right] 989,55 = \\ &= 20\,123,67 \text{ kN/m}^2 = 20,124 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \left[\frac{0,5926}{1,604 \times 10^{-2}} (-0,0327) - \frac{0,8055}{5,12 \times 10^{-2}} 0,6539 \right] 989,55 = \\ &= -11\,375,41 \text{ kN/m}^2 = -11,375 \text{ MPa} \quad (\text{compresión})\end{aligned}$$

Por lo que respecta a las curvaturas, se obtendrán a partir de las expresiones 4.16

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_2 &= \frac{\widehat{M}_{f2}}{E\widehat{I}_2} = \frac{586,41 \text{ kNm}}{30\,000 \text{ MPa} \times 1,604 \times 10^{-2} \text{ m}^4} = \\ &= \frac{586,41 \text{ kNm}}{30 \times 10^6 \text{ kPa} \times 1,604 \times 10^{-2} \text{ m}^2} = 1,219 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_3 &= \frac{M_{f3}}{E\widehat{I}_3} = \frac{797,08 \text{ kNm}}{30\,000 \text{ MPa} \times 5,12 \times 10^{-2} \text{ m}^4} = \\ &= \frac{797,08 \text{ kNm}}{30 \times 10^6 \text{ kPa} \times 5,12 \times 10^{-2} \text{ m}^4} = 0,519 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

La curvatura total valdrá

$$\chi = \sqrt{(\hat{\chi}_2)^2 + (\hat{\chi}_3)^2} = 1,3249 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

♣ **Problema resuelto P4.3** Responder a las mismas cuestiones planteadas en el problema resuelto P4.2, pero utilizando los ejes horizontal y vertical Gx_2 y Gx_3 .

Solución

Las coordenadas del punto A respecto a los anteriores ejes son: (-41,92 ; 50,77).

Las tensiones normales en dicho punto se obtendrán a partir de la expresión 4.38

$$\sigma = \frac{M_f}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[\cos \alpha (x_3 I_3 - x_2 I_{23}) + \sin \alpha (x_3 I_{23} - x_2 I_2) \right]$$

Llamando

$$D = I_2 I_3 - I_{23}^2 = 2,17 \times 4,554 \times 10^{-4} - (1,292)^2 \times 10^{-4} = 8,2129 \times 10^{-4} \text{ m}^8$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_f}{8,2129 \times 10^{-4}} \left[\cos 30 (0,5077 \times 4,554 \times 10^{-2} - 0,4192 \times 1,292 \times 10^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + \sin 30 (-0,5077 \times 1,292 \times 10^{-2} + 0,4192 \times 2,17 \times 10^{-2}) \right] = 20,21 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Valor igual al obtenido anteriormente.

Si $\sigma_A = 20 \text{ MPa} = 20000 \text{ kPa}$, sustituyendo

$$M_f = \frac{20000}{20,21} \text{ kNm} = 989,55 \text{ kNm}$$

La expresión de la fibra neutra se obtiene sustituyendo en 4.39

$$x_3(I_3 \cos \alpha + I_{23} \sin \alpha) = x_2(I_2 \sin \alpha + I_{23} \cos \alpha)$$

Sustituyendo

$$x_3(4,554 \cos 30 - 1,292 \sin 30) = x_2(2,17 \sin 30 - 1,292 \cos 30)$$

es decir

$$3,2979 x_3 = -0,0339 x_2$$

Como puede comprobarse, la fibra neutra es la misma que la obtenida en el problema

resuelto P4.2. Es decir, el ángulo que forma la fibra neutra con la horizontal es

$$\gamma = \arctan \left(-\frac{0,0339}{3,2979} \right) = -0,587^\circ$$

Las coordenadas de los puntos B y C son

Punto B : (-11,92 ; 50,77)

Punto C : (58,58 ; -29,23)

Sustituyendo en 4.38

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{989,55}{8,2129 \times 10^{-4}} \left[\cos 30(0,5077 \times 4,554 \times 10^{-2} - 0,1192 \times 1,292 \times 10^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + \sin 30(-0,5077 \times 1,292 \times 10^{-2} + 0,1192 \times 2,17 \times 10^{-2}) \right] \\ &= 20124 \text{ kN/m}^2 = 20,124 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \frac{989,55}{8,2129 \times 10^{-4}} \left[\cos 30(-0,2923 \times 4,554 \times 10^{-2} + 0,5858 \times 1,292 \times 10^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + \sin 30(0,2923 \times 1,292 \times 10^{-2} - 0,5858 \times 2,17 \times 10^{-2}) \right] \\ &= 11375 \text{ kN/m}^2 = -11,375 \text{ MPa} \quad (\text{compresión})\end{aligned}$$

La distribución de tensiones se dibuja en la figura P4.2.3.

Las curvaturas respecto a los ejes x_2 y x_3 valdrán a partir de 4.35

$$\begin{aligned}\chi_2 &= \frac{1}{E} \frac{I_3 \cos \alpha + I_{23} \sin \alpha}{I_2 I_3 - I_{23}^2} M_f = \\ &= \frac{1}{30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2} \frac{4,554 \cos 30 - 1,292 \sin 30}{8,2129} 10^2 \times 989,55 = \\ &= 1,3245 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \frac{1}{E} \frac{I_{23} \cos \alpha + I_2 \sin \alpha}{I_2 I_3 - I_{23}^2} M_f = \\ &= \frac{1}{30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2} \frac{-1,292 \cos 30 + 2,17 \sin 30}{8,2129} 10^2 \times 989,55 = \\ &= 1,3617 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

La curvatura total

$$\chi = \sqrt{\chi_2^2 + \chi_3^2} = 1,32457 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

valor sensiblemente igual al obtenido en ejes principales.

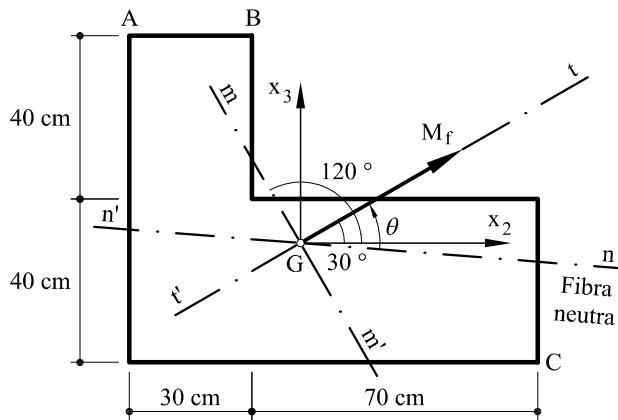


Fig. P4.4.1 Estudio directo de la flexión esviada

♣ **Problema resuelto P4.4** Responder a las mismas cuestiones planteadas en el problema resuelto P4.2 a partir del estudio directo de la flexión esviada.

Solución

De acuerdo con 4.49a el ángulo que forma la fibra neutra con el vector momento vale

$$\tan \theta = -\frac{I_{tm}}{I_{mm'}}$$

siendo

$$I_{tm} = (-I_3 + I_2) \frac{\sin(2 \times 30)}{2} + I_{23} \cos(2 \times 30) = (-4\ 554\ 103 + 2\ 170\ 256) \frac{\sin 60}{2} - \\ - 1\ 292\ 308 \cos 60 = -1\ 678\ 390 \text{ cm}^4 = -1,678 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_{mm'} = I_3 \cos^2 30 + I_2 \sin^2 30 + I_{23} \sin 60 = \\ = 4\ 554\ 103 \cos^2 30 + 2\ 170\ 256 \sin^2 30 - 1\ 292\ 308 \sin 60 = \\ = 2\ 838\ 970 \text{ cm}^4 = 2,839 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

por lo que

$$\tan \theta = \frac{1,678 \times 10^{-2}}{2,839 \times 10^{-2}} = 0,5911$$

es decir: $\theta = 30,587$.

Nótese que de acuerdo con las figuras 4.8a y 4.8b, el sentido del ángulo θ es el que va desde la fibra neutra al eje del momento.

El momento de inercia respecto a la fibra neutra mm' valdrá

$$\begin{aligned} I_{nn'} &= I_3 \sin^2(30 - 30, 587) + I_2 \cos^2(30 - 30, 587) - I_{23} \sin[2 \times (30 - 30, 587)] = \\ &= 4\,554\,103 \sin^2(-0, 587) + 2\,170\,256 \cos^2(-0, 587) + 1\,292\,308 \sin(-1, 174) = \\ &= 2\,144\,089 \text{ cm}^4 = 2,144 \times 10^{-2} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

y además

$$\tilde{I}_{nn'} = I_{nn'}/\cos(30, 587) = 2,491 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

La distancia de los puntos A , B y C a la fibra neutra vale:

$$y_A = 50,34 \text{ cm}$$

$$y_B = 50,65 \text{ cm}$$

$$y_C = -28,63 \text{ cm}$$

por lo que, de acuerdo con 4.45

$$\sigma_A = \frac{M_f}{\tilde{I}_{nn'}} y_A = \frac{M_f}{2,491 \times 10^{-2}} 0,5034$$

de donde:

$$M_f = \frac{20\,000 \text{ kN/m}^2 \times 2,491 \times 10^{-2} \text{ m}^4}{0,5034 \text{ m}} = 989,55 \text{ kNm}$$

Las tensiones en los puntos B y C valdrán

$$\sigma_B = \frac{989,55 \times 0,5065}{2,491 \times 10^{-2}} = 20\,124 \text{ kN/m}^2 = 20,124 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{989,55 \times (-0,2863)}{2,491 \times 10^{-2}} = -11\,375 \text{ kN/m}^2 = -11,375 \text{ MPa}$$

de acuerdo con 4.43 la curvatura total valdrá

$$\chi = \frac{M_f}{E\tilde{I}_{nn'}} = \frac{989,55 \text{ kNm}}{30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \times 2,491 \times 10^{-2} \text{ m}^4} = 1,33 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

valor igual al obtenido por otros métodos.

4.4 Secciones compuestas por diversos materiales

En el caso de una sección compuesta por diversos materiales y sometida a un momento flector, la distribución de tensiones y deformaciones sigue las mismas pautas vistas hasta ahora. Supóngase seguidamente una sección cualquiera (Fig. 4.10) en la que cada punto tiene un módulo de Elasticidad $E(x_2, x_3)$. Sea M_f un momento flector situado en el plano mm' y cuyo vector forma un ángulo α con el eje x_2 . El punto G, a diferencia de antes, no será el centro de gravedad de la sección, sino que habrá que determinar sus propiedades.

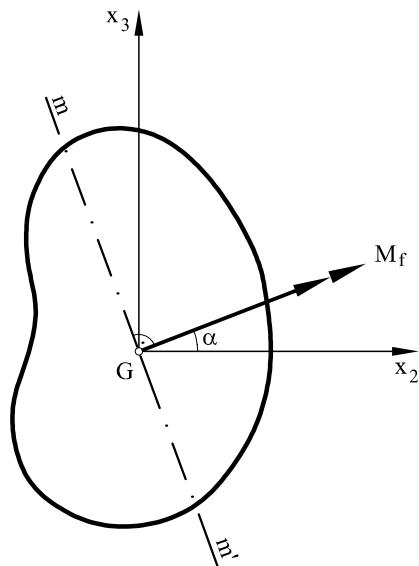


Fig. 4.10 Sección compuesta por diversos materiales sometida a un momento flector esviado

El punto de partida lo constituyen las expresiones 4.26 a 4.32 que siguen siendo válidas. Habrá que añadir la ecuación de equilibrio de fuerzas

$$N = \int_A \sigma \, dA = \int_A E(x_3\chi_2 - x_2\chi_3) \, dA = \chi_2 \int_A Ex_3 \, dA - \chi_3 \int_A Ex_2 \, dA = 0 \quad (4.50)$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor de χ_2 y χ_3 si

$$\int_A Ex_3 \, dA = \int_A Ex_2 \, dA = 0 \quad (4.51)$$

es decir, si el punto G es el centro de gravedad *mecánico* de la sección (ver Capítulo 3). Si, análogamente al capítulo anterior, se fija un módulo de elasticidad de referencia \bar{E} , se tendrá de acuerdo con 3.23

$$E(x_2, x_3) = n\bar{E} \quad (4.52)$$

por lo que

$$\begin{aligned} M_{f2} &= M_f \cos \alpha = \int_A \sigma x_3 \, dA = \int_A (x_3 E \chi_2 - x_2 E \chi_3) x_3 \, dA = \\ &= \chi_2 \int_A E x_3^2 \, dA - \chi_3 \int_A E x_2 x_3 \, dA = \bar{E} \chi_2 \int_A n x_3^2 \, dA - \bar{E} \chi_3 \int_A n x_2 x_3 \, dA = \\ &= \bar{E} \chi_2 I_2^* - \bar{E} \chi_3 I_{23}^* \end{aligned} \quad (4.53)$$

y también

$$M_{f3} = M_f \sin \alpha = - \int_A \sigma x_2 \, dA = - \bar{E} \chi_2 I_{23}^* + \bar{E} \chi_3 I_3^* \quad (4.54)$$

En las expresiones anteriores los momentos de inercia *mecánicos* de la sección vienen dados por

$$I_2^* = \int_A n x_3^2 \, dA \quad (4.55a)$$

$$I_3^* = \int_A n x_2^2 \, dA \quad (4.55b)$$

$$I_{23}^* = \int_A n x_2 x_3 \, dA \quad (4.55c)$$

A partir de 4.53 y 4.54 se obtiene

$$\bar{E} \chi_2 = \bar{E} \frac{d\varphi_2}{ds} = \frac{M_{f2} I_3^* + M_{f3} I_{23}^*}{I_2^* I_3^* - I_{23}^{*2}} \quad (4.56a)$$

$$\bar{E} \chi_3 = \bar{E} \frac{d\varphi_3}{ds} = \frac{M_{f2} I_{23}^* + M_{f3} I_2^*}{I_2^* I_3^* - I_{23}^{*2}} \quad (4.56b)$$

A partir de 4.30 la distribución de tensiones será

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon_1 E = x_3 \bar{E} n \chi_2 - x_2 \bar{E} n \chi_3 = \\ &= \frac{n}{I_2^* I_3^* - I_{23}^{*2}} \left[M_{f2} (x_3 I_3^* - x_2 I_{23}^*) + M_{f3} (x_3 I_{23}^* - x_2 I_2^*) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

viniendo dada la fibra neutra por una expresión similar a 4.39, es decir

$$x_3 (I_3^* \cos \alpha + I_{23}^* \sin \alpha) = x_2 (I_2^* \sin \alpha + I_{23}^* \cos \alpha) \quad (4.58)$$

Lógicamente, es también posible estudiar en este caso la flexión esviada de forma directa, tal como se hizo en el apartado 4.3.3. Fácilmente puede comprobarse que las mismas expresiones allá deducidas son válidas para secciones de diversos materiales sin más que sustituir los momentos de inercia por los momentos de inercia mecánicos y tener presente que las tensiones vienen dadas por

$$\sigma = n \frac{M_f x_2}{\tilde{I}_{nn'}^*} \quad (4.59)$$

Asimismo la construcción de la figura 4.9 conserva toda su validez.

♣ **Problema resuelto P4.5** La sección mixta de hormigón y acero de la figura P4.5.1 está compuesta por una cabeza de hormigón de $30 \times 8 \text{ cm}^2$ de área, siendo el resto acero. En dicha sección actúa un momento flector situado en un plano vertical de valor $M_f = 40 \text{ kNm}$ y de tal forma que comprima la fibra superior. Determinar la distribución de tensiones sabiendo que la relación entre módulos de elasticidad del acero y del hormigón vale 7.

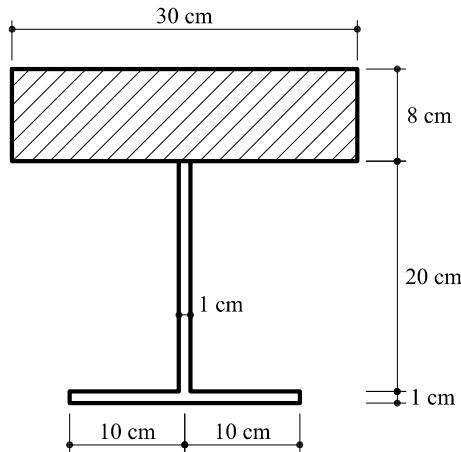


Fig. P4.5.1 Sección correspondiente al problema resuelto P4.5

Solución

En la figura P4.5.2 pueden verse representados los ejes principales de inercia y el centro de gravedad mecánico. Además, $I_2^* = 61\,564 \text{ cm}^4$.

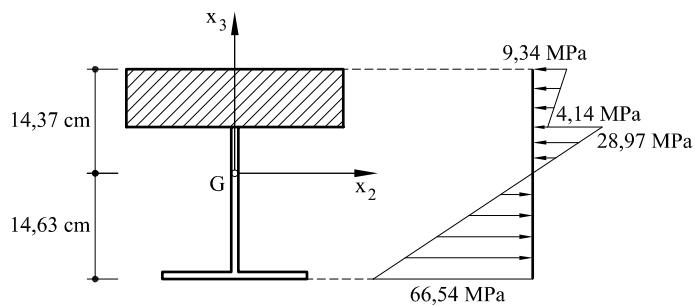


Fig. P4.5.2 Centro de gravedad mecánico y distribución de tensiones

Las tensiones máximas en el hormigón valdrán

$$(\sigma_h)_{\max} = -\frac{40 \text{ kNm} \times 0,1437 \text{ m}}{61\,564 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = -9\,336,63 \text{ kN/m}^2 = -9,34 \text{ MPa}$$

y las máximas tensiones en el acero

$$(\sigma_h)_{\max} = 7 \frac{40 \text{ kNm} \times 0,1463 \text{ m}}{61564 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 66538,89 \text{ kN/m}^2 = 66,54 \text{ MPa}$$

4.5 Tensiones y movimientos producidos en una sección debidos a deformaciones impuestas

Se han analizado hasta ahora las tensiones, deformaciones y movimientos que se producen en una sección cualquiera como consecuencia de la existencia de un momento fletor en la misma. Sin embargo, en una sección pueden producirse tensiones y movimientos sin que actúe esfuerzo externo alguno, sino algunas deformaciones que se imponen a la sección. Las más importantes vienen motivadas por los cambios térmicos y por la retracción y fluencia.

Para analizarlos, se considera una sección cualquiera de una pieza isostática³. Si las deformaciones que se imponen a la sección son compatibles con la cinemática propia de la sección, entonces se producirán movimientos, pero no tensiones, mientras que si, por el contrario, las deformaciones impuestas no son compatibles con la propia cinemática de la sección, se producirán movimientos y tensiones. Dicho en otras palabras: se ha adoptado como una de las hipótesis fundamentales de la Resistencia de Materiales la hipótesis de Navier, por lo tanto cualquier deformación impuesta que sea compatible con ella (es decir, que mantenga la sección plana) no producirá tensiones, mientras que si dicha deformación impuesta no mantiene plana la sección, será preciso introducir unas tensiones que la obliguen a permanecer plana.

Para aclarar lo expuesto, se desarrollan seguidamente varios ejemplos.

♣ Problema resuelto P4.6 Se considera una sección rectangular perteneciente a una pieza recta. El canto es h y el ancho b (Fig. P4.6.1). La sección se somete a un incremento térmico no constante en la sección y cuya ley de variación es la siguiente:

- En AB el incremento térmico es t_o .
- En CD se produce un decremento térmico de valor t_o .
- En cualquier otro punto de la sección, el incremento térmico varía linealmente entre los valores anteriores.

Determinar los movimientos y las tensiones producidas en la sección.

Solución

La ley de variación térmica puede verse representada en la figura P4.6.1. Su expresión analítica será

$$t = \frac{2t_o}{h} x_3 \quad (a)$$

³Las tensiones y movimientos producidos en piezas hiperstáticas por deformaciones impuestas serán estudiadas en capítulos posteriores.

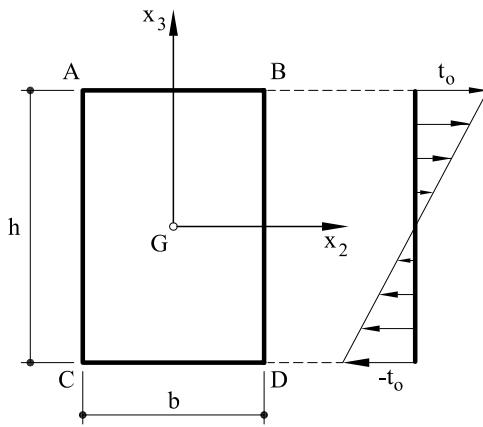


Fig. P4.6.1 Sección rectangular y ley de variación térmica dentro de la misma

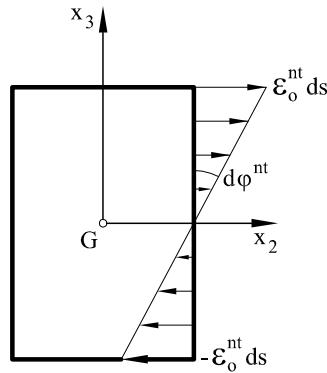


Fig. P4.6.2 Deformaciones y movimientos producidos por una variación térmica lineal dentro de la sección

Los movimientos que producirá en la sección vendrán dados por (ver Fig. P4.6.2)

$$\varepsilon_1^{nt}(x_3) ds = \frac{2\varepsilon_0^{nt}}{h} x_3 = \frac{2\alpha t_o}{h} x_3 \quad (b)$$

Por lo que el diferencial de giro valdrá

$$d\varphi^{nt} = -\frac{\varepsilon_1^{nt}(x_3) ds}{x_3} = -\frac{2\alpha t_o}{h} ds \quad (c)$$

y la curvatura

$$\chi^{nt} = \frac{d\varphi^{nt}}{ds} = \frac{2\alpha t_o}{h} \quad (d)$$

siendo \$\alpha\$ el coeficiente de dilatación lineal.

Como puede observarse, la distribución de deformaciones debidas a la variación térmica es compatible con la hipótesis de Navier, por lo cual no se producirán tensiones.

♣ **Problema resuelto P4.7** Considérese una sección rectangular compuesta por dos materiales (Fig. P4.7.1), cada uno de ellos con sus propias características elásticas y térmicas. Se somete la sección a un incremento de temperatura constante t . Determinar la distribución de deformaciones y tensiones en la sección. Se tomará $E_2 = E$ y $E_1 = 2E_2 = 2E$.

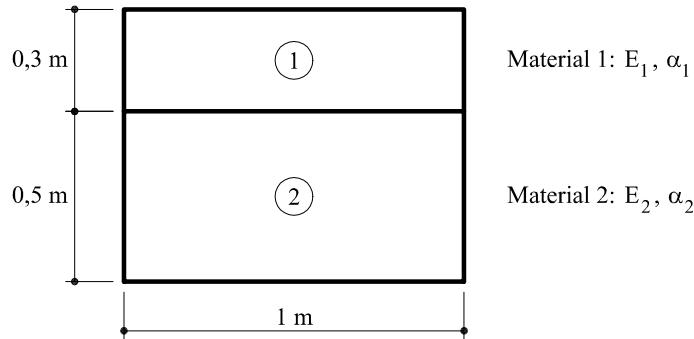


Fig. P4.7.1 Sección compuesta de dos materiales sometida a una variación térmica constante t

Solución

Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $\alpha_1 > \alpha_2$. Si cada fibra de la sección pudiera deformarse libremente, se producirían los movimientos dados por la línea $ABCDGH$ de la figura P4.7.2.

Como puede observarse en dicha figura, los movimientos producidos no son compatibles, por lo que se producirán tensiones. Puesto que la sección debe permanecer plana, sea $\pi\pi'$ el plano de la sección deformada. Las deformaciones que se producirán como consecuencia de ello son las señaladas con flechitas en la figura P4.7.2. Asimismo, las tensiones serán iguales a estas deformaciones multiplicadas por su correspondiente módulo de Elasticidad. Para que el plano $\pi\pi'$ esté completamente determinado, es preciso conocer su valor en un punto y su inclinación θ respecto a un plano vertical. Se pueden tomar por tanto como incógnitas el valor de la deformación BL y el ángulo θ . Para determinarlas se imponen las sabidas condiciones de equilibrio.

Sea: $BL = y_1$

Por tanto:

$$RC = y_2$$

$$DR = (\alpha_1 - \alpha_2)t - y_2$$

$$SG = y_3$$

Se plantean seguidamente las ecuaciones de equilibrio. Primeramente el equilibrio de fuerzas

$$N = \int_A \sigma \, dA = \int_A \varepsilon E \, dA = 0$$

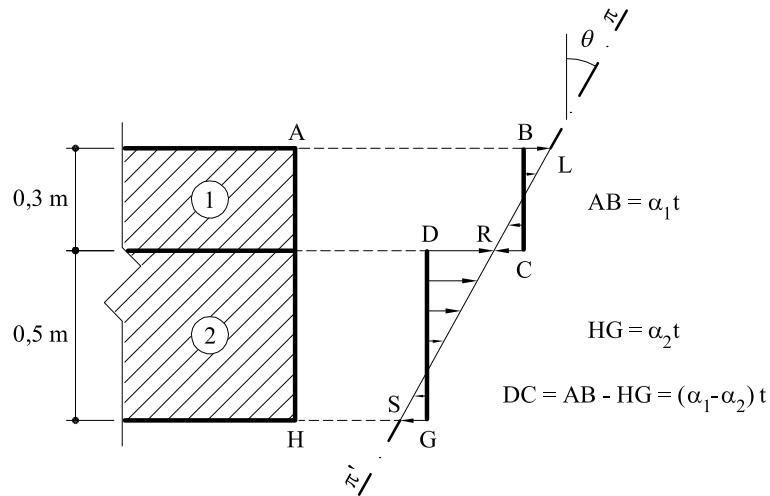


Fig. P4.7.2 Deformaciones producidas en una sección rectangular de dos materiales por una variación térmica constante t

es decir

$$1 \times \frac{BL - RC}{2} \times 0,3 \times E_1 + 1 \times \frac{DR - SG}{2} \times 0,5 \times E_2 = 0 \quad (a)$$

y sustituyendo

$$\frac{y_1 - y_2}{2} \times 0,3 \times 2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)t - y_2 - y_3}{2} \times 0,5 = 0 \quad (b)$$

$$0,3y_1 - 0,55y_2 - 0,25y_3 + 0,25(\alpha_1 - \alpha_2)t = 0 \quad (c)$$

lo cual constituye la primera ecuación.

La segunda ecuación vendrá dada por el equilibrio de momentos. Tomando momentos respecto al punto G .

$$1 \times \frac{BL - RC}{2} \times 0,3 \times E_1 \left[0,5 + \frac{0,3}{3} \frac{2 \times BL - RC}{BL - RC} \right] + \\ + 1 \times \frac{DR - SG}{2} \times 0,5 \times E_2 \left[\frac{0,5}{3} \frac{2 \times DR - SG}{DR - SG} \right] = 0 \quad (d)$$

y sustituyendo y reordenando términos

$$\frac{y_1 - y_2}{2} \times 0,3 \times 2 \left(0,5 + 0,10 \frac{2(y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} \right) + \\ + \frac{0,25}{6} \left[2 \times (\alpha_1 - \alpha_2)t - 2y_2 - y_3 \right] = 0 \quad (e)$$

O sea

$$0,21 y_1 - 0,2633 y_2 - 0,0417 y_3 + 0,0833 (\alpha_1 - \alpha_2) t = 0 \quad (f)$$

que constituye la segunda ecuación.

La tercera ecuación se obtendrá de imponer que las pendientes sean iguales, es decir

$$\frac{BL + RC}{0,3} = \frac{DR + SG}{0,5} \quad (g)$$

o sea

$$\frac{y_1 + y_2}{0,3} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) t - y_2 + y_3}{0,5}$$

es decir

$$0,5 y_1 + 0,8 y_2 - 0,3 y_3 = 0,3 (\alpha_1 - \alpha_2) t$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$y_1 = 0,1638 (\alpha_1 - \alpha_2) t$$

$$y_2 = 0,3952 (\alpha_1 - \alpha_2) t$$

$$y_3 = 0,3271 (\alpha_1 - \alpha_2) t$$

Conocidos los valores de las deformaciones, las tensiones se obtienen multiplicándolas por sus correspondientes módulos de Elasticidad. Por lo tanto, si se denomina $k = E(\alpha_1 - \alpha_2)t$, en la figura P4.7.3 viene representada la distribución de tensiones.

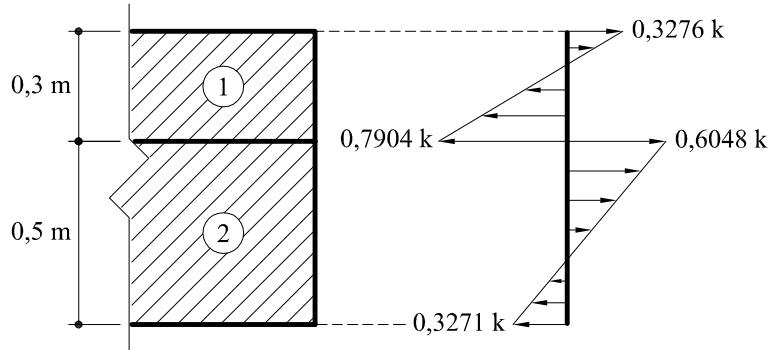


Fig. P4.7.3 Distribución de tensiones

4.6 Energía de deformación

De acuerdo con lo estudiado en apartados anteriores, la existencia de un momento flector actuando en una sección de una pieza provoca una distribución de tensiones normales a dicha sección. Al mismo tiempo, provoca unas deformaciones contenidas en un plano, lo que da lugar a que una sección de una dovela gire una cantidad $d\varphi$ con respecto a la anterior. Ello provoca una curvatura en la fibra neutra de valor $\chi = d\varphi/ds$.

En este apartado, se tratará de obtener el valor de la energía de deformación de una pieza, en función del valor (o valores) del momento flector y de la curvatura (denominada también deformación generalizada). Para ello, nótese que la única componente no nula del tensor de tensiones es $\sigma_1 = \sigma$, siendo el resto iguales a cero.

A partir de la expresión 1.49, la energía de deformación por unidad de volumen se escribe

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.60)$$

y eliminando los productos nulos, la energía de deformación por unidad de volumen debida al momento flector se escribe

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (4.61)$$

En los subapartados que siguen, se integra la expresión anterior en la sección de la pieza para obtener la energía de deformación en función de las variables generalizadas.

4.6.1 Energía de deformación en piezas de plano medio

Teniendo en cuenta que, si el momento está situado en el eje Ox_2 , las tensiones valen

$$\sigma = \frac{M_{f2}x_3}{I_2}$$

y las deformaciones son

$$\varepsilon = \chi_2 x_3$$

sustituyendo en 4.61 se obtiene

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2} M_{f2} \chi_2 \frac{x_3^2}{I_2} \quad (4.62)$$

e integrando en la sección

$$\overset{\triangle}{W}_M = \frac{1}{2} \int_A M_{f2} \chi_2 \frac{x_3^2}{I_2} dA = \frac{1}{2} M_{f2} \chi_2 \frac{\int_A x_3^2 dA}{I_2} = \frac{1}{2} M_{f2} \chi_2 \quad (4.63a)$$

expresión que también puede escribirse

$$\overset{\triangle}{W}_M = \frac{1}{2} \frac{M_{f2}^2}{EI_2} \quad (4.63b)$$

o bien

$$\overset{\triangle}{W}_M = \frac{1}{2} EI_2 \chi_2^2 \quad (4.63c)$$

La energía de deformación para toda la pieza se obtiene integrando en toda la longitud cualquiera de las expresiones 4.63, es decir

$$W_M = \frac{1}{2} \int_L M_{f2} \chi_2 \, ds = \frac{1}{2} \int_L M_{f2} \, d\varphi_2 = \frac{1}{2} \int_L \frac{M_{f2}^2}{EI_2} \, ds = \frac{1}{2} \int_L EI_2 \chi_2^2 \, ds \quad (4.64)$$

Las expresiones anteriores de la energía de deformación pueden asimismo obtenerse a partir del producto escalar del vector momento por el vector giro multiplicado por 1/2.

4.6.2 Energía de deformación en ejes principales

De acuerdo con lo analizado en el apartado 4.3.1, si se tiene un momento flector M_f de componentes $\widehat{M}_{f2} = M_f \cos \alpha$ y $\widehat{M}_{f3} = M_f \sin \alpha$ según los ejes (principales) locales $G\widehat{x}_2$ y $G\widehat{x}_3$, se produce un giro $d\varphi$ en la sección de valor

$$d\varphi = d\widehat{\varphi}_2 \widehat{\mathbf{e}}_2 + d\widehat{\varphi}_3 \widehat{\mathbf{e}}_3 = \left(\frac{\widehat{M}_{f2}}{E\widehat{I}_2} \widehat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\widehat{M}_{f3}}{E\widehat{I}_3} \widehat{\mathbf{e}}_3 \right) ds \quad (4.65)$$

por lo que la energía de deformación vendrá dada por

$$W_M = \frac{1}{2} \int_L [\widehat{M}_{f2}, \widehat{M}_{f3}] \begin{bmatrix} d\widehat{\varphi}_2 \\ d\widehat{\varphi}_3 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

por lo cual, la energía de deformación debida al momento flector puede expresarse por las formas alternativas

$$\begin{aligned} W_M &= \frac{1}{2} \int_L \widehat{M}_{f2} d\widehat{\varphi}_2 + \frac{1}{2} \int_L \widehat{M}_{f3} d\widehat{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \int_L \widehat{M}_{f2} \widehat{\chi}_2 \, ds + \frac{1}{2} \int_L \widehat{M}_{f3} \widehat{\chi}_3 \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_L \frac{\widehat{M}_{f2}^2}{E\widehat{I}_2} \, ds + \frac{1}{2} \int_L \frac{\widehat{M}_{f3}^2}{E\widehat{I}_3} \, ds = \frac{1}{2} \int_L E\widehat{I}_2 \widehat{\chi}_2^2 \, ds + \frac{1}{2} \int_L E\widehat{I}_3 \widehat{\chi}_3^2 \, ds \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.6.3 Energía de deformación con ejes cualesquiera

A partir de los resultados obtenidos en el apartado anterior, la energía de deformación puede escribirse

$$\begin{aligned} W_M &= \frac{1}{2} \int_L M_{f2} d\varphi_2 + \frac{1}{2} \int_L M_{f3} d\varphi_3 = \frac{1}{2} \int_L M_{f2} \chi_2 \, ds + \frac{1}{2} \int_L M_{f3} \chi_3 \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_L \frac{M_{f2}^2 I_3 + M_{f3}^2 I_2 + 2M_{f2}M_{f3}I_{23}}{E(I_2I_3 - I_{23}^2)} \, ds = \frac{1}{2} \int_L E(\chi_2^2 I_2 - 2\chi_2\chi_3 I_{23} + \chi_3^2 I_3) \, ds \end{aligned} \quad (4.68)$$

A la misma conclusión anterior puede llegarse a partir de la integración de 4.61 en todo el volumen, teniendo presente la expresión 4.37.

4.7 Flexión compuesta

Cuando sobre una sección recta de una pieza cualquiera actúa simultáneamente un momento flector M_f y un esfuerzo axil N , se dice que la sección está sometida a flexión compuesta. Como ambas solicitudes M_f y N sólo producen tensiones normales, en virtud del principio de superposición, en el caso de flexión compuesta se producirán únicamente tensiones de este tipo.

La flexión compuesta es equivalente asimismo a la actuación de un esfuerzo axil N en un punto P de la sección (denominado centro de presiones) distinto del centro de gravedad G (Fig. 4.11), y es de tal forma que las excentricidades valgan

$$e_2 = -\frac{M_{f3}}{N} \quad (4.69a)$$

$$e_3 = \frac{M_{f2}}{N} \quad (4.69b)$$

de tal forma que se cumpla la igualdad vectorial

$$\mathbf{M}_f = \overrightarrow{GP} \times \mathbf{N} \quad (4.70)$$

4.7.1 Flexión compuesta recta

La flexión compuesta se denomina recta cuando el vector \mathbf{M}_f (Figura 4.11) -y por tanto también la fuerza N - están contenidos en uno de los ejes principales de inercia. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que dicho eje principal de inercia es el Gx_3 .

Para calcular las tensiones, se sumarán los efectos debido a N y los debidos a M_{f2}

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{f2}x_3}{I_2} \quad (4.71)$$

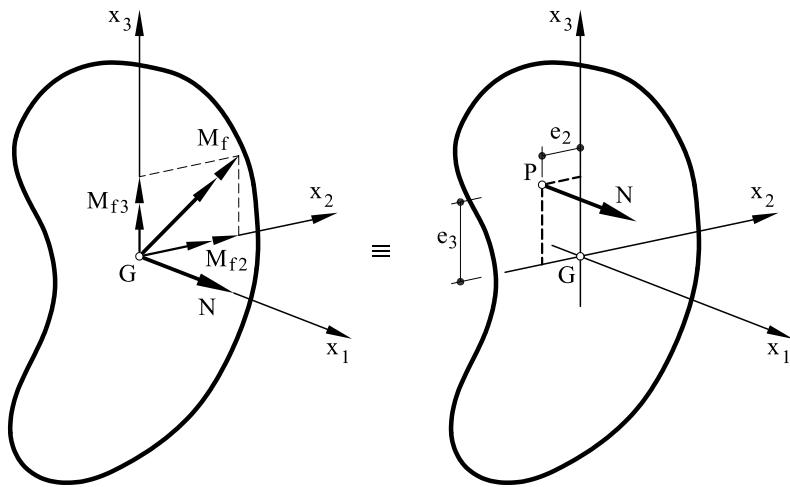


Fig. 4.11 Sección sometida a flexión compuesta

Las secciones normales, conservándose planas y manteniéndose normales a la fibra media para cada una de las solicitudes, cumplirán esta propiedad al actuar simultáneamente.

Además, como por efecto de la actuación de N y M_{f3} , una cara de una rebanada experimenta una traslación y un giro (alrededor de Gx_2) respectivamente, esta cara efectuará en flexión compuesta recta un giro alrededor de un eje paralelo a Gx_2 y cuya posición se determinará más adelante.

Las tensiones máximas se producirán en las fibras extremas y vendrán dadas por (ver Figura 4.12)

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_{f2}y_1}{I_2} \quad (4.72a)$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_{f2}y_2}{I_2} \quad (4.72b)$$

siendo y_1 e y_2 las distancias del eje Gx_2 a las fibras extremas de la sección.

Teniendo en cuenta 4.69, la expresión 4.71 puede también escribirse

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ne_3}{I_2}x_3 = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e_3x_3}{r_2^2} \right) \quad (4.73)$$

siendo $r_2 = \sqrt{I_2/A}$ al radio de giro de la sección alrededor del eje Gx_2 .

La posición de la fibra neutra, o eje de giro de la sección mencionado previamente, se obtendrá anulando la expresión 4.73

$$1 + \frac{e_3x_3^0}{r_2^2} = 0 \quad (4.74)$$

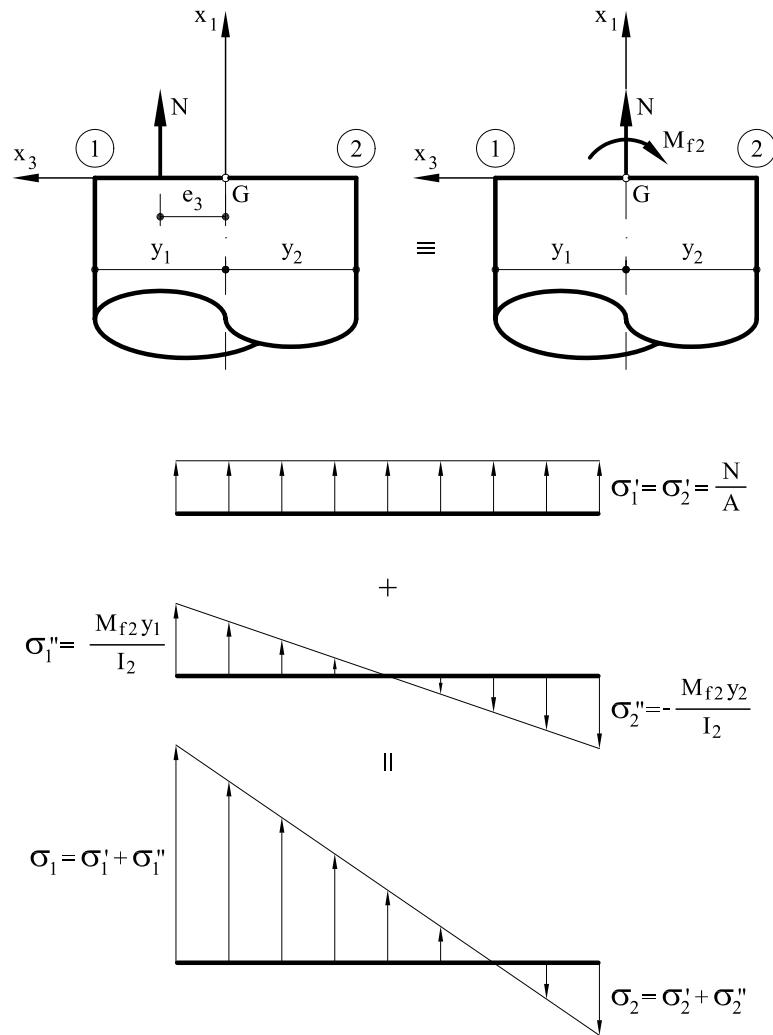


Fig. 4.12 Distribución de tensiones en flexión compuesta

siendo x_3^o la distancia del eje Gx_2 a la fibra neutra ff' , con lo que

$$x_3^o = -\frac{r_2^2}{e_3} \quad (4.75)$$

En la figura 4.13 puede verse representado gráficamente el eje neutro, así como su situación. Obsérvese que dicho eje no depende del valor de N , sino únicamente de su posición e_3 .

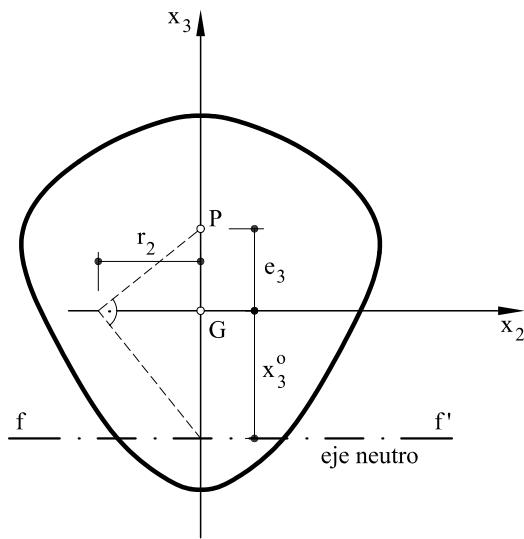


Fig. 4.13 Posición del eje neutro

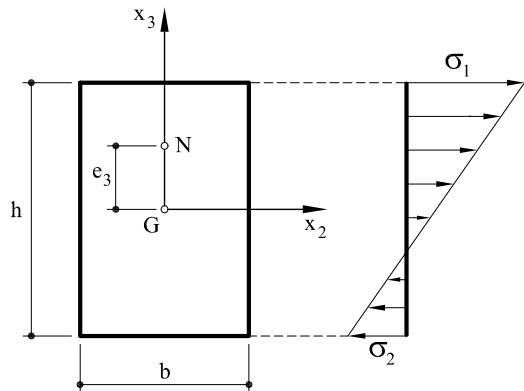


Fig. 4.14. Distribución de tensiones en una sección rectangular

En el caso de una sección rectangular (Fig. 4.14) se tendrá

$$\sigma_1 = \frac{N}{bh} + 6 \frac{Ne_3}{bh^2} = \frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6e_3}{h} \right) \quad (4.76a)$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{bh} - 6 \frac{Ne_3}{bh^2} = \frac{N}{bh} \left(1 - \frac{6e_3}{h} \right) \quad (4.76b)$$

Las expresiones anteriores son de gran utilidad en multitud de estructuras tales como pilares, etc.

♣ **Problema resuelto P4.8** Resuélvase nuevamente el problema P4.7 pero bajo el punto de vista de la flexión compuesta.

Solución

La solución de este problema puede obtenerse alternativamente utilizando los conceptos de flexión compuesta. Para ello, observando la distribución de tensiones dada en la figura P4.7.3, está claro que, en cada una de las porciones 1 y 2 de la sección, la resultante de dichas tensiones es un esfuerzo axil N que actúa en un punto a determinar. Por consideraciones de equilibrio, el esfuerzo axil N_1 de la porción 1 debe ser igual y de signo contrario al esfuerzo axil N_2 correspondiente a la porción 2. Además, el punto de aplicación de N_1 y de N_2 coinciden (ver Fig. P4.8.1).

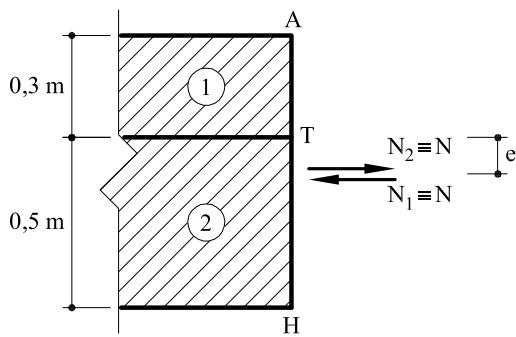


Fig. P4.8.1. Resultante $N_1 \equiv N$ y $N_2 \equiv N$ de las tensiones que actúan en 1 y en 2

Las dos incógnitas del problema lo constituyen los valores de N y e . Las dos ecuaciones se obtendrán de:

- Igualdad de deformaciones en T
- Igualdad de giro en 1 y en 2, ya que la sección debe conservarse plana

a) Igualdad de deformaciones en T

Las tensiones en T considerando que T pertenece a 1 valen

$$(\sigma_T)_1 = -\frac{N}{1 \times 0,3} - \frac{N \left(\frac{0,3}{2} + e \right) \frac{0,3}{2}}{I_1} \quad (a)$$

siendo $I_1 = (1 \times (0,3)^3)/12 = 0,00225 \text{ m}^4$. Sustituyendo en a

$$(\sigma_T)_1 = -13,33N - 66,67 \text{ N/e} \quad (b)$$

Considerando seguidamente que T pertenece a 2 se obtendrá

$$(\sigma_T)_2 = \frac{N}{1 \times 0,5} + \frac{N\left(\frac{0,5}{2} - e\right) \frac{0,5}{2}}{I_2} \quad (c)$$

siendo $I_2 = (1 \times (0,5)^3)/12 = 0,0104 \text{ m}^4$. Sustituyendo en c

$$(\sigma_T)_2 = 8 N - 24 N e \quad (d)$$

Debido a la igualdad de deformaciones, es obvio que debe cumplirse

$$\alpha_1 t \, ds + (\varepsilon_T)_1 \, ds = \alpha_2 t \, ds + (\varepsilon_T)_2 \, ds \quad (e)$$

O sea

$$E (\alpha_1 - \alpha_2) t = 14,67 N + 9,335 N e \quad (f)$$

Lo cual constituye la primera ecuación.

b) *Igualdad de los ángulos de giro* (o también de las curvaturas)

Dado que $\chi = d\varphi_2/ds = M_f/EI$, es inmediato obtener que

$$\frac{N\left(\frac{0,3}{2} + e\right)}{E_1 I_1} = \frac{N\left(\frac{0,5}{2} - e\right)}{E_2 I_2} \quad (g)$$

Es decir

$$\frac{N (0,15 + e)}{2 \times 0,00225} = \frac{N (0,25 - e)}{0,0104} \quad (h)$$

lo cual constituye la segunda ecuación.

De h se obtiene que $e = -0,029$ metros. Por lo que a partir de f se obtendrá

$$N = 0,06944 E (\alpha_1 - \alpha_2) t \quad (i)$$

A partir de los valores de N y e obtenidos, es posible hallar la distribución de tensiones:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{N}{1 \times 0,3} + \frac{N\left(\frac{0,3}{2} + e\right)}{I_1} 0,15 = -\frac{0,06944 E (\alpha_1 - \alpha_2) t}{0,3} + \\ &+ \frac{0,06944 E (\alpha_1 - \alpha_2) t (0,15 - 0,029)}{0,00225} 0,15 = 0,3487 E (\alpha_1 - \alpha_2) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_T)_1 &= -\frac{N}{1 \times 0,3} - \frac{N\left(\frac{0,3}{2} + e\right)}{I_1} 0,15 = -\frac{0,06944 E (\alpha_1 - \alpha_2) t}{0,3} - \\ &- \frac{0,06944 (\alpha_1 - \alpha_2) t (0,15 - 0,029)}{0,00225} 0,15 = -0,7917 E (\alpha_1 - \alpha_2) t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_T)_2 &= \frac{N}{1 \times 0,5} + \frac{N \left(\frac{0,5}{2} - e \right)}{I_2} \frac{0,5}{2} = \frac{0,06944 E (\alpha_1 - \alpha_2) t}{0,5} + \\
 &+ \frac{0,06944 (\alpha_1 - \alpha_2) t (0,25 - 0,029)}{0,0104} 0,25 = 0,6046 E (\alpha_1 - \alpha_2) t \\
 \sigma_H &= \frac{N}{1 \times 0,5} - \frac{N \left(\frac{0,5}{2} - e \right)}{I_2} \frac{0,5}{2} = \frac{0,06944 (\alpha_1 - \alpha_2) t}{0,5} - \\
 &- \frac{0,06944 (\alpha_1 - \alpha_2) t (0,25 - 0,029)}{0,0104} 0,25 = -0,3269 E (\alpha_1 - \alpha_2) t
 \end{aligned}$$

Como puede comprobarse, la distribución de tensiones así obtenida coincide con la proporcionada en el problema resuelto P4.7. Las diferencias corresponden a errores de redondeo.

4.7.2 Flexión compuesta esviada en ejes principales

Sean $G\hat{x}_2$ y $G\hat{x}_3$ los ejes principales de la sección considerada y sea N un esfuerzo axil de tracción situado en un punto de coordenadas (\hat{e}_2, \hat{e}_3) respecto a los ejes anteriores. En tal caso se dice que la sección está sometida a una flexión compuesta esviada.

Los momentos flectores actuantes valdrán

$$\widehat{M}_{f2} = N\hat{e}_3 \quad (4.77a)$$

$$\widehat{M}_{f3} = -N\hat{e}_2 \quad (4.77b)$$

por lo cual, la distribución de tensiones en la sección vendrá dada (de acuerdo con 4.23) por

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{\widehat{M}_{f2}}{\widehat{I}_2} \hat{x}_3 - \frac{\widehat{M}_{f3}}{\widehat{I}_3} \hat{x}_2 = \frac{N}{A} + \frac{N\hat{e}_3}{\widehat{I}_2} \hat{x}_3 + \frac{N\hat{e}_2}{\widehat{I}_3} \hat{x}_2 \quad (4.78)$$

La fibra neutra se obtendrá igualando a cero la expresión anterior, es decir

$$1 + \frac{\hat{e}_3}{\widehat{r}_2^2} \hat{x}_3 + \frac{\hat{e}_2}{\widehat{r}_3^2} \hat{x}_2 = 0 \quad (4.79)$$

siendo $\widehat{r}_2 = \sqrt{\widehat{I}_2/A}$ y $\widehat{r}_3 = \sqrt{\widehat{I}_3/A}$ los radios de giro de la sección con respecto a los ejes $G\hat{x}_2$ y $G\hat{x}_3$, respectivamente.

Si \hat{x}_2^o y \hat{x}_3^o son los puntos de corte de la fibra neutra con los ejes $G\hat{x}_2$ y $G\hat{x}_3$, respectivamente, de 4.79 se obtiene

$$\hat{x}_2^o = - \frac{\hat{r}_3^2}{\hat{e}_2} \quad (4.80a)$$

$$\hat{x}_3^o = - \frac{\hat{r}_2^2}{\hat{e}_3} \quad (4.80b)$$

valores que pueden verse representados en la figura 4.15.

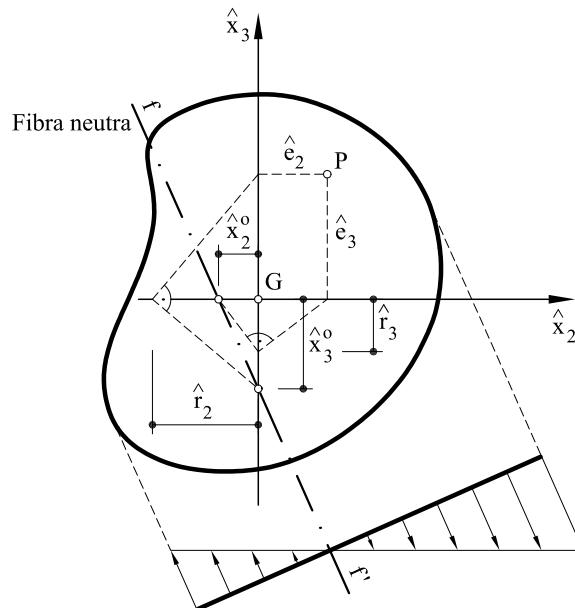


Fig. 4.15. Fibra neutra y distribución de tensiones normales sobre una sección cuando actúa un esfuerzo axial en el centro de presiones P

A partir de las expresiones 4.80 es claro que si el centro de presiones P se acerca al centro de gravedad G , al ser en valor absoluto las excentridades \hat{e}_2 y \hat{e}_3 pequeñas, los valores \hat{x}_2^o y \hat{x}_3^o serán grandes (también en valor absoluto) por lo que la fibra neutra se alejará del centro de gravedad G . Si los valores \hat{e}_2 y \hat{e}_3 siguen disminuyendo, la fibra neutra saldrá fuera de la sección, estando entonces toda ella sometida a tracción.

Una propiedad muy importante de la fibra neutra es que *cuando el centro de presiones P se desplaza a lo largo de una recta, las fibras neutras correspondientes a cada una de las posiciones del centro de presiones pasan por un punto R .* Para demostrarlo, considérese la sección de la figura 4.16, en la que una fuerza N se desplaza a lo largo de la recta $\alpha - \alpha'$. Dicha fuerza N se puede descomponer en dos fuerzas N' y N'' situadas respectivamente en los ejes $G\hat{x}_3$ y $G\hat{x}_2$ (puntos A y B). Lógicamente los valores de N' y N'' variarán al variar el punto de aplicación de N . La fibra neutra correspondiente

a una fuerza N' (cualquiera) aplicada en A es la recta $f' - f'$, construida de acuerdo con lo visto anteriormente. Análogamente, $f'' - f''$ es la fibra neutra de una fuerza N'' aplicada en B . Ambas fibras neutras se cortan en R , siendo éste por lo tanto el punto por el que pasan todas las fibras neutras cuando una fuerza N recorre $\alpha - \alpha'$.

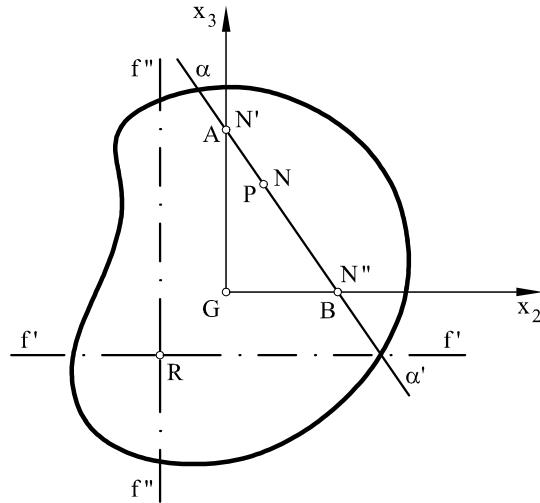


Fig. 4.16. Fuerza N recorriendo una recta

4.7.3 Flexión compuesta esviada en ejes cualesquiera

Supóngase seguidamente que los ejes Gx_3 y Gx_2 de la sección no son principales de inercia, y en la sección actúa un esfuerzo axil N de tracción aplicado en un punto P de coordenadas (e_2, e_3) . Al igual que anteriormente, los momentos flectores valdrán

$$M_{f2} = Ne_3 \quad (4.81a)$$

$$M_{f3} = -Ne_2 \quad (4.81b)$$

De acuerdo con la expresión 4.37 las tensiones normales valdrán:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[M_{f2}(x_3 I_3 - x_2 I_{23}) + M_{f3}(x_3 I_{23} - x_2 I_2) \right] = \\ &= \frac{N}{A} + \frac{N}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[e_3(x_3 I_3 - x_2 I_{23}) - e_2(x_3 I_{23} - x_2 I_2) \right] \end{aligned} \quad (4.82)$$

Al igual que anteriormente, la fibra neutra se obtendrá anulando la expresión anterior

$$1 + \frac{e_2 r_2^2 - e_3 r_{23}^2}{r_2^2 r_3^2 - r_{23}^4} x_2 + \frac{e_3 r_3^2 - e_2 r_{23}^2}{r_2^2 r_3^2 - r_{23}^4} x_3 = 0 \quad (4.83)$$

siendo $r_{23}^2 = I_{23}/A$.

Los puntos de corte de la fibra neutra con los ejes Gx_2 y Gx_3 valdrán:

$$x_2^o = -\frac{r_2^2 r_3^2 - r_{23}^4}{e_2 r_2^2 - e_3 r_{23}^2} = -\frac{r_3^2 - \frac{r_{23}^4}{r_2^2}}{e_2 - e_3 \frac{r_{23}^2}{r_2^2}} \quad (4.84a)$$

$$x_3^o = -\frac{r_2^2 r_3^2 - r_{23}^4}{e_3 r_3^2 - e_2 r_{23}^2} = -\frac{r_2^2 - \frac{r_{23}^4}{r_3^2}}{e_3 - e_2 \frac{r_{23}^2}{r_3^2}} \quad (4.84b)$$

En la figura 4.17 pueden verse representados los anteriores valores.

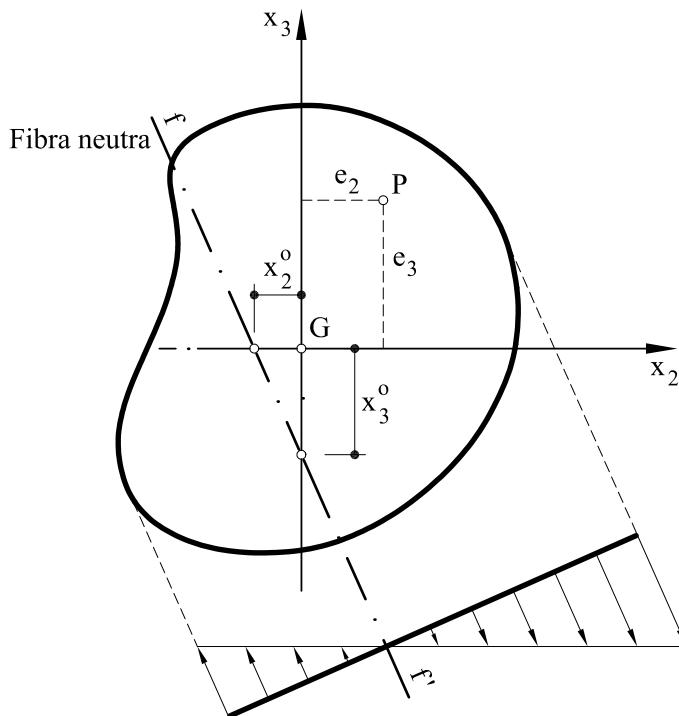


Fig. 4.17. Centro de presiones, fibra neutra y distribución de tensiones normales en una sección con ejes cualesquiera sometida a flexión compuesta esviada

4.7.4 Estudio directo de la flexión compuesta esviada

El estudio de la flexión esviada parte de los resultados obtenidos en el estudio directo de la flexión esviada (Apartado 4.3.3).

Supóngase que en el punto P de la figura 4.18 actúa un esfuerzo axial N de tracción. Dicho esfuerzo es equivalente a un esfuerzo axial N situado en G más un momento flector M_f , situado en el plano GP y cuyo vector es perpendicular a dicho plano, y de valor $M_f = Ne$, siendo $e = \overline{GP}$.

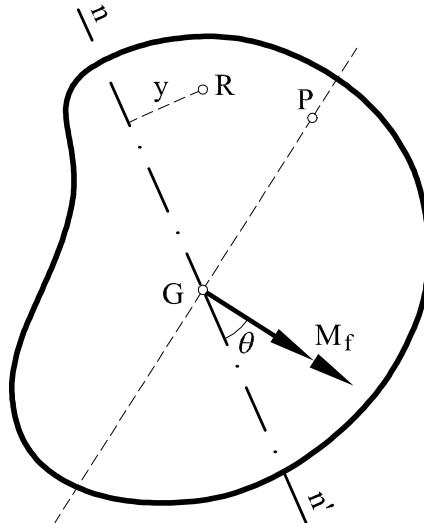


Fig. 4.18. Estudio directo de la flexión compuesta esviada

Si nn' es la fibra neutra correspondiente al momento $M_f = Ne$, las tensiones en un punto cualquiera R distante y de nn' valdrán

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ne}{I_{nn'}/\cos\theta} y \quad (4.85)$$

y la distancia y^o desde G a la fibra neutra $f - f'$ se obtendrá igualando a cero la expresión anterior

$$0 = 1 + \frac{e_1}{r_{nn'}^2} y^o \quad (4.86)$$

siendo $r_{nn'} = \sqrt{I_{nn'}/A}$ y $e_1 = e \cos\theta$.

Despejando y^o

$$y^o = -\frac{r_{nn'}^2}{e_1} \quad (4.87)$$

En la figura 4.19 puede verse representada la posición de la fibra neutra $f - f'$.

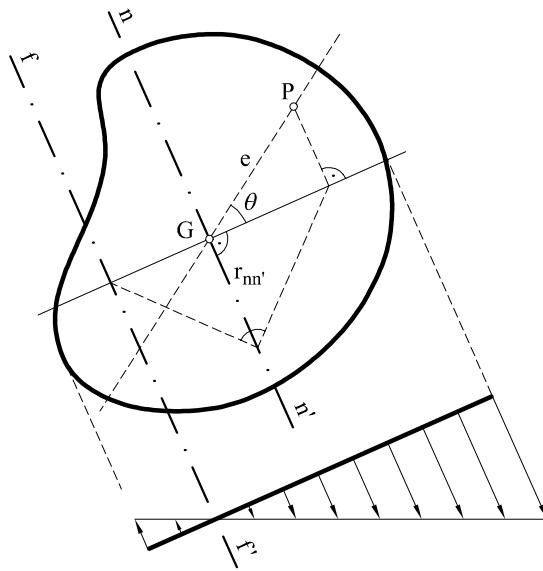


Fig. 4.19. Fibra neutra y distribución de tensiones en una sección sometida a flexión compuesta esviada (estudio directo)

- ♣ **Problema resuelto P4.9** En la sección dada por el problema resuelto P4.2 actúa un esfuerzo axial N de tracción en el punto P cuyas coordenadas (ver Fig. P4.9.1) expresadas en centímetros son $P(-30 \sin 30^\circ; 30 \cos 30^\circ)$. El esfuerzo N vale $N = 2800 \text{ kN}$. Hallar:
- Máximas tensiones de tracción y compresión y punto en el que se producen
 - Fibra neutra
 - Distribución de tensiones

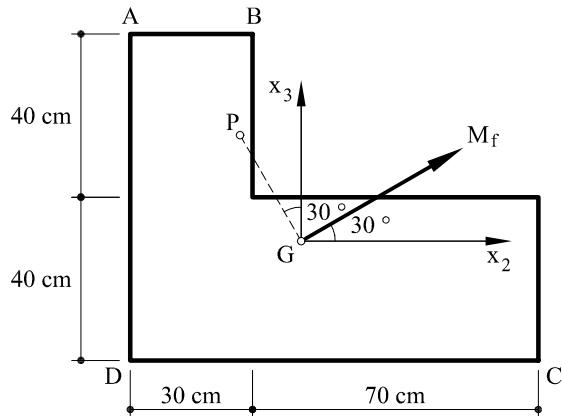


Fig. P4.9.1 Sección sometida a flexión compuesta

Solución

El esfuerzo N actuando en P es equivalente a un esfuerzo N actuando en el centro de gravedad G más un momento flector M_f de valor $M_f = 0,3 N = 840 \text{ kNm}$, y cuyo vector momento forma un ángulo de 30° con la horizontal.

Se resolverá el problema utilizando tres procedimientos.

Primer procedimiento. Utilizando ejes principales de inercia.

Las componentes del momento flector M_f respecto a los ejes principales valen:

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{f2} &= M_f \cos 53,657 = 840 \cos 53,657 = 497,8 \text{ kNm} \\ \widehat{M}_{f3} &= M_f \sin 53,657 = 840 \sin 53,657 = 676,6 \text{ kNm}\end{aligned}$$

De acuerdo con 4.77 las excentridades valen

$$\begin{aligned}\widehat{e}_3 &= \frac{\widehat{M}_{f2}}{N} = \frac{497,8 \text{ kNm}}{2800 \text{ kN}} = 0,1778 \text{ m} \\ \widehat{e}_2 &= -\frac{\widehat{M}_{f3}}{N} = -\frac{676,6 \text{ kNm}}{2800 \text{ kN}} = -0,2413 \text{ m}\end{aligned}$$

Los radios de giro de la sección respecto a los ejes principales valdrán

$$\begin{aligned}\widehat{r}_2^2 &= \frac{\widehat{I}_2}{A} = \frac{1,604 \times 10^{-2} \text{ m}^4}{0,52 \text{ m}^2} = 3,0846 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\ \widehat{r}_3^2 &= \frac{\widehat{I}_3}{A} = \frac{5,120 \times 10^{-2} \text{ m}^4}{0,52 \text{ m}^2} = 9,8462 \times 10^{-2} \text{ m}^2\end{aligned}$$

La fibra neutra será lógicamente paralela a la obtenida cuando únicamente existía flexión. Su posición se puede obtener a partir de la ecuación 4.78 igualando a cero las tensiones, o bien obteniendo los valores de su intersección con los ejes coordenados (ecuaciones 4.80):

$$\begin{aligned}\widehat{x}_2^o &= -\frac{\widehat{r}_3^2}{\widehat{e}_2} = -\frac{9,8462 \times 10^{-2}}{-0,2413} = 0,408 \text{ m} \\ \widehat{x}_3^o &= -\frac{\widehat{r}_2^2}{\widehat{e}_3} = -\frac{3,0846 \times 10^{-2}}{0,1778} = -0,1735 \text{ m}\end{aligned}$$

En la figura P4.9.2 puede verse dibujada la fibra neutra. En la misma figura puede observarse que el punto de mayor tensión a tracción será el B y el de mayor tensión a compresión el D .

Las coordenadas de los puntos B y D respecto a los ejes principales valen (en centímetros)

$$\begin{aligned}B &(-31,29 ; 41,72) \\ D &(-26,67 ; -43,59)\end{aligned}$$

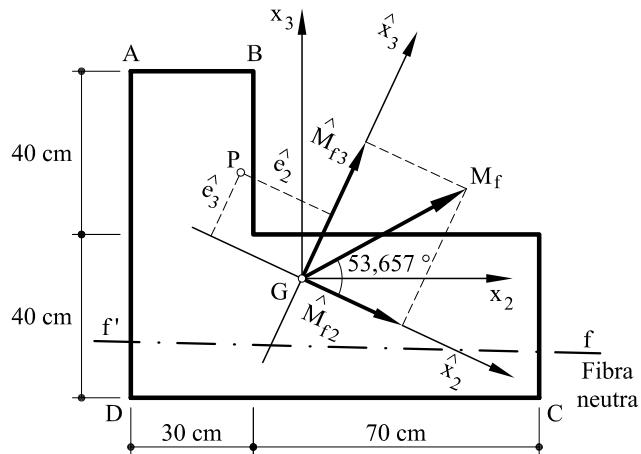


Fig. P4.9.2 Flexión compuesta en ejes principales

A partir de 4.78 las tensiones en estos puntos valdrán

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{\widehat{M}_{f_2}}{\widehat{I}_2} \widehat{x}_3 - \frac{\widehat{M}_{f_3}}{\widehat{I}_3} \widehat{x}_2$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{2800}{0,52} + \frac{497,8}{1,604 \times 10^{-2}} 0,4172 - \frac{676,6}{5,12 \times 10^{-2}} (-0,3129) = \\ &= 22\,467 \text{ kN/m}^2 = 22,467 \text{ MPa} \quad (\text{tracción})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_D &= \frac{2800}{0,52} + \frac{497,8}{1,604 \times 10^{-2}} (-0,4357) - \frac{676,6}{5,12 \times 10^{-2}} (-0,2667) \\ &= -4\,613 \text{ kN/m}^2 = -4,613 \text{ MPa} \quad (\text{compresión})\end{aligned}$$

La distribución de tensiones puede verse dibujada en la Figura P4.9.3.

Segundo procedimiento. En ejes cualesquiera.

Las excentridades e_2 y e_3 valen

$$e_2 = -30 \sin 30 = -15 \text{ cm} = -0,15 \text{ m}$$

$$e_3 = 30 \cos 30 = 25,98 \text{ cm} = 0,2598 \text{ m}$$

y los momentos asociados

$$M_{f_2} = Ne_3 = 2800 \times 0,2598 = 727,44 \text{ kNm}$$

$$M_{f_3} = -Ne_2 = -2800 \times (-0,15) = 420 \text{ kNm}$$

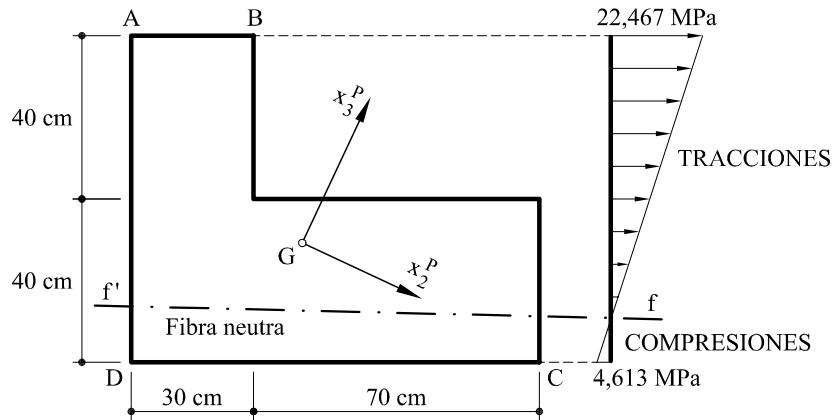


Fig. P4.9.3 Fibra neutra y distribución de tensiones

Los radios de giro de la sección respecto a los ejes valen:

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{2,170 \times 10^{-2} m^4}{0,52 m^2} = 4,1731 \times 10^{-2} m^2$$

$$r_3^2 = \frac{I_3}{A} = \frac{4,554 \times 10^{-2} m^4}{0,52 m^2} = 8,7577 \times 10^{-2} m^2$$

$$r_{23}^2 = \frac{I_{23}}{A} = -\frac{1,292 \times 10^{-2} m^4}{0,52 m^2} = -2,4846 \times 10^{-2} m^2$$

Los puntos de corte de los ejes con la fibra neutra valen:

$$x_2^o = -\frac{r_3^2 - \frac{r_{23}^4}{r_3^2}}{e_2 - e_3 \frac{r_{23}^2}{r_3^2}} = -\frac{8,7577 \times 10^{-2} - \frac{(2,4846 \times 10^{-2})^2}{4,1731 \times 10^{-2}}}{-0,15 + 0,2598 \frac{2,4846 \times 10^{-2}}{4,1731 \times 10^{-2}}} = -1554,9 \times 10^{-2} m$$

$$x_3^o = -\frac{r_2^2 - \frac{r_{23}^4}{r_2^2}}{e_3 - e_2 \frac{r_{23}^2}{r_2^2}} = -\frac{4,1731 \times 10^{-2} - \frac{(2,4846 \times 10^{-2})^2}{8,7577 \times 10^{-2}}}{0,2598 - 0,15 \frac{2,4846 \times 10^{-2}}{8,7577 \times 10^{-2}}} = -15,96 \times 10^{-2} m$$

Como puede comprobarse, la fibra neutra coincide con la obtenida anteriormente. Las tensiones máximas tienen lugar en los puntos *B* y *D* de coordenadas (en centímetros):

$$B(-11,92 ; 50,77)$$

$$D(-41,42 ; -29,23)$$

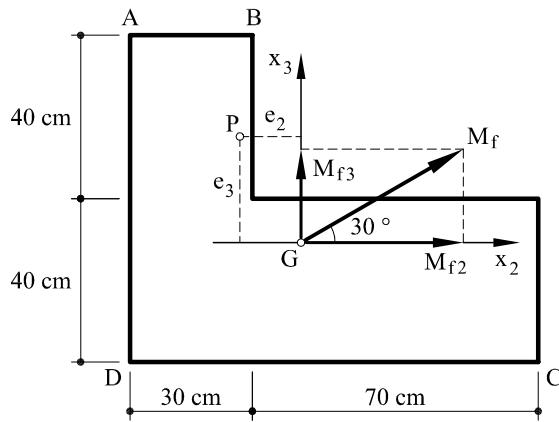


Fig. P4.9.4 Flexión compuesta en ejes cualesquiera

La distribución de tensiones viene dada por 4.82

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_2 I_3 - I_{23}} \left[e_3(x_3 I_3 - x_2 I_{23}) - e_2(x_3 I_{23} - x_2 I_2) \right]$$

es decir

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{2800}{0,52} + \frac{2800}{2,17 \times 4,554 \times 10^{-4} - (1,292 \times 10^{-2})^2} \\ &\quad \left[0,2598(0,5077 \times 4,554 \times 10^{-2} - 0,1192 \times 1,292 \times 10^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + 0,15(-0,5077 \times 1,292 \times 10^{-2} + 0,1192 \times 2,17 \times 10^{-2}) \right] = \\ &= 22467 \text{ kN/m}^2 = 22,467 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_D &= \frac{2800}{0,52} + \frac{2800}{2,17 \times 4,554 \times 10^{-4} - (1,292 \times 10^{-2})^2} \\ &\quad \left[0,2598(-0,2923 \times 4,554 \times 10^{-2} - 0,4142 \times 1,292 \times 10^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + 0,15(0,2923 \times 1,292 \times 10^{-2} + 0,4142 \times 2,17 \times 10^{-2}) \right] = \\ &= -4613 \text{ kN/m}^2 = -4,613 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Lógicamente las tensiones son las mismas que las obtenidas anteriormente.

Tercer procedimiento. Estudio directo.

En este caso, la posición de la fibra neutra $f-f'$ vendrá dada por la expresión 4.87, en donde y^o es la distancia de la fibra neutra ff' a la recta nn' obtenida en el problema resuelto P4.4.

De dicho problema se sabe que

$$\theta = 30,587^\circ$$

$$I_{nn'} = 2,144 \times 10^{-2} m^4$$

por lo que

$$r_{nn'}^2 = \frac{I_{nn'}}{A} = \frac{2,144 \times 10^{-2} m^4}{0,52 m^2} = 4,1231 m^2$$

Además

$$e_1 = e \cos \theta = 0,3 \cos 30,587 = 0,2583 m$$

con lo cual

$$y^o = -\frac{r_{nn'}^2}{e_1} = -\frac{4,1231 \times 10^{-2} m^2}{0,2583 m} = -0,1596 m = -15,96 cm$$

valor que coincide con lo obtenido anteriormente.

La distancia de los puntos B y D a la fibra nn' (paralela a la fibra neutra ff' pero que pasa por el centro de gravedad) vale

$$y_B = 50,65 cm$$

$$y_D = -29,65 cm$$

por lo que, de acuerdo con 4.85

$$\sigma_B = \frac{2800}{0,52} + \frac{2800 \times 0,3}{2,491 \times 10^{-2}} 0,5065 = 22467 kN/m^2 = 22,467 MPa$$

$$\sigma_D = \frac{2800}{0,52} - \frac{2800 \times 0,3}{2,491 \times 10^{-2}} 0,2965 = 4613 kN/m^2 = 4,613 MPa$$

Como se ve, los valores anteriores coinciden con los obtenidos anteriormente.

4.8 Núcleo central

En ciertos materiales cuya resistencia a tracción es baja (tales como hormigón, mampostería, etc.), interesa conocer la zona en que un esfuerzo N de compresión puede moverse dentro de una sección para que toda ella esté a compresión, es decir, para que no existan zonas traccionadas. A esta zona se le denomina *núcleo central* de la sección. Evidentemente es independiente del valor de N . Adviértase, en primer lugar, que no todo el núcleo central debe necesariamente estar dentro de la sección, aunque sí dentro de su envolvente externa. Además, el centro de gravedad debe pertenecer al núcleo central. Por último, el núcleo central debe estar limitado por una curva convexa, pues en caso contrario (ver Fig. 4.20) una fuerza N de compresión en P produciría tracciones en la sección. Ahora bien, la fuerza N puede descomponerse en dos fuerzas también de

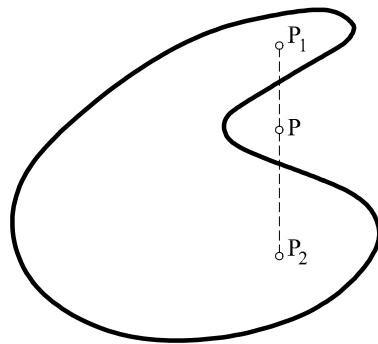


Fig. 4.20 Núcleo central no convexo

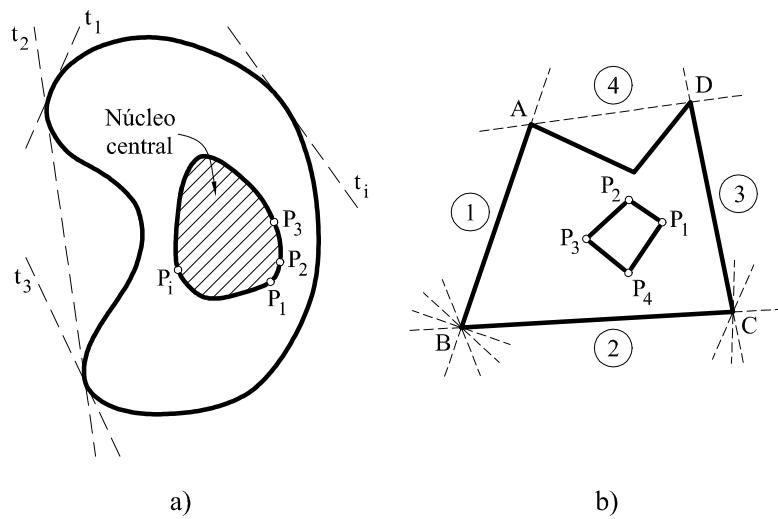


Fig. 4.21 Obtención del núcleo central de una sección. a) Sección cualquiera, b) Sección con contorno poligonal

compresión N_1 y N_2 , situadas dentro del núcleo central y que, por tanto, no producen tracciones en la sección, lo cual contradice lo anterior.

La metodología general para obtener el núcleo central consiste en envolver el contorno de la sección mediante tangentes a dicho contorno (Fig. 4.21a). Cada una de estas tangentes t_i corresponde a una fibra neutra, la cual viene dada a su vez por una fuerza N de compresión aplicada en un punto P_i . El lugar geométrico de los puntos P_i constituye el contorno exterior del núcleo central. El proceso habitualmente se simplifica, dado que el contorno exterior de muchas secciones es una poligonal (Fig. 4.21b). En tales casos, sea P_1 el centro de presiones correspondiente a la fibra neutra 1 y P_2 el correspondiente a 2. Se ha visto anteriormente que cuando un conjunto de fibras neutras pasan por un punto, los correspondientes centros de presiones describen una

recta, por lo que los correspondientes centros de presiones del haz de fibras neutras que pasan por B (sin cortar la sección) son el segmento P_1P_2 . De la misma forma, los correspondientes centros de presiones del haz de fibras neutras que pasan por C son los puntos del segmento P_2P_3 (siendo P_3 el centro de presiones correspondiente a la fibra neutra 3). Prosiguiendo con este razonamiento, se obtiene que el núcleo central es el área delimitada por el polígono $P_1P_2P_3P_4$. Como puede observarse, es suficiente con obtener en este caso cuatro puntos del núcleo central para definirlo completamente. Unos cuantos ejemplos aclararán la forma de obtenerlo.

♣ **Problema resuelto P4.10** Determinar el núcleo central de un círculo de radio R .

Solución

Por simetría, está claro que el núcleo central debe ser un círculo concéntrico con el círculo dado. El radio a se obtendrá escribiendo que, cuando el punto de aplicación de la fuerza N está en el contorno, la fibra neutra es tangente al círculo de radio R .

El radio de giro de la sección circular respecto a un eje cualquiera vale:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4/4}{\pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

por lo que, de acuerdo con 4.75

$$a = e_3 = -\frac{r^2}{R} = -\frac{R}{4}$$

♣ **Problema resuelto P4.11** Determinar el núcleo central de una sección rectangular de canto a y ancho b .

Solución

En este caso, la envolvente de la sección (que coincide con el contorno de la propia sección) son las cuatro rectas AB , BD , CD , AC (Fig. P4.11.1). Por lo tanto, el núcleo central será un cuadrilátero (cuatro vértices). Además dado que la sección es doblemente simétrica, el núcleo central también lo será.

Cuando la fibra neutra coincide con CD , el centro de presiones es un punto P tal que 4.75:

$$GP = e_3 = -\frac{r_2^2}{x_3^o} = -\frac{a^2/12}{-a/2} = \frac{a}{6}$$

Igualmente, cuando la fibra neutra coincide con AC , el centro de presiones es un punto Q tal que

$$GQ = e_2 = -\frac{r_3^2}{x_2^o} = -\frac{b^2/12}{b/2} = \frac{b}{6}$$

De la misma forma (además de por simetría) se obtienen los puntos S y R , con lo cual se concluye que el núcleo central es el rombo de la figura P4.11.1.

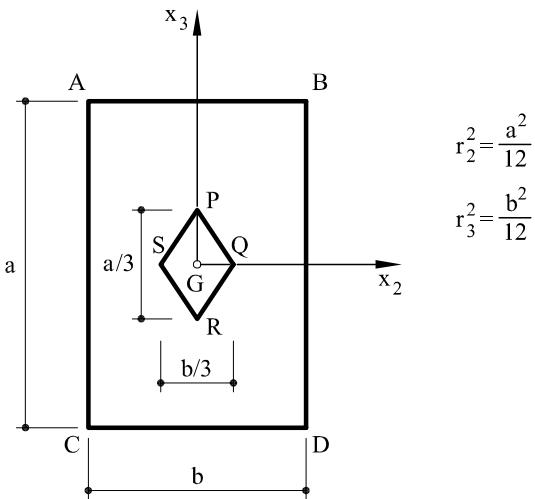


Fig. P4.11.1 Núcleo central de un rectángulo

♣ **Problema resuelto P4.12** Determinar el núcleo central de la sección del problema resuelto P4.2.

Solución

La sección tiene cinco envolventes: las rectas AB, BH, HC, CD, AD . A cada una de ellas corresponderá un centro de presiones, por lo que el núcleo central tendrá cinco vértices. Cada uno de dichos vértices se obtendrá por uno de los procedimientos vistos anteriormente.

- a) Obtención del centro de presiones correspondiente a AB (Fig. P4.12.1): Punto P_1 . Se trabajará en ejes principales.

La intersección de la recta AB con los ejes principales tiene lugar en

$$\hat{x}_2^o = -126,53 \text{ cm} = -1,2653 \text{ m}$$

$$\hat{x}_3^o = 55,43 \text{ cm} = 0,5543 \text{ m}$$

y a partir de las expresiones 4.80

$$\hat{e}_2 = -\frac{\hat{r}_3^2}{\hat{x}_2^o} = -\frac{9,8466 \times 10^{-2}}{-1,2653} = 7,782 \times 10^{-2} \text{ m} = 7,782 \text{ cm}$$

$$\hat{e}_3 = -\frac{\hat{r}_2^2}{\hat{x}_3^o} = -\frac{3,0849 \times 10^{-2}}{0,5543} \text{ m} = -5,5654 \times 10^{-2} \text{ m} = -5,57 \text{ cm}$$

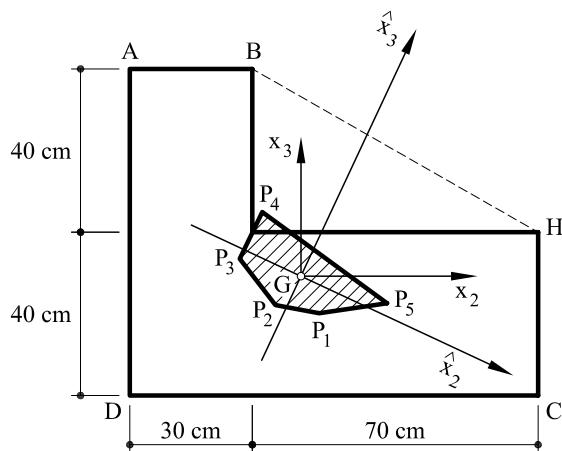


Fig. P4.12.1 Centro de presiones correspondiente a la fibra neutras AB, BH, HC, CD y AD: Núcleo central

Respecto a los ejes Gx_2 y Gx_3 las anteriores excentridades serán:

$$e_2 = 4,89 \text{ cm}$$

$$e_3 = -8,23 \text{ cm}$$

Es decir: $P_1(4,89 ; -8,23)$.

- b) Obtención del centro de presiones correspondiente a BH : Punto P_2 . Se trabajará con los ejes coordenados Gx_2 y Gx_3 . La envolvente BH corta a los ejes coordinados en los puntos

$$x_2^o = 76,93 \text{ cm} = 0,7693 \text{ m}$$

$$x_3^o = 43,96 \text{ cm} = 0,4396 \text{ m}$$

Los radios de giro valen:

$$r_2^2 = \frac{I_2}{A} = \frac{2,170256 \times 10^{-2} \text{ m}^4}{0,52 \text{ m}^2} = 4,1736 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$r_3^2 = \frac{I_3}{A} = \frac{4,554103 \times 10^{-2} \text{ m}^4}{0,52 \text{ m}^2} = 8,7579 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$r_{23}^2 = \frac{I_{23}}{A} = \frac{-1,292308 \times 10^{-2} \text{ m}^4}{0,52 \text{ m}^2} = -2,4852 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

A partir de las expresiones 4.84

$$0,7693 = - \frac{8,7579 \times 10^{-2} - \frac{(-2,4852 \times 10^{-2})^2}{4,1736 \times 10^{-2}}}{e_2 - e_3 \frac{-2,4852 \times 10^{-2}}{4,1736 \times 10^{-2}}} = - \frac{7,2781 \times 10^{-2}}{e_2 + 0,5955 e_3}$$

$$0,4396 = - \frac{4,1736 \times 10^{-2} - \frac{(-2,4852 \times 10^{-2})^2}{8,7579 \times 10^{-2}}}{e_3 - e_2 \frac{-2,4852 \times 10^{-2}}{8,7579 \times 10^{-2}}} = - \frac{3,4684 \times 10^{-2}}{e_3 + 0,2838 e_2}$$

es decir

$$\begin{aligned} e_2 + 0,5955 e_3 &= -9,4853 \times 10^{-2} \\ 0,2838 e_2 + e_3 &= 7,8899 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} e_2 &= -5,7604 \times 10^{-2} m = -5,7604 \text{ cm} \\ e_3 &= -6,2551 \times 10^{-2} m = -6,2551 \text{ cm} \end{aligned}$$

Es decir: $P_2(-5,7604 ; -6,2551)$.

- c) Obtención del centro de presiones correspondiente a la fibra neutra HC : punto P_3 (Fig. P4.12.2). Se obtendrá mediante un estudio directo.

El radio de giro $r_{nn'}^2$ vale:

$$r_{nn'}^2 = \frac{I_{nn'}}{A} = \frac{I_3}{A} = 8,7579 \times 10^{-2} m^2$$

A partir de la expresión 4.87

$$\begin{aligned} 0,5808 &= -\frac{8,7579 \times 10^{-2}}{e_1} \\ e_1 &= -\frac{8,7579 \times 10^{-2}}{0,5808} = -15,079 \times 10^{-2} m \end{aligned}$$

Falta obtener el ángulo θ que forma el eje del momento con la fibra neutra.

De acuerdo con 4.49b

$$\tan \theta = -\frac{I_{nt}}{I_{nn'}} = -\frac{-I_{23}}{I_3} = -\frac{1,292 \times 10^{-2}}{4,554 \times 10^{-2}} = -0,2837$$

$$\theta = -15,84^\circ$$

Por tanto el plano del momento formará un ángulo de $90 + \theta = 74,16^\circ$ con el eje nn' . Además

$$e = \frac{e_1}{\cos \theta} = 15,674 \text{ cm}$$

Las coordenadas de P_3 respecto a los ejes coordenados $Gx_2 Gx_3$ son $P_3(-15,079; 4,28)$. De la misma forma se obtienen los centros de presiones correspondientes a las rectas DC y AD , obteniéndose respectivamente los puntos P_4 y P_5 de coordenadas en centímetros: $P_4(-8,5; 14,28)$ y $P_5(20,89; -5,86)$.

En la figura P4.12.1 puede verse representado gráficamente el núcleo central (zona sombreada).

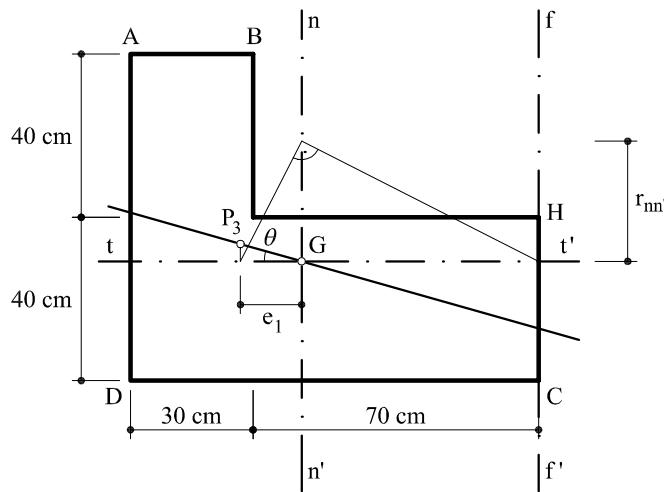


Fig. P4.12.2 Centro de presiones correspondiente a la fibra neutra HC

4.9 Ejercicios propuestos

♣ **Ejercicio propuesto EP4.1** La sección de la figura, se fabrica de la siguiente forma:

- Se coloca la viga de acero sobre dos apoyos procediendo a cargarla con dos fuerzas F , tal como indica la figura.
- Seguidamente se coloca sobre AA' la capa de hormigón y, una vez éste ha endurecido, se retiran las fuerzas F .

Hallar:

El valor de F para que se cumplan las dos siguientes condiciones:

- Tensión en el acero al final del proceso en la sección centro luz inferior a 50 MPa .
 - Tensión final en el hormigón en la sección centro luz inferior a 5 MPa .
- Una vez construida la pieza se carga la misma con una fuerza puntual de valor P aplicada en el punto medio de AA' . Se pide:
 - Valor de esta fuerza para que las tensiones finales en el alma del acero sean constantes, y valor de esta tensión.

NOTAS:

- 1.- Espesor en la pieza de acero igual a 1 cm
- 2.- $E_a/E_h = 7$
- 3.- Peso específico del hormigón $\gamma_h = 25 \text{ kN/m}^3$

Valores de control: $F = 65,39 \text{ kN}$, $P = 211,42 \text{ kN}$ (sentido ascendente)

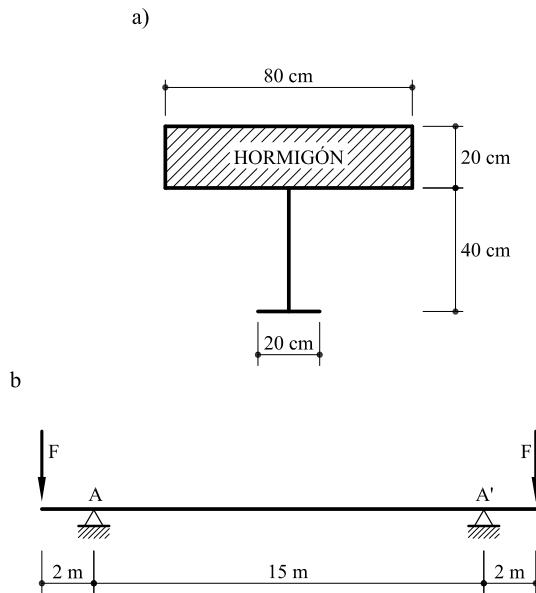


Fig. EP4.1

♣ **Ejercicio propuesto EP4.2** Un pilar cuya sección se representa en la figura está sometido a una carga $P = 150 \text{ kN}$ de compresión aplicada en el punto A.

Hallar:

- Distribución de tensiones
- Núcleo central

Valores de control: Las coordenadas de los vértices del núcleo central respecto a unos ejes horizontal y vertical y que pasan por el centro de gravedad valen: (-8,75 ; 38,25), (26,92 ; -23,57), (5,85 ; -25,55), (-6,58 ; -6,81), (-7,27 ; 6,37) viniendo dadas las unidades en centímetros.

♣ **Ejercicio propuesto EP4.3** La viga de la figura tiene 10 m. de longitud. En sus extremos están colocadas sendas placas infinitamente rígidas. La sección de la pieza es mixta de hormigón y acero y sus características pueden verse también en la figura.

Dicha viga tiene un incremento de temperatura de $t = 30^\circ$ grados.

Determinar:

- Distribución de tensiones
- Radio de curvatura
- Valor y posición de un esfuerzo axil para que la pieza recupere su posición inicial
- En este último caso, distribución de tensiones

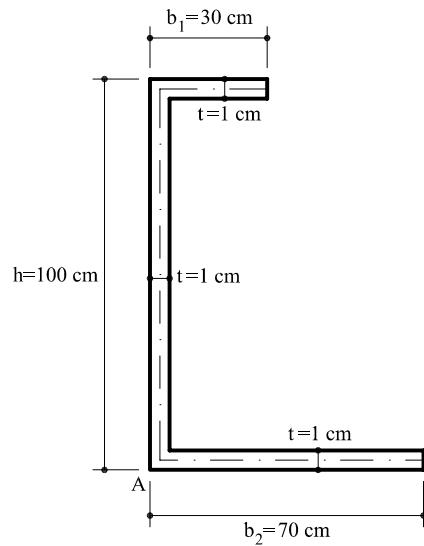


Fig. EP4.2

$$E_{\text{acero}} = 210 \text{ GPa}$$

$$E_{\text{hormigón}} = 30 \text{ GPa}$$

$$\alpha_{\text{acero}} = 1,2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_{\text{hormigón}} = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Valores de control: Radio de curvatura $R = 1,24 \times 10^4 \text{ m}$. Valor del esfuerzo axil $N = 2624 \text{ kN}$

♣ **Ejercicio propuesto EP4.4** La sección de la figura EP4.4a se pretensa mediante un cable con una sección de 25 cm^2 , situado en el centro de la parte inferior de la pieza.

La tensión de compresión en la parte inferior de la sección, después del pretensado, debe ser de 30 MPa . Una vez fabricada, se coloca sobre apoyos, tal como se indica en la figura EP4.4b.

A continuación se hormigona la parte superior de la sección, resultando una viga con la sección de la figura EP4.4c.

Una vez endurecido el hormigón, se carga la viga con una fuerza F en el centro de su luz.

- Hallar dicha fuerza, considerando que la máxima tensión de compresión en el hormigón es de 35 MPa y que la tensión de tracción es nula.
- Calcular, asimismo, los esfuerzos en el cable y las tensiones en la sección central de la viga, en todas las fases del proceso.

Datos:

- Peso específico del hormigón: 25 kN/m^3
- Relación de los módulos de elasticidad: $n = E_a/E_h = 8$

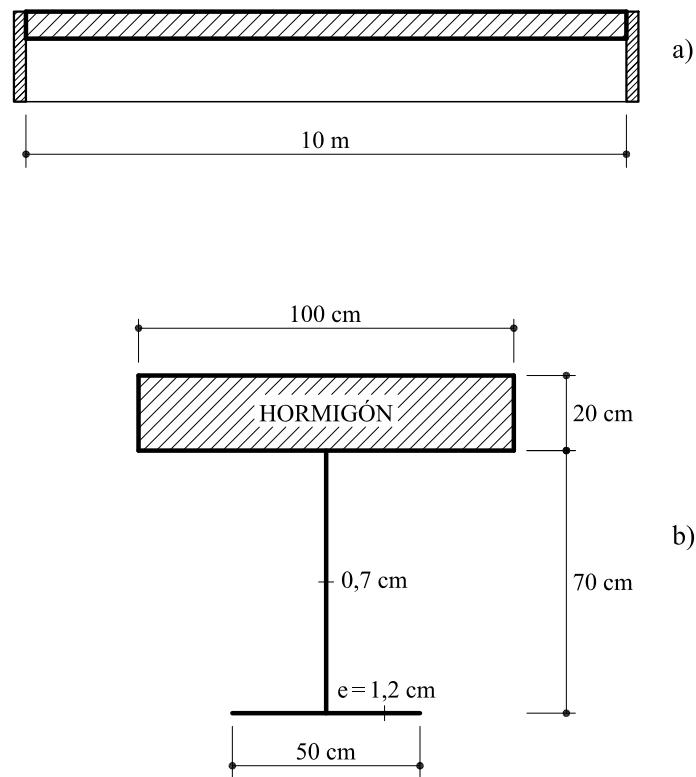


Fig. EP4.3

♣ **Ejercicio propuesto EP4.5** Se desea postensar la viga recta de 35 metros de luz y sección que muestra la figura.

El postensado será curvo, de tal forma que, actuando el peso propio y el postensado, las tensiones en todas las fibras superiores sean nulas y la tensión de compresión máxima en la sección central sea de 35 MPa .

Hallar:

- Trazado del cable y esfuerzo de postensado que tendrá la viga
- Área del cable, si para esta fase las tensiones máximas en el acero valen 1200 MPa
- A continuación se inyecta la vaina de forma que haya adherencia perfecta entre el hormigón y el acero. Se carga la viga con una carga uniformemente repartida de valor $p \text{ kN/m}$. Calcular el valor de p de forma que:
 - En la sección central en el hormigón no existan tracciones
 - En la sección central las máximas tensiones de compresión en el hormigón no sobrepasen 35 MPa
 - En la sección central, las máximas tensiones en el acero no sobrepasen 1700 MPa
- Distribución de tensiones normales en la sección central

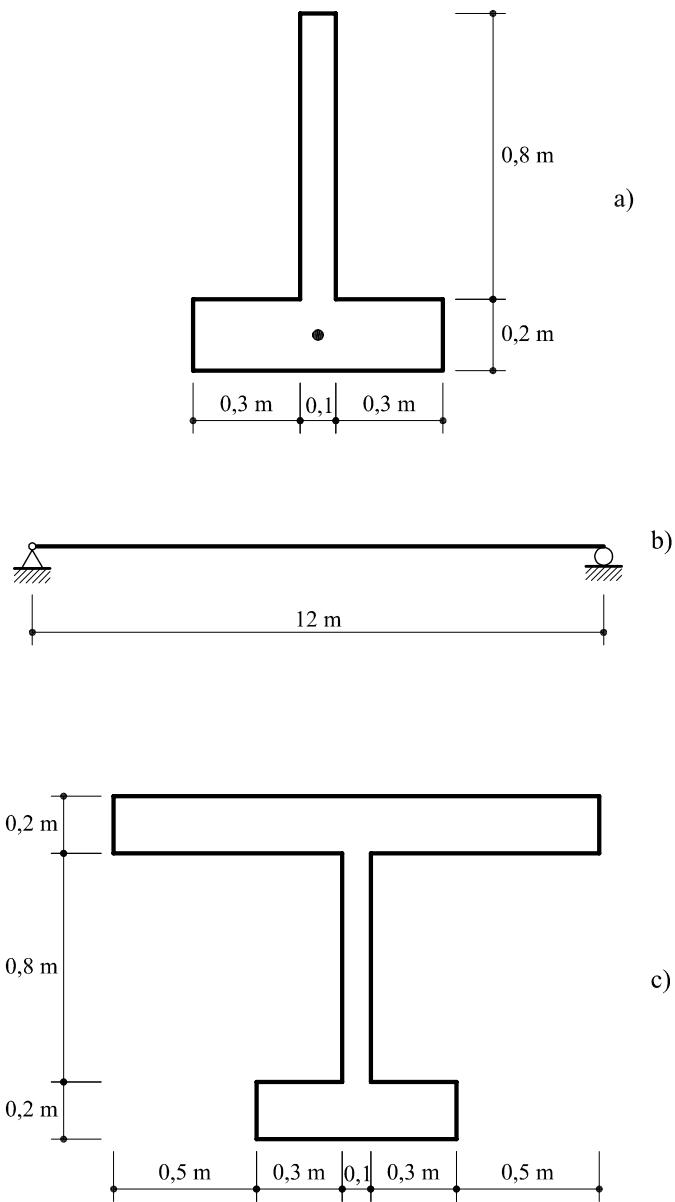


Fig. EP4.4

Valores de control:

- Esfuerzo de postensado de la viga: 7588 kN
- Área del cable: $463,23 \text{ cm}^2$
- Sobrecarga: $p = 8,86 \text{ kN/m}$

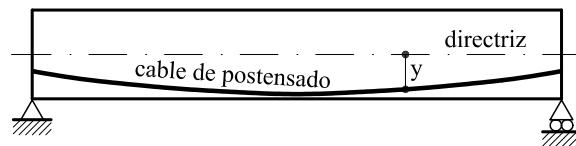
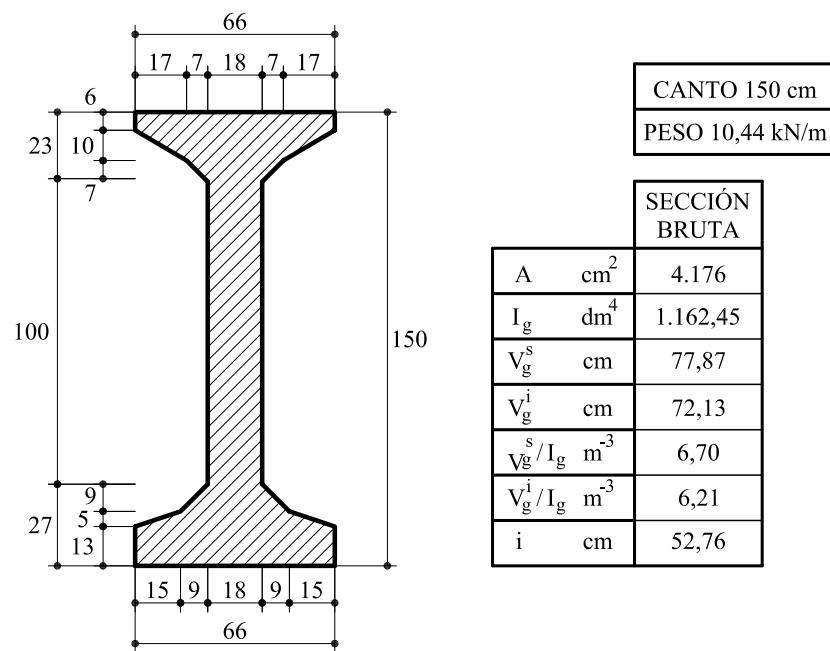


Fig. EP4.5

5 Tensiones producidas por el esfuerzo cortante

5.1 Introducción

De acuerdo con el estudio de tensiones realizadas en el Capítulo 1, en un punto cualquiera de una sección se tendrán, en general, tensiones normales y tensiones tangenciales. Por lo que respecta a las primeras, en los dos capítulos anteriores se ha estudiado su distribución, así como su relación con los esfuerzos axil y flector.

Este capítulo y el siguiente están dedicados al estudio de las tensiones tangenciales. Dichas tensiones son debidas al esfuerzo cortante y al momento torsor. El presente capítulo está dedicado al análisis de las tensiones producidas por el esfuerzo cortante, mientras que el siguiente tratará de la distribución de dichas tensiones originadas por el momento torsor.

Debe advertirse que, al contrario de lo que sucede con las tensiones normales, no es posible determinar la correcta distribución de las tensiones tangenciales en un caso general mediante las herramientas proporcionadas por la Resistencia de Materiales, siendo necesaria la utilización de la teoría de la Elasticidad. Sin embargo, para una gran parte de las secciones utilizadas en la práctica (perfles metálicos, secciones rectangulares o en T, etc.) sí es posible obtener una formulación sencilla de la distribución de tales tensiones a partir de las hipótesis de la Resistencia de Materiales formuladas anteriormente. A ello se dedica el presente capítulo y el siguiente.

5.2 Origen de las tensiones tangenciales

Obsérvese la figura 5.1, la cual representa una sección y rebanada diferencial en la que actúa un momento flector y un esfuerzo cortante actuando en uno de los ejes principales de inercia. Como se sabe, las tensiones producidas por el momento flector valen

$$\sigma = \frac{M_{f2}}{I_2} x_3 \quad (5.1)$$

Supóngase que mediante una curva Γ la sección A se divide en dos partes, $A1$ y $A2$ (Fig. 5.2). Centrándose en lo que sucede, por ejemplo, en $A1$, se ve que existirá una

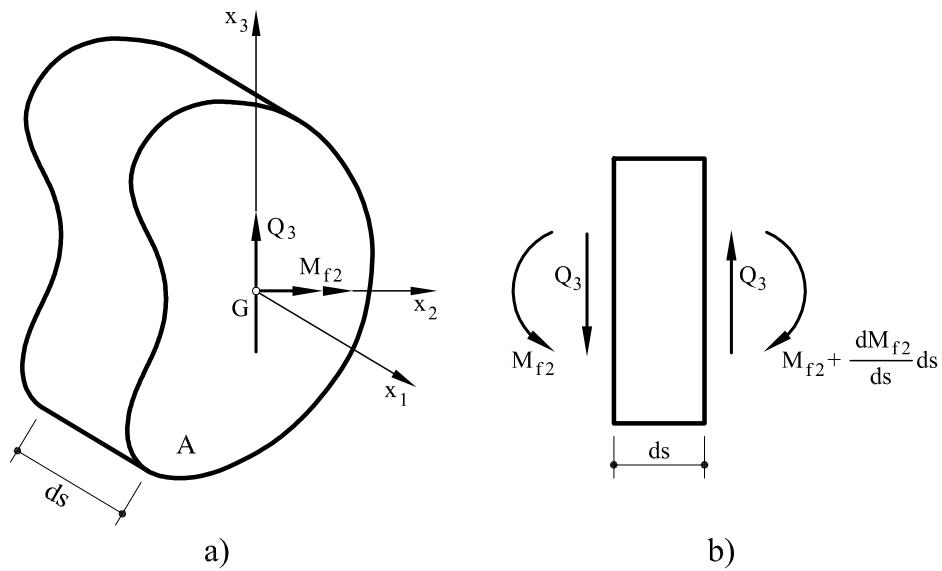


Fig. 5.1 Sección y rebanada diferencial sometidas a un momento flector y esfuerzo cortante actuando en un eje principal de inercia

distribución de tensiones normales, dada por

$$\sigma + d\sigma = \left(M_{f2} + \frac{dM_{f2}}{ds} ds \right) \frac{x_3}{I_2} \quad (5.2)$$

Análogamente, considerando la parte dorsal de la rebanada diferencial en la correspondiente porción A_1 de la sección, las tensiones normales vendrán dadas por la expresión 5.1.

La resultante de todas las tensiones σ actuantes en A_1 (parte dorsal de la rebanada) valdrá

$$F = - \int_{A_1} \sigma dA = - \int_{A_1} \frac{M_{f2}}{I_2} x_3 dA = - \frac{M_{f2}}{I_2} m_{e2} \quad (5.3)$$

siendo

$$m_{e2} = \int_{A_1} x_3 dA$$

el momento estático de A_1 respecto al eje x_2 .

La resultante de las tensiones $\sigma + d\sigma$ (parte frontal de la rebanada) valdrá

$$F + dF = \int_{A_1} (\sigma + d\sigma) dA = \int_{A_1} \left(M_{f2} + \frac{dM_{f2}}{ds} ds \right) \frac{x_3}{I_2} dA = \left(M_{f2} + \frac{dM_{f2}}{ds} ds \right) \frac{m_{e2}}{I_2} \quad (5.4)$$

A partir de 5.4 y 5.3 es claro que debe existir una fuerza dF (Fig. 5.2) que equilibre

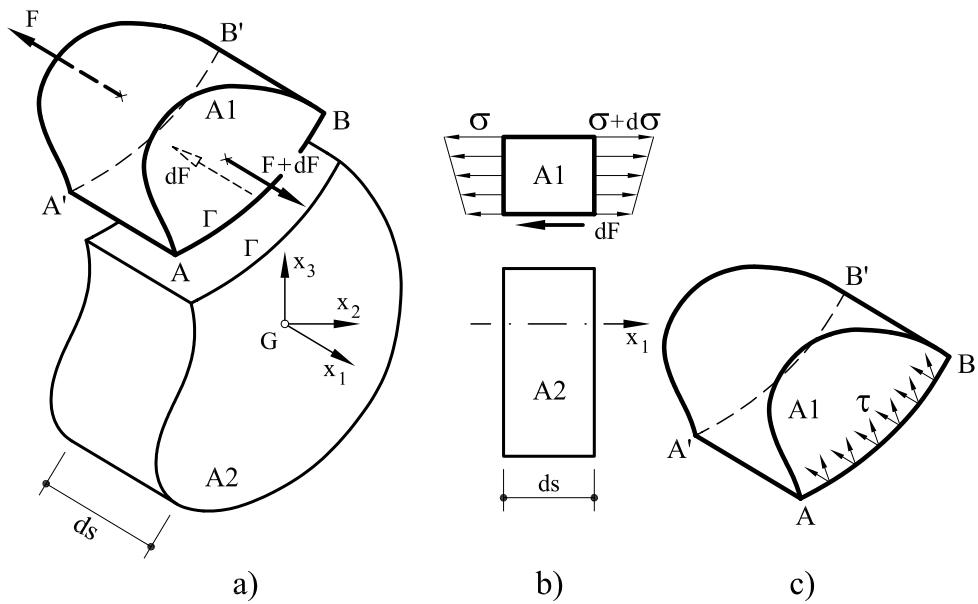


Fig. 5.2 Tensiones y resultantes de tensiones actuantes en una porción de la sección recta de una viga

la diferencia de resultantes $(F + dF) - F$. Este diferencial de fuerza vale

$$dF = -\frac{dM_{f2}}{ds} \frac{m_{e2}}{I_2} ds \quad (5.5)$$

y teniendo en cuenta que $dM_{f2}/ds = Q_3$, la expresión 5.5 se transforma en

$$dF = -\frac{Q_3 m_{e2}}{I_2} ds \quad (5.6)$$

Al valor $R = dF/ds$ se le denomina esfuerzo rasante por unidad de longitud y, por razones de equilibrio, debe ser igual a la integral de la componente según x_1 de las tensiones tangenciales que existen en la superficie del corte. Por ello, es posible hablar de una tensión tangencial media dada por

$$\tau_m = \frac{R}{\text{Longitud de la curva } \Gamma} = -\frac{Q_3 m_{e2}}{I_2 L} \quad (5.7)$$

A partir de las hipótesis de Resistencia de Materiales, no es posible obtener la distribución exacta de dichas tensiones tangenciales, sino únicamente el valor medio de su componente x_1 .

Obsérvese que por lo estudiado en el Capítulo 1, junto a las tensiones τ que aparecen en la superficie cilíndrica $ABA'B'$, paralelas al eje de la pieza, aparecerán otras, contenidas en el plano de la sección, cuya componente normal a la curva Γ será en cada punto igual, en valor absoluto, a la correspondiente contenida en la superficie cilíndrica,

y ambas estarán dirigidas hacia la curva AB , o se separan de ella (ver Fig. 5.2c). En este caso, las dos tensiones tangenciales normales a AB tienen sentidos que se separan de dicha curva.

Esta última observación es muy importante, pues la fórmula fundamental 5.7 permite hallar -por ser ambas iguales- tanto la tensión tangencial media, que actúa sobre la superficie $ABA'B'$, según sus generatrices, como la tensión media que se ejerce en la sección, a lo largo de AB , y normal a esta curva. Esta misma observación permite determinar, sin ambigüedad, el sentido de esta tensión cortante.

En los apartados siguientes se estudiarán algunas aplicaciones prácticas de cuanto se acaba de exponer.

Es fácil poner de manifiesto la existencia de estas tensiones cortantes. Para más sencillez supóngase una viga de sección rectangular, simplemente apoyada y cargada, según indica la figura 5.3.

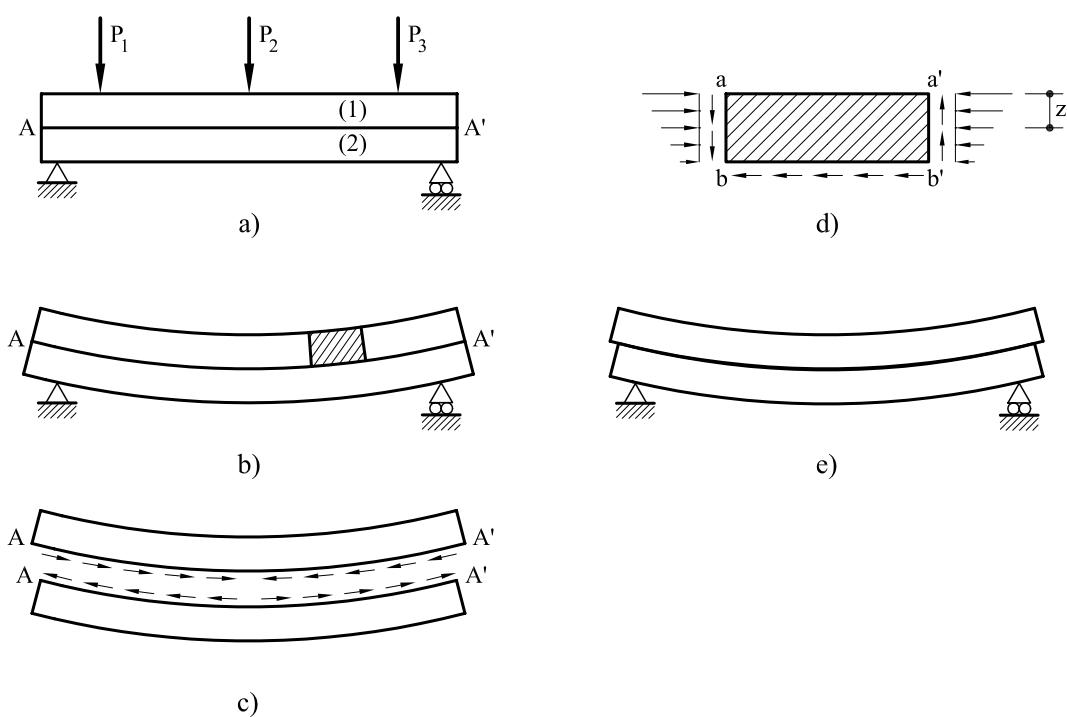


Fig. 5.3 Visión de las tensiones tangenciales

Considérese una sección ideal AA' , horizontal, que divide a la viga en dos partes (1) y (2). Si se carga la viga con una serie de fuerzas P_1 , P_2 y P_3 , ésta se flexará (Fig. 5.3b) y a lo largo del plano AA' aparecerán una serie de tensiones cortantes que impiden que el trozo (1) deslice sobre el (2) tal como puede verse en la figura 5.3e. Las tensiones cortantes que se ejercen a lo largo de AA' , sobre cada una de las partes (1) y (2), se indican en la figura 5.3c.

En la figura 5.3d se establecen las tensiones normales y las tangenciales que actúan sobre el elemento de viga a, b, a', b' y que se indica en la figura 5.3b.

Es fácil ver, físicamente, es decir, sin necesidad de reglas o convención de signos, el sentido de las tensiones. En efecto: si se supone mayor el momento que actúa sobre la cara ab que el que actúa sobre la $a'b'$, también serán mayores las tensiones normales -de compresión- sobre ab que sobre $a'b'$. En consecuencia, la tensión cortante que actúa sobre bb' tendrá el sentido que se indica en la citada figura 5.3d.

Finalmente, se deduce el sentido de las tensiones cortantes sobre ab y $a'b'$.

En cuanto al módulo de estas tensiones cortantes, por la fórmula 5.7 se ve que:

- Sobre la cara ab o $a'b'$ las tensiones cortantes crecen a medida que el punto en que se determinan tales tensiones se acerca a la fibra neutra, ya que, para una sección determinada, todos los factores que entran en la citada fórmula son constantes excepto m_{e2} , que aumenta parabólicamente con la profundidad z .
 - Sobre bb' , la tensión cortante se mantiene constante, ya que evidentemente los factores m_{e2}, I_2, Γ de la fórmula 5.7 permanecen invariables. En cuanto a Q_3 , como $Q_3 = dM_{f2}/ds$ y M_{f2} varía linealmente, será $Q_3 = \text{constante}$.
 - Si la viga hubiese estado cargada con carga uniformemente repartida ($p \text{ kN/m}$), la tensión cortante sobre bb' aumentaría linealmente de derecha a izquierda, ya que M_{f2} aumenta parabólicamente y por tanto $Q_3 = dM_{f2}/ds$ aumentaría linealmente.
- Se analiza en los apartados siguientes la aplicación de la expresión 5.7 a distintos tipos de secciones.

5.3 Distribución de tensiones tangenciales en secciones macizas

5.3.1 Sección rectangular

Se estudiará en primer lugar cómo se reparten las tensiones tangenciales en una sección rectangular de ancho b y h de canto.

Por lo dicho en el Capítulo 1, y lo que se ilustra en la figura 5.4, las tensiones en A y A' deben estar dirigidas según el contorno (Fig. 5.4b). Lo mismo ocurre debido a la simetría en el punto medio M de AA' . Parece pues natural admitir, para simplificar el estudio, que en todo punto de AA' la tensión cortante es paralela al esfuerzo cortante Q_3 .

Por otra parte, también se admitirá que la distribución de tensiones es uniforme a lo largo de AA' .

Habida cuenta de estas dos hipótesis, se puede calcular fácilmente el valor de la tensión cortante que actúa a una determinada altura, y sobre la fibra neutra, mediante la fórmula 5.7.

En este caso particular es:

$$m_{e2} = b \left(\frac{h}{2} - x_3 \right) \frac{h/2 + x_3}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - x_3^2 \right)$$

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} \quad \Gamma = b$$

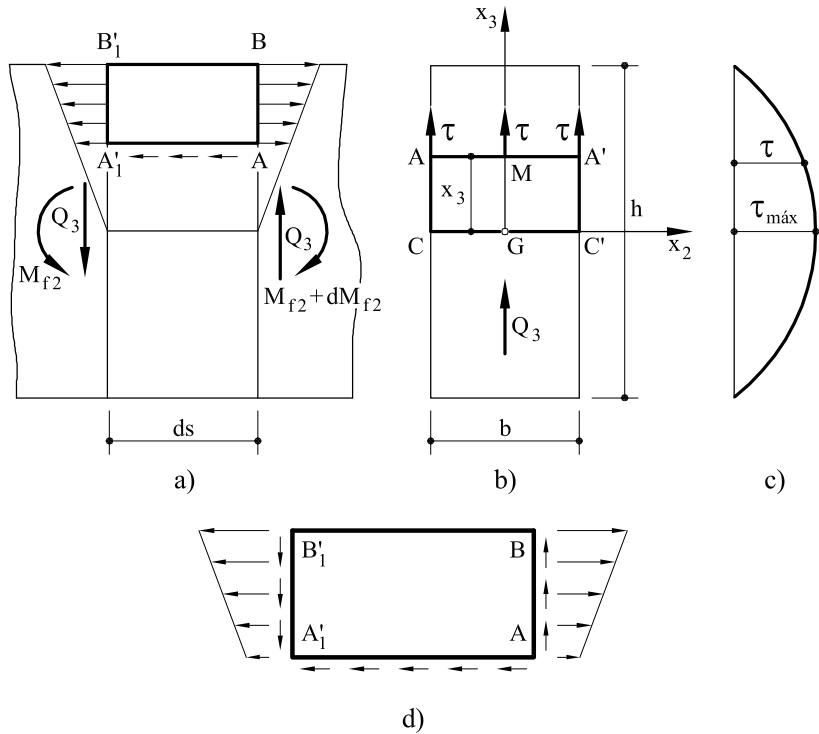


Fig. 5.4 Distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular

y sustituyendo en 5.7 se obtiene

$$\boxed{\tau = \frac{3Q_3}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]} \quad (5.8)$$

Así pues, la distribución de tensiones tangenciales, a lo largo de una paralela al eje Gx_3 , es una parábola, tal como se indica en la figura 5.4c. Las tensiones tangenciales máximas se producen en el eje Gx_2 y valen:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_3}{2bh} = \frac{3Q_3}{2A} \quad (5.9)$$

Es fácil ver el sentido de las tensiones tangenciales, bien aislando el prisma $ABA'_1B'_1$, y viendo que sobre AA'_1 las tensiones tangenciales van dirigidas de derecha a izquierda, bien deduciéndo el sentido de Q_3 sobre la cara AB (será hacia arriba, si como en este caso M_{f2} aumenta de izquierda a derecha).

Se aconseja al lector deducir, para este caso, dicha fórmula directamente. Para ello establecerá el equilibrio del prisma $AB - A'_1B'_1$, considerando las fuerzas normales que actúan sobre AB y $A'_1B'_1$ y las tangenciales sobre AA'_1 (todas ellas son horizontales).

Los valores de τ , dados por las fórmulas 5.8 y 5.9, no son exactos, pero tienen una gran aproximación siempre que la sección sea peraltada ($h > b$). La teoría más exacta de la elasticidad muestra que la tensión cortante no es constante a lo largo de todos los puntos del eje neutro (eje Gx_2), sino que alcanza sus valores máximos en sus puntos extremos C y C' (Fig. 5.4b).

Los valores del coeficiente α , por el que hay que multiplicar la tensión τ_{max} , dada por la fórmula 5.9 para obtener su valor más exacto dado por la teoría de la Elasticidad, se dan en la siguiente tabla:

PUNTO	h/b	2	1	1/2	1/4
$x_2 = 0, x_3 = 0$		0,983	0,940	0,856	0,805
$x_2 = \pm \frac{b}{2}, x_3 = 0$		1,033	1,126	1,396	1,988

5.3.2 Sección simétrica

Considérese una sección cualquiera con un eje vertical de simetría, según el cual actúa el esfuerzo cortante Q_3 (Fig. 5.5). La tensión cortante en un punto cualquiera P tiene dos componentes τ_{13} y τ_{12} paralelas al eje Gx_3 y Gx_2 , respectivamente. Para la componente vertical se puede utilizar todo el razonamiento expuesto en el apartado 5.2, por tanto es aplicable la fórmula 5.7 que permite escribir

$$\tau_{13} = \frac{Q_3 m_{e2}}{I_2 L} \quad (5.10)$$

en donde, como se sabe, L representa el espesor de la sección al nivel x_3 , y m_{e2} el momento estático, respecto a Gx_2 del área situada por encima de AA' .

La tensión tangencial τ_{13} variará como m_{e2}/I_2 y normalmente será máxima en la fibra neutra, a no ser que L crezca más deprisa que m_{e2} (como ocurre en un rombo o en un triángulo isósceles).

Para obtener la componente horizontal τ_{12} de la tensión cortante se procede como sigue. Las tensiones cortantes en los puntos A y A' serán tangentes al contorno de la sección cortándose sus direcciones en un punto B del eje Gx_3 . La dirección de la tensión cortante en un punto P de la horizontal AA' se supondrá tal que esté también dirigida hacia B .

Se tiene así

$$\tau_{12} = \tau_{13} \tan \alpha \quad (5.11)$$

y

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{13} \quad |\tau| = \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2} = \frac{\tau_{13}}{\cos \alpha}$$

La tensión tangencial máxima se produce en el perímetro y valdrá

$$\tau_1 = \frac{\tau_{13}}{\cos \beta}$$

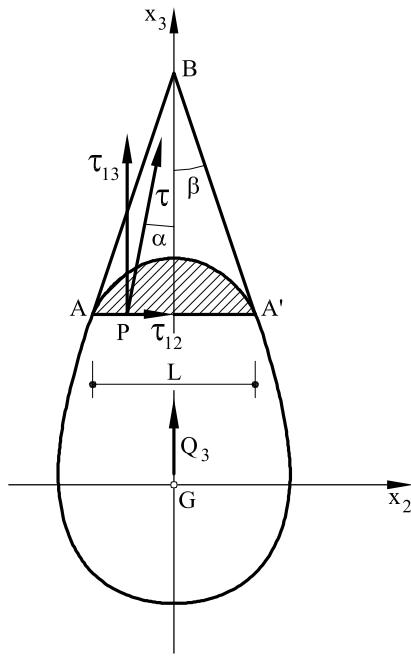


Fig. 5.5 Sección simétrica de forma arbitraria

5.3.3 Sección circular

Como aplicación de lo anterior, se determinan a continuación las tensiones tangenciales en una sección circular cuando Q_3 actúa según un diámetro de la sección que se tomará igual al eje Gx_3 (Fig. 5.6).

$$\tau_{13} = \frac{Q_3 m_{e2}}{I_2 L} \quad (5.12)$$

En este caso

$$\begin{aligned} L &= 2\sqrt{R^2 - x_3^2} \\ I_2 &= \frac{\pi R^4}{4} \\ m_{e2} &= \int_{x_3}^R 2y\sqrt{R^2 - y^2} dy = 2/3(R^2 - x_3^2)^{3/2} \end{aligned}$$

de donde sustituyendo en 5.12

$$\boxed{\tau_{13} = \frac{4}{3} \left(\frac{Q_3}{A} \right) \left[1 - \left(\frac{x_3}{R} \right)^2 \right]} \quad (5.13)$$

en donde $A = \pi R^2$.

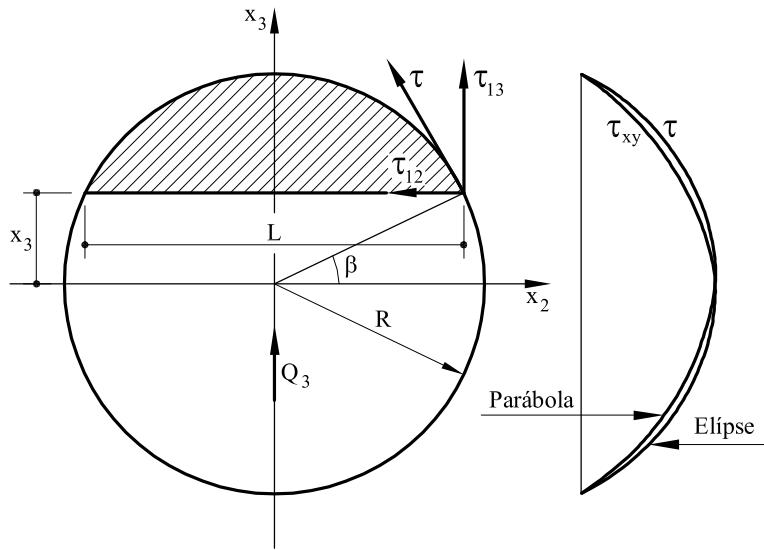


Fig. 5.6 Sección circular

La distribución de τ_{13} a lo largo de Gx_3 es, pues, parabólica.
La tensión tangencial τ en el contorno es $|\tau| = \tau_{13} / \cos \beta$, o sea

$$\boxed{\tau = \frac{4}{3} \left(\frac{Q_3}{A} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{x_3}{R} \right)^2}} \quad (5.14)$$

El máximo de τ_{13} y τ es para $x_3 = 0$ y su valor común $\frac{4}{3} \frac{Q_3}{A}$ excede en un 33% el valor de la tensión media Q_3/A .

Puede verse también que la distribución de τ a lo largo del perímetro es una elipse (cuando τ viene en función de x_3).

El estudio riguroso, basándose en que el material es perfectamente elástico, muestra que las tensiones cortantes no son iguales a lo largo del eje neutro (eje Gx_2), sino que el máximo lo alcanza en el centro y vale

$$\tau_{max} = \frac{3 + 2\nu}{2(1 + \nu)} \frac{Q_3}{A}$$

Para $\nu = 0,3$ (el valor que tiene el coeficiente de Poisson para los aceros de construcción) es $\tau_{max} = 1,385Q_3/A$, mientras que la fórmula aproximada da $\tau_{max} = 1,333Q_3/A$. El error cometido, pues, al utilizar esta última es 3,25%, error que sin duda es superado por no ser el material perfectamente elástico, etc.

5.4 Secciones abiertas de paredes delgadas

La expresión de las tensiones tangenciales deducida para el caso de secciones macizas es tal como se advirtió, solamente aproximada. No sucede lo mismo para el caso de secciones de paredes delgadas, en donde es posible obtener de forma correcta la distribución de tensiones tangenciales producida por un esfuerzo cortante actuando en la sección.

5.4.1 Cortante actuando en un eje principal de inercia de la sección

Sea nuevamente una sección cualquiera (Fig. 5.7) en la que Gx_2 , Gx_3 son ejes principales de inercia y actúa un esfuerzo cortante Q_3 en la dirección Gx_3 . A diferencia de la sección de la figura 5.1, se trata ahora de una sección (y rebanada diferencial) de paredes delgadas, abierta, en la que el espesor e (variable dentro de la sección) es mucho menor que las dimensiones de dicha sección.

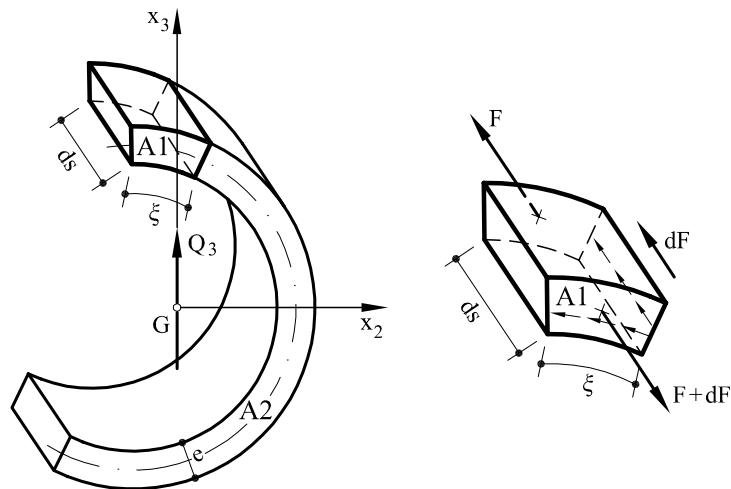


Fig. 5.7. Tensiones tangenciales en una sección abierta de paredes delgadas

En la anterior sección es posible definir en la linea media una nueva coordenada de longitud ξ (ver Fig. 5.7). Si idealmente se separa nuevamente la parte $A1$ de la parte $A2$ mediante un plano perpendicular a la sección y a la linea media de la misma, aparecerá en los labios de dicha separación una fuerza dF cuyo valor viene dado por 5.6. Al ser la sección de paredes delgadas es razonable suponer ahora que las tensiones tangenciales serán constantes en todo el espesor y de valor

$$\tau = -\frac{dF}{eds} = -\frac{Q_3 m_{e2}}{e I_2} \quad (5.15)$$

siendo en este caso

$$m_{e2} = \int_0^\xi x_3 \, dA = \int_0^\xi x_3 e \, d\xi \quad (5.16)$$

siendo en general el espesor e una función de ξ .

De acuerdo con lo visto en el Capítulo 1, deben existir también unas tensiones tangenciales en el interior de la sección y paralelas a la linea media de la misma y cuyo valor viene dado por 5.15.

Al producto $\phi = \tau e = -Q_3 m_{e2} / I_2$ se le denomina *flujo de tensiones tangenciales*.

Nótese que de acuerdo con la expresión 5.15 las tensiones tangenciales positivas coinciden con el sentido de las ξ crecientes.

5.4.2 Distribución de tensiones tangenciales para distintos tipos de secciones

5.4.2.1 Sección en U

Considérese la sección en U que se indica en la figura 5.8, en la que actúa un esfuerzo cortante Q_3 ascendente. Sean:

I_2 : momento de inercia de la sección respecto al eje Gx_2 .
 e_1 y e_2 : espesores de las alas y del alma, respectivamente.

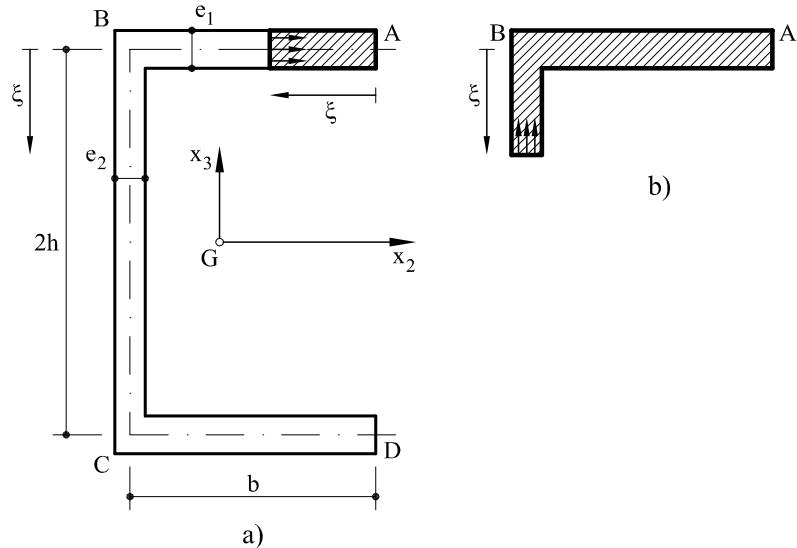


Fig. 5.8 Obtención de las tensiones tangenciales en una sección en U

Para calcular las tensiones tangenciales en un punto del ala superior y situado a una distancia ξ de A , se utiliza la expresión 5.15

$$\tau = -\frac{Q_3 m_{e2}}{e I_2} \quad (5.17)$$

En este caso, $e = e_1$ y $m_{e2} = e_1 h \xi$, por lo que, sustituyendo en la expresión anterior

$$\tau|_A^B = -\frac{Q_3 h}{I_2} \xi \quad (5.18)$$

Como se observa, la distribución de tensiones tangenciales crece linealmente desde un valor nulo en A hasta el punto B , en que alcanza un valor igual a $Q_3 h b / I_2$ (Fig. 5.9).

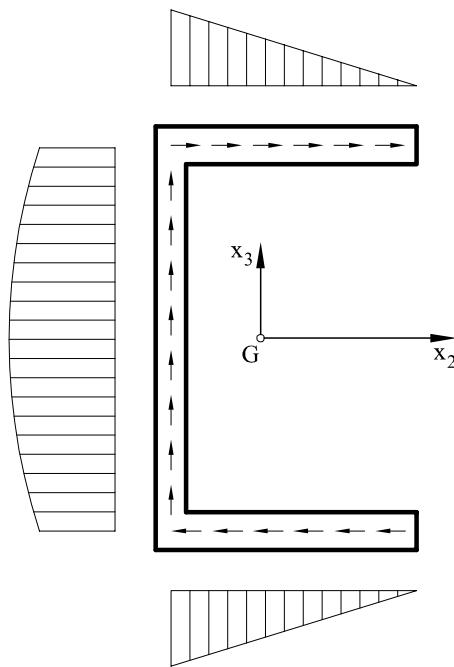


Fig. 5.9 Distribución y flujo de tensiones tangenciales en una sección en U cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente

Para obtener la distribución de tensiones tangenciales en el alma BC , se puede utilizar la misma coordenada local ξ , o bien, definir una nueva a partir de B . Esto último es lo que se hará aquí, por lo que

$$m_{e2} = e_1 b h + e_2 \left(h - \frac{\xi}{2} \right) \xi \quad (5.19)$$

y sustituyendo en 5.15

$$\tau|_B^C = -\frac{Q_3}{I_2} \left[\frac{e_1}{e_2} bh + \left(h - \frac{\xi}{2} \right) \xi \right] \quad (5.20)$$

La distribución anterior es parabólica y el valor máximo se produce en el centro del alma y tiene un valor igual a

$$\tau_{max} = -\frac{Q_3}{I_2} \left(\frac{e_1}{e_2} bh + \frac{h^2}{2} \right) \quad (5.21)$$

Como puede observarse, a partir de 5.18 y 5.20, las tensiones tangenciales en B de las paredes BC y BA no son iguales

$$\tau_B|_A^B = -\frac{Q_3}{I_2} bh \quad (5.22a)$$

$$\tau_B|_B^C = -\frac{Q_3}{I_2} bh \frac{e_1}{e_2} \quad (5.22b)$$

Lo que sí se cumple es la igualdad de los flujos de tensiones tangenciales en B , es decir

$$\phi_B|_A^B = -\frac{Q_3}{I_3} bhe_1 \quad (5.23a)$$

$$\phi_B|_B^C = -\frac{Q_3}{I_2} bhe_1 \quad (5.23b)$$

Las tensiones tangenciales en CD se determinan de la misma forma. En la figura 5.9 puede verse representada la distribución de tensiones tangenciales en toda la sección.

5.4.2.2 Sección doble T

Considérese la sección doble T de la figura 5.10, en la cual se pretende determinar la distribución de tensiones tangenciales cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente Q_3 .

Sea I_2 el momento de inercia de la sección respecto al eje Gx_2 y e_1 y e_2 los espesores de las alas y del alma, respectivamente (normalmente $e_2 < e_1$).

A partir de la expresión 5.15, se determina la distribución de tensiones tangenciales en las alas:

$$\tau|_A^B = -\frac{Q_3 m_{e2}}{e_1 I_2} \quad (5.24)$$

donde

$$m_{e2} = e_1 h \xi$$

es decir

$$\tau|_A^B = -\frac{Q_3}{I_2} h \xi \quad (5.25a)$$

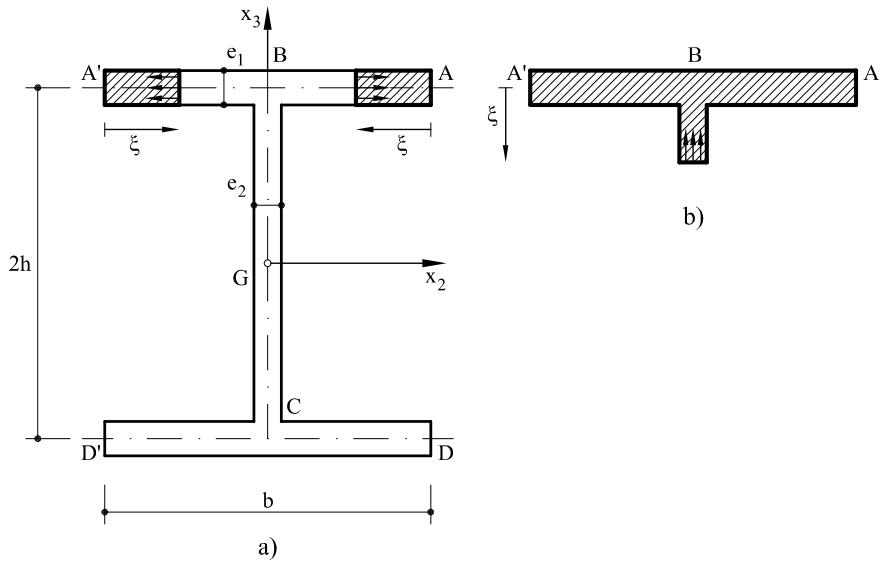


Fig. 5.10 Sección doble T

y análogamente

$$\tau|_{A'}^B = -\frac{Q_3}{I_2} h \xi \quad (5.25b)$$

ambas distribuciones son lineales con valor nulo en los extremos y máximo en el punto *B*

$$\tau_B|_A^B = \tau_B|_{A'}^B = -\frac{Q_3}{I_2} h \frac{b}{2} \quad (5.26)$$

Para hallar la tensión tangencial en un punto cualquiera del alma *BC*, se determina el valor del momento estático del trozo de pieza representado en la figura 5.10b

$$m_{e2} = e_1 b h + e_2 \left(h - \frac{\xi}{2} \right) \xi \quad (5.27)$$

valor que sustituido en 5.15

$$\tau|_B^C = -\frac{Q_3}{I_2} \left[\frac{e_1}{e_2} b h + \left(h - \frac{\xi}{2} \right) \xi \right] \quad (5.28)$$

Esta distribución es parabólica con valor máximo en el punto medio de *BC*

$$\tau_{max} = -\frac{Q_3}{I_2} \left(\frac{e_1}{e_2} b h + \frac{h^2}{2} \right) \quad (5.29)$$

el valor en el punto *B* será

$$\tau_B|_B^C = -\frac{Q_3}{I_2} \frac{e_1}{e_2} b h \quad (5.30)$$

Si

$$\phi_B|_{A'}^B = e_1 \tau_B|_{A'}^B = -\frac{Q_3}{I_2} \frac{hb}{2} e_1 \quad (5.31a)$$

$$\phi_B|_A^B = e_1 \tau_B|_A^B = -\frac{Q_3}{I_2} \frac{hb}{2} e_1 \quad (5.31b)$$

$$\phi_B|_B^C = e_2 \tau_B|_B^C = -\frac{Q_3}{I_2} h b e_1 \quad (5.31c)$$

puede comprobarse la conservación de los flujos en el punto B

$$\phi_B|_A^B + \phi_B|_{A'}^B = \phi_B|_B^C \quad (5.32)$$

En la figura 5.11 puede verse representada la distribución de tensiones tangenciales obtenida anteriormente.

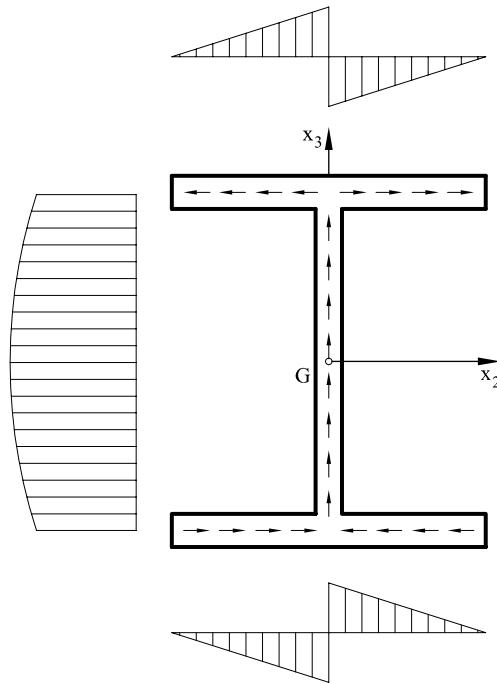


Fig. 5.11 Distribución y flujo de tensiones tangenciales en una sección doble T

5.4.2.3 Secciones unicelulares cerradas con un eje de simetría

Si el esfuerzo cortante actúa sobre un eje de simetría, que se supondrá vertical, por razón de simetría la tensión cortante, en los puntos de intersección de este eje con la sección, será nula.

Según lo dicho, la tensión cortante en la sección de la figura 5.12 en aa' y cc' será nula. En un punto cualquiera bb' la tensión cortante será tangente a la fibra media y su valor será $\tau = -Q_3 m_{e2} / I_2 e$, siendo m_{e2} el momento estático, respecto a Gx_2 de la parte sombreada $aa' bb'$.

Considérese como ejemplo la sección de la figura 5.12b.

En la viga cajón de la figura 5.12b, el valor de las tensiones cortantes será el que se indica en el gráfico de la misma figura. Si se supone el espesor constante, la tensión cortante en ab' será prácticamente igual que en $b'b''$, siendo ligeramente superior en este último. El sentido de las tensiones cortantes puede determinarse de acuerdo con lo comentado en el apartado 5.4.1.

En la sección anular de la figura 5.13, el módulo de la tensión cortante en la sección genérica bb' vale

$$\tau = \frac{Q_3 \sin \theta}{\pi e R}$$

En el gráfico de la figura 5.13 se indica el sentido de Q_3 así como el de las tensiones cortantes.

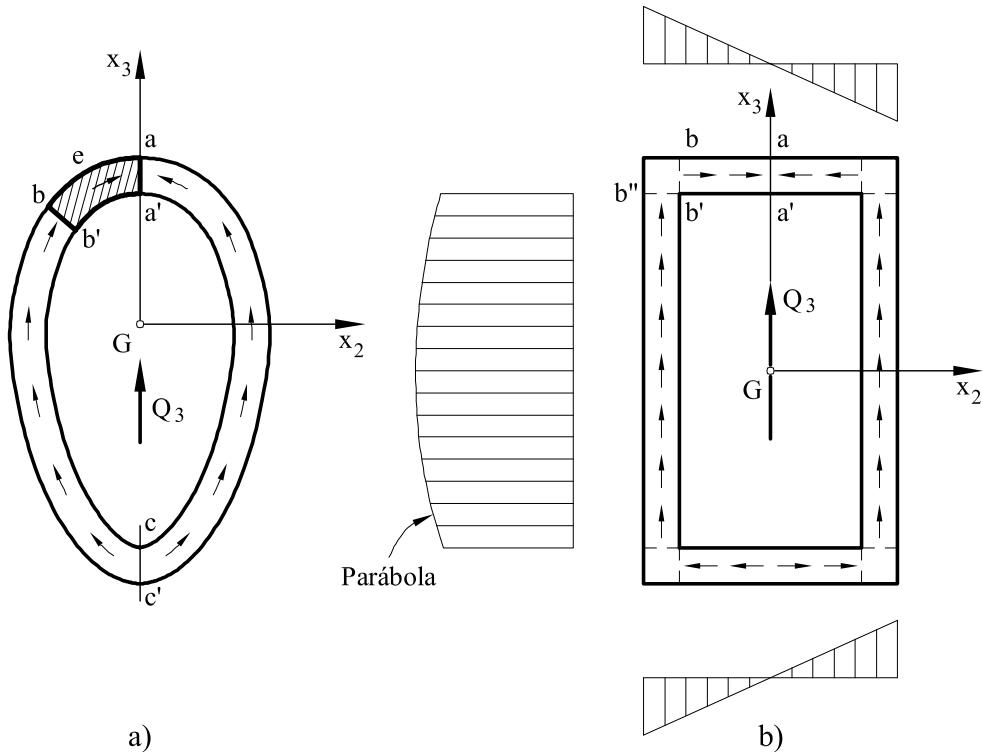


Fig. 5.12 Sección tubular de pequeño espesor

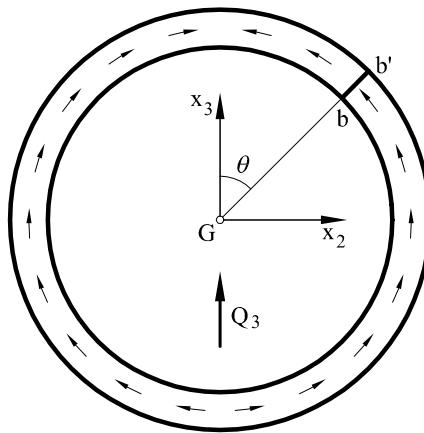


Fig. 5.13. Sección tubular sometida a un esfuerzo cortante

5.4.3 Cortante esviado

a) Primer procedimiento

Cuando el esfuerzo cortante Q actúa en un plano cualquiera (Fig. 5.14) es siempre posible descomponerlo en sus componentes sobre los ejes principales de inercia $G\hat{x}_2, G\hat{x}_3$, quedando

$$\hat{Q}_2 = Q \cos \alpha \quad (5.33a)$$

$$\hat{Q}_3 = Q \sin \alpha \quad (5.33b)$$

Las tensiones tangenciales en cada punto serán las debidas a \hat{Q}_2 y a \hat{Q}_3 , por lo que, de acuerdo con 5.15, se tendrá

$$\tau = -\frac{\hat{Q}_3 \hat{m}_{e2}}{e \hat{I}_2} - \frac{\hat{Q}_2 \hat{m}_{e3}}{e \hat{I}_3} = -\frac{Q}{e} \left[\frac{\hat{m}_{e2}}{\hat{I}_2} \sin \alpha + \frac{\hat{m}_{e3}}{\hat{I}_3} \cos \alpha \right] \quad (5.34)$$

siendo en este caso

\hat{m}_{e2} = momento estático respecto al eje $G\hat{x}_2$ de la parte de la sección considerada

\hat{m}_{e3} = momento estático respecto al eje $G\hat{x}_3$ de la parte de la sección considerada

$$\hat{m}_{e2} = \int_0^{\xi} \hat{x}_3 e \, d\xi$$

$$\hat{m}_{e3} = \int_0^{\xi} \hat{x}_2 e \, d\xi$$

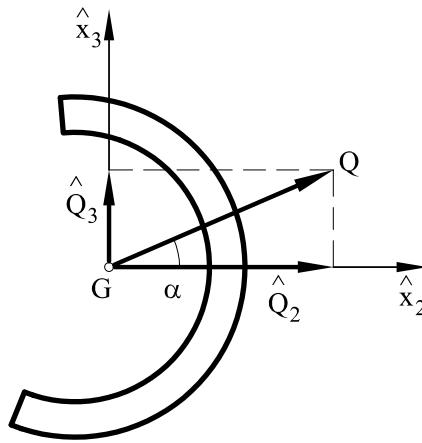


Fig. 5.14 Descomposición del esfuerzo cortante en sus componentes sobre cada uno de los ejes principales

Los momentos de inercia \hat{I}_2 y \hat{I}_3 son los principales de la sección. Asimismo el flujo de tensiones tangenciales valdrá

$$\phi = \tau e = -Q \left(\frac{\hat{m}_{e3}}{\hat{I}_3} \cos \alpha + \frac{\hat{m}_{e2}}{\hat{I}_2} \sin \alpha \right) = -Q \left(\frac{\hat{m}_{e3}}{\hat{I}_3 / \cos \alpha} + \frac{\hat{m}_{e2}}{\hat{I}_2 / \sin \alpha} \right) \quad (5.35)$$

b) Segundo procedimiento

Al igual que se hizo al determinar la distribución de tensiones normales en el caso de la flexión, es posible también determinar directamente las tensiones tangenciales cuando los ejes x_2 y x_3 son cualesquiera y actúa un esfuerzo cortante Q_2 y un esfuerzo cortante Q_3 en cada uno de los ejes. Para ello, a partir de las ecuaciones 5.3 a 5.6, la fuerza desequilibrada dF debida a la variación del momento flector valdrá

$$dF = - \int_{A1} d\sigma dA \quad (5.36)$$

y sustituyendo en la expresión anterior el valor de la tensión normal σ dado por (4.37) se tiene

$$dF = - \frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[dM_{f2} \int_{A1} (x_3 I_3 - x_2 I_{23}) dA + dM_{f3} \int_{A1} (x_3 I_{23} - x_2 I_2) dA \right] \quad (5.37)$$

y teniendo en cuenta que, de acuerdo con lo visto anteriormente,

$$dF = \tau e ds \quad (5.38)$$

la expresión 5.37 se transforma en

$$\begin{aligned}\tau_e &= -\frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[\frac{dM_{f2}}{ds} \int_{A1} (x_3 I_3 - x_2 I_{23}) dA + \frac{dM_{f3}}{ds} \int_{A1} (x_3 I_{23} - x_2 I_2) dA \right] \\ &= -\frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[Q_3 (I_3 m_{e2} - I_{23} m_{e3}) - Q_2 (I_{23} m_{e2} - I_2 m_{e3}) \right] = \\ &= -\frac{1}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[(Q_3 I_3 - Q_2 I_{23}) m_{e2} + (-Q_3 I_{23} + Q_2 I_2) m_{e3} \right]\end{aligned}\quad (5.39)$$

expresión que proporciona la distribución de las tensiones tangenciales en ejes cualesquiera. Como es de esperar 5.39 coincide con 5.34 para el caso en que $I_{23} = 0$ y $Q_2 = Q \cos \alpha$ y $Q_3 = Q \sin \alpha$.

c) *Tercer procedimiento: estudio directo del cortante esviado*

Supóngase una pieza cuya sección recta en el punto $s = s_o$ está sometida a un momento flector \mathbf{M}_f y a un esfuerzo cortante (Fig. 5.15a). El cortante no se dibuja en la figura). En el punto $s = s_o + ds$ actuará un momento flector $\mathbf{M}_f + d\mathbf{M}_f$ y también un esfuerzo cortante (Fig. 5.15b). Es claro, a partir de la ecuación 2.10b de equilibrio interno, que el esfuerzo cortante Q debe ser perpendicular al vector $d\mathbf{M}_f$ (Fig. 5.15c) y tal que se verifique $Q = dM_f/ds$.

Sea por lo tanto una sección en la que actúe un esfuerzo cortante Q , el cual lleva asociado un momento flector, diferencial, de valor $d\mathbf{M}_f$. Dicho diferencial de momento tendrá la traza mm' (Fig. 5.15c) y le corresponderá una fibra neutra nn' de acuerdo con lo estudiado en el Capítulo 4. El esfuerzo cortante estará contenido en la traza mm' .

Para determinar las tensiones tangenciales que produce este esfuerzo, en la figura 5.16 se representa una rebanada de espesor ds . Si $A1$ es una parte cualquiera de la sección, sobre ella actúan unas tensiones normales producidas por $d\mathbf{M}_f$ cuya resultante vale

$$dF = \int_{A1} d\sigma dA = \int_{A1} \frac{dM_f}{I_{nn'}} y \cos \theta dA = \frac{dM_f}{\tilde{I}_{nn'}} \int_{A1} y e d\xi = \frac{dM_f}{\tilde{I}_{nn'}} m_e \quad (5.40)$$

en donde, como se sabe, m_e es el momento estático de $A1$ respecto a nn' , $\tilde{I}_{nn'} = I_{nn'}/\cos \theta$ y e es la distancia de un punto de la sección a la fibra neutra nn' .

La fuerza dF tiene que equilibrarse con unas tensiones tangenciales τ de forma que

$$\tau e ds = -dF = \frac{M_f}{\tilde{I}_{nn'}} m_e \quad (5.41)$$

es decir, que el flujo de tensiones tangenciales valdrá

$$\tau_e = -\frac{Q m_e}{\tilde{I}_{nn'}} \quad (5.42)$$

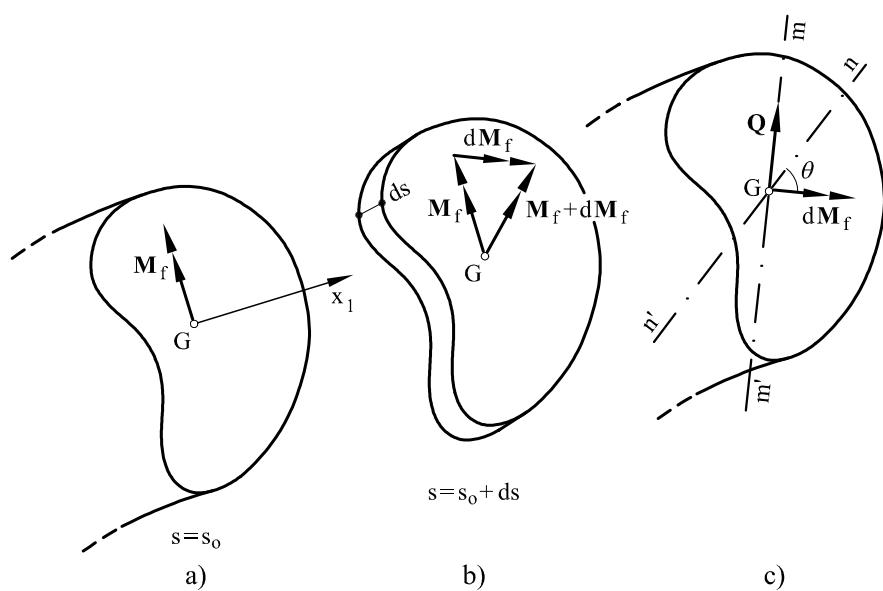
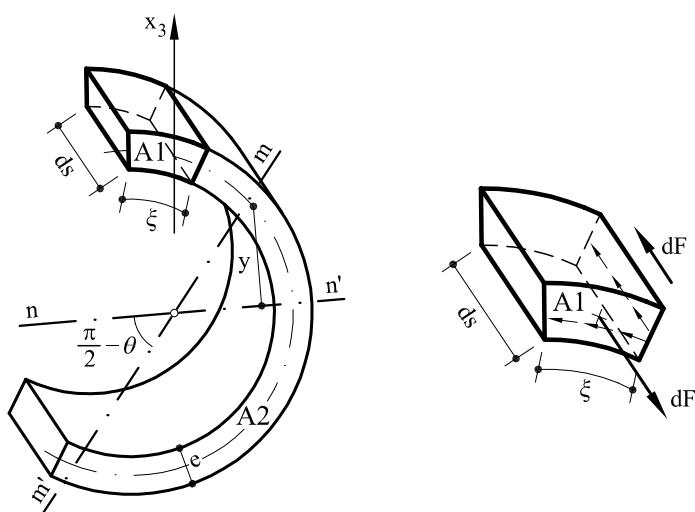


Fig. 5.15 Esfuerzo cortante esviado

Fig. 5.16 Tensiones tangenciales en una sección abierta de paredes delgadas.
Estudio directo

expresión que proporciona la distribución de tensiones tangenciales en cualquier punto de la sección.

♣ **Problema Resuelto P5.1** Hallar la distribución de tensiones cortantes cuando en la sección representada en la figura P5.1.1 actúa un cortante Q que forma 30° con la vertical.

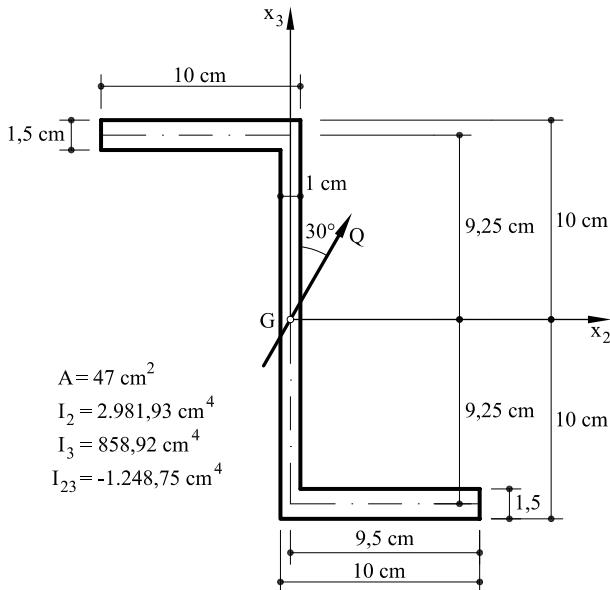


Fig. P5.1.1 Sección correspondiente al problema resuelto P5.1

Solución

Este problema se va a resolver utilizando los tres procedimientos desarrollados anteriormente:

a) Resolución en ejes principales

Se determinan, en primer lugar, los ejes principales de inercia de la sección (Fig. P5.1.2).

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{23}}{I_3 - I_2} = \frac{-2 \times 1248,75}{858,92 - 2981,93} = 1,1764$$

$$\alpha = 24,82$$

y los momentos de inercia según los ejes principales

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= I_2 \cos^2 \alpha + I_3 \sin^2 \alpha - I_{23} \sin 2\alpha = \\ &= 2981,93 \cos^2 24,82 + 858,92 \sin^2 24,82 + 1248,75 \sin(2 \times 24,82) = \\ &= 3559,38 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= I_2 \sin^2 \alpha + I_3 \cos^2 \alpha - I_{23} \sin 2\alpha = \\ &= 2981,93 \sin^2 24,82 + 858,92 \cos^2 24,82 - 1248,75 \sin(2 \times 24,82) = \\ &= 281,47 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

El esfuerzo cortante Q se descompone según los ejes principales.

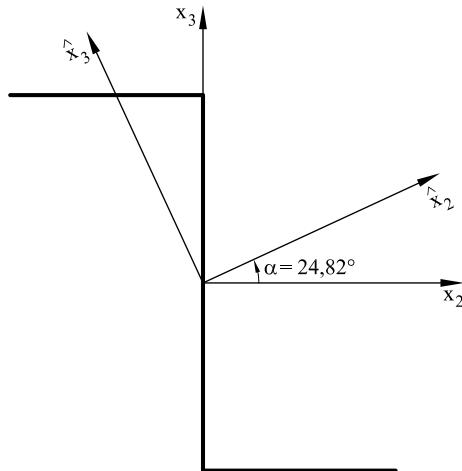


Fig. P5.1.2 Ejes principales de inercia

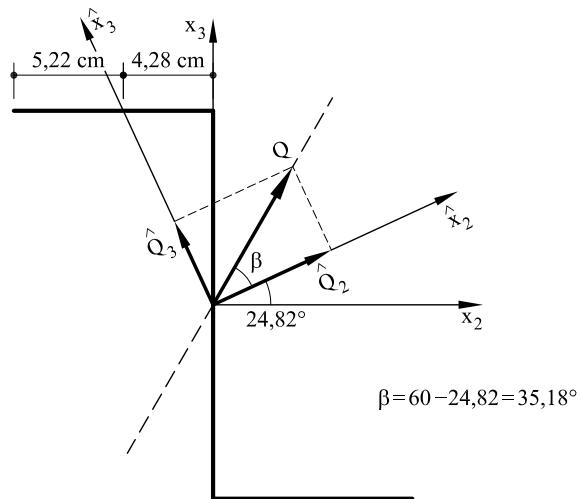
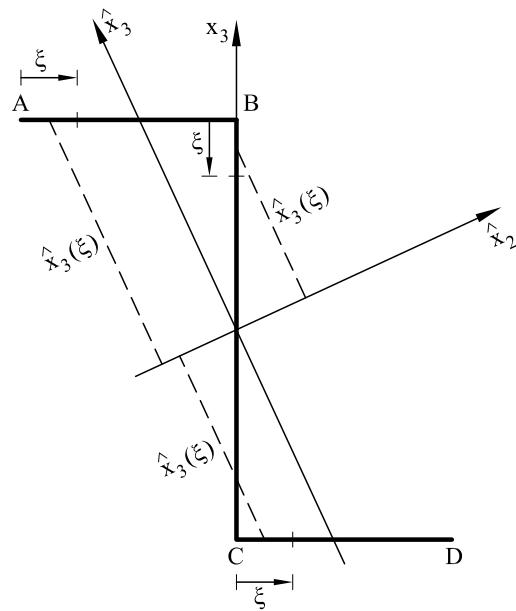


Fig. P5.1.3 Descomposición del esfuerzo cortante según los ejes principales de inercia

De acuerdo con 5.35 el flujo de tensiones tangenciales valdrá

$$\begin{aligned}\phi = \tau e &= -Q \left[\frac{\hat{m}_{e3}}{\hat{I}_3 / \cos \beta} + \frac{\hat{m}_{e2}}{\hat{I}_2 / \sin \beta} \right] = \\ &= -Q \left[\frac{\hat{m}_{e3}}{281,47 / \cos 35,18} + \frac{\hat{m}_{e2}}{3\ 559,38 / \sin 35,18} \right] = -Q \left[\frac{\hat{m}_{e3}}{344,38} + \frac{\hat{m}_{e2}}{6\ 177,9} \right]\end{aligned}$$

Fig. P5.1.4 Determinación de las coordenadas \hat{x}_3

Determinación de los momentos estáticos \hat{m}_{e2} referidos al eje principal $G\hat{x}_2$

Las coordenadas $\hat{x}_3(\xi)$ de los centros de gravedad de los distintos tramos de la sección valdrán (Fig. P5.1.4):

$$\hat{x}_3(\xi)|_A^B = 12,383 - 0,2099 \xi$$

$$\hat{x}_3(\xi)|_B^C = 8,396 - 0,4538 \xi$$

$$\hat{x}_3(\xi)|_C^D = -(8,396 + 0,2099 \xi)$$

Por lo que los momentos estáticos \hat{m}_{e2} se escriben

$$\hat{m}_{e2}|_A^B = 1,5 \xi \hat{x}_3(\xi) = 1,5 \xi (12,383 - 0,2093 \xi) = 18,575 \xi - 0,314 \xi^2$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{e2}|_B^C &= 1,5 \times 9,5(12,383 - 0,2099 \times 9,5) + \xi (8,396 - 0,4538 \xi) = \\ &= 148,04 + 8,396 \xi - 0,4583 \xi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{e2}|_C^D &= 148,04 + 8,396(2 \times 9,25) - 0,4538(2 \times 9,25)^2 - \\ &- 1,5 \xi (8,396 + 0,2099 \xi) = 148,04 - 12,594 \xi - 0,3149 \xi^2 \end{aligned}$$

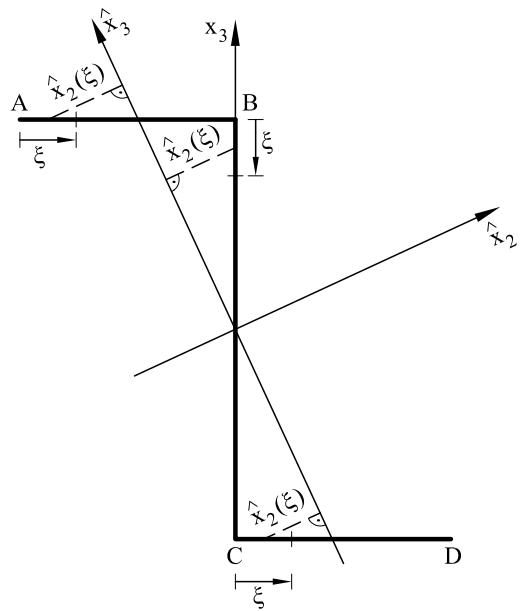


Fig. P5.1.5 Determinación de las coordenadas \hat{x}_2

Determinación de los momentos estáticos \hat{m}_{e3} referidos al eje principal $G\hat{x}_3$

Las coordenadas $\hat{x}_2(\xi)$ de los distintos puntos medios valdrán (Fig. P5.1.5)

$$\hat{x}_2(\xi)|_A^B = -4,738 + 0,4538 \xi$$

$$\hat{x}_2(\xi)|_B^C = 3,885 - 0,2099 \xi$$

$$\hat{x}_2(\xi)|_C^D = -3,885 + 0,4538 \xi$$

Por lo que los momentos estáticos \hat{m}_{e3} se escriben

$$\hat{m}_{e3}|_A^B = 1,5 \xi \hat{x}_2(\xi) = 1,5 \xi (-4,738 + 0,4538 \xi) = -7,107 \xi + 0,6807 \xi^2$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{e3}|_B^C &= -7,107 \times 9,5 + 0,6807 \times 9,5^2 + \xi (3,885 - 0,2099 \xi) = \\ &= -6,083 + 3,885 \xi - 0,2099 \xi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{e3}|_C^D &= -6,083 + 3,885 \times 2 \times 9,25 - 0,2099(2 \times 9,25)^2 + \\ &\quad + 1,5 \xi (-3,885 + 0,4538 \xi) = -6,083 - 5,828 \xi + 0,6807 \xi^2 \end{aligned}$$

Las leyes de tensiones tangenciales valdrán

$$\begin{aligned}\tau(\xi)|_A^B &= -Q \left[\frac{-7,107 \xi + 0,6807 \xi^2}{1,5 \times 344,38} + \frac{18,575 \xi - 0,314 \xi^2}{1,5 \times 6177,9} \right] = \\ &= -Q(-0,011754 \xi + 0,0012838 \xi^2) = \frac{Q}{1000}(11,754 \xi - 1,2838 \xi^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\xi)|_B^C &= -Q \left[\frac{-6,083 + 3,885 \xi - 0,2099 \xi^2}{344,38} + \frac{148,04 + 8,396 \xi - 0,4583 \xi^2}{6177,9} \right] \\ &= \frac{Q}{1000}[-6,3 - 12,64 \xi + 0,6837 \xi^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\xi)|_C^D &= -Q \left[\frac{-6,083 - 5,828 \xi + 0,6807 \xi^2}{1,5 \times 344,38} + \frac{148,04 - 12,594 \xi - 0,3149 \xi^2}{1,5 \times 6177,9} \right] \\ &= \frac{Q}{1000}(-4,2 + 12,641 \xi - 1,284 \xi^2)\end{aligned}$$

b) Cálculo en ejes cualesquiera

Los momentos estáticos respecto a los ejes Gx_2, Gx_3 valdrán

$$\begin{aligned}m_{e2}|_A^B &= 9,25 \times 1,5 \xi = 13,875 \xi \\ m_{e2}|_B^C &= 13,875 \times 9,5 + \left(9,25 - \frac{\xi}{2}\right) \xi = 131,8125 + 9,25 \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ m_{e2}|_C^D &= 131,8125 - 9,25 \times 1,5 \xi = 131,8125 - 13,875 \xi \\ m_{e3}|_A^B &= -1,5 \xi \left(9,5 - \frac{\xi}{2}\right) = -14,25 \xi + 0,75 \xi^2 \\ m_{e3}|_B^C &= -(14,25 \xi + 0,75 \xi^2)_{\xi=9,5} = -67,6875 \\ m_{e3}|_C^D &= -67,6875 + 1,5 \xi^2 / 2 = -67,6875 + 0,75 \xi^2\end{aligned}$$

por otro lado, llamando

$$\Delta = I_2 I_3 - I_{23}^2 = 858,92 \times 2981,93 - (1248,75)^2 = 1001862,753 \text{ cm}^8$$

Descomponiendo Q según los ejes Gx_2 y Gx_3 , resulta

$$Q_3 = Q \cos 30 = 0,866 Q$$

$$Q_2 = Q \sin 30 = 0,5 Q$$

Se obtendrá la ley de tensiones tangenciales:

$$\begin{aligned}\tau|_A^B &= -\frac{Q}{1,5\Delta} \left[(0,866 \times 858,92 + 0,5 \times 1248,75) m_{e2} + \right. \\ &\quad \left. + (0,866 \times 1248,75 + 0,5 \times 2981,93) m_{e3} \right] = \\ &= -\frac{Q}{1,5\Delta} \left[1368,2 \times 13,875 \xi + 2572,38(-14,25 \xi + 0,75 \xi^2) \right] = \\ &= -\frac{Q}{1,5\Delta} \left[-17672,64 \xi + 1929,29 \xi^2 \right] = \frac{Q}{1000} (11,76 \xi - 1,2838 \xi^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau|_B^C &= -\frac{Q}{\Delta} \left[1368,2(131,8125 + 9,25 \xi - 0,5 \xi^2) - 2572,38 \times 67,6875 \right] = \\ &= \frac{Q}{1000} \left[-6,2163 - 12,63 \xi + 0,6828 \xi^2 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau|_C^D &= -\frac{Q}{1,5\Delta} \left[1368,2(131,8125 - 13,875 \xi) + 2572,38(-67,6875 + 0,75 \xi^2) \right] = \\ &= \frac{Q}{1000} \left[-4,144 + 12,63 \xi - 1,284 \xi^2 \right]\end{aligned}$$

c) Cálculo directo del cortante (Fig. P5.1.6)

El ángulo que forma la fibra neutra con el vector momento dM_f viene dado por

$$\tan \theta = -\frac{I_{mt}}{I_{mm'}}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}I_{mt} &= -I_3 \frac{\sin(-2 \times 30)}{2} + I_2 \frac{\sin(-2 \times 30)}{2} + I_{23} \cos(-2 \times 30) = \\ &= -0,433(2981,93 - 858,92) - 1248,75 \frac{1}{2} = -1543,665 \text{ cm}^4 \\ I_{mm'} &= I_3 \cos^2(-30) + I_2 \sin^2(-30) + I_{23} \sin(-2 \times 30) = \\ &= -858,92 \cos^2(-30) + 2981,93 \sin^2(-30) - \\ &\quad - 1248,75 \sin(-60) = 2471,12 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

por lo que sustituyendo

$$\tan \theta = \frac{1543,665}{2471,12} = 0,6247 \Rightarrow \theta = 32^\circ$$

$$\cos \theta = \cos 32 = 0,84812$$

$$\boxed{\beta = 30 + 32 = 62^\circ}$$

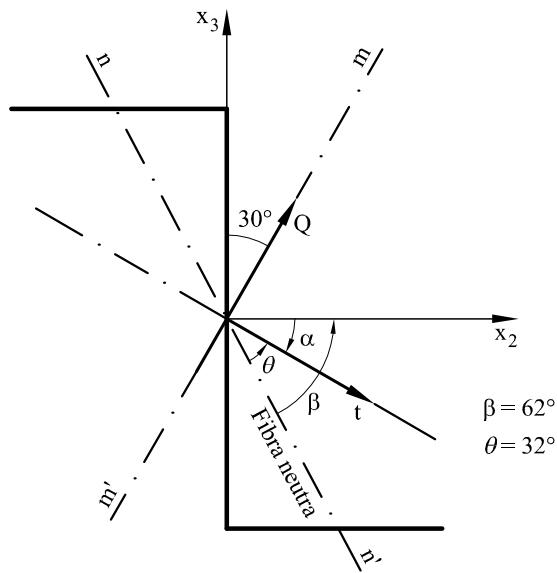


Fig. P5.1.6 Estudio directo del cortante de la sección

Además

$$\begin{aligned}
 I_{nn'} &= -I_3 \sin^2(-62) + I_2 \cos^2(-62) - I_{23} \sin(-2 \times 62) = \\
 &= 858,92 \sin^2(-62) + 2\,981,93 \cos^2(-62) - 1\,248,75 \sin(124) = \\
 &= 291,58 \text{ cm}^4 \\
 \tilde{I}_{nn'} &= I_{nn'}/\cos \theta = \frac{291,58}{0,84812} = 343,8 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

• Momentos estáticos

De acuerdo con la figura P5.1.7 las coordenadas de los distintos puntos medios valdrán

$$\begin{aligned}
 y(\xi)|_A^B &= -y_o + \frac{\xi}{2} \cos 28 = -4,044 + 0,4415 \xi \\
 y(\xi)|_B^C &= 4,343 - 0,2347 \xi \\
 y(\xi)|_C^D &= -4,343 + 0,4415 \xi
 \end{aligned}$$

Por lo que las tensiones tangenciales se escriben

$$\begin{aligned}
 \tau(\xi)|_A^B &= -\frac{Qm_e}{e\tilde{I}_{nn'}} = -Q \left[\frac{1,5 \xi (-4,044 + 0,4415 \xi)}{1,5 \times 343,8} \right] = \\
 &= \frac{Q}{1000} (11,76 \xi - 1,2842 \xi^2)
 \end{aligned}$$

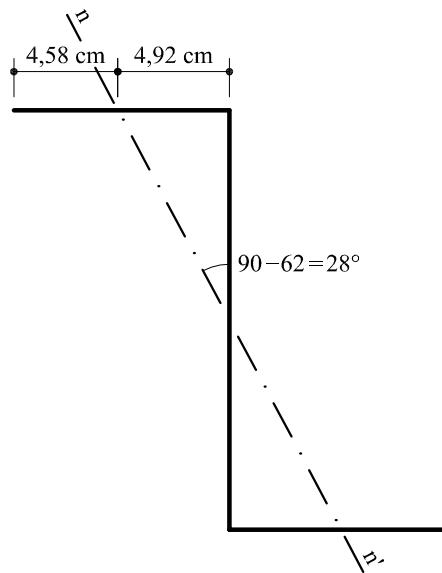


Fig. P5.1.7 Determinación de coordenadas

$$\begin{aligned}\tau(\xi)|_B^C &= -Q \left[\frac{2,141 + \xi(4,343 - 0,2347 \xi)}{343,8} \right] = \\ &= \frac{Q}{1000} (-6,23 - 12,63 \xi + 0,6827 \xi^2) \\ \tau(\xi)|_C^D &= -Q \left[\frac{2,141 + (-4,343 + 0,4415 \xi)1,5 \xi}{1,5 \times 343,8} \right] = \\ &= \frac{Q}{1000} (-4,19 + 12,63 \xi - 1,284 \xi^2)\end{aligned}$$

Las expresiones de las tensiones tangenciales obtenidas utilizando los tres métodos estudiados son coincidentes (salvo pequeños errores de redondeo). En la figura P5.1.8 pueden verse dibujadas las mencionadas leyes. Nótese que los valores máximos se alcanzan en los puntos en que la fibra neutra corta a las paredes de la pieza.

5.5 Secciones cerradas de paredes delgadas unicelulares

En el caso de secciones cerradas, no es posible aplicar las fórmulas deducidas anteriormente para determinar las tensiones tangenciales. Ello es debido a que no existe ningún borde libre en el cual las tensiones tangenciales sean nulas. Se trata por tanto de un problema hiperestático que no puede resolverse exclusivamente por consideraciones de equilibrio, sino que es necesario establecer condiciones de compatibilidad de movimientos.

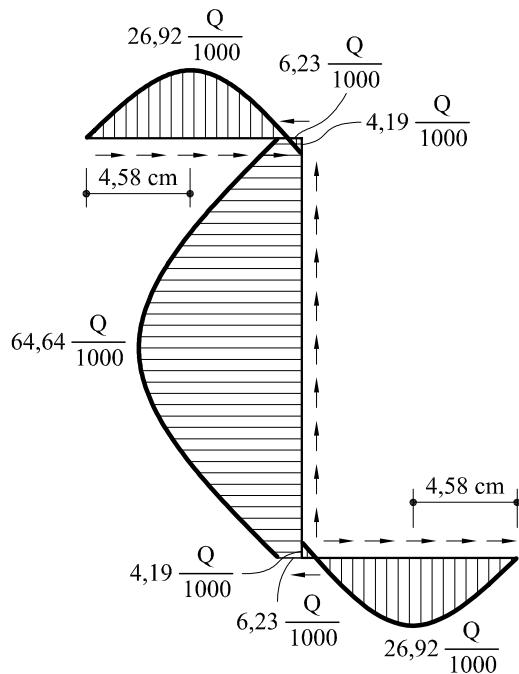


Fig. P5.1.8 Distribución de tensiones tangenciales

Para ello (Fig. 5.17) supóngase que en un punto cualquiera D de la sección la tensión tangencial existente en dicho punto vale τ_o . Si idealmente se corta la pieza a lo largo de una generatriz DD' , el flujo de tensiones tangenciales en cualquier punto valdrá

$$\phi = \tau e = (\tau' + \tau_a)e \quad (5.43)$$

siendo τ_a las tensiones tangenciales en la sección en el supuesto de que en el punto D sean nulas (sección abierta) y τ' las tensiones tangenciales provocadas por la tensión tangencial hiperestática τ_o . El flujo de tensiones tangenciales debidas a τ_o es constante en toda la celda, es decir

$$\phi_o = \tau_o e_o = \text{constante}$$

por lo que las tensiones tangenciales en cada punto valdrán

$$\tau = \tau_a + \tau_o \frac{e_o}{e}$$

siendo e_o el espesor de la sección en el punto de corte.

Por efecto de las tensiones tangenciales, los diferentes puntos de la sección sufren un desplazamiento relativo en la dirección de la generatriz de la pieza de valor (Fig. 5.17b)

$$d\delta = \gamma(\xi) d\xi = \frac{\tau}{G} d\xi = \left(\frac{\tau_o e_o}{e} + \tau_a \right) \frac{d\xi}{G} \quad (5.44)$$

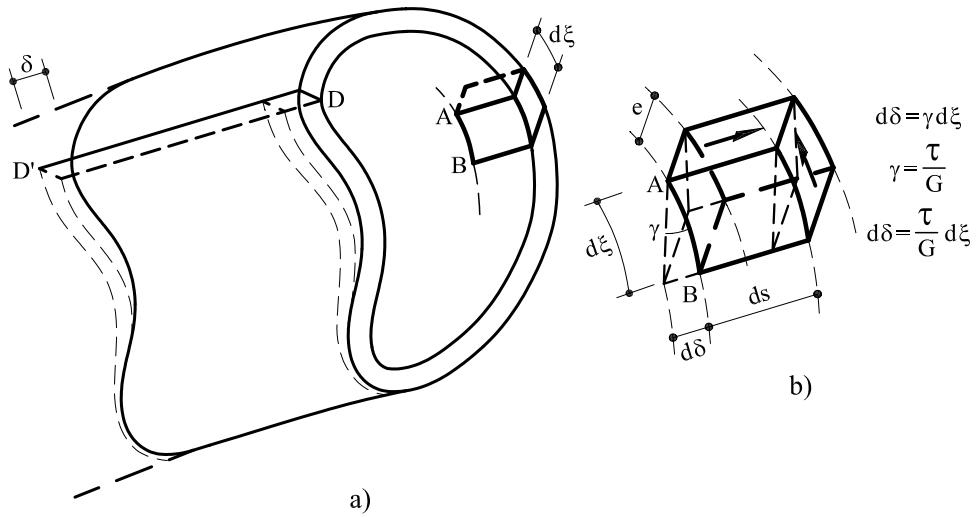


Fig. 5.17 Deformación de una sección por efecto de las tensiones tangenciales

El desplazamiento total entre ambos lados del corte valdrá

$$\delta = \oint \left(\frac{\tau_o e_o}{e} + \tau_a \right) \frac{d\xi}{G} \quad (5.45)$$

estando la integral extendida a toda la celda. Y puesto que el anterior desplazamiento debe ser nulo

$$0 = \oint \left(\frac{\tau_o e_o}{e} + \tau_a \right) \frac{d\xi}{G} = \tau_o e_o \oint \frac{d\xi}{eG} + \oint \frac{\tau_a d\xi}{G} \quad (5.46)$$

por lo que

$$\tau_o = - \frac{\oint \frac{\tau_a d\xi}{G}}{e_o \oint \frac{d\xi}{eG}} \quad (5.47)$$

y en el caso en que el módulo de elasticidad transversal sea constante en todos los puntos de la sección

$$\tau_o = - \frac{\oint \tau_a d\xi}{e_o \oint \frac{d\xi}{e}} \quad (5.48)$$

Esta expresión proporciona el valor de la tensión tangencial hiperestática τ_o . A partir de 5.43 se puede determinar tanto el flujo de las tensiones tangenciales totales como el valor de dichas tensiones.

5.6 Secciones multicelulares de paredes delgadas

La distribución de tensiones tangenciales en secciones multicelulares de paredes delgadas constituye una generalización del caso anterior en que se trataban secciones unicelulares, pero con la peculiaridad de disponer de un número más elevado de incógnitas hiperestáticas.

Supóngase una sección cualquiera (Fig. 5.18) compuesta por n celdas $1, 2 \dots i \dots j \dots n$, y supóngase también que a efectos de determinar las tensiones tangenciales se realizan n cortes (uno por celda) en los puntos D_i , de forma que la sección se convierta en una sección abierta. En cada uno de dichos cortes la tensión tangencial hiperestática valdrá τ_i° . Debido a dicha tensión tangencial y a las tensiones tangenciales correspondientes a la sección abierta, el flujo de tensiones tangenciales en la celda i valdrá

$$\phi_i = \phi_i^a + \phi_i^\circ \quad (5.49)$$

siendo

$\phi_i^a = \tau_i^a e$: Flujo de tensiones tangenciales en cada punto de la celda i de la sección abierta. Toma el valor nulo en D_i .

$\phi_i^\circ = \tau_i^\circ e$: Flujo de tensiones tangenciales en cada punto de la celda i debido a la tensión tangencial hiperestática τ_i° . Dicho flujo debe ser constante en toda la celda.

e : espesor de la sección en cada punto de la celda (en general variable).

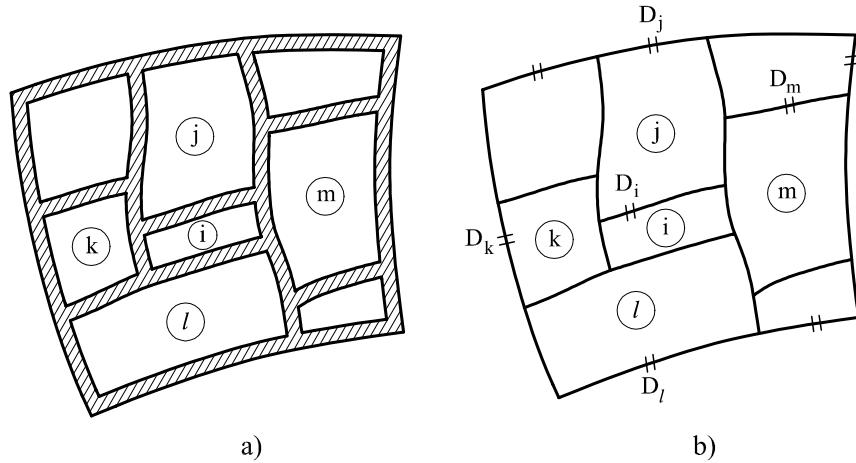


Fig. 5.18 a) Sección multicelular de paredes delgadas
b) Líneas medias

El flujo total de tensiones tangenciales en cada celda será el expresado en 5.49 más el debido a la contribución de las tensiones tangenciales hiperestáticas de las celdas adyacentes a la considerada.

El movimiento relativo entre ambos labios del corte D_i debe ser nulo, es decir

$$0 = \oint_i \phi_i^{tot} \frac{d\xi}{eG} = \oint_i \phi_i^a \frac{d\xi}{eG} + \oint_i \phi_i^\circ \frac{d\xi}{eG} - \int_{ik} \phi_k^\circ \frac{d\xi}{eG} - \\ - \int_{il} \phi_l^\circ \frac{d\xi}{eG} - \int_{im} \phi_m^\circ \frac{d\xi}{eG} - \int_{ij} \phi_j^\circ \frac{d\xi}{eG} \quad (5.50)$$

en donde ik, il, im, ij hacen referencia a la pared común entre las celdas i y k , i y l , i y m , i y j , respectivamente.

Llamando

$$\begin{aligned} \beta_i &= \oint_i \phi_i^a \frac{d\xi}{e} & \alpha_{ik} &= - \int_{ik} \frac{d\xi}{e} \\ \alpha_{ii} &= \oint_i \frac{d\xi}{e} & \alpha_{im} &= - \int_{im} \frac{d\xi}{e} \\ \alpha_{ij} &= - \int_{ij} \frac{d\xi}{e} & \alpha_{il} &= - \int_{il} \frac{d\xi}{e} \end{aligned}$$

La expresión 5.50 se escribe

$$\alpha_{ii} \phi_i^\circ + \alpha_{ij} \phi_j^\circ + \alpha_{ik} \phi_k^\circ + \alpha_{im} \phi_m^\circ + \alpha_{il} \phi_l^\circ + \beta_i = 0 \quad (5.51)$$

La ecuación anterior puede escribirse para cada una de las celdas de la sección, por lo que se llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \phi_1^\circ + \alpha_{12} \phi_2^\circ + \cdots + \alpha_{1n} \phi_n^\circ + \beta_1 &= 0 \\ \alpha_{21} \phi_1^\circ + \alpha_{22} \phi_2^\circ + \cdots + \alpha_{2n} \phi_n^\circ + \beta_2 &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ \alpha_{n1} \phi_1^\circ + \alpha_{n2} \phi_2^\circ + \cdots + \alpha_{nn} \phi_n^\circ + \beta_n &= 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene como incógnitas los flujos correctores $\phi_1^\circ \cdots \phi_n^\circ$

Una vez obtenidos los flujos correctores, los flujos de tensiones tangenciales en cada una de las paredes de la sección serán la suma del flujo correspondiente a la sección abierta más la suma de los flujos correctores correspondientes a las dos celdas a la que pertenece dicha pared. Así, por ejemplo, para la pared que separa la celda i de la k , el flujo de tensiones tangenciales valdrá:

$$\phi_{ik} = \phi_{ik}^a + \phi_i^\circ + \phi_k^\circ$$

haciendo referencia el superíndice a al flujo de tensiones tangenciales correspondiente a la sección abierta.

♣ **Problema Resuelto P5.2** Determinar la distribución de tensiones tangenciales en la sección que se acota a la Figura P5.2.1 cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor 100 kN. Se conocen:

Espesor alas : 1,5 cm

Espesor almas : 0,8 cm

$$I_2 = 48\ 937,5 \text{ cm}^4$$

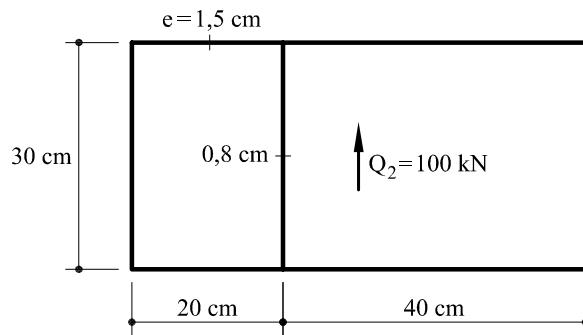


Fig. P5.2.1 Sección bicelular sometida a esfuerzo cortante

Solución

Al existir dos celdas, la sección será dos veces hiperestática, por lo que para determinar la distribución de tensiones tangenciales será preciso realizar dos cortes, uno por celda. En la figura P5.2.2 puede verse que los cortes se han situado en los puntos medios de AB y de BC , en donde se tendrán unos flujos hiperestáticos de tensiones tangenciales de valor ϕ_1° y ϕ_2° respectivamente.

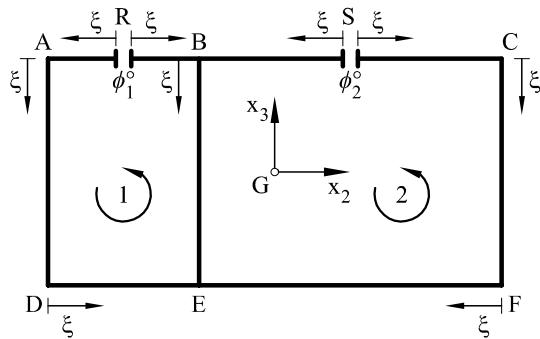


Fig. P5.2.2 Sección bicelular abierta

El flujo de tensiones tangenciales en la sección abierta valdrá:

$$\phi^a|_R^A = -\frac{Q_3 m_{e2}|_R^A}{I_2} = -\frac{100}{48\ 937,5} 1,5 \times \xi \times 15 = -4,598 \times 10^{-2} \xi$$

$$\begin{aligned} \phi^a|_A^D &= -\frac{Q_3 m_{e2}|_A^D}{I_2} = -\frac{100}{48\ 937,5} [1,5 \times 10 \times 15 + 0,8 \xi (15 - \frac{\xi}{2})] = \\ &= -2,043 \times 10^{-3} [225 + 0,8 \xi (15 - \xi/2)] \end{aligned}$$

$$\phi^a|_D^E = -\frac{Q_3 m_{e2}|_D^E}{I_2} = -4,598 \times 10^{-2} (10 - \xi)$$

$$\phi^a|_R^B = -\frac{Q_3 m_{e2}|_R^B}{I_2} = -4,598 \times 10^{-2} \xi$$

$$\begin{aligned} \phi^a|_E^B &= -\frac{Q_3 m_{e2}|_E^B}{I_2} = -\frac{100}{48\ 937,5} [1,5 \times 30 \times 15 + 0,8 \xi (15 - \xi/2)] = \\ &= -2,043 \times 10^{-3} [675 + 0,8 \xi (15 - \xi/2)] = \end{aligned}$$

$$\phi^a|_B^S = -\frac{Q_3 m_{e2}|_B^S}{I_{suii}} = -4,598 \times 10^{-2} \xi$$

$$\phi^a|_S^C = -\frac{Q_3 m_{e2}|_S^C}{I_2} = -4,598 \times 10^{-2} \xi$$

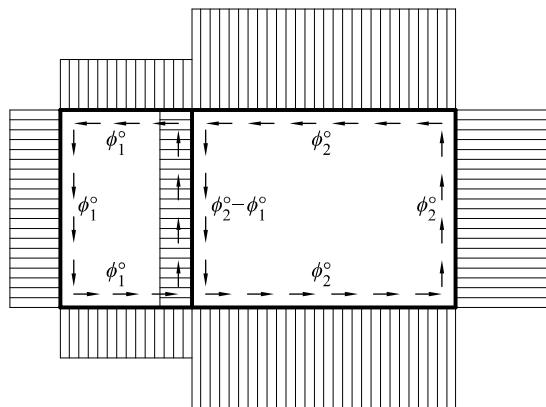
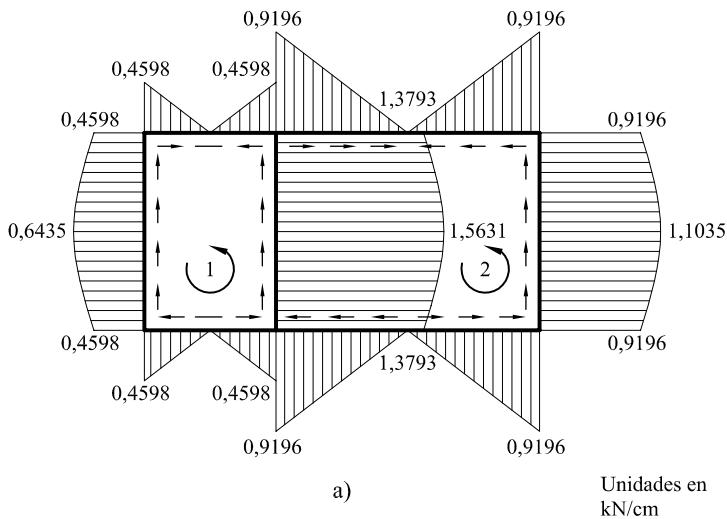
$$\phi^a|_F^C = -\frac{Q_3 m_{e2}|_F^C}{I_2} = -2,043 \times 10^{-3} [450 \times 0,8 \xi (15 - \xi/2)]$$

$$\phi^a|_F^E = -\frac{Q_3 m_{e2}|_F^E}{I_2} = -4,598 \times 10^{-2} (20 - \xi)$$

Este flujo de tensiones tangenciales de la sección abierta puede verse representado en la figura P5.2.3a. Asimismo en la Figura P5.2.3b puede verse representado el flujo de tensiones tangenciales debido a los flujos hiperestáticos.

Se imponen seguidamente las condiciones 5.50, es decir, que los desplazamientos relativos de los labios del corte en R y S sean nulos, es decir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{G} \oint_1 \phi_1^{tot} \frac{d\xi}{e} = \frac{1}{G} \oint_1 \phi^a \frac{d\xi}{e} + \frac{1}{G} \oint_1 \phi_1^o \frac{d\xi}{e} - \frac{1}{G} \int_{BE} \phi_2^o \frac{d\xi}{e} \\ 0 &= \frac{1}{G} \oint_2 \phi_2^{tot} \frac{d\xi}{e} = \frac{1}{G} \oint_2 \phi^a \frac{d\xi}{e} + \frac{1}{G} \oint_2 \phi_1^o \frac{d\xi}{e} - \frac{1}{G} \int_{BE} \phi_1^o \frac{d\xi}{e} \end{aligned}$$



b)

P5.2.3 Flujos de tensiones tangenciales: a) Flujo de la sección abierta.
b) Flujos hiperestáticos

Sustituyendo por los valores obtenidos y prescindiendo del módulo G

$$\begin{aligned}
 0 = & - \int_0^{10} 4,598 \times 10^{-2} \xi \frac{d\xi}{1,5} - \int_0^{30} 2,043 \times 10^{-3} \left[225 + 0,8 \xi (15 - \xi/2) \right] \frac{d\xi}{0,8} - \\
 & - \int_0^{20} 4,598 \times 10^{-2} (10 - \xi) \frac{d\xi}{1,5} + \int_0^{30} 2,043 \times 10^{-3} \left[675 + 0,8 \xi (15 - \xi/2) \right] \frac{d\xi}{0,8} + \\
 & + \int_0^{10} 4,598 \times 10^{-2} \xi \frac{d\xi}{1,5} + \phi_1^o \left[\frac{20}{1,5} + \frac{30}{0,8} + \frac{20}{1,5} + \frac{30}{0,8} \right] - \phi_2^o \frac{30}{0,8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & - \int_0^{20} 4,598 \times 10^{-2} \xi \frac{d\xi}{1,5} - \int_0^{30} 2,043 \times 10^{-3} [675 + 0,8 \xi(15 - \xi/2)] \frac{d\xi}{0,8} + \\
& + \int_0^{40} 4,598 \times 10^{-2} (20 - \xi) \frac{d\xi}{1,5} + \int_0^{30} 2,043 \times 10^{-3} [450 + 0,8 \xi(15 - \xi/2)] \frac{d\xi}{0,8} + \\
& + \int_0^{20} 4,598 \times 10^{-2} \xi \frac{d\xi}{1,5} + \phi_2^o \left[\frac{40}{1,5} + \frac{30}{0,8} + \frac{40}{1,5} + \frac{30}{0,8} \right] - \phi_1^o \frac{30}{0,8}
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{cases} 34,476 + 101,667 \phi_1^o - 37,5 \phi_2^o = 0 \\ -17,238 - 37,5 \phi_1^o + 128,33 \phi_2^o = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\phi_1^o = -0,3245 \quad \phi_2^o = 0,0395$$

Obtenidos estos flujos hiperestáticos, se corrigen los flujos correspondientes a la sección abierta, resultando

$$\begin{aligned}
\phi|_R^A &= -4,598 \times 10^{-2} \xi + (-0,3245) = -0,3245 - 4,598 \times 10^{-2} \xi \\
\phi|_A^D &= -2,043 \times 10^{-3} [225 + 0,8 \xi (15 - \xi/2)] + (-0,3245) = \\
&= -0,7842 - 1,6344 \times 10^{-3} \xi (15 - \xi/2) \\
\phi|_D^E &= -4,598 \times 10^{-2} (10 - \xi) + (-0,3245) = \\
&= -0,7843 + 4,598 \times 10^{-2} \xi \\
\phi|_R^B &= -4,598 \times 10^{-2} \xi - (-0,3245) = -4,598 \times 10^{-2} \xi + 0,3245 \\
\phi^a|_B^E &= -2,043 \times 10^{-3} [675 + 0,8 \xi (15 - \xi/2)] + (0,3245 - 0,0395) = \\
&= -1,015 - 1,6344 \times 10^{-3} \xi (15 - \xi/2) \\
\phi|_B^S &= -4,598 \times 10^{-2} \xi + 0,0395 \\
\phi|_S^C &= -4,598 \times 10^{-2} \xi - 0,0395 \\
\phi|_F^C &= -2,043 \times 10^{-3} [450 + 0,8 \xi (15 - \xi/2)] - 0,0395 = \\
&= -0,9589 - 1,6344 \times 10^{-3} \xi (15 - \xi/2) \\
\phi^a|_E^F &= -4,598 \times 10^{-2} (20 - \xi) - 0,0395 = -0,9591 + 4,598 \times 10^{-2} \xi
\end{aligned}$$

En la figura P5.2.4 puede verse la distribución del flujo de tensiones tangenciales en la sección. Asimismo dividiendo los flujos de tensiones tangenciales por el espesor, se determina la distribución de tensiones tangenciales.

Es interesante señalar, en primer lugar, que el sentido de los flujos es con referencia al eje local ξ de la figura P5.2.2. De esta forma, se entiende que la expresión del flujo en S tenga distinto signo, según se considere que dicho punto pertenece a SB o a SC . En segundo lugar, es importante observar que en cada nudo la suma de flujos en dirección x_1 (eje de la pieza) vale cero. Sea, por ejemplo, el nudo E (Fig. P5.2.5). La suma de flujos vale $-0,1359 - 0,8801 + 1,015 = 0$.

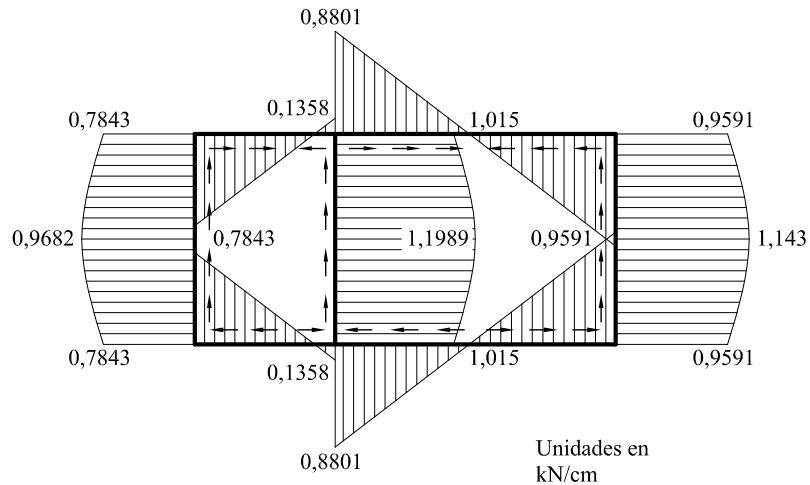


Fig. P5.2.4 Flujo de tensiones tangenciales

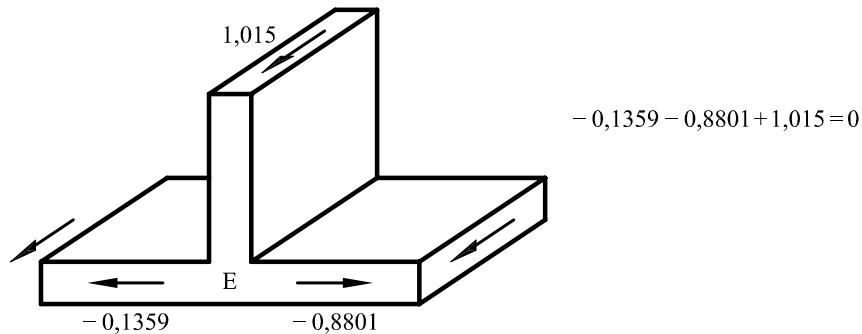


Fig. P5.2.5 Flujo de tensiones tangenciales en E

5.7 Centro de esfuerzos cortantes

En los apartados anteriores se ha realizado la suposición de que el esfuerzo cortante pasa por el centro de gravedad de la sección. De hecho el esfuerzo cortante puede desplazarse de forma arbitraria paralelamente a sí mismo dentro del plano de la sección sin que cambien los momentos flectores ni, por tanto, tampoco la distribución de tensiones tangenciales halladas.

La resultante de las anteriores tensiones tangenciales según los ejes locales de la sección x_2 y x_3 son iguales a los esfuerzos cortantes Q_2 , Q_3 aplicados. No ocurre, sin embargo, lo mismo con el equilibrio de momentos. De hecho, el momento de las tensiones tangenciales respecto a un punto cualquiera P puede no coincidir con el momento de los esfuerzos cortantes respecto al mismo punto. El objetivo de esta sección es obtener un punto C dentro de la sección tal que, si los esfuerzos cortantes pasan por

dicho punto, se cumpla el equilibrio de momentos. A tal punto C se le denomina *centro de esfuerzos cortantes*. Para su obtención se separará el caso de sección abierta del de sección cerrada.

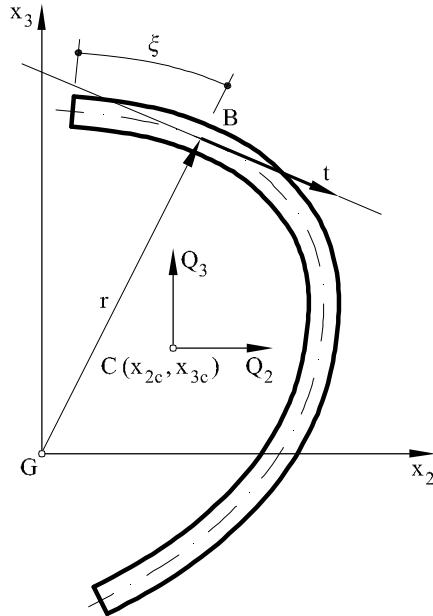


Fig. 5.19 Centro de esfuerzos cortantes

5.7.1 Centro de esfuerzos cortantes en secciones abiertas

Para determinarlo, supóngase una sección cualquiera de paredes delgadas que, en principio, como queda dicho, se supondrá abierta (Fig. 5.19) y en la que actúa un esfuerzo cortante Q_3 que pasa por el centro de esfuerzos cortantes C . Sean x_{2c} y x_{3c} las coordenadas (por el momento desconocidas) del centro de esfuerzos. Dicho esfuerzo cortante Q_3 producirá una distribución de tensiones tangenciales obtenida a partir de la expresión 5.39

$$\tau = -\frac{Q_3}{e(I_2 I_3 - I_{23}^2)} (I_3 m_{e2} - I_{23} m_{e3}) \quad (5.53)$$

En un punto cualquiera B de la sección, sea \mathbf{t} el vector unitario tangente a la fibra media de la sección y \mathbf{r} el vector de posición de dicho punto. El momento respecto al punto G de todas las tensiones tangenciales vendrá dado por

$$\begin{aligned} M_1^{int} \mathbf{e}_1 &= \oint \tau e \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi = - \oint \frac{Q_3}{I_2 I_3 - I_{23}^2} (I_3 m_{e2} - I_{23} m_{e3}) \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi = \\ &= - \frac{Q_3}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \left[I_3 \oint m_{e2} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi - I_{23} \oint m_{e3} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

y si se denomina

$$\mu_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \oint m_{e2} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi \quad (5.55a)$$

$$\mu_3 = \mathbf{e}_1 \cdot \oint m_{e3} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi \quad (5.55b)$$

Nótese que el producto $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) d\xi$ es el doble del diferencial de área dw_G barrida por el radio vector \mathbf{r} al recorrer la sección (ver Fig. 5.20). Las expresiones 5.55 también se pueden escribir

$$\mu_2 = 2 \oint m_{e2} dw_G = 2I_{2wG} \quad (5.56a)$$

$$\mu_3 = 2 \oint m_{e3} dw_G = 2I_{3wG} \quad (5.56b)$$

siendo

$$I_{2wG} = \oint m_{e2} dw_G = - \oint w_G x_3 e d\xi$$

$$I_{3wG} = \oint m_{e3} dw_G = - \oint w_G x_2 e d\xi$$

los *productos sectoriales de inercia* de la sección.

A las magnitudes μ_2 y μ_3 se les denomina *momentos de alabeo* de la sección.

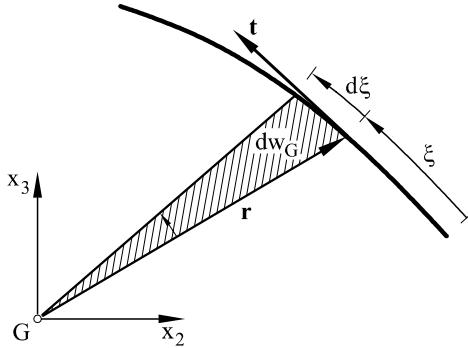


Fig. 5.20 Diferencial de área sectorial

La expresión 5.54 se puede escribir

$$M_1^{int} = -Q_3 \frac{I_3 \mu_2 - I_{23} \mu_3}{I_2 I_3 - I_{23}^2} \quad (5.57)$$

El momento del esfuerzo cortante Q_3 respecto al punto G valdrá

$$M_1^{ext} = Q_3 x_{2c} \quad (5.58)$$

por lo que igualando 5.57 a 5.58 se obtiene finalmente la coordenada x_{2c} del centro de esfuerzos cortantes

$$x_{2c} = -\frac{I_3\mu_2 - I_{23}\mu_3}{I_2I_3 - I_{23}^2} \quad (5.59)$$

Para obtener la coordenada x_{3c} se procede de forma análoga, situando en C un esfuerzo cortante Q_2 y realizando el equilibrio de momentos respecto a G . De esta forma se obtiene

$$x_{3c} = -\frac{I_{23}\mu_2 - I_2\mu_3}{I_2I_3 - I_{23}^2} \quad (5.60)$$

Las expresiones 5.59 y 5.60 proporcionan las coordenadas y, por tanto, la localización del centro de esfuerzos cortantes en una sección abierta.

Nótese que la elección del centro de gravedad G como punto respecto al cual se toman momentos es arbitraria. En general, dichos momentos pueden tomarse respecto a un punto cualquiera.

♣ **Problema resuelto P5.3** Determinar el centro de esfuerzos cortantes de la sección en U del Apartado 5.4.2.1.

Solución

Por cuestiones de simetría, el centro de esfuerzos cortantes debe estar situado en el eje Gx_2 , por lo que únicamente será necesario hallar la coordenada x_{2c} . Además, dado que $I_{23} = 0$, la expresión 5.59 queda

$$x_{2c} = -\frac{\mu_2}{I_2}$$

La distribución de momentos estáticos vale (ver Fig. P5.3.1)

$$\begin{aligned} m_{e2}|_A^B &= e_1 \xi h \\ m_{e2}|_B^C &= e_1 bh + e_2 \xi (h - \xi/2) \\ m_{e2}|_C^D &= e_1 bh - e_1 \xi h \end{aligned}$$

Por otro lado, el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{t}$ vale

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_A^B &= h \mathbf{e}_1 & (\mathbf{e}_1 \text{ vector unitario en dirección } x_1) \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_B^C &= x_{2g} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_C^D &= h \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_0^b e_1 h \xi h d\xi + \int_0^{2h} [e_1 bh + e_2 \xi (h - \xi/2)] x_{2g} d\xi + \int_0^b (e_1 bh - e_1 \xi h) h d\xi = \\ &= e_1 b^2 h^2 + x_{2g} \left(2e_1 b h^2 + \frac{2}{3} e_2 h^3 \right) = e_1 b^2 h^2 + x_{2g} I_2 \end{aligned}$$

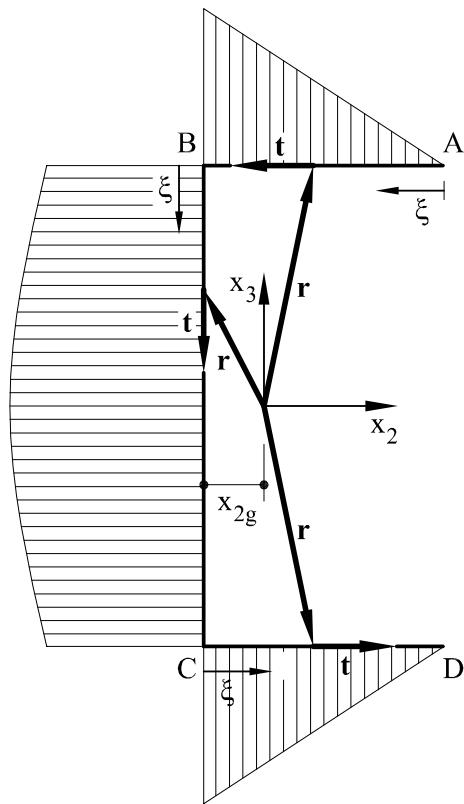


Fig. P5.3.1 Momentos estáticos

con lo cual

$$x_{2c} = -\frac{e_1 b^2 h^2 + x_{2g} I_2}{I_2} = -\left(\frac{e_1 b^2 h^2}{I_2} + x_{2g}\right)$$

lo que expresa que el centro de esfuerzos cortantes está a la izquierda de \$G\$.

5.7.2 Centro de esfuerzos cortantes en secciones cerradas

Como se ha visto anteriormente, los flujos de tensiones tangenciales en un punto cualquiera de una sección cerrada son la suma de los correspondientes a la sección abierta más unos flujos hiperestáticos para cada celda. Supóngase que existen \$n\$ celdas y sea \$\phi_i^o\$ el flujo hiperestático correspondiente a cada una de ellas. La expresión 5.57 se reescribirá

$$M_1^{int} = -Q_3 \frac{I_3 \mu_2 - I_{23} \mu_3}{I_2 I_3 - I_{23}^2} + 2 \sum_{i=1}^n \phi_i^o A_i \quad (5.61)$$

siendo A_i el área encerrada por cada una de las celdas. Por lo tanto, la coordenada x_{2c} del centro de esfuerzos cortantes valdrá

$$x_{2c} = -\frac{I_3\mu_2 - I_{23}\mu_3}{I_2I_3 - I_{23}^2} + 2 \sum A_i \frac{\phi_i^o}{Q_3} \quad (5.62)$$

Análogamente, la coordenada x_{3c} se escribirá

$$x_{3c} = -\frac{I_{23}\mu_2 - I_2\mu_3}{I_2I_3 - I_{23}^2} - 2 \sum A_i \frac{\phi_i^o}{Q_2} \quad (5.63)$$

Evidentemente, los flujos ϕ_i^o de las expresiones 5.62 y 5.63 son distintos entre sí.

♣ **Problema resuelto P5.4** Determinar el centro de esfuerzos cortantes correspondientes a la sección cerrada del problema P5.2.

Solución

Por razón de simetría, el centro de esfuerzos cortantes está sobre el eje x_2 . Para determinar su posición, se tomarán momentos respecto al punto E (Fig. P5.4.1) de la distribución de tensiones cortantes de la sección abierta obtenida en el problema resuelto P5.2.

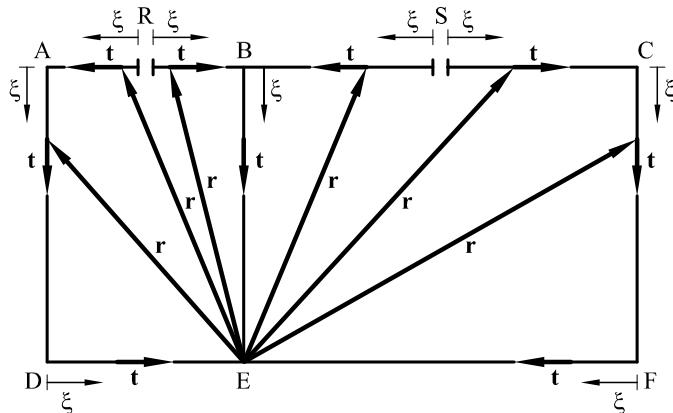


Fig. P5.4.1 Obtención del centro de esfuerzos cortantes

Al ser el producto de inercia nulo, la expresión 5.62 queda reducida a

$$x_{2c} = -\frac{\mu_2}{I_2} + 2 \sum_{i=1}^2 A_i \left(\frac{\phi_i^o}{Q_3} \right)$$

Para obtener μ_2 , se hallan previamente los productos vectoriales $\mathbf{r} \times \mathbf{t}$ para cada una de las paredes

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{t}|_A^R &= 30 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_A^D &= 20 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_D^E &= \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_B^E = \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_E^F = 0 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_R^B &= -30 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_S^B &= 30 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_S^C &= -30 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r} \times \mathbf{t}|_C^F &= -40 \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

De acuerdo con 5.55a

$$\begin{aligned}\mu_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \oint m_{e2} \mathbf{r} \times \mathbf{t} d\xi &= \int_0^{10} 22,5 \xi \times 30 d\xi + \int_0^{30} [225 + 0,8 \xi (15 - \frac{\xi}{2})] 20 d\xi + \\ &+ \int_0^{10} 22,5 \xi \times (-30) d\xi + \int_0^{20} 22,5 \xi \times 30 d\xi + \int_0^{20} 22,5 \xi \times (-30) d\xi + \\ &+ \int_0^{30} [450 + 0,8 \xi (15 - \frac{\xi}{2})] (-40) d\xi = -441\,000\end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $A_1 = 600 \text{ cm}^2$ y $A_2 = 1\,200 \text{ cm}^2$, se tendrá

$$2 \sum_{i=1}^2 A_i \left(\frac{\phi_i^o}{Q_3} \right) = 2 \left[600 \frac{-0,3245}{100} + 1\,200 \frac{0,0395}{100} \right] = -2,946$$

por lo tanto, de acuerdo con 5.62

$$x_{2c} = -\frac{-441\,000}{48\,937,5} + (-2,946) = 6,07 \text{ cm}$$

Lo cual indica que el centro de esfuerzos cortantes está situado en el plano horizontal de simetría y a una distancia hacia la derecha de la pared *BE* de 6,07 cm.

5.8 Secciones compuestas por varios materiales

La determinación de la distribución de tensiones en este tipo de secciones sigue las mismas pautas previamente desarrolladas para secciones homogéneas. Supóngase al igual que en el capítulo anterior una sección (que se supondrá de paredes delgadas) cuyo módulo de elasticidad en cada punto es función de las coordenadas x_2 , x_3 . Supóngase también que se fija un módulo de elasticidad de referencia \bar{E} de tal forma que el módulo de elasticidad en cada punto valga $E(x_2, x_3) = n\bar{E}$.

A partir de la común expresión 5.36 se sustituye el diferencial de tensión normal por su valor en 4.57, obteniéndose

$$\begin{aligned}\tau e = & -\frac{1}{I_2^* I_3^* - (I_{23}^*)^2} \left[\frac{dM_{f2}}{ds} \int_{A1} (x_3 I_3^* - x_2 I_{23}^*) n \, dA + \right. \\ & \left. + \frac{dM_{f3}}{ds} \int_{A1} (x_3 I_{23}^* - x_2 I_2^*) n \, dA \right] = \\ & = -\frac{1}{I_2^* I_3^* - (I_{23}^*)^2} [Q_3 (I_3^* m_{e2}^* - I_{23}^* m_{e3}^*) - Q_2 (I_{23}^* m_{e2}^* - I_2^* m_{e3}^*)]\end{aligned}\quad (5.64)$$

con las nuevas notaciones para los momentos estáticos

$$m_{e2}^* = \int_{A1} n x_3 \, dA = \int_{A1} n x_3 e \, d\xi \quad (5.65a)$$

$$m_{e3}^* = \int_{A1} n x_2 \, dA = \int_{A1} n x_2 e \, d\xi \quad (5.65b)$$

La expresión 5.64 proporciona el flujo de tensiones tangenciales en una sección abierta debida a un cortante cualquiera. En el caso en que la sección fuera cerrada, la obtención de los correspondientes flujos sigue los mismos pasos previamente expuestos en el apartado 5.6.

5.9 Energía de deformación

Considérese al igual que en los apartados anteriores una sección (que se supondrá de paredes delgadas) en la que actúa un esfuerzo cortante Q_3 actuando según el eje principal¹ Gx_3 y pasando por el centro de esfuerzos cortantes. La distribución de tensiones vendrá dada por

$$\tau(\xi) = -\frac{Q_3 m_{e2}}{e I_2} \quad (5.66)$$

Asimismo, de acuerdo con la ley de Hooke, las anteriores tensiones tangenciales producirán unas deformaciones tangenciales que se escriben:

$$\gamma(\xi) = \frac{\tau(\xi)}{G} = -\frac{Q_3 m_{e2}}{e G I_2} \quad (5.67)$$

por lo que la energía de deformación por unidad de volumen valdrá

$$\overset{\triangle}{W} = \frac{1}{2} \tau(\xi) \gamma(\xi) = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \left(\frac{Q_3 m_{e2}}{e I_2} \right)^2 \quad (5.68)$$

¹En el presente apartado, y dado que no existe confusión posible, se prescindirá del gorro para designar los ejes y variables asociados a los ejes principales

e integrando en la sección se obtendrá la energía de deformación por unidad de longitud

$$\begin{aligned}\hat{W}_Q &= \frac{1}{2} \int_A \tau(\xi) \gamma(\xi) dA = \frac{1}{2} \int_A \frac{1}{G} \frac{Q_3^2 m_{e2}^2}{e^2 I_2^2} e d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{I_2^2} \int_A \frac{1}{G} \frac{m_{e2}^2}{e} d\xi\end{aligned}\quad (5.69)$$

La expresión anterior puede también escribirse

$$\hat{W}_Q = \frac{1}{2} Q_3 \gamma_m \quad (5.70)$$

siendo γ_m una deformación media de la sección dada por

$$\gamma_m = \frac{Q_3}{GkA} \quad (5.71)$$

Al producto kA se le denomina *sección reducida* de la sección considerada, siendo k un parámetro dado por

$$k = \frac{I_2^2}{A \oint_A \frac{m_{e2}^2}{e} d\xi} \quad (5.72)$$

Como puede observarse, el parámetro k definido por 5.72 es un parámetro únicamente geométrico que depende del tipo de sección, sin depender del valor del esfuerzo cortante. En el caso de sección rectangular su valor es $k = 5/6$.

5.10 Ejercicios propuestos

♣ **Ejercicio propuesto EP5.1** Hallar la distribución de tensiones tangenciales en las dos secciones de la figura, cuando actúa un esfuerzo cortante de valor Q , vertical ascendente.

Valores de control:

- Sección en U : Valor máximo de la tensión tangencial: 272,66 Q/I
- Sección en T : Valor máximo de la tensión tangencial: 114,9 Q/I

♣ **Ejercicio propuesto EP5.2** En la sección de la figura, hallar:

- a) Distribución de tensiones tangenciales cuando actúa un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor Q .
- b) Centro de esfuerzos cortantes

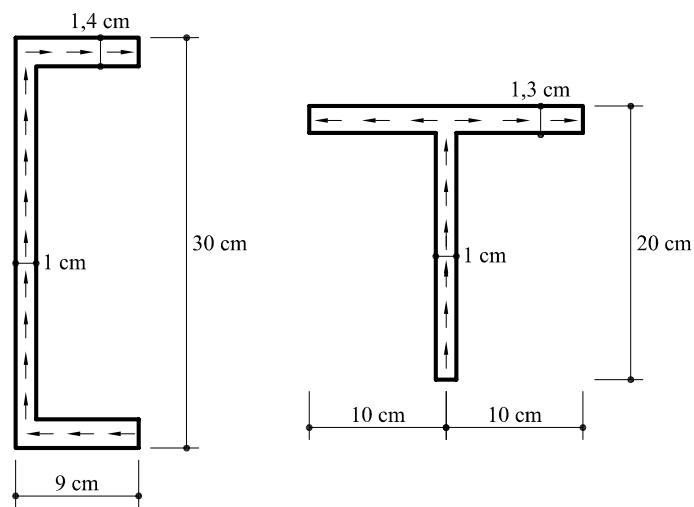


Fig. EP5.1

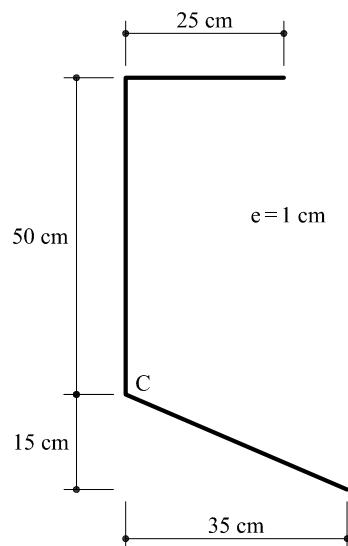


Fig. EP5.2

Valores de control:

- Valor máximo de la tensión tangencial: $0,0201 Q$ (si Q se expresa en kN las unidades son kN/cm^2)
- El centro de esfuerzos cortantes está situado $10,51 \text{ cm}$ a la izquierda del punto C y $18,9 \text{ cm}$ por encima.

♣ **Ejercicio propuesto EP5.3** En el centro de gravedad de la sección de la figura EP5.3.1 actúa un cortante ascendente Q . Hallar el valor de Q , considerando que la tensión tangencial máxima es de $240/\sqrt{3} \text{ MPa}$.

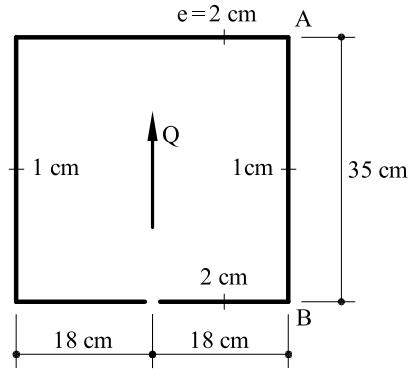


Fig. EP5.3.1

Después de la aplicación del cortante Q , se suelda en el lado AB del perfil de la figura EP5.3.1 una pieza de paredes delgadas cerrada, de sección rectangular. Resulta la sección de la figura EP5.3.2. El material de las dos piezas es el mismo.

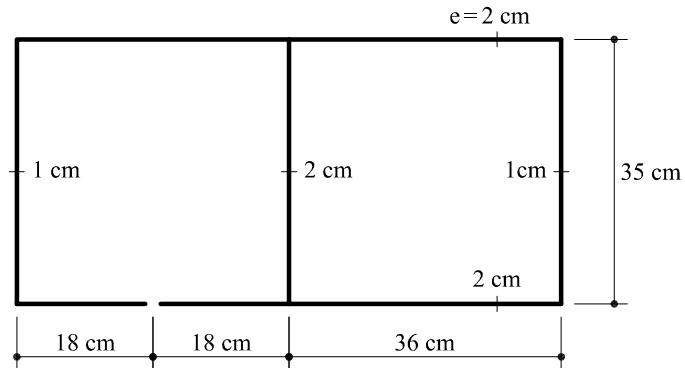


Fig. EP5.3.2

Una vez soldadas las dos piezas se libera la fuerza Q . Hallar la distribución final de tensiones tangenciales (se prescindirá de los efectos debidos al momento torsor).

Valores de control:

- Esfuerzo cortante máximo $Q = 895,3 \text{ kN}$
- La máxima tensión tangencial resultante de todo el proceso vale $120/\sqrt{3} \text{ MPa}$.

- ♣ **Ejercicio propuesto EP5.4** Hallar la distribución de tensiones tangenciales en la sección de la figura EP5.4 cuando un esfuerzo cortante vertical ascendente de valor 500 kN actúa en la sección.

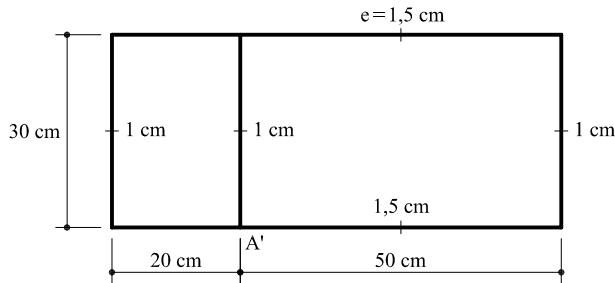


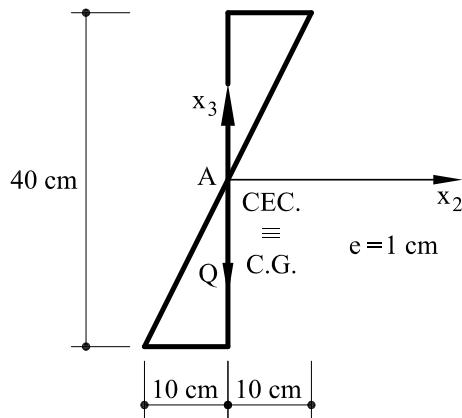
Fig. EP5.4

El esfuerzo cortante pasa por el centro de esfuerzos cortantes. Determinar asimismo la posición de éste.

Valores de control:

- La máxima tensión tangencial vale: $0,01264 Q$ (si Q se expresa en kN , la tensión viene dada en kN/cm^2)
- El centro de esfuerzos cortantes se encuentra a $10,51\text{ cm}$ a la derecha de AA'

- ♣ **Ejercicio propuesto EP5.5** Determinar la distribución de tensiones tangenciales en la sección de la figura cuando actúa un esfuerzo cortante Q , vertical, descendente.



EP5.5

Valores de control:

- La máxima tensión tangencial vale: $0,02426 Q$ (si Q se expresa en kN , el valor de la tensión tangencial viene expresado en kN/cm^2)

6 Torsión

El presente capítulo tratará del análisis de las distribuciones de tensiones y movimientos que se producen en una sección cuando en la misma actúa un momento torsor T . Al revés que el resto de esfuerzos estudiados en capítulos precedentes, la teoría relativa al momento torsor pierde el carácter elemental de los resultados obtenidos para el esfuerzo axil, momento flector y esfuerzo cortante. El estudio riguroso conduce, en ocasiones, a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resolubles únicamente mediante técnicas numéricas. Por otra parte, dos de las más importantes hipótesis de la Resistencia de Materiales dejan de cumplirse: por una parte, el principio de Navier de las secciones planas y, por otra, el principio de Saint-Venant deja en ocasiones de ser cierto. Debido a todo lo anterior, el presente capítulo se centra en piezas prismáticas de sección constante.

Tradicionalmente se han considerado dos tipos de torsión: Por un lado aquel tipo de torsión en el cual los alabeos de las secciones transversales no están impedidos. Se la denomina *torsión uniforme* o *torsión de Saint-Venant*. Por otro lado, en los casos en los cuales los alabeos de las secciones rectas presentan algún tipo de coacción a su libre movimiento, se está hablando de *torsión no uniforme* o *torsión con alabeo*. Seguidamente se estudian ambos tipos de torsión.

A) TORSIÓN UNIFORME

6.1 Planteamiento

Una pieza prismática está sometida a torsión uniforme cuando el momentor torsor que en ella actúa es constante a lo largo de la misma y además los alabeos que se producen en las secciones rectas no tienen ninguna coacción que impida su libre movimiento.

Lógicamente las anteriores condiciones son ideales, por lo que en la práctica rara vez se presentan en toda su pureza. Sin embargo, aparecen multitud de casos en que, con un grado de aproximación razonable, su estado de torsión puede ser asimilado a torsión uniforme. Ello sucede fundamentalmente, tal como se analizará más adelante, con piezas de sección maciza y con perfiles cerrados de pared delgada.

Las hipótesis básicas para la torsión uniforme son las siguientes:

- Todas las secciones rectas de la pieza giran un ángulo φ_1 alrededor de un eje, paralelo al eje de la pieza, denominado *eje de torsión*. Al punto situado en la intersección de dicho eje de torsión con una sección recta se le denomina *centro de torsión*.
- El giro $\theta = d\varphi_1/dx_1$ por unidad de longitud es constante para toda la pieza. Esto significa que, dada una rebanada diferencial, el giro relativo entre las dos secciones es constante.
- Cada punto de una sección recta experimenta un alabeo (movimiento en dirección x_1) de valor $u_1(x_2, x_3)$. Dicho alabeo no es función de x_1 , sino que es el mismo para cualquier sección. Por este motivo, las tensiones normales σ_1 en la sección son nulas.

En base a las anteriores hipótesis se puede escribir (Fig. 6.1)

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_2, x_3) = \theta\zeta(x_2, x_3) \quad (6.1a)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -\theta x_1 x_3 \quad (6.1b)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \theta x_1 x_2 \quad (6.1c)$$

A la función $\zeta(x_2, x_3)$ se le denomina *función de alabeo de Saint-Venant*.

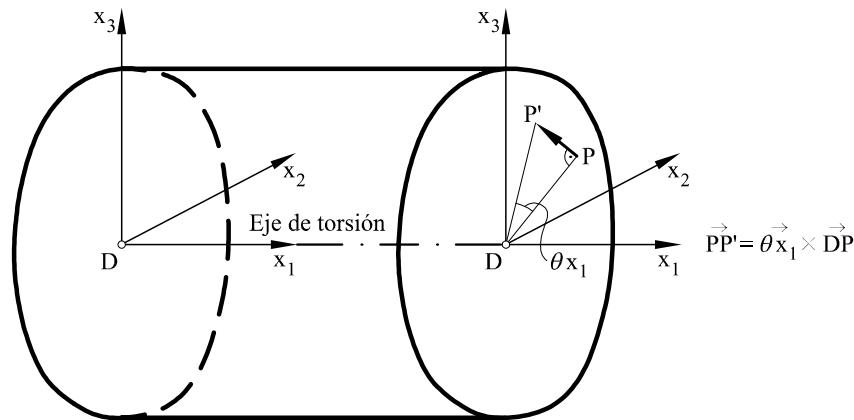


Fig. 6.1 Desplazamiento u_2 y u_3 de un punto situado en una sección recta

Nótese que al ser $\theta = d\varphi_1/dx_1 = \text{constante}$, el producto θx_1 representa el giro de la

sección considerada respecto al origen de la pieza. A partir de 6.1 las deformaciones valdrán

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 ; \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (6.2a)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (6.2b)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (6.2c)$$

$$\gamma_{23} = 0 \quad (6.2d)$$

por lo que las únicas tensiones no nulas valen

$$\tau_{12} = G\gamma_{12} = G\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (6.3a)$$

$$\tau_{13} = G\gamma_{13} = G\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (6.3b)$$

En la figura 6.2 pueden verse representadas las anteriores tensiones.

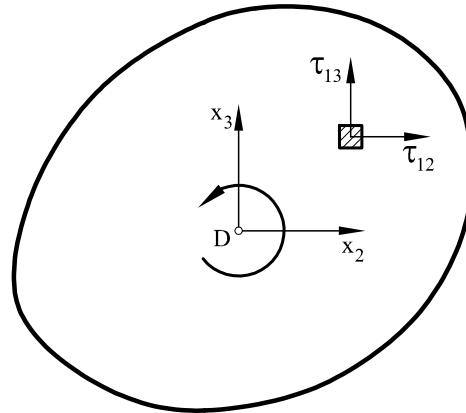


Fig. 6.2 Tensiones en la sección recta

El momento torsor M_t que actúa en la sección valdrá

$$M_t = \int_A (\tau_{13}x_2 - \tau_{12}x_3) dA \quad (6.4)$$

expresión que relaciona las tensiones con el valor del momento torsor.

Para resolver el problema de la torsión uniforme existen dos formulaciones básicas: la formulación en desplazamientos utilizando la función de alabeo de Saint-Venant y

la formulación en tensiones mediante la introducción de la función de Prandtl. En los apartados siguientes se desarrollan ambas formulaciones.

6.2 Formulación de la torsión uniforme en desplazamientos

El problema de la torsión uniforme en desplazamientos quedará resuelto si se conocen los valores de θ y de la función $\zeta(x_2, x_3)$. Para ello, sustituyendo las expresiones 6.3 en las ecuaciones de equilibrio interno 1.9, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6.5)$$

es decir, la función ζ debe ser armónica.

Las condiciones de contorno a aplicar parten de imponer que las tensiones sobre las superficies laterales de la barra son nulas (Fig. 6.3).

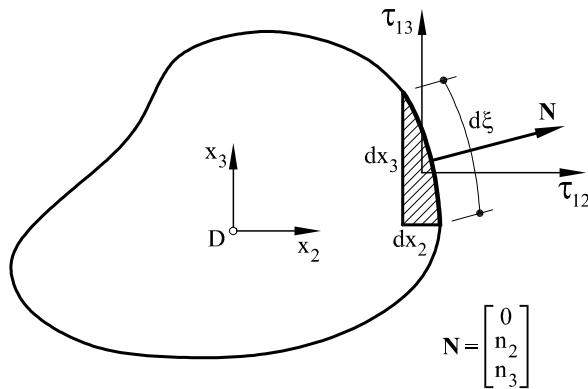


Fig. 6.3 Tensiones en los contornos

El vector normal \mathbf{N} a dicha superficie lateral no tiene componente según x_1 , siendo las componentes sobre x_2 y x_3 , respectivamente, n_2 y n_3 . De acuerdo con la expresión 1.14

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

expresión que desarrollada en sus términos no triviales conduce a

$$\tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 = 0 \quad (6.7)$$

es decir, que la tensión tangencial resultante es tangente al contorno.

Nótese que de acuerdo con la figura 6.3 las componentes n_2 y n_3 del vector normal \mathbf{N} se escriben

$$n_2 = \frac{dx_3}{d\xi} \quad ; \quad n_3 = -\frac{dx_2}{d\xi} \quad (6.8)$$

por lo que, si se sustituye 6.3 y 6.8 en 6.7, se obtiene

$$G\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - x_3 \right) \frac{dx_3}{d\xi} - G\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + x_2 \right) \frac{dx_2}{d\xi} = 0$$

es decir:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - x_3 \right) \frac{dx_3}{d\xi} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + x_2 \right) \frac{dx_2}{d\xi} = 0 \quad (6.9)$$

lo cual expresa la condición de contorno en desplazamientos.

Como es sabido, la ecuación diferencial 6.5 no tiene solución analítica conocida, por lo que, dada una determinada sección, no es fácil obtener la expresión del alabeo de Saint-Venant que cumpla con 6.5 y con las condiciones de contorno 6.9. Numéricamente, sin embargo, la resolución de 6.5 utilizando la técnica de los elementos finitos es relativamente sencilla para cualquier tipo de sección.

6.3 Formulación de la torsión uniforme en tensiones: función de Prandtl

Dado que, tal como se ha analizado, las únicas tensiones no nulas son τ_{12} y τ_{13} , las ecuaciones de equilibrio interno 1.9 se cumplirán de forma automática si se escribe

$$\tau_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad (6.10a)$$

$$\tau_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (6.10b)$$

A la función de tensiones ψ se la conoce con el nombre de función de Prandtl. Su relación con la función de alabeo de Saint-Venant se obtendrá igualando las tensiones tangenciales dadas por 6.3 y 6.10, es decir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = G\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - x_3 \right) \quad (6.11a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -G\theta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + x_2 \right) \quad (6.11b)$$

Eliminando ζ entre las dos tensiones anteriores se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = -2G\theta \quad (6.12)$$

mientras que las condiciones de contorno 6.9 quedarán

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\xi} = \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad (6.13)$$

lo cual indica que la función ψ debe ser constante en el contorno. Si solamente existe un contorno (secciones llenas), entonces, sin pérdida de generalidad, puede tomarse $\psi = 0$ en dicho contorno. Si, por el contrario, existen varios contornos (secciones con huecos), entonces la función ψ será constante en cada uno de ellos (ver Fig. 6.4).

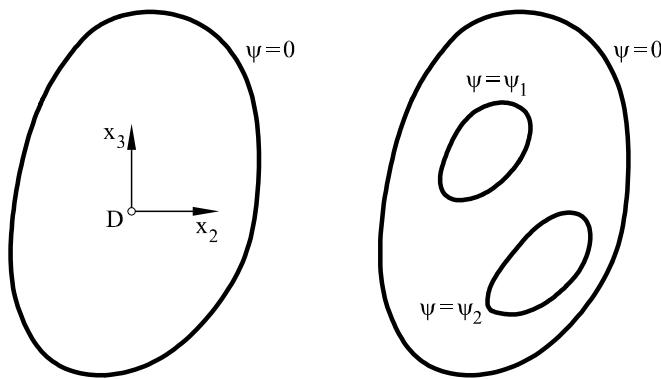


Fig. 6.4 Secciones de alma llena y de contornos múltiples

Es preciso seguidamente imponer las condiciones de equilibrio globales en la sección. Por una parte, la integral de todas las tensiones tangenciales en la dirección de cada uno de los ejes coordenados es nula, y por otra parte, el momento respecto a D de todas las tensiones tangenciales debe ser igual al momento torsor M_t . Es decir

$$\int_A \tau_{12} dA = \int_A \tau_{13} dA = 0 \quad (6.14a)$$

$$M_t = \int_A (\tau_{13}x_2 - \tau_{12}x_3) dA \quad (6.14b)$$

Las expresiones 6.14a se cumplen ya que

$$\int_A \tau_{12} dA = \int_A \frac{\partial\psi}{\partial x_3} dx_2 dx_3 = \oint_{\Gamma} \psi n_3 d\xi = 0$$

$$\int_A \tau_{13} dA = - \int_A \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 dx_3 = - \oint_{\Gamma} \psi n_2 d\xi = 0$$

siendo Γ el contorno de la sección.

Las integrales anteriores es evidente que se anulan, ya que ψ es constante en los contornos, y $\oint n_i d\xi = 0$.

Por lo que respecta a la condición 6.14b

$$M_t = \int_A (\tau_{13}x_2 - \tau_{12}x_3) dA = - \int_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} x_3 \right) dA$$

Integrando por partes la expresión anterior

$$M_t = 2 \int_A \psi dA - \oint_{\Gamma} (x_2 n_2 + x_3 n_3) \psi d\xi \quad (6.15)$$

Interesa saber cuánto vale la integral curvilinear de 6.15 en el caso más general de recintos múltiplemente conexos (secciones con huecos). Para ello, supóngase la sección de la figura 6.5. Sea Γ_o el contorno exterior y $\Gamma_1 \dots \Gamma_n$ cada uno de los contornos interiores. Sea asimismo A_o el área encerrada por el contorno exterior Γ_o y $A_1 \dots A_n$ las áreas de los huecos. En cada uno de ellos, la función de Prandtl ψ es constante. Para realizar la integración se realizan los cortes señalados en la figura 6.5, con lo cual se tiene un contorno único. Nótese que las integrales curvilineas se anulan en los cortes.

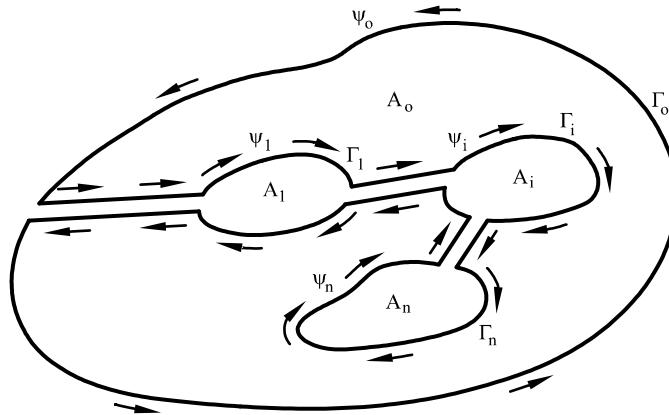


Fig. 6.5 Sección con huecos interiores

Para un contorno cualquiera (Fig. 6.6) se verifica que

$$(x_2 n_2 + x_3 n_3) d\xi = \rho d\xi = 2dA \quad (6.16)$$

Por lo tanto, a partir de 6.16 se tendrá

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (x_2 n_2 + x_3 n_3) \psi d\xi &= \psi_o \oint_{\Gamma_o} \rho d\xi - \psi_1 \oint_{\Gamma_1} \rho d\xi - \dots - \psi_n \oint_{\Gamma_n} \rho d\xi = \\ &= 2\psi_o A_o - 2\psi_1 A_1 - \dots - 2\psi_n A_n = 2\psi_o A_o - 2 \sum_{i=1}^n \psi_i A_i \end{aligned} \quad (6.17)$$

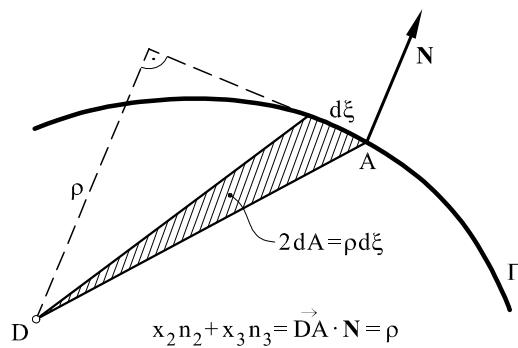


Fig. 6.6 Diferencial de área

por lo que la expresión del momento torsor 6.15 se escribirá

$$M_t = -2\psi_o A_o + 2 \sum_{i=1}^n \psi_i A_i + 2 \int_A \psi dA \quad (6.18)$$

en donde normalmente se toma $\psi_o = 0$.

Se analizan seguidamente algunas de las propiedades de la función ψ , propiedades determinantes a la hora de resolver el problema de la torsión.

Considérese en primer lugar una sección cualquiera, tal como la representada en la figura 6.7. En ella, se representan las curvas de nivel de ψ , teniendo en cuenta que ésta es constante en el contorno. Para una curva de nivel cualquiera, se cumplirá en cada punto que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0$$

y por lo tanto como

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\xi} \right) = -\tau_{13} \frac{dx_2}{d\xi} + \tau_{12} \frac{dx_3}{d\xi} = \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 = 0 \quad (6.19)$$

ecuación que expresa que la tensión tangencial resultante en cualquier punto debe ser tangente a la curva de nivel de la función ψ que pasa por dicho punto. De esta forma, la magnitud de la tensión tangencial total τ en cada punto se obtendrá componiendo τ_{12} y τ_{13} sobre la tangente a la curva de nivel de ψ , es decir (Fig. 6.8)

$$\begin{aligned} \tau &= -\tau_{12} \cos \alpha + \tau_{13} \sin \alpha = -\tau_{12} \frac{dx_3}{dN} + \tau_{13} \frac{dx_2}{dN} = \\ &= - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dN} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dN} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial N} \end{aligned} \quad (6.20)$$

es decir, la tensión tangencial total en un punto cualquiera de la sección es igual a la

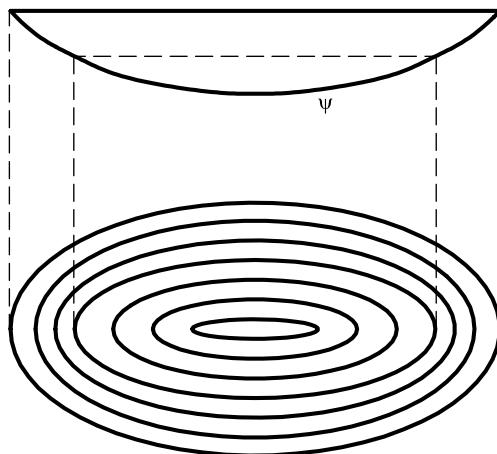


Fig. 6.7 Curvas de nivel de la función de Prandtl

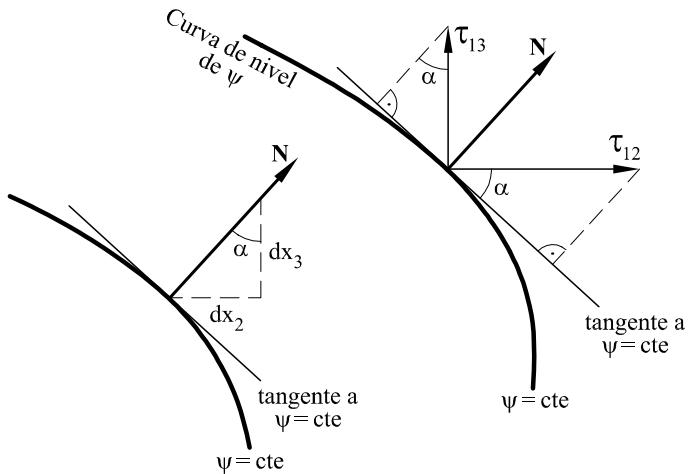


Fig. 6.8 Proyección de las tensiones tangenciales sobre la tangente a la curva de nivel

pendiente de la función ψ en el punto considerado.

Por motivos que se verán más adelante, es interesante determinar la circulación de la tensión tangencial total a lo largo de una curva de nivel de ψ . Para ello

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \tau d\xi &= \oint_{\Gamma} (-\tau_{12} \cos \alpha + \tau_{13} \sin \alpha) d\xi = - \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} n_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} n_2 \right) d\xi = \\ &= - \int_A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \right) dA \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que de acuerdo con 6.12 el laplaciano de la función de Prandtl ψ es igual a $-2G\theta$, sustituyendo en la expresión anterior y llamando Ω al área de la sección encerrada por la curva de nivel considerada

$$\oint_{\Gamma} \tau \, d\xi = \int_A 2G\theta \, dA = 2G\theta\Omega \quad (6.21)$$

expresión que será utilizada posteriormente para determinar el valor del ángulo específico de torsión θ .

6.4 Analogía de la membrana

Existe una importante analogía, puesta de manifiesto por Prandtl, entre la función ψ y la flecha de una membrana sometida a presión. En efecto, supóngase una membrana plana, sin capacidad de resistencia a esfuerzo cortante, apoyada en un contorno plano Γ y sometida a una presión exterior q normal a la superficie de la membrana. La ecuación de la flecha z viene dada por

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} = -\frac{q}{S} \quad (6.22)$$

siendo S la tracción (constante e igual en todas las direcciones) a que está sometida la membrana.

Nótese que las ecuaciones 6.12 y 6.22 son idénticas si ambas se normalizan. La primera de ellas respecto a $2G\theta$ y la segunda respecto a q/S , o sea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{\psi}{2G\theta} \right) = -1 \quad (6.23a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{z}{q/S} \right) = -1 \quad (6.23b)$$

Por lo tanto, se puede utilizar la teoría de la membrana para obtener conclusiones aplicables al estudio de la torsión, siempre que la curva Γ en que está apoyada la membrana coincida con el contorno (o los contornos) de la sección.¹

Se puede, sin embargo, argumentar que la resolución de la ecuación diferencial 6.22 presenta las mismas dificultades que la 6.12. Realmente esto es cierto, aunque la utilidad proviene de la facilidad de visualización de la solución de 6.22 frente a 6.12. Es, en efecto, fácil hacerse una composición lógica de la solución de la flecha de una membrana sometida a presión exterior y extrapolar (por ejemplo según 6.20 ó 6.21) las conclusiones obtenidas al análisis de la distribución de tensiones tangenciales.

¹ Véase Timoshenko-Goodier *Teoría de la Elasticidad*. Ed. Urmo.

6.5 Algunas secciones de alma llena

Tal como se ha señalado anteriormente, la solución analítica de las ecuaciones de la torsión en secciones de forma cualquiera se conoce solamente para un número limitado de casos. La resolución numérica, sin embargo, no presenta grandes dificultades, especialmente si se realiza mediante el método de los elementos finitos.²

Aunque más adelante se abordará la solución de perfiles de paredes delgadas, en esta sección, se va a centrar la atención en dos secciones de alma llena particularmente útiles: la sección circular y la sección rectangular.

6.5.1 Pieza prismática de sección circular sometida a momento torsor

Considérese una pieza recta de sección circular de radio R sometida a un momento torsor constante de valor M_t (Fig. 6.9).

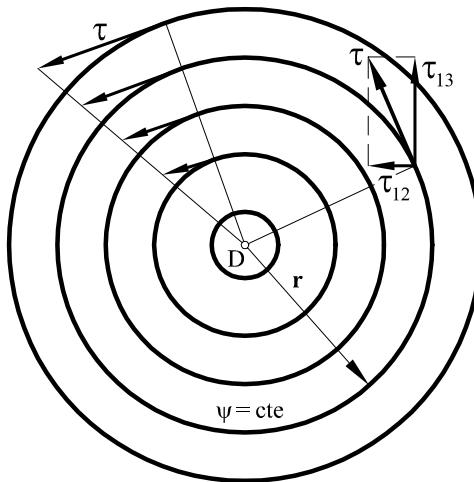


Fig. 6.9 Sección circular sometida a momento torsor

Debido a la antisimetría radial existente, la función de Prandtl ψ será únicamente una función del radio, es decir, que las curvas ψ constante corresponden a círculos concéntricos con el de la sección. Por ello, la ecuación 6.12 se puede escribir

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = -2G\theta \quad (6.24)$$

e integrando

$$\psi = -\frac{G\theta}{2} r^2 + c_1 L n r + c_2 \quad (6.25)$$

²Hinton & Owen: *Finite Element Computations*. Pineridge Press.

La constante c_1 debe ser nula, ya que ψ debe tomar un valor finito en $r = 0$. La constante c_2 se obtiene de imponer la condición de que la función de Prandtl es nula en el contorno de la sección ($r = R$). Es decir, $c_2 = G\theta R^2/2$. O sea:

$$\psi = -\frac{G\theta}{2}(r^2 - R^2) \quad (6.26)$$

y de acuerdo con 6.20

$$\tau = -\frac{d\psi}{dr} = G\theta r \quad (6.27)$$

lo cual indica que la distribución de tensiones tangenciales es lineal, alcanzando su máximo valor en el contorno de la sección

$$\tau_{\max} = G\theta R \quad (6.28)$$

Queda por hallar, por una parte, el valor θ del ángulo específico de torsión, y por otra el valor de las tensiones tangenciales en función del momento torsor.

A partir de 6.18

$$M_t = 2 \int_A \psi \, dA = 2 \int_0^R \left[-\frac{G\theta}{2}(r^2 - R^2) \right] 2\pi r \, dr = \frac{\pi R^4}{2} G\theta$$

y teniendo en cuenta que $\frac{\pi R^4}{2}$ es igual al momento de inercia polar I_p de la sección respecto al punto D , se obtiene el valor del ángulo específico de torsión

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \quad (6.29)$$

y sustituyendo en 6.27 y 6.28:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r \quad (6.30a)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} R \quad (6.30b)$$

valores que dan respectivamente la distribución de tensiones tangenciales, así como el valor de la tensión tangencial máxima.

Por lo que respecta a los desplazamientos en el plano de la sección, vendrán dados por 6.1, es decir

$$u_2 = -\frac{M_t}{GI_p} x_1 x_3 \quad (6.31a)$$

$$u_3 = \frac{M_t}{GI_p} x_1 x_2 \quad (6.31b)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{por razones de antisimetría} \quad (6.31c)$$

Como puede observarse, los movimientos u_r en dirección radial son nulos, mientras que en dirección perpendicular al radio valen $u_\theta = (M_t/GI_p)x_1r$. Nótese asimismo que los radios permanecen rectos después de la deformación.

En la figura 6.10 puede observarse que las generatrices del cilindro, al deformarse, lo hacen formando una hélice.

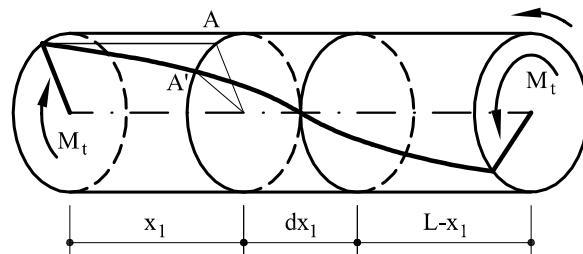


Fig. 6.10 Deformación por torsión de un cilindro circular

6.5.2 Pieza prismática de sección rectangular sometida a torsión

Para este tipo de sección, de indudable interés práctico, no es posible determinar una función de Prandtl sencilla que proporcione la solución del problema de la torsión. Considerese (Fig. 6.11a) una sección rectangular de ancho $2a$ y canto $2b$. A través de la analogía de la membrana (Fig. 6.11b), es posible una primera visualización de la distribución de las tensiones tangenciales. Al ser la tensión tangencial igual a la derivada de la función ψ respecto a la normal, es claro que las tensiones tangenciales máximas se producirán (si $b > a$) en los puntos medios de los lados mayores.

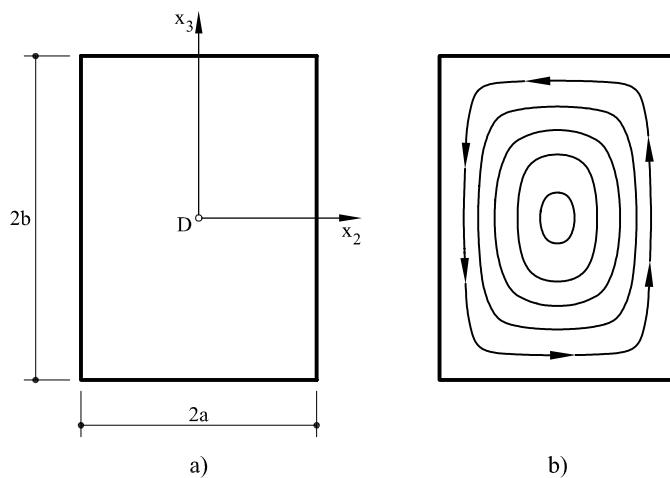


Fig. 6.11 Sección rectangular sometida a torsión

Puede demostrarse³ que la función de Prandtl vale

$$\psi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^3} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left[1 - \frac{Ch\left(\frac{i\pi x_3}{2a}\right)}{Ch\left(\frac{i\pi b}{2a}\right)} \right] \cos \frac{n\pi x_2}{2a} \quad (6.32)$$

por lo que de acuerdo con 6.10 τ_{13} valdrá

$$\tau_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left[1 - \frac{Ch\left(\frac{i\pi x_3}{2a}\right)}{Ch\left(\frac{i\pi b}{2a}\right)} \right] \sin \frac{n\pi x_2}{2a} \quad (6.33)$$

por lo que, sustituyendo en la anterior expresión $x_3 = 0$ y $x_2 = a$, y después de realizar algunas manipulaciones, se obtiene

$$\tau_{\max} = 2G\theta a \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2 Ch\left(\frac{2\pi b}{2a}\right)} \right] \quad (6.34)$$

y también

$$\tau_{\max} = \beta G\theta a \quad (6.35)$$

en donde el valor de β en función de b/a puede obtenerse de la tabla 6.1.

La relación entre el momento torsor M_t y el ángulo específico de torsión θ se obtiene a partir de

$$M_t = 2 \int_A \psi dA = \frac{1}{3} G\theta (2a)^2 (2b) \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} Th\left(\frac{i\pi b}{2a}\right) \right]$$

y también

$$M_t = \beta_1 G\theta (2a)^3 (2b) \quad (6.36)$$

El valor de β_1 en función de b/a puede verse en la tabla 6.1. El ángulo de torsión θ valdrá

$$\theta = \frac{M_t}{G\beta_1 (2a)^3 (2b)} \quad (6.37a)$$

y si se quiere escribir $\theta = M_t/GJ$ siendo GJ la rigidez a torsión, se tendrá

$$J = \beta_1 (2a)^3 (2b) \quad (6.37b)$$

A partir de 6.35 y 6.36

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\beta_2 (2a)^2 (2b)} \quad (6.38)$$

en donde, igual que antes, β_2 puede obtenerse en la tabla 6.1.

³Timoshenko-Goodier: *Teoría de la Elasticidad*. Ed. Urmo.

Tabla 6.1 Parámetros de la torsión para una sección rectangular

b/a	β	β_1	β_2
1	0,675	0,141	0,208
1,1	0,720	0,154	0,214
1,2	0,759	0,166	0,219
1,3	0,793	0,177	0,223
1,4	0,822	0,187	0,227
1,5	0,848	0,196	0,231
2	0,930	0,229	0,246
2,2	0,949	0,238	0,251
2,5	0,968	0,249	0,258
3	0,985	0,263	0,267
4	0,997	0,281	0,282
5	0,999	0,291	0,292
7	1,000	0,303	0,303
10	1,000	0,312	0,312
∞	1,000	0,333	0,333

6.6 Perfiles abiertos de pared delgada

En el caso de una sección abierta, compuesta por paredes delgadas, es posible dar una solución analítica al problema de la torsión, con una aproximación suficientemente cercana a la solución real, como para hacerla aceptable.

Supóngase una pieza recta compuesta por una chapa cuya sección recta tiene ancho e y longitud b . Se supondrá que el espesor e es pequeño frente a la otra dimensión b (Fig. 6.12).

Dado que el espesor e es pequeño frente a la longitud b , ésta se puede suponer indefinida, con lo cual la función de Prandtl ψ dependerá únicamente de x_2 . Ello supone despreciar el efecto de los bordes en los lados cortos del rectángulo. La expresión 6.12 se aproxima por lo tanto por

$$\frac{d^2\psi}{dx_2^2} = -2G\theta \quad (6.39)$$

e integrando, y teniendo en cuenta la simetría respecto a x_3 y que ψ vale cero para $x_2 = e/2$, se obtiene

$$\psi = -G\theta \left(x_2^2 - \frac{e^2}{4} \right) \quad (6.40)$$

Se sabe que la pendiente de ψ en cualquier punto es igual a la tensión tangencial (ec. 6.20), por lo que derivando 6.40 respecto a x_2 se tendrá

$$\tau = -\frac{d\psi}{dN} = -\frac{d\psi}{dx_2} = 2G\theta x_2 \quad (6.41)$$

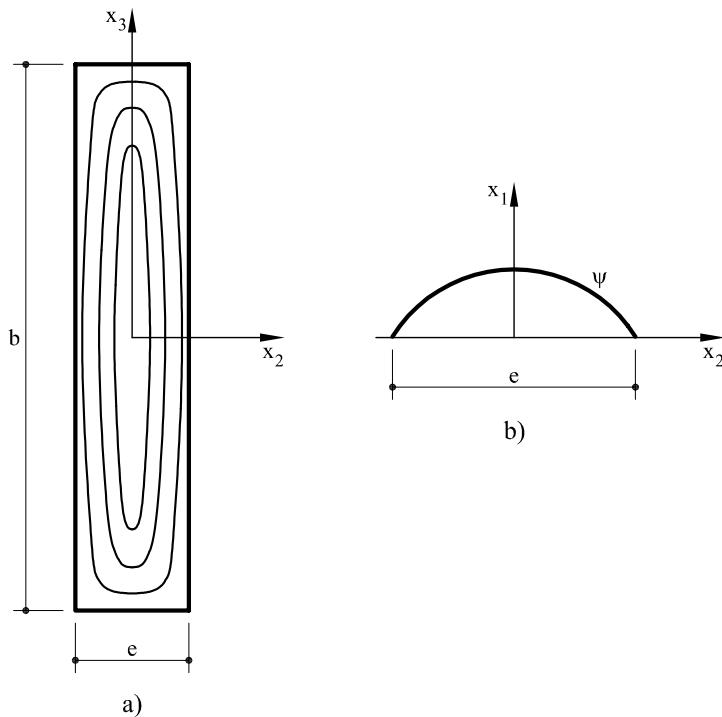


Fig. 6.12 Chapa de pequeño espesor

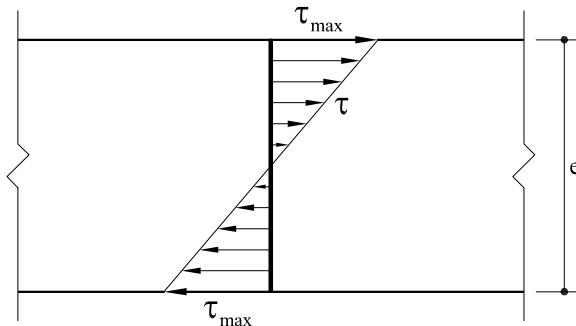


Fig. 6.13 Distribución de tensiones tangenciales en una chapa de un perfil abierto

lo cual indica que la distribución de tensiones tangenciales varía linealmente dentro del espesor de la chapa, oscilando entre un máximo en los bordes y un valor nulo en el centro (Fig. 6.13).

La tensión tangencial máxima será igual a

$$\tau_{\max} = G\theta e \quad (6.42)$$

y dado que de acuerdo con 6.18

$$M_t = 2 \int_A \psi \, dA$$

se cumplirá

$$M_t = 2 \int_A \left[-G\theta \left(x_2^2 - \frac{e^2}{4} \right) \right] dA = \frac{be^3}{3} G\theta \quad (6.43)$$

es decir que el ángulo específico de torsión valdrá

$$\theta = \frac{M_t}{1/3 G b e^3} \quad (6.44)$$

por lo que si nuevamente se escribe $\theta = M_t/GJ$, el valor de J será

$$J = \frac{1}{3} b e^3 \quad (6.45)$$

Nótese que este valor es el mismo que el dado para una sección rectangular por la expresión 6.37b para valores $b/a = \infty$ (tabla 6.1). Asimismo, en la tabla 6.1 puede verse la aproximación realizada para distintos valores de b/e (b/a en la tabla).

Asimismo la tensión tangencial máxima en función del momento torsor se escribe

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b e^2} \quad (6.46)$$

En el caso de un perfil abierto compuesto por varias paredes delgadas, la formulación anterior puede hacerse extensiva a cada una de ellas. Supóngase, para fijar ideas, que se tiene la sección representada en la figura 6.14. Puesto que el ángulo específico de torsión θ debe ser igual para cada una de las paredes

$$\theta = \frac{M_{t1}}{\frac{1}{3} G b_1 e_1^3} = \frac{M_{t2}}{\frac{1}{3} G b_2 e_2^3} = \frac{M_{t3}}{\frac{1}{3} G b_3 e_3^3} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} G \sum_i b_i e_i^3} \quad (6.47)$$

y por tanto, el momento torsor que actúa en cada una de las paredes valdrá

$$M_{tj} = \frac{b_j e_j^3}{\sum_i b_i e_i^3} M_t \quad (6.48)$$

A partir de las expresiones 6.47 y 6.48 es evidente que

$$J = \frac{1}{3} \sum_i b_i e_i^3 \quad (6.49a)$$

$$(\tau_{\max})_j = \frac{M_{tj}}{\frac{1}{3} b_j e_j^2} = \frac{e_j}{\frac{1}{3} \sum_i b_i e_i^3} M_t \quad (6.49b)$$

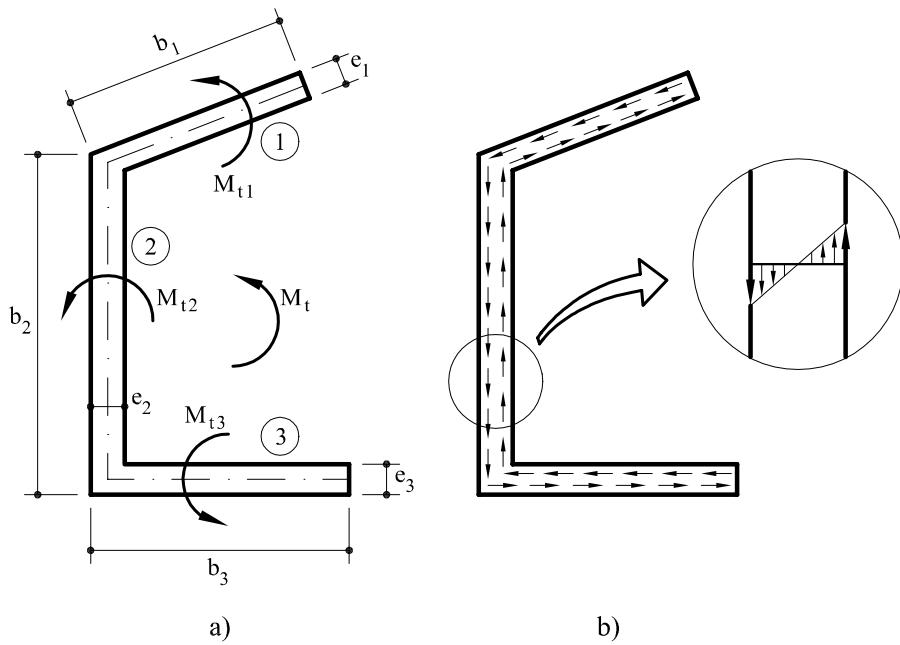


Fig. 6.14 Sección de paredes delgadas sometida a torsión

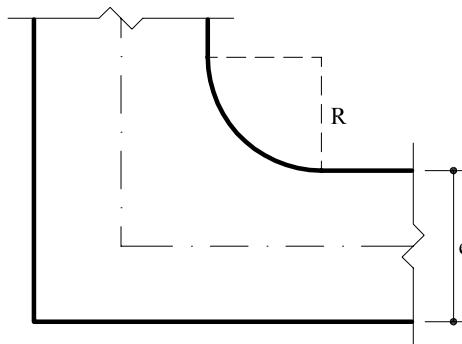


Fig. 6.15 Concentración de tensiones en los ángulos

Lógicamente, en las zonas de unión de las distintas paredes se producirán alteraciones de las tensiones tangenciales respecto a las obtenidas hasta ahora. Concretamente, en los ángulos entrantes (Fig. 6.15) se producirán concentraciones de tensiones cuyo valor dependerá del radio que se le dé a la transición entre paredes.

Sea R el radio de curvatura de la transición y τ_{\max} las tensiones tangenciales máximas

obtenidas utilizando las expresiones anteriores. Puede demostrarse⁴ que el valor real de las tensiones tangenciales $\bar{\tau}_{\max}$ viene dado en función del cociente R/e por la curva dibujada en la figura 6.16.

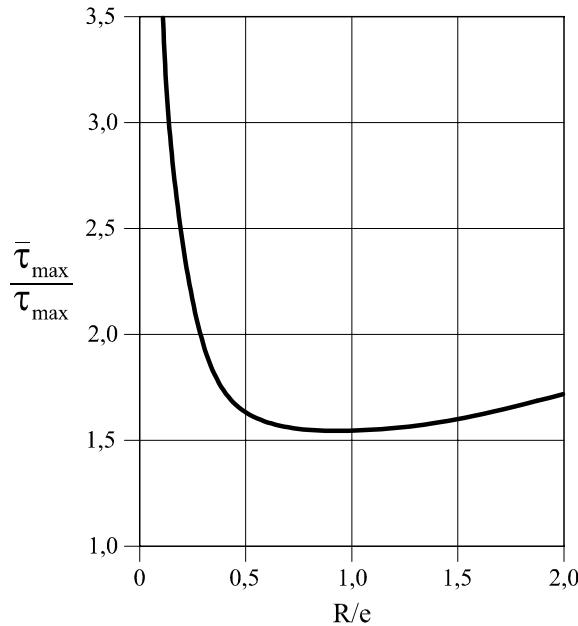


Fig. 6.16 Tensión tangencial máxima en puntos angulosos (secciones abiertas)

6.7 Perfiles cerrados de pared delgada

El comportamiento a torsión de los perfiles de pared delgada cerrados es sustancialmente distinto a los perfiles abiertos, tanto en lo que se refiere a la distribución de tensiones como a la rigidez a torsión. Se analizarán separadamente los casos de secciones unicelulares y de secciones multicelulares.

6.7.1 Secciones cerradas unicelulares

En el caso de secciones unicelulares (Fig. 6.17) y dado que el valor de la función de Prandtl ψ debe ser constante en el contorno exterior (se supondrá que $\psi_0 = 0$) y en el contorno interior, se puede admitir de forma aproximada, ya que el espesor e es pequeño, que ψ varía linealmente entre ambos contornos, es decir en el espesor. Ello implica que las tensiones tangenciales son constantes en el espesor. Además, el flujo de tensiones tangenciales τe es constante para cualquier punto de la sección.

⁴Timoshenko-Goodier: *Teoría de la Elasticidad*. E. Urmo.

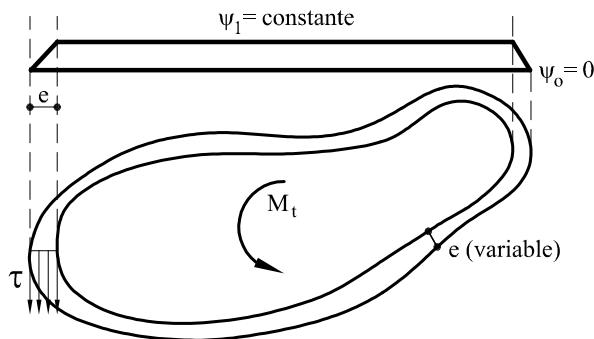


Fig. 6.17 Tensiones tangenciales en una sección unicelular

El valor ψ_1 de la función de Prandtl en el contorno interior puede obtenerse a partir de 6.18 teniendo en cuenta que $\psi_0 = 0$. Por tanto, se puede escribir

$$M_t = 2\psi_1 A \quad (6.50)$$

siendo A el área encerrada por la línea media de la sección. Además, puesto que $\tau = \psi_1/e$

$$M_t = 2\psi_1 A = 2A\tau e \quad (6.51)$$

con lo cual se obtiene la importante expresión

$$\tau = \frac{M_t}{2Ae} \quad (6.52)$$

Nótese que, dado que el flujo de tensiones tangenciales vale $\phi = \tau e$, dicho flujo $\phi = M_t/(2A)$ es constante en cualquier punto de la sección (considerando ésta representada por la línea media). A la misma conclusión se llega mediante consideraciones de equilibrio. Considérese (Fig. 6.18) el trozo de pieza delimitado por dos secciones separadas una distancia ds . Supóngase dos puntos A y B en que las tensiones tangenciales valen respectivamente τ_A y τ_B . Si en el mencionado trozo de pieza se realizan dos cortes en dirección longitudinal en A y en B , aparecen en dichos cortes unas fuerzas $\tau_A e_A ds$ y $\tau_B e_B ds$ (Fig. 6.18b) que por equilibrio deben ser iguales, es decir

$$\tau_A e_A = \tau_B e_B$$

lo cual demuestra la constancia del flujo.

A partir de 6.21 se obtiene el ángulo específico de torsión

$$\theta = \frac{\oint \tau d\xi}{2GA} = \frac{\frac{M_t}{2A} \oint \frac{d\xi}{e}}{2GA} = \frac{M_t}{4GA^2} \oint \frac{d\xi}{e} \quad (6.53)$$

y el módulo de torsión J se escribirá

$$J = \frac{4A^2}{\oint \frac{d\xi}{e}} \quad (6.54)$$

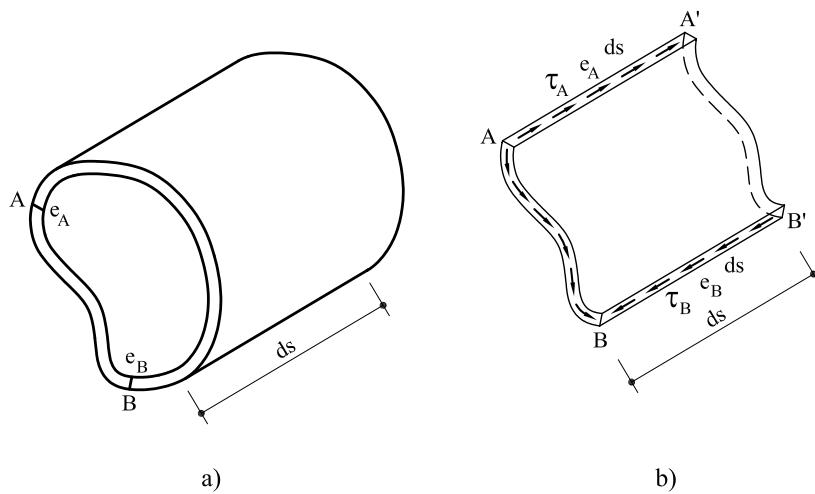


Fig. 6.18 Flujo de tensiones tangenciales

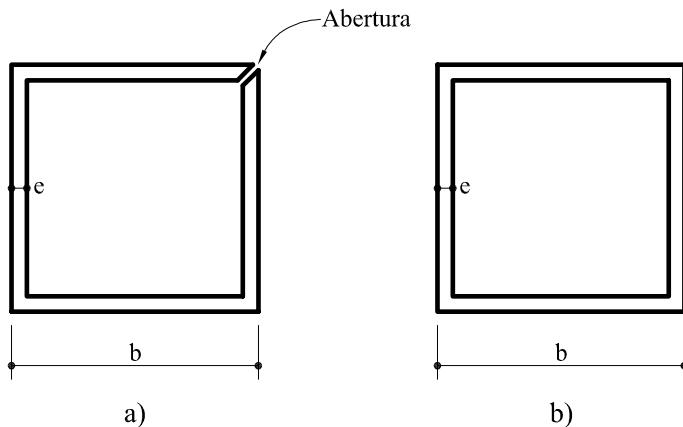


Fig. 6.19 Perfiles laminados de paredes delgadas: a) Sección abierta, b) Sección cerrada

Es interesante la comparación de 6.53 con 6.47. Para centrar ideas, supóngase dos secciones formadas por cuatro paredes delgadas de longitud b y espesor $e = b/10$ (Fig. 6.19). La primera de ellas abierta y la segunda cerrada. En ambas actúa un momento torsor de valor M_t .

Para el caso de la sección abierta

$$\tau_{\max}^1 = \frac{e}{\frac{1}{3}4be^3} M_t = \frac{75}{b^3} M_t$$

$$\theta^1 = \frac{M_t}{\frac{1}{3}G4be^3} = \frac{750}{Gb^4} M_t$$

$$J^1 = \frac{1}{3}G4be^3 = 1,33 \cdot 10^{-3}b^4$$

Análogamente, para la sección cerrada

$$\begin{aligned}\tau_{\max}^2 &= \frac{M_t}{2b^2e} = \frac{5}{b^3}M_t \\ \theta^2 &= \frac{M_t}{4Gb^4} \frac{4b}{e} = \frac{10}{Gb^4}M_t \\ J^2 &= \frac{4b^4}{4b/e} = \frac{b^4}{10}\end{aligned}$$

De la comparación de ambos conjuntos de resultados se concluye que, en el caso de sección cerrada, las tensiones tangenciales son quince veces inferiores, el ángulo específico de torsión setenta y cinco veces menor y el módulo de torsión setenta y cinco veces mayor que para el caso de sección abierta.

Al igual que para el caso de secciones abiertas, los puntos angulosos dentro de la sección pueden dar lugar a importantes concentraciones de tensiones. Por ello, es conveniente suavizar dichos puntos mediante curvas (en general círculos) de transición (ver Fig. 6.15). En la figura 6.20 puede verse representada la relación entre las tensiones máximas que realmente se producen $\bar{\tau}$ y las calculadas utilizando las expresiones anteriores.

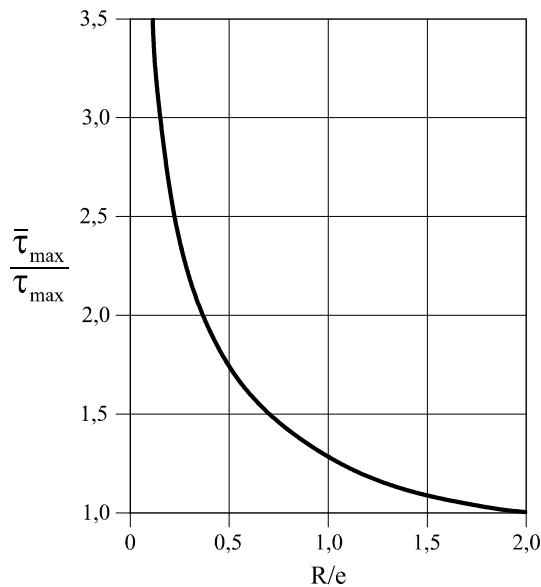


Fig. 6.20 Tensión tangencial en puntos angulosos (secciones cerradas)

La gráfica de la figura 6.20 puede aproximarse mediante la expresión

$$\bar{\tau} = \tau \frac{e}{RLn(1 + e/R)}$$

6.7.2 Secciones multicelulares

Considérese una sección formada por diferentes celdas (Fig. 6.21). En cada uno de los contornos, la función de Prandtl ψ tendrá un valor constante ψ_i (en el contorno exterior, se tomará como es habitual $\psi_0 = 0$). Asimismo se supondrá que, dado que los diferentes espesores e son pequeños, las tensiones tangenciales son constantes en el espesor.

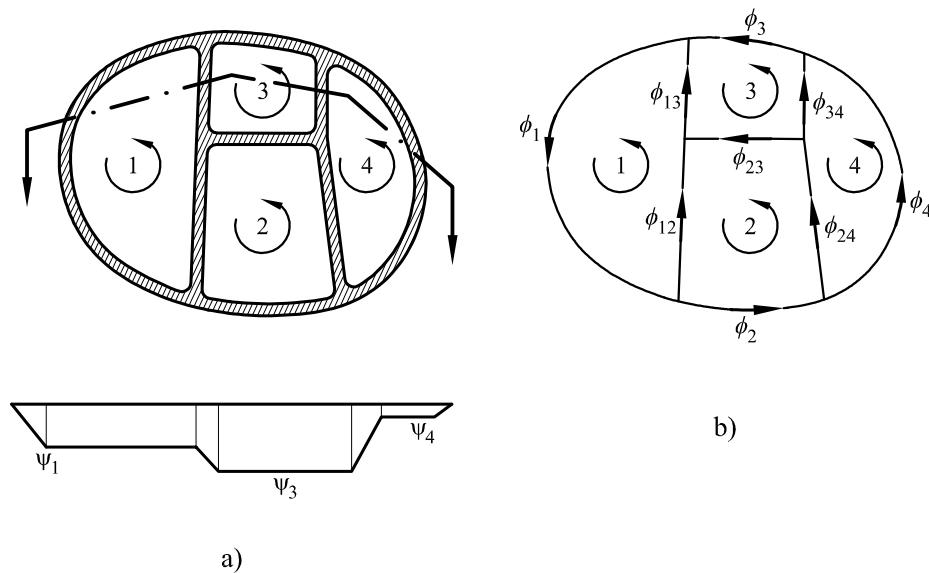


Fig. 6.21 Función de Prandtl y flujos en secciones multicelulares. a) Sección real. b) Sección idealizada.

De acuerdo con la figura 6.21, existen tantos valores desconocidos ψ_i de la función de Prandtl como contornos interiores tenga la sección, es decir, como el número de celdas (cuatro en el caso de la figura). Sea:

- ϕ_{ij} : Flujo de tensiones tangenciales en la pared ij que separa la celda i de la j . El sentido de recorrido corresponde al del giro antihorario en la celda i . De esta forma $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$
- ϕ_i : Flujo de tensiones tangenciales en la parte de contorno exterior que pertenece a la celda i
- e_{ij} : Espesor de la pared que separa la celda i de la j
- e_i : Espesor de la pared que separa la celda i del contorno exterior
- τ_{ij} : Tensiones tangenciales correspondientes al flujo ϕ_{ij}
- τ_i : Tensiones tangenciales correspondientes al flujo ϕ_i

Lógicamente $\tau_i = \phi_i/e_i$ y $\tau_{ij} = \phi_{ij}/e_{ij}$.

La relación entre las tensiones tangenciales y la función de Prandtl vendrá dada por

$$\tau_i = \frac{\psi_i}{e_i} \quad (6.55a)$$

$$\tau_{ij} = \frac{\psi_i - \psi_j}{e_{ij}} \quad (6.55b)$$

y también

$$\phi_i = \psi_i \quad (6.56a)$$

$$\phi_{ij} = \psi_i - \psi_j \quad (6.56b)$$

De acuerdo con la expresión 6.18

$$M_t = 2\psi_1 A_1 + 2\psi_2 A_2 + \cdots + 2\psi_n A_n = 2 \sum_i \psi_i A_i \quad (6.57)$$

siendo A_i el área encerrada por cada celda y n el número de celdas de la sección.

Si se aplica la expresión 6.21 a cada celda:

$$\int_{(i)} \tau_i d\xi + \sum_j \int_{(ij)} \tau_{ij} d\xi = 2GA_i \theta \quad (6.58)$$

siendo (i) la parte de la pared de la celda i que no es común con otras celdas, sino con el contorno exterior —lógicamente (i) puede ser nulo—, y (ij) la parte de la pared de la celda i común con la celda j .

Sustituyendo 6.55 en 6.58

$$\psi_i \int_{(i)} \frac{d\xi}{e_i} + \sum_j (\psi_i - \psi_j) \int_{(ij)} \frac{d\xi}{e_j} = 2GA_i \theta \quad (6.59)$$

Existen tantas expresiones 6.59 como número de celdas, por lo que el conjunto de expresiones 6.59, juntamente con 6.57, forma un conjunto de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas: n valores de la función ψ , y el ángulo específico θ . Una vez obtenidos estos valores, las tensiones tangenciales y sus correspondientes flujos se obtienen a partir de 6.55 y 6.56.

♣ Problema resuelto P6.1 En la sección bicelular de la figura P6.1.1, actúa un momento torsor M_t de valor $M_t = 100 \text{ kN} \times \text{m}$. El espesor de las paredes horizontales vale 1,3 cm y el de las paredes verticales 0,8 cm. Determinar los flujos de tensiones tangenciales, las tensiones tangenciales, el ángulo específico de torsión y el módulo de torsión.

Solución

- Celda 1: Área $A_1 = 0,5 \times 0,7 = 0,35 \text{ m}^2$

$$\psi_1 \left(\frac{70}{1,3} + \frac{50}{0,8} + \frac{70}{1,3} \right) + (\psi_1 - \psi_2) \frac{50}{0,8} = 2G \times 0,35 \theta$$

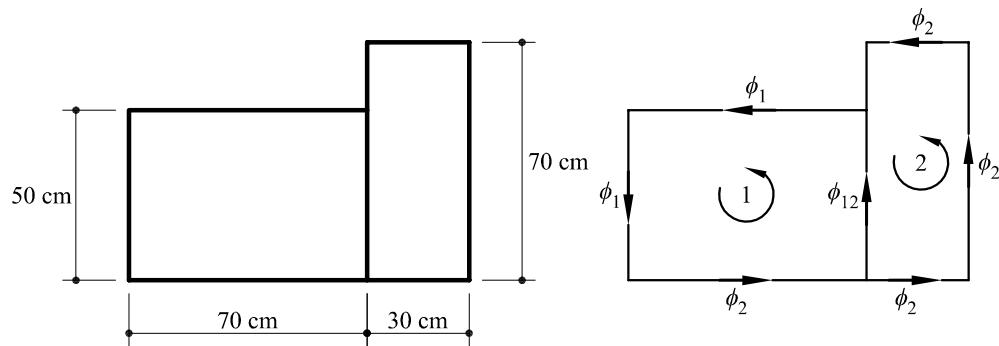


Fig. P6.1.1 Sección bicelular sometida a torsión

- Celda 2: Área $A_2 = 0,3 \times 0,7 = 0,21 \text{ m}^2$

$$\psi_2 \left(\frac{30}{1,3} + \frac{70}{0,8} + \frac{30}{1,3} + \frac{20}{0,8} \right) + (\psi_2 - \psi_1) \frac{50}{0,8} = 2G \times 0,21\theta$$

Es decir

$$232,69\psi_1 - 62,5\psi_2 - 0,7G\theta = 0 \quad (a)$$

$$-62,5\psi_1 + 221,15\psi_2 - 0,42G\theta = 0 \quad (b)$$

Además, de acuerdo con 6.57

$$0,7\psi_1 + 0,42\psi_2 = M_t = 100 \quad (c)$$

Las expresiones (a), (b) y (c) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que, resuelto, proporciona los valores de la función de Prandtl en cada contorno,

$$\psi_1 = 97,26 \text{ kN/m}$$

$$\psi_2 = 76 \text{ kN/m}$$

$$G\theta = 25\,544,2 \text{ kN/m}^2$$

por lo que los flujos de tensiones tangenciales valdrán

$$\phi_1 = \psi_1 = 97,26 \text{ kN/m}$$

$$\phi_2 = \psi_2 = 76 \text{ kN/m}$$

$$\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = 97,26 - 76 = 21,26 \text{ kN/m}$$

Dichos flujos, así como las tensiones tangenciales, pueden verse representados en la figura P6.1.2.

El ángulo específico de torsión vale $\theta = 25\,544,2/G$ y si se toma $G = 2,1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, se tendrá que $\theta = 1,2164 \times 10^{-4} \text{ rdn/m}$.

El módulo de torsión J valdrá

$$J = \frac{M_t}{G\theta} = \frac{100}{25\,544,2} = 3,915 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

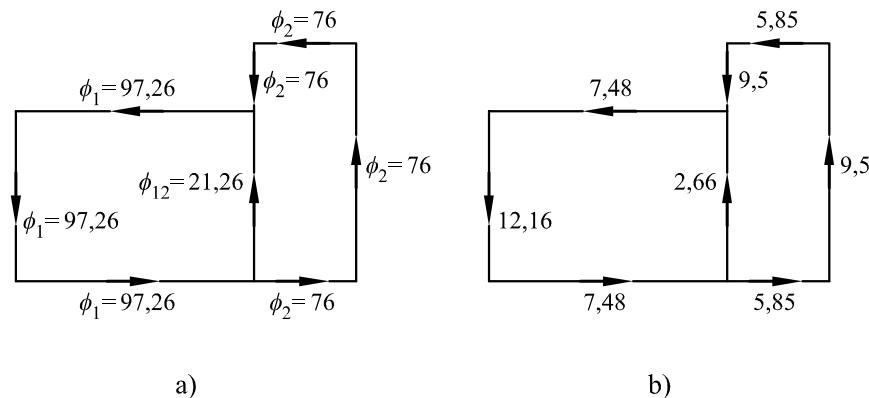


Fig. P6.1.2 a) Flujo de tensiones tangenciales (unidades: kN/m). b) Tensiones tangenciales (unidades MPa)

B) TORSIÓN NO UNIFORME

6.8 Introducción a la torsión no uniforme

En la teoría de la torsión uniforme (también llamada torsión según Saint-Venant), cada punto de las correspondientes secciones rectas alabea libremente sin que exista ninguna coacción a dicho movimiento. Ello comporta que el ángulo específico de torsión sea el mismo para todas las secciones de la pieza y que la distribución de tensiones tangenciales tampoco dependa de la coordenada x_1 .

Si se considera, sin embargo, la pieza como formando parte de todo un conjunto estructural, los mencionados alabeos no serán en general libres, sino que normalmente existirá algún tipo de coacción. De esta forma, los alabeos pueden dejar de ser uniformes a lo largo del eje de la pieza. Lógicamente, si dichos alabeos están coaccionados aparecerán unas tensiones normales σ_1 variables⁵ punto a punto en la sección y función de la sección que se considere. Además, y como consecuencia de la variabilidad a lo largo del eje de la pieza de las tensiones normales, aparecerán asimismo unas tensiones tangenciales τ (que, como se verá más adelante, son constantes en el espesor) que producirán un momento torsor M_w , denominado momento de alabeo. Lógicamente, el momento torsor total T que actúa en una sección es la suma del mencionado torsor M_w y del producido por la torsión uniforme M_t . Es decir, $T = M_t + M_w$.

Aunque el efecto descrito hasta ahora es válido para cualquier tipo de sección, sólo adquiere verdadera importancia cuando se trata de secciones abiertas. En las cerradas, la teoría de la torsión uniforme puede considerarse válida para resolver con suficiente aproximación el problema de la torsión. Por consiguiente, en lo sucesivo se considerarán únicamente secciones abiertas.

⁵Dado que las únicas tensiones normales que aparecen son σ_1 , en lo sucesivo se omitirá el subíndice, por lo que dichas tensiones se representarán únicamente mediante el símbolo σ .

6.9 Formulación de la torsión no uniforme

6.9.1 Formulación de las ecuaciones

Considérese una pieza recta cualquiera cuya sección es abierta y de espesor e en cada punto (Fig. 6.22). En adelante se representará únicamente la línea media de las paredes de la sección. Realizando el equilibrio de un elemento diferencial $dx_1 d\xi$ en dirección x_1 se obtiene

$$\frac{\partial(\tau e)}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} e = 0 \quad (6.60)$$

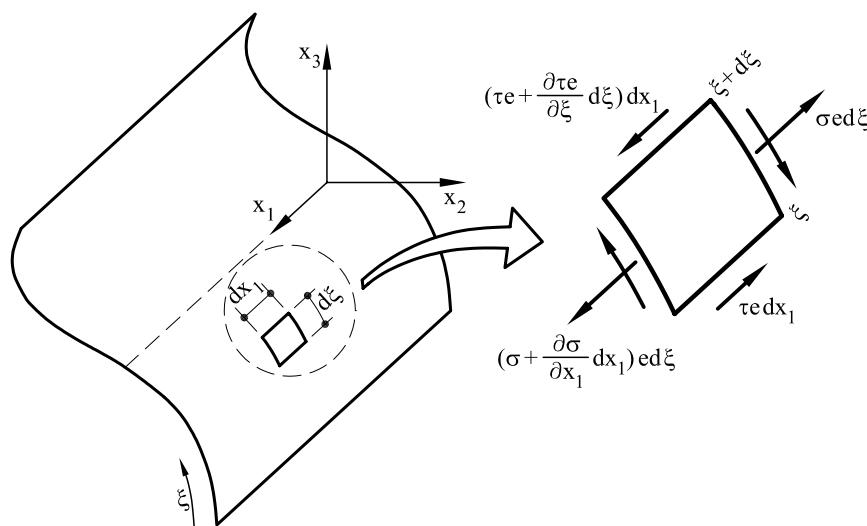


Fig. 6.22 Equilibrio de un elemento diferencial de pieza recta

Considérese asimismo una sección cualquiera de la pieza recta ya descrita (Fig. 6.23). Para cada punto se define una nueva coordenada local ξ y unos vectores base asociados a cada punto. Sean, en un punto cualquiera de la sección, $u_1(x_1, \xi)$ el alabeo y $u_t(x_1, \xi)$ el movimiento en dirección t .

De acuerdo con lo estudiado en el Capítulo 1, la deformación tangencial γ_{1t} asociada a las direcciones perpendiculares t y x_1 valdrá

$$\gamma_{1t} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \quad (6.61)$$

Por otro lado, de acuerdo con la figura 6.23, y dado que $d\mathbf{u}$ es perpendicular a DA , el movimiento du_t de un punto cualquiera A de la sección vale

$$du_t = \rho_D d\varphi_1 \quad (6.62)$$

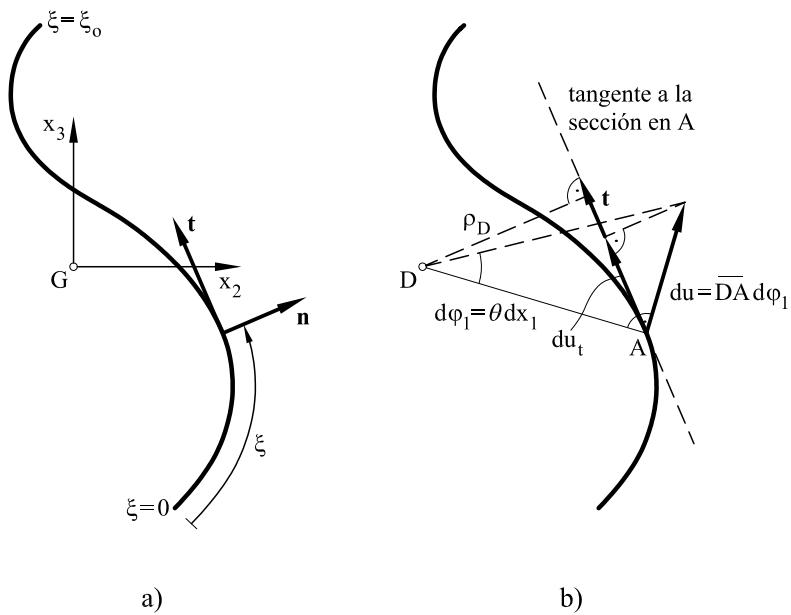


Fig. 6.23 Coordenadas locales de la sección

por lo que

$$\frac{\partial u_t}{\partial x_1} = \rho_D \frac{d\varphi_1}{dx_1} \quad (6.63)$$

siendo φ_1 el giro de la sección por torsión. Nótese que, a diferencia de la torsión uniforme, el ángulo específico de torsión $\theta = d\varphi_1/dx_1$ es ahora dependiente de la coordenada x_1 .

Dado que en la fibra media de las paredes de la sección la tensión tangencial es nula, también lo será la deformación tangencial γ_{1t} por lo que⁶, igualando a cero la expresión 6.61

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \rho_D \frac{d\varphi_1}{dx_1} \quad (6.64)$$

e integrando se obtendrán los alabeos u_1

$$u_1 = -\frac{d\varphi_1}{dx_1} \int_0^\xi \rho_D d\xi + u_{10} \quad (6.65)$$

⁶Realmente γ_{1t} es la suma de la deformación tangencial debida a la torsión uniforme más la debida a las tensiones tangenciales provocadas por las tensiones normales σ que aparecen al coaccionarse los alabeos u_1 . Las primeras son nulas, aunque no las segundas, por lo que la anulación de la expresión 6.61 representa una aproximación justificable debido al hecho de que los alabeos debidos a γ_{1t} son pequeños en comparación con los debidos al giro por torsión.

En donde el valor u_{10} , que se determinará posteriormente, aparece debido al hecho de que el punto $\xi = 0$ no tiene, en general, alabeo nulo. Por otra parte, la integral $\int_0^\xi \rho_D d\xi$ es el doble del área barrida por el radio vector DA al recorrer la sección desde el extremo $\xi = 0$ al punto ξ en el cual se calcula el alabeo. Por tanto, si $\rho_D d\xi = 2w$

$$u_1 = -\frac{d\varphi_1}{dx_1} 2w + u_{10} \quad (6.66)$$

Al valor w en cada punto se le denomina *coordenada sectorial*.

La expresión 6.66 proporciona el alabeo en cualquier punto de la sección, independientemente del tipo de torsión a que ésta está sometida. Si la torsión fuera uniforme, entonces $d\varphi_1/dx_1 = \theta$ es constante y el alabeo vale $u_1 = -\theta 2w + u_{10}$. Nótese que el valor de dicho alabeo está definido salvo constante, la cual dependerá de las condiciones de contorno del problema (por ejemplo $u_1 = 0$ para $\xi = 0$, o bien obligando a que el alabeo promedio de la sección $\int u_1 d\xi = 0$, etc.). Para el caso de alabeo impedido, u_{10} tiene un valor preciso.

Si $d\varphi_1/dx_1$ no es constante, aparecerán unas tensiones normales σ de valor

$$\sigma = E\varepsilon_1 = E\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -E\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} 2w + E\frac{du_{10}}{dx_1} \quad (6.67)$$

Debido a que no actúa esfuerzo axil, la integral extendida a toda la sección de las tensiones normales debe ser nula

$$-E\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \int_A 2w dA + E\frac{du_{10}}{dx_1} A = 0 \quad (6.68)$$

es decir,

$$E\frac{du_{10}}{dx_1} = E\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \frac{\int_A 2w dA}{A} \quad (6.69)$$

con lo que la expresión 6.67 se transforma en

$$\sigma = -E\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} 2\Omega \quad (6.70)$$

siendo

$$2\Omega = 2w - \frac{\int_A 2w dA}{A} \quad (6.71)$$

en donde Ω recibe el nombre de *coordenada sectorial normalizada*.

Las coordenadas sectoriales varían según se elija como polo uno u otro punto. En el presente caso están referidas al centro de torsión D .

La expresión 6.70 es de la máxima importancia ya que relaciona las tensiones normales con la cinemática de la deformación. Obsérvese el parecido formal entre dicha expresión y la que relaciona el valor de las tensiones normales con la cinemática de la deformación en el caso de flexión pura (esto es $\sigma = E(d\varphi_2/dx_1)x_3$).

Por otra parte, integrando 6.60 y teniendo en cuenta 6.70, se obtendrá la relación entre el flujo de tensiones tangenciales debido a las coacciones de los alabeos y las derivadas del giro por torsión φ_1

$$\tau e = - \int_0^\xi e \frac{d\sigma}{dx_1} d\xi = E \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \int_0^\xi 2\Omega e d\xi \quad (6.72)$$

sin que aparezca ninguna constante de integración dado que el flujo de tensiones tangenciales $\phi = \tau e$ es nulo en $\xi = 0$ al ser este punto un extremo libre.

Si se designa por m_Ω al *momento estático sectorial* del trozo de sección considerado y se define mediante

$$m_\Omega = \int_0^\xi 2\Omega e d\xi \quad (6.73)$$

la expresión 6.72 se escribe

$$\tau e = E \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} m_\Omega \quad (6.74)$$

Las relaciones cinemáticas entre las tensiones y el ángulo de giro por torsión φ_1 vienen dadas por las expresiones 6.67 y 6.74. Es preciso seguidamente imponer condiciones de equilibrio para obtener el valor de φ_1 así como las coordenadas del centro de torsión D . Dichas condiciones serán:

a) El momento M_w debido al alabeo impedido vale

$$M_w = \int_0^{\xi_0} \tau e \rho_D d\xi \quad (6.75a)$$

b) Los momentos flectores M_{f2} y M_{f3} debido a las tensiones normales σ son nulos

$$M_{f2} = \int_A \sigma x_3 dA = 0 \quad (6.75b)$$

$$M_{f3} = \int_A \sigma x_2 dA = 0 \quad (6.75c)$$

c) El momento torsor total T es el debido a las tensiones tangenciales motivadas por la torsión uniforme, más el debido a las motivadas por las coacciones de los alabeos

$$T = M_t + M_w \quad (6.75d)$$

Seguidamente se imponen las anteriores condiciones.

6.9.2 Ecuación diferencial de la torsión no uniforme

De acuerdo con la condición de equilibrio 6.75a el momento de alabeo M_w valdrá

$$M_w = \int_0^{\xi_0} \tau e \rho_D d\xi = \int_0^{\xi_0} \tau e 2 d\Omega \quad (6.76)$$

e integrando por partes

$$M_w = \tau e 2\Omega \Big|_{\xi=0}^{\xi=\xi_0} - \int_0^{\xi_0} \frac{\partial(\tau e)}{\partial \xi} 2\Omega d\xi \quad (6.77)$$

y puesto que las tensiones tangenciales en $\xi = 0$ y en $\xi = \xi_0$ (bordes libres) son nulas, el primer término de la expresión se anula. Por lo que respecta al segundo, las derivadas respecto a ξ del flujo de tensiones tangenciales pueden ser sustituidas de acuerdo con 6.60 por las derivadas respecto a x_1 de las tensiones normales σ

$$M_w = \int_0^{\xi_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} e 2 \Omega d\xi \quad (6.78)$$

y teniendo en cuenta 6.70

$$M_w = -E \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \int_A 2\Omega 2\Omega dA \quad (6.79)$$

y llamando *módulo de alabeo* a

$$I_{\Omega\Omega} = 4 \int_A \Omega^2 dA \quad (6.80)$$

la expresión del momento de alabeo se escribe finalmente

$$M_w = -EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3 \varphi_1}{dx_1^3} \quad (6.81)$$

expresión que relaciona el momento de alabeo con la variable cinemática φ_1 .

Si por analogía con la flexión se introduce una magnitud B_Ω denominada *bimomento*, tal que por definición

$$B_\Omega = EI_{\Omega\Omega} \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} \quad (6.82)$$

las tensiones normales se escribirán

$$\sigma = -\frac{B_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} 2\Omega \quad (6.83)$$

Obsérvese nuevamente la similitud formal de la expresión anterior y la 4.11, que proporciona el valor de las tensiones normales, en el caso de flexión pura, en función

del momento flector, momento de inercia y coordenada.

Por otro lado, a partir de 6.81 y 6.74, las tensiones tangenciales se escriben

$$\tau_e = -\frac{M_w}{I_{\Omega\Omega}} m_\Omega \quad (6.84)$$

expresión que formalmente es la misma que la que relaciona la distribución de tensiones tangenciales con el esfuerzo cortante.

La ecuación diferencial de la torsión no uniforme se obtendrá teniendo en cuenta que en cada punto

$$T = M_t + M_w \quad (6.85)$$

por lo que, sustituyendo

$$T = GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1} - EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3} \quad (6.86)$$

La ecuación diferencial anterior proporciona la *ecuación diferencial de la torsión no uniforme*, cuya resolución, y una vez introducidas las condiciones de contorno, proporciona el valor del giro en cualquier punto de la directriz de la pieza. Una vez obtenido dicho valor, se pueden obtener los valores de la distribución de tensiones tangenciales y tensiones normales debidos a los alabeos.

El proceso de cálculo será por tanto el siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1} - EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3} \\ -m_t &= GJ \frac{d^2\varphi_1}{dx_2} - EI_{\Omega\Omega} \frac{d^4\varphi_1}{dx_1^4} \end{aligned}} + \boxed{\text{Condiciones de contorno}} \rightarrow \boxed{\varphi_1} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} M_t &= GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \rightarrow (\tau_t)_{\max} &= \frac{e_j}{\frac{1}{3} \sum b_i e_i^3} M_t & (6.49b) \\ B_\Omega &= EI_{\Omega\Omega} \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} & \rightarrow \sigma &= -\frac{B_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} 2\Omega & (6.83) \\ M_w &= -EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3} & \rightarrow \tau_w &= -\frac{M_w}{eI_{\Omega\Omega}} m_\Omega & (6.84) \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\tau_{\max} = (\tau_t)_{\max} + \tau_w}$$

Es importante señalar que si se designa por $\beta = \sqrt{EI_{\Omega\Omega}/GJ}$ (β tiene dimensión de longitud), dicho parámetro representa la importancia relativa entre la torsión de alabeo y la torsión uniforme. Valores pequeños de β corresponden a torsión uniforme dominante y viceversa. En el ejemplo P6.2 se tratará esta cuestión más detalladamente. De hecho, la expresión 6.86 puede escribirse

$$\frac{T}{GJ} = \frac{d\varphi_1}{dx_1} - \beta^2 \frac{d^3\varphi_1}{dx_3} \quad (6.87)$$

Evidentemente, si fuera $\beta \approx 0$, la solución de 6.87 sería la de la torsión uniforme.

La solución de 6.87 es la suma de la solución de la homogénea más una solución particular dependiente de la ley de momentos torsores T

$$\varphi_1 = c_1 + c_2 e^{x_1/\beta} + c_3 e^{-x_1/\beta} + \varphi_p \quad (6.88)$$

siendo φ_p la solución particular. Las constantes de integración c_1, c_2 y c_3 dependen de las condiciones de contorno a imponer. La solución anterior puede también escribirse

$$\varphi_1 = c'_1 + c'_2 Ch \frac{x_1}{\beta} + c'_3 Sh \frac{x_1}{\beta} + \varphi_p \quad (6.89)$$

en donde, como se aprecia, las funciones exponenciales han sido sustituidas por funciones hiperbólicas.

La ecuación diferencial 6.86 de la torsión no uniforme ha sido escrita para el caso en que se conozcan las leyes de momentos torsores que actúan en cada punto de la pieza. Hay ocasiones, sin embargo, en que es más conveniente tener escrita dicha ecuación conociendo únicamente las cargas externas que actúan en la mencionada pieza (momentos torsores en este caso). Si se denomina m_1 a los momentos torsores por unidad de longitud que actúan sobre la directriz de la barra (momentos externos), de acuerdo con las ecuaciones de equilibrio interno 2.14, se tendrá

$$m_1 + \frac{dT}{dx_1} = 0 \quad (6.90)$$

por lo que, derivando 6.86 e introduciendo 6.90, se obtiene finalmente

$$-m_1 = GJ \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} - EI_{\Omega\Omega} \frac{d^4\varphi_1}{dx_1^4} \quad (6.91)$$

expresión que proporciona la ecuación diferencial de la torsión no uniforme en función únicamente de las cargas externas. Dicha expresión se puede también integrar obteniéndose

$$\varphi_1 = c_1 + c_2 x_1 + c_3 e^{x_1/\beta} + c_4 e^{-x_1/\beta} + \varphi_p \quad (6.92)$$

o alternativamente

$$\varphi_1 = c'_1 + c'_2 x_1 + c'_3 Ch \frac{x_1}{\beta} + c'_4 Sh \frac{x_1}{\beta} + \varphi_p \quad (6.93)$$

en donde las constantes de integración se determinan a partir de las condiciones de contorno del problema.

6.9.3 El centro de torsión

Así como para el caso de una pieza sometida a torsión uniforme, la posición del centro de torsión es irrelevante, no sucede lo mismo en torsión no uniforme. En las expresiones anteriores, el centro de torsión no puede ser elegido de forma arbitraria ya que ello afectaría a la magnitud de las tensiones resultantes.

Las coordenadas del centro de torsión se obtendrán imponiendo las condiciones 6.75b y 6.75c

$$\int_A \sigma x_3 dA = 0 ; \quad \int_A \sigma x_2 dA = 0$$

Nótese que las variables x_2 y x_3 están referidas a unos ejes ortogonales que pasan por el centro de gravedad de la sección.

A partir de 6.70 y teniendo presente que las derivadas segundas de φ_1 respecto a x_1 no son nulas, las anteriores expresiones se escriben

$$\int_A \Omega x_3 dA = 0 ; \quad \int_A \Omega x_2 dA = 0 \quad (6.94)$$

ecuaciones en las que no intervienen valores de tensiones ni movimientos, sino únicamente la propia geometría de la sección. En lo sucesivo, y dado que se manejarán coordenadas sectoriales referidas a dos puntos distintos, se indicará con un subíndice el punto respecto al cual se toman dichas coordenadas (polo). De esta forma, las expresiones 6.94 se reescriben

$$\int_A \Omega_D x_3 dA = 0 ; \quad \int_A \Omega_D x_2 dA = 0 \quad (6.95)$$

Por otro lado (Fig. 6.24) la coordenada sectorial w_D respecto al punto D y la w_G respecto al centro de gravedad pueden relacionarse teniendo en cuenta que

$$dw_D = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{t}) d\xi = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 \cdot [(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}) \times t] d\xi \quad (6.96)$$

en donde \mathbf{e}_1 es el versor en la dirección x_1 (dirección del eje de la pieza).

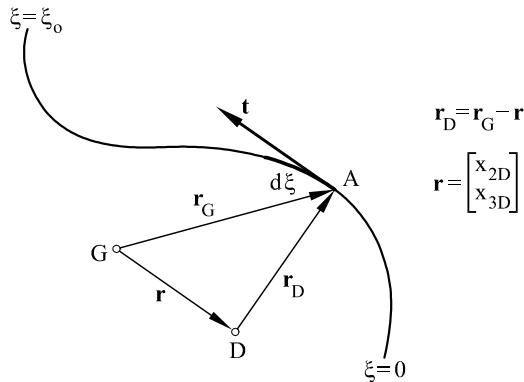


Fig. 6.24 Relación entre áreas sectoriales

Desarrollando la expresión anterior, y teniendo presente que $\mathbf{t} d\xi = dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3$ se obtiene la relación buscada

$$dw_D = dw_G - \frac{1}{2} x_{2D} dx_3 + \frac{1}{2} x_{3D} dx_2 \quad (6.97)$$

Integrando desde el origen $\xi = 0$ hasta un punto arbitrario ξ

$$w_D = w_G - \frac{1}{2}x_{2D}x_3 + \frac{1}{2}x_{3D}x_2 + K \quad (6.98)$$

La coordenada sectorial normalizada Ω_D se obtiene a partir de w_D mediante

$$\Omega_D = w_D - \frac{\int_A w_D dA}{A}$$

y sustituyendo w_D por su valor en 6.98

$$\Omega_D = w_G - \frac{1}{2}x_{2D}x_3 + \frac{1}{2}x_{3D}x_2 + K - \frac{1}{A} \left[\int_A (w_G - \frac{1}{2}x_{2D}x_3 + \frac{1}{2}x_{3D}x_2 + K) dA \right]$$

y teniendo presente que $\int_A x_2 dA = \int_A x_3 dA = 0$ al estar las coordenadas x_2 y x_3 referidas a ejes que pasan por el centro de gravedad, la anterior expresión se escribe

$$\Omega_D = w_G - \underbrace{\frac{\int_A w_G dA}{A}}_{\Omega_G} - \frac{1}{2}x_{2D}x_3 + \frac{1}{2}x_{3D}x_2 \quad (6.99)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la primera de las dos expresiones 6.95

$$\int_A w_G x_3 dA - \frac{\int_A w_G dA}{A} \int_A x_3 dA - \frac{x_{2D}}{2} \int_A x_3^2 dA + \frac{x_{3D}}{2} \int_A x_2 x_3 dA = 0$$

es decir

$$-\mu_2 - x_{2D}I_2 + x_{3D}I_{23} = 0 \quad (6.100a)$$

siendo μ_2 el momento de alabeo de la sección respecto al eje x_2 . Viene dado por las expresiones 5.55 y 5.56.

Análogamente, sustituyendo 6.99 en la segunda de las expresiones 6.95

$$-\mu_3 - x_{2D}I_{23} + x_{3D}I_3 = 0 \quad (6.100b)$$

Resolviendo en x_{2D} y x_{3D} el sistema de ecuaciones 6.100, se obtienen las coordenadas, respecto al centro de gravedad G , del centro de torsión

$$x_{2D} = -\frac{I_3\mu_2 - I_{23}\mu_3}{I_2I_3 - I_{23}^2} \quad (6.101a)$$

$$x_{3D} = \frac{-I_{23}\mu_2 + I_2\mu_3}{I_2I_3 - I_{23}^2} \quad (6.101b)$$

Como puede observarse, las coordenadas del centro de torsión coinciden con las del centro de esfuerzos cortantes, dado por las expresiones 5.59 y 5.60, es decir, se puede

afirmar que *en el caso de torsión no uniforme, el centro de torsión coincide con el centro de esfuerzos cortantes*. En el Capítulo 12 se estudiarán las consecuencias de tan importante resultado.

6.9.4 Otras comprobaciones de equilibrio

Las condiciones de equilibrio impuestas hasta ahora hacen referencia a la integral de las tensiones normales (ec. 6.68) y al equilibrio de momentos, tanto flectores como torsores (expresiones 6.75). Con las anteriores expresiones, el equilibrio no está, sin embargo, garantizado. Es preciso garantizar que la resultante de todas las tensiones que actúan en el plano de la sección (tensiones tangenciales), en cada uno de los ejes coordenadas, sea nula. Para ello, es preciso que

$$\int_{\Gamma} \tau e \, dx_2 = 0 \quad ; \quad \int_{\Gamma} \tau e \, dx_3 = 0 \quad (6.102)$$

siendo Γ la línea media de las paredes de la sección y estando las integrales anteriores extendidas a toda la sección.

Por otra parte, las tensiones tangenciales son la suma de las originadas por la torsión uniforme más las debidas al momento de alabeo, es decir

$$\tau = \tau_t + \tau_w \quad (6.103)$$

Las tensiones tangenciales debidas a la torsión uniforme τ_t tienen resultante nula, vista la distribución que tienen en el espesor de cada pared (expresión 6.41). Es decir, que las expresiones 6.102 se pueden escribir

$$\int_{\Gamma} \tau_w e \, dx_2 = 0 \quad ; \quad \int_{\Gamma} \tau_w e \, dx_3 = 0 \quad (6.104)$$

Sustituyendo en la primera de estas dos expresiones el valor de $\tau_w e$ dado por 6.84

$$\int_{\Gamma} \tau_w e \, dx_2 = \frac{M_w}{I_{\Omega\Omega}} \int_{\Gamma} m_{\Omega} \, dx_2 = -\frac{M_w}{I_{\Omega\Omega}} \int_{\Gamma} \left[\int_0^{\xi} 2\Omega \, dA \right] dx_2$$

Integrando la anterior expresión por partes y teniendo en cuenta 6.94, se puede escribir finalmente

$$\int_{\Gamma} \tau_w e \, dx_2 = 2 \frac{M_w}{I_{\Omega\Omega}} \int_{\Gamma} \Omega x_2 \, dA = 0 \quad (6.105a)$$

Lo cual demuestra que la resultante de las tensiones tangenciales en dirección x_2 es nula. Análogamente, para la dirección x_3

$$\int_{\Gamma} \tau_w e \, dx_3 = 2 \frac{M_w}{I_{\Omega\Omega}} \int_{\Gamma} \Omega x_3 \, dA = 0 \quad (6.105b)$$

Las expresiones 6.105 completan las condiciones de equilibrio de la sección.

6.10 Cálculo de alabeos y resumen final

En la resolución de algunos problemas de torsión no uniforme es preciso determinar los alabeos de los puntos de sección. Para ello, se parte de la expresión 6.66

$$u_1 = -\frac{d\varphi_1}{dx_1} 2w + u_{10} \quad (6.66)$$

en donde, a partir de 6.68

$$\frac{du_{10}}{dx_1} = \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \frac{\int_A 2w \, dA}{A} \quad (6.106)$$

e integrando

$$u_{10} = \frac{d\varphi_1}{dx_1} \frac{\int_A 2w \, dA}{A} + c_1 \quad (6.107)$$

siendo c_1 una constante de integración. Si el valor anterior se sustituye en 6.66, se obtiene

$$u_1 = -\frac{d\varphi_1}{dx_1} \left(2w - \frac{\int_A 2w \, dA}{A} \right) + c_1 \quad (6.108)$$

y teniendo en cuenta 6.71, los alabeos se escriben finalmente

$$u_1 = -\frac{d\varphi_1}{dx_1} 2\Omega + c_1 \quad (6.109)$$

en donde c_1 es una constante de integración dependiente de una condición de contorno a imponer a los alabeos.

Finalmente, en la tabla 6.2 se exponen los principales resultados obtenidos para torsión no uniforme. Asimismo en la tabla 6.3 se exponen los principales parámetros utilizados en torsión.

Tabla 6.2 Esfuerzos y tensiones de torsión

Magnitud	Valor	Expresión	Magnitud	Valor	Expresión
Momento de torsión uniforme M_t	$M_t = GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1}$	6.43	Tensiones tangenciales de torsión uniforme	$(\tau_j)_{max} = \frac{e_j}{\frac{1}{3} \sum b_i e_i^3} M_t$	6.49b
Bimomento B_Ω	$B_\Omega = EI_{\Omega\Omega} \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}$	6.82	Tensiones normales de alabeo	$\sigma = -\frac{B_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} 2\Omega$	6.83
Momento de alabeo M_w	$M_w = -EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3}$	6.81	Tensiones tangenciales de alabeo	$\tau_e = -\frac{M_w}{I_{\Omega\Omega}} m_\Omega$	6.84

Tabla 6.3 Parámetros de torsión

Magnitud	Valor	Expresión	Magnitud	Valor	Expresión
Módulo de torsión	$J = \frac{1}{3} \sum_i b_i e_i^3$	6.49a	Momento de alabeo μ_3	$\mu_3 = 2 \int_A m_{e3} x_2 dA$ $= - \int_A w x_2 dA$	5.56b
Coordenada sectorial w	$w = \frac{1}{2} \int_0^\xi \rho d\xi$		Producto sectorial de inercia I_{2w}	$I_{2w} = \frac{\mu_2}{2}$	5.56a
Coordenada sectorial normalizada Ω	$\Omega = w - \frac{\int_A w dA}{A}$	6.71	Producto sectorial de inercia I_{3w}	$I_{3w} = \frac{\mu_3}{2}$	5.56b
Módulo de alabeo $I_{\Omega\Omega}$	$I_{\Omega\Omega} = 4 \int_A \Omega^2 dA$	6.80	Parámetro β	$\beta = \sqrt{\frac{EI_{\Omega\Omega}}{GJ}}$	
Momento estático sectorial m_Ω	$m_\Omega = \int_0^\xi 2\Omega e d\xi$	6.73			
Momento de alabeo μ_2	$\mu_2 = 2 \int_A m_{e2} dw$ $= - \int_A w x_3 dA$	5.56a			

Nota: Las magnitudes ρ , w , Ω , m_Ω están referidas al centro de esfuerzos cortantes. Las magnitudes μ_2 , μ_3 , I_{2w} , I_{3w} están referidas al centro de gravedad.

♣ **Problema resuelto P6.2** La ménsula que se presenta en la figura P6.2.1 está sometida a un momento torsor $T = 2 \text{ kN} \times \text{m}$ aplicado en su extremo S. Las características de la sección se indican también en la mencionada figura. Se desea estudiar dicha ménsula a torsión no uniforme.

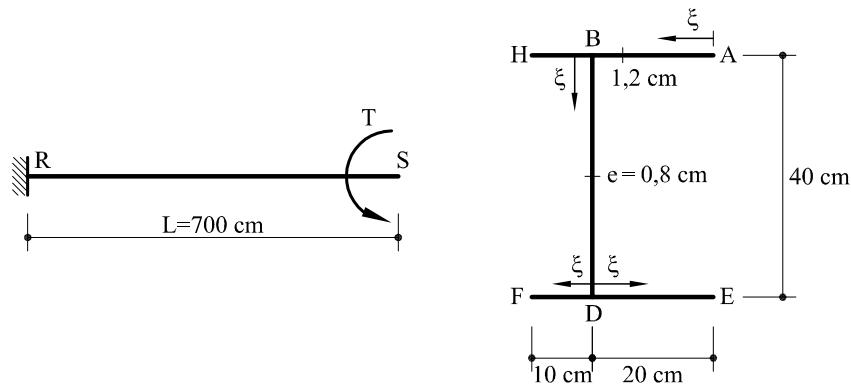


Fig. P6.2.1 Pieza simple sometida a torsión no uniforme

Solución

Es preciso, en primer lugar, determinar algunas de las características de la sección. En la figura P6.2.2 se representa la situación del centro de gravedad y del centro de esfuerzos cortantes. Por razones de simetría, ambos puntos estarán situados a 20 cm por encima del segmento *FE*.

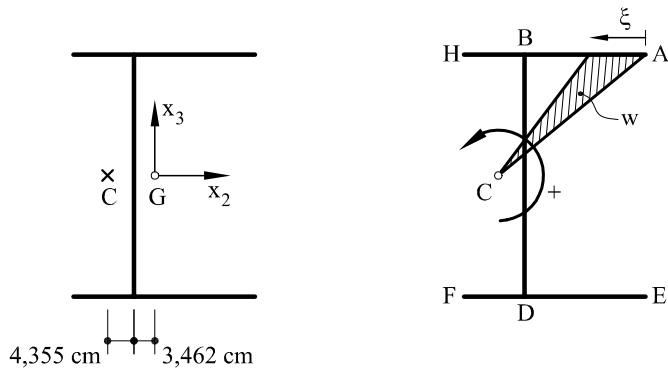


Fig. P6.2.2 Centro de gravedad, de esfuerzos cortantes y coordenadas sectoriales w

- Coordenadas sectoriales w (ver Fig. P6.2.2)

$$\begin{aligned}
 w \Big|_A^H &= \frac{20\xi}{2} = 10\xi \\
 w \Big|_B^D &= 200 - 4,355 \frac{\xi}{2} = 200 - 2,1774\xi \\
 w \Big|_D^F &= 112,9 - 10\xi \\
 w \Big|_D^E &= 112,9 + 10\xi
 \end{aligned}$$

En la figura P6.2.3a) puede verse representada la ley anterior.

- Coordenadas sectoriales Ω

Para normalizar las anteriores coordenadas sectoriales se calcula previamente

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \frac{\int w dA}{A} = \\
 &= \frac{1}{104} \left(\frac{300+0}{2} \times 30 \times 1,2 + \frac{200+112,9}{2} \times 40 \times 0,8 + \frac{112,9+312,9}{2} \times 30 \times 1,2 \right) = \\
 &= 156,45 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

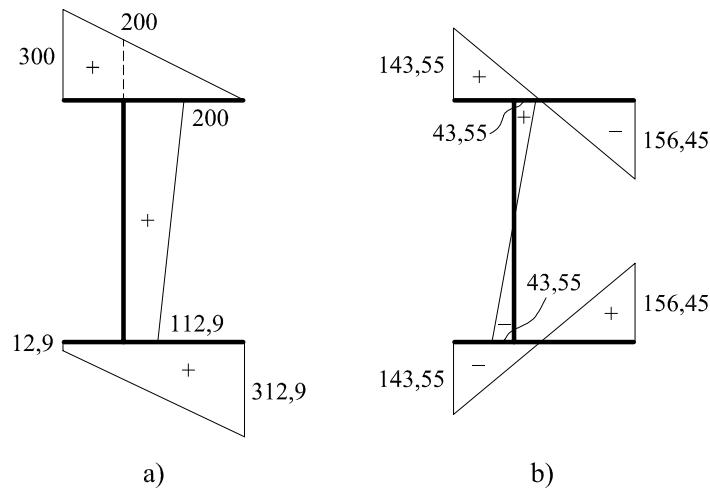


Fig. P6.2.3 a) Coordenadas sectoriales. b) Coordenadas sectoriales normalizadas

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Omega_A^H &= 10\xi - 156,45 \\ \Omega_B^D &= 200 - 2,1774\xi - 156,45 = 43,55 - 2,1774\xi \\ \Omega_D^F &= -43,55 - 10\xi \\ \Omega_D^E &= -43,55 + 10\xi\end{aligned}$$

En la figura P6.2.3.b) pueden verse representadas las coordenadas sectoriales normalizadas.

- Módulo de alabeo $I_{\Omega\Omega}$ (expresión 6.80)

$$\begin{aligned}I_{\Omega\Omega} &= 4 \int_A \Omega^2 dA = 4 \left[\int_0^{30} (10\xi - 156,45)^2 \times 1,2 d\xi + \int_0^{40} (43,55 - 2,1774\xi) 0,8 d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{10} (-43,55 - 10\xi) \times 1,2 d\xi + \int_0^{20} (-43,55 + 10\xi) \times 1,2 d\xi \right] = \\ &= 4 \times (271\,498 + 20\,228,6 + 115\,019 + 156\,478) = 2\,252\,894,4 \text{ cm}^6\end{aligned}$$

- Módulo de torsión J (expresión 6.49a)

$$J = \frac{1}{3} \sum_i b_i e_i^3 = \frac{1}{3} (30 \times 1,2^3 + 40 \times 0,8^3 + 30 \times 1,2^3) = 41,387 \text{ cm}^4$$

El parámetro β de torsión valdrá (tomando $\nu = 0,25$)

$$\beta = \sqrt{\frac{EI_{\Omega\Omega}}{GJ}} = \sqrt{2,5 \frac{2252894,4}{41,387}} = 368,9 \text{ cm}$$

- Solución de la ecuación diferencial de la torsión

De acuerdo con 6.88, la solución de la ecuación diferencial de la torsión vendrá dada por

$$\varphi_1 = c_1 + c_2 e^{x_1/\beta} + c_3 e^{-x_1/\beta} + \frac{T}{GJ} x_1 \quad (a)$$

o también sustituyendo en φ_1

$$\varphi_1 = c_1 + c_2 e^{x_1/368,9} + c_3 e^{-x_1/368,9} + 2,3 \times 10^{-4} x_1$$

Derivando hasta tres veces

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} = \frac{c_2}{\beta} e^{x_1/\beta} - \frac{c_3}{\beta} e^{-x_1/\beta} + \frac{T}{GJ} \quad (b)$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} = \frac{c_2}{\beta^2} e^{x_1/\beta} + \frac{c_3}{\beta^2} e^{-x_1/\beta} \quad (c)$$

$$\frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3} = \frac{c_2}{\beta^3} e^{x_1/\beta} - \frac{c_3}{\beta^3} e^{-x_1/\beta} \quad (d)$$

en donde las constantes de integración se obtendrán en función de las siguientes condiciones de contorno:

- Empotramiento (punto R)

- Giro nulo: $\varphi_1(x_1 = 0) = 0$
- Alabeos nulos: $\left. \frac{d\varphi_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0$

- Extremo libre (punto S)

- Tensiones normales nulas (o lo que es equivalente: el bimomento debe ser nulo): $\left. \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} \right|_{x_1=L} = 0$

Impuestas las anteriores condiciones de contorno se obtiene

$$c_1 = \frac{\beta(1 - e^{2L/\beta})}{1 + e^{2L/\beta}} \frac{T}{GJ}$$

$$c_2 = -\frac{\beta}{1+e^{2L/\beta}} \frac{T}{GJ}$$

$$c_3 = \frac{\beta e^{2L/\beta}}{1+e^{2L/\beta}} \frac{T}{GJ}$$

Con lo cual, de acuerdo con 6.43, 6.82 y 6.81 que, respectivamente, proporcionan los valores del momento de torsión uniforme M_t , del bimomento B_Ω y del momento de alabeo M_w , se obtiene

$$M_t = GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1} = \left(-\frac{e^{x_1/\beta} + e^{(2L-x_1)/\beta}}{1+e^{2L/\beta}} + 1 \right) T$$

$$B_\Omega = \frac{\beta}{1+e^{2L/\beta}} (-e^{x_1/\beta} + e^{(2L-x_1)/\beta}) T$$

$$M_w = \frac{e^{x_1/\beta} + e^{(2L-x_1)/\beta}}{1+e^{2L/\beta}} T$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores los valores conocidos de β y L se obtendrán los valores de M_t , B_Ω y M_w en función de x_1 y T . En la figura P6.2.4 pueden verse representados los anteriores valores. Asimismo en la figura P6.2.5 se halla representada la variación de M_t/T en función de x_1 para distintos valores de β . Como se observa, a medida que el parámetro β disminuye los efectos del alabeo son menores y más localizados.

Una vez conocida la ley de variación de M_t , B_Ω y M_w , se pueden ya calcular en las distintas secciones las tensiones normales y las tangenciales. Lógicamente las mayores tensiones normales, así como las máximas tangenciales provocadas por el torsor de alabeo se producirán en el empotramiento. Las tensiones tangenciales máximas producidas por M_t tendrán lugar en el extremo libre. En el presente ejemplo se calcularán únicamente las tensiones normales y las tangenciales producidas por M_w en el empotramiento (constantes en el espesor).

- Cálculo de las tensiones normales (expresión 6.83)

$$\sigma = -\frac{B_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} 2\Omega$$

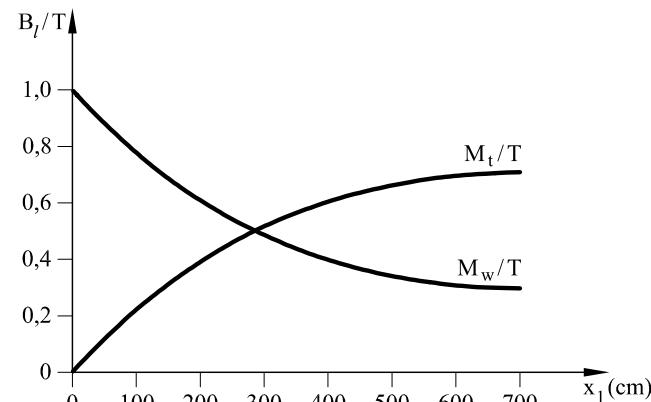
Previamente se ha calculado la distribución de las coordenadas sectoriales normalizadas Ω . Además (las unidades utilizadas son: Newton y cm)

$$\frac{B_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} = \frac{70\ 535\ 582}{2\ 252\ 894,4} = 31,31$$

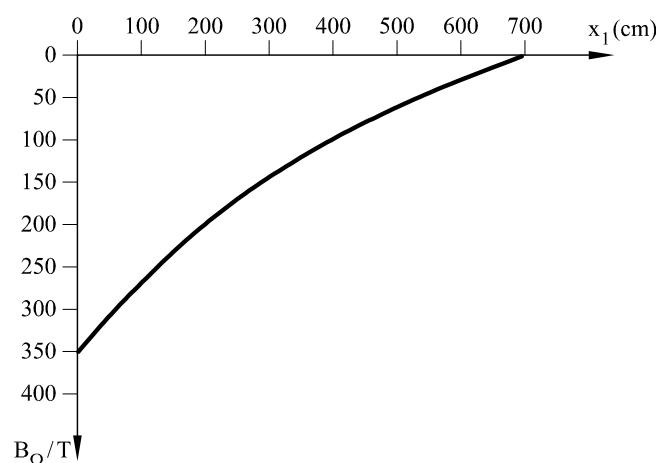
En la figura P6.2.6 puede verse representada la distribución de tensiones normales σ .

- Distribución de tensiones tangenciales (expresión 6.84)

Para calcular las tensiones tangenciales es preciso calcular previamente la distribución de los momentos estáticos sectoriales m_Ω dados por 6.73. Es de notar que al calcularse



a)



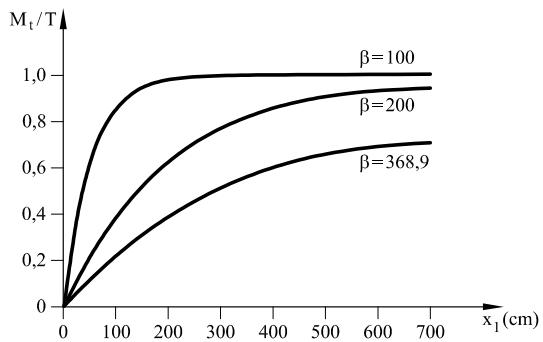
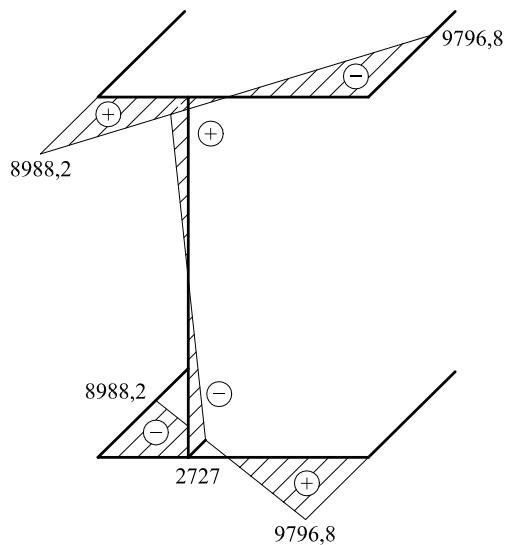
b)

Fig. P6.2.4 a) Valores de M_t/T y M_w/T . b) Valores de B_Ω

las tensiones tangenciales a partir del equilibrio con las tensiones normales σ , los valores de m_Ω deben siempre ser obtenidos a partir de los extremos de las paredes de las piezas, ya que en dichos puntos las tensiones tangenciales son nulas

$$m_\Omega \Big|_A^B = 2 \times 1,2 \int_0^\xi (10\xi - 156,45)d\xi = 12\xi^2 - 375,48\xi$$

$$m_\Omega \Big|_B^H = 2 \times 1,2 \int_{30}^\xi (10\xi - 156,45)d\xi = 12\xi^2 - 375,48\xi + 464,4$$

Fig. P6.2.5 Variación de M_t/T en β Fig. P6.2.6 Distribución de tensiones normales en el empotramiento (valores en N/cm^2)

$$m_{\Omega} \Big|_{B}^D = -464,4 + 2 \int_0^{\xi} (43,55 - 2,1774\xi) \times 0,8 d\xi = -1,742\xi^2 + 69,68\xi - 464,4$$

$$m_{\Omega} \Big|_{F}^D = 2 \int_{10}^{\xi} (-43,55 - 10\xi) \times 1,2 d\xi = -12\xi^2 - 104,52\xi + 2245,2$$

$$m_{\Omega} \Big|_{D}^E = 2 \int_{20}^{\xi} (-43,55 + 10\xi) \times 1,2 d\xi = 12\xi^2 - 104,52\xi - 2709,6$$

Por lo tanto, de acuerdo con 6.84, y dado que $M_w/I_{\Omega\Omega} = 0,088775$, el flujo de tensiones tangenciales $\phi = \tau e$ valdrá:

$$\phi \Big|_A^B = -1,0653\xi^2 + 33,333\xi$$

$$\phi \Big|_B^H = -1,0653\xi^2 + 33,333\xi - 41,23$$

$$\phi \Big|_B^D = 0,1546\xi^2 - 6,186\xi + 41,23$$

$$\phi \Big|_F^D = 1,0653\xi^2 + 9,279\xi - 199,32$$

$$\phi \Big|_D^E = -1,0653\xi^2 + 9,279\xi + 240,54$$

Por lo que respecta al signo de los anteriores flujos, debe recordarse que su sentido positivo coincide con el sentido positivo de la coordenada local ξ . En la figura P6.2.7 pueden verse representados los flujos de tensiones tangenciales.

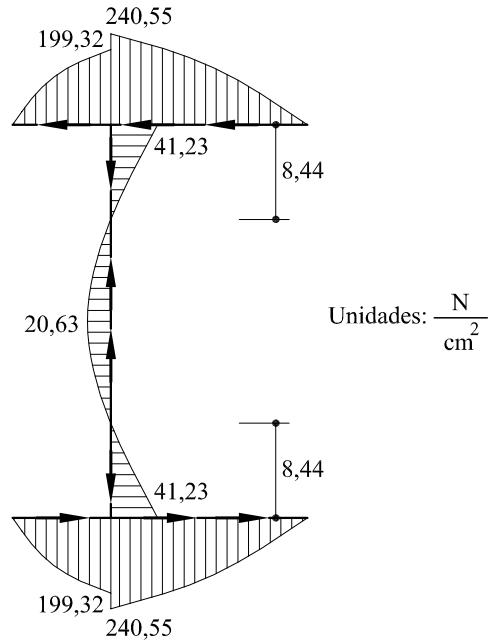


Fig. P6.2.7 Flujos de tensiones tangenciales

7 Energía de deformación

7.1 Introducción

Los teoremas y procedimientos relacionados con la energía de deformación ocupan una posición central en todo el Cálculo de Estructuras. En este capítulo se va a estudiar su formulación básica, y si bien se introducirán algunos ejemplos que permitan alcanzar una mejor comprensión de la teoría, las aplicaciones a los sistemas estructurales se dejarán para los capítulos sucesivos.

Si bien los teoremas que se van a estudiar son completamente generales y, por tanto, directamente aplicables a sistemas 2D y 3D, a fin de facilitar una mejor comprensión de la exposición, se hará especial incidencia en el caso bidimensional. En el Capítulo 12 se retomará su estudio para aplicaciones a los sistemas estructurales tridimensionales.

Por lo que hace referencia a la nomenclatura utilizada, se designa por la letra v a los movimientos en las coordenadas propias de la sección (coordenadas locales) y por u a los mismos movimientos en otras direcciones (coordenadas globales, movimientos según una dirección, etc.). En ocasiones, la diferencia entre ambos símbolos es nula, por lo que la elección de uno u otro es arbitraria.

7.2 Teorema de los trabajos virtuales

El teorema de los trabajos virtuales constituye una forma alternativa de presentar las ecuaciones de equilibrio y de hecho puede deducirse a partir de éstas. Al mismo tiempo constituye una herramienta muy utilizada en la formulación de las ecuaciones discretizadas de la deformación de sólidos.

7.2.1 Formulación

En el Capítulo 2 se han establecido las ecuaciones de equilibrio interno para una pieza lineal cualquiera. Dichas ecuaciones se escriben

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (7.1a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{m} + \frac{d\mathbf{z}}{ds} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (7.1b)$$

Para el caso de una pieza bidimensional, se supondrá que el eje x_3 es principal de inercia y es perpendicular al plano en el cual está contenida dicha pieza. Asimismo, el eje x_2 será también principal de inercia. De esta forma, las únicas cargas externas que actúan serán p_1, p_2 y m_3 , por lo que las únicas componentes no nulas de los esfuerzos serán N, Q_2 y M_{f3} . Por lo que hace referencia a los movimientos, cabe considerar v_1, v_2 y φ_3 siendo nulos el resto. Asimismo, para las deformaciones, las únicas a considerar son ϵ_1, χ_3 y γ_{2m} . Por ello, en todo el estudio bidimensional, y siempre que no induzca a confusión algunas de las notaciones iniciales, serán sustituidas por:

$$\begin{aligned} m_3 &\rightarrow m \\ Q_2 &\rightarrow Q \\ M_{f3} &\rightarrow M_f \\ \varphi_3 &\rightarrow \varphi \\ \chi_3 &\rightarrow \chi \\ \gamma_{2m} &\rightarrow \gamma_m \text{ o simplemente } \gamma \end{aligned}$$

Aunque las demostraciones que se desarrollarán seguidamente pueden realizarse directamente para el caso más general de piezas curvas, se procederá, para mayor claridad de exposición, a formular en primer lugar las piezas rectas y seguidamente las curvas.

7.2.1.1 Pieza recta

Para el caso particular de una pieza bidimensional recta, las anteriores ecuaciones toman la forma (Fig. 7.1)

$$\frac{dN}{dx_1} + p_1 = 0 \quad (7.2a)$$

$$\frac{dQ}{dx_1} + p_2 = 0 \quad (7.2b)$$

$$\frac{dM_f}{dx_1} + m + Q = 0 \quad (7.2c)$$

Las anteriores ecuaciones pueden escribirse en forma débil

$$\int_o^{s_o} \left(\frac{dM_f}{dx_1} + m + Q \right) \bar{\varphi} dx_1 + \int_o^{s_o} \left(\frac{dQ}{dx_1} + p_2 \right) \bar{v}_2 dx_1 + \int_o^{s_o} \left(\frac{dN}{dx_1} + p_1 \right) \bar{v}_1 dx_1 = 0 \quad (7.3)$$

siendo s_o la longitud total de la pieza, $\bar{\varphi}$ un giro cualquiera (virtual), \bar{v}_1 un desplazamiento virtual en dirección x_1 y \bar{v}_2 un desplazamiento virtual en dirección x_2 . Nótese que si se considera la deformación por cortante, $\bar{\varphi}$ y \bar{v}_2 son independientes. En caso contrario $\bar{\varphi} = d\bar{v}_2/dx_1$.

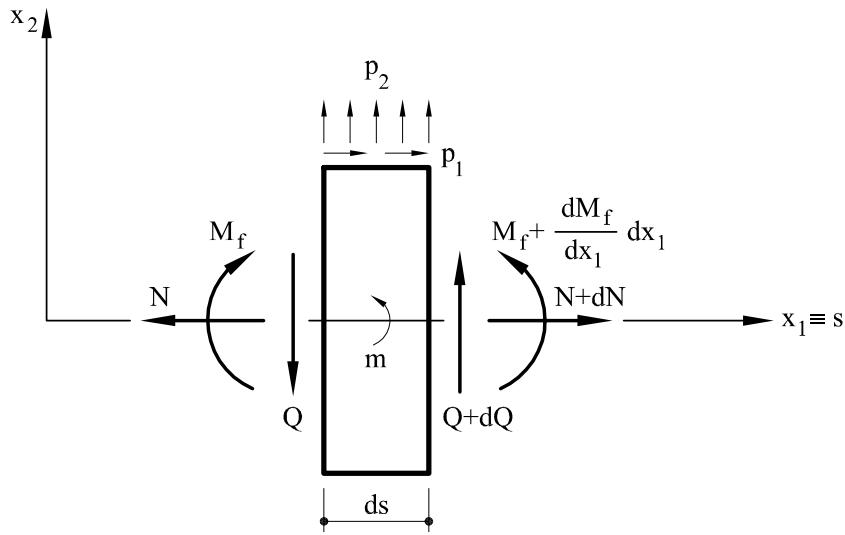


Fig. 7.1 Equilibrio bidimensional de una rebanada diferencial

Las anteriores ecuaciones pueden integrarse por partes quedando

$$\begin{aligned}
 & M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} M_f \frac{d\bar{\varphi}}{dx_1} dx_1 + \int_o^{s_o} m \bar{\varphi} dx_1 + \int_o^{s_o} Q \bar{\varphi} dx_1 + Q \bar{v}_2 \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} Q \frac{d\bar{v}_2}{dx_1} dx_1 \\
 & + \int_o^{s_o} p_2 \bar{v}_2 dx_1 + N \bar{v}_1 \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} N \frac{d\bar{v}_1}{dx_1} dx_1 + \int_o^{s_o} p_1 \bar{v}_1 dx_1 = 0 \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

Si no se desprecia la influencia del esfuerzo cortante en la deformación, el término $d\bar{v}_2/dx_1$ puede escribirse (Fig. 7.2)

$$\frac{d\bar{v}_2}{dx_1} = \bar{\varphi} + \bar{\gamma} \quad (7.5)$$

siendo $\bar{\varphi}$ el ángulo de giro total de la cara anterior de la sección y $\bar{\gamma}$ el ángulo de deformación por cortante de una cara de la sección respecto a la anterior.

Por lo que, teniendo en cuenta que la curvatura virtual $\bar{\chi}$ es igual a $\bar{\chi} = d\bar{\varphi}/dx_1$, la expresión 7.4 puede escribirse

$$\begin{aligned}
 & M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} M_f \bar{\chi} dx_1 + \int_o^{s_o} Q \bar{\varphi} dx_1 + Q \bar{v}_2 \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} Q \bar{\varphi} dx_1 - \int_o^{s_o} Q \bar{\gamma} dx_1 \\
 & + \int_o^{s_o} m \bar{\varphi} dx_1 + \int_o^{s_o} p_2 \bar{v}_2 dx_1 + N \bar{v}_1 \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} N \frac{d\bar{v}_1}{dx_1} dx_1 + \int_o^{s_o} p_1 \bar{v}_1 dx_1 = 0 \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

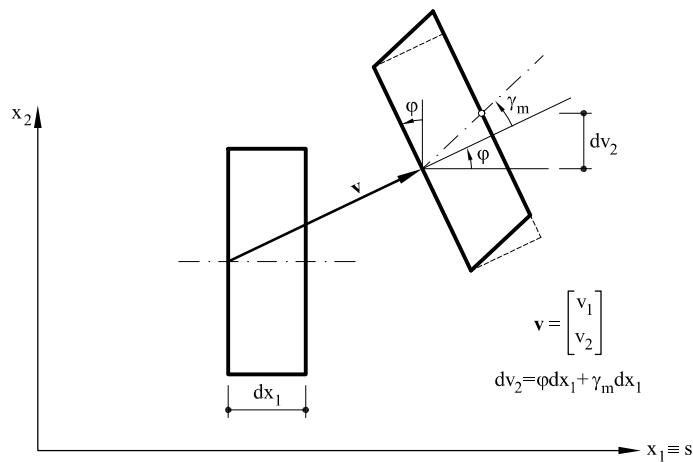


Fig. 7.2 Movimiento diferencial de una sección

O sea

$$\begin{aligned} \int_o^{s_o} M_f \bar{\chi} dx_1 + \int_o^{s_o} Q \bar{\gamma} dx_1 + \int_o^{s_o} N \frac{d\bar{v}_1}{dx_1} dx_1 &= M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} + Q \bar{v}_2 \Big|_o^{s_o} + N \bar{v}_1 \Big|_o^{s_o} \\ &+ \int_o^{s_o} m \bar{\varphi} dx_1 + \int_o^{s_o} p_1 \bar{v}_1 dx_1 + \int_o^{s_o} p_2 \bar{v}_2 dx_1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

y teniendo en cuenta que $\int_o^{s_o} M_f \bar{\chi} ds$, $\int_o^{s_o} Q \bar{\gamma} ds$ y $\int_o^{s_o} N(d\bar{v}_1/dx_1)dx_1$ son respectivamente el trabajo virtual realizado por los momentos flectores, por los esfuerzos cortantes y por los esfuerzos axiles, puede enunciarse el teorema de los trabajos virtuales como sigue: *Cuando a una pieza en equilibrio se la somete a unos desplazamientos virtuales, el trabajo realizado por las fuerzas externas es igual al trabajo realizado por las fuerzas internas.*

En el caso de despreciar la deformación debida al esfuerzo cortante, $\bar{\gamma} = 0$, por lo que de acuerdo con 7.5

$$\frac{d\bar{v}_2}{dx_1} = \bar{\varphi} \quad (7.8)$$

por lo que la expresión de trabajos virtuales 7.7 se escribirá

$$\begin{aligned} \int_o^{s_o} M_f \bar{\chi} dx_1 + \int_o^{s_o} N \frac{d\bar{v}_1}{dx_1} dx_1 &= M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} + Q \bar{v}_2 \Big|_o^{s_o} + N \bar{v}_1 \Big|_o^{s_o} + \int_o^{s_o} m \bar{\varphi} dx_1 \\ &+ \int_o^{s_o} p_1 \bar{v}_1 dx_1 + \int_o^{s_o} p_2 \bar{v}_2 dx_1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Hay que señalar asimismo que, tal como se ha apuntado anteriormente, el teorema de los trabajos virtuales es aplicable a sistemas cualquiera bidimensionales o tridimensionales. En el Capítulo 12 se volverá otra vez sobre esta cuestión.

♣ **Problema resuelto P7.1** Supóngase la ménsula de la figura P7.1.1 sometida a las cargas que en ella se indican. Sean los movimientos virtuales $\bar{v}_2 = ax_1^3$, $\bar{\varphi} = bx_1$. Comprobar que se cumple el teorema de los trabajos virtuales.

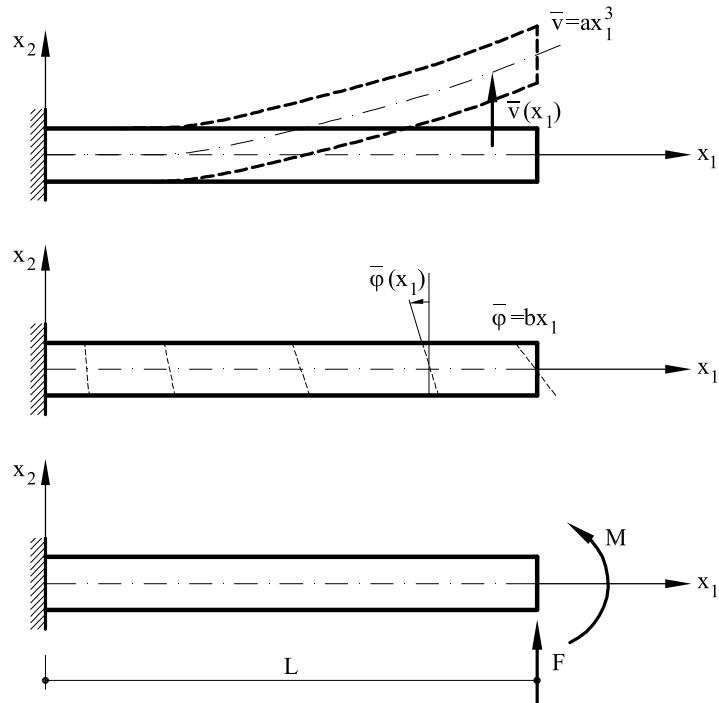


Fig. P7.1.1 Ménsula cargada sometida a unos movimientos \bar{v} y $\bar{\varphi}$ virtuales

Solución

La curvatura de la pieza correspondiente al movimiento virtual $\bar{\varphi}$ valdrá

$$\bar{\chi} = \frac{d\bar{\varphi}}{dx_1} = b$$

y la deformación cortante virtual $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma} = \frac{d\bar{v}_2}{dx_1} - \bar{\varphi} = 3ax_1^2 - bx_1$$

Por otra parte, las leyes de esfuerzos se escriben

$$\begin{aligned}M_f &= M + F(L - x_1) \\Q &= F\end{aligned}$$

Se aplica seguidamente el teorema de los trabajos virtuales:

- Trabajo virtual producido por las fuerzas internas M_f y Q

$$\begin{aligned}\bar{W}_i &= \int_o^L [M + F(L - x_1)]b dx_1 + \int_o^L F(3ax_1^2 - bx_1) dx_1 \\&= MbL + \frac{FbL^2}{2} + FaL^3 - Fb\frac{L^2}{2} = MbL + FaL^3\end{aligned}\quad (a)$$

- Trabajo virtual producido por las fuerzas externas

$$\bar{W}_e = M\bar{\varphi}(x_1 = L) + F\bar{v}_2(x_1 = L) = MbL + FaL^3 \quad (b)$$

Tal como establece el teorema de los trabajos virtuales, las expresiones a y b coinciden.

7.2.1.2 Pieza curva

En el caso más general de pieza curva, las ecuaciones 7.1 se escribirán

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (7.10a)$$

$$\frac{dM_f}{ds} + m + Q = 0 \quad (7.10b)$$

escribiéndose en este caso

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= N\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p} &= p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Es importante notar la diferencia entre las ecuaciones anteriores y las 7.2. Dicha diferencia viene dada por el hecho de que las derivadas respecto a la coordenada curvilínea s de los vectores \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 no son nulas como sucedía en el caso de piezas rectas. Escribiendo nuevamente 7.10 en forma débil

$$\int_o^{s_o} \left(\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} ds + \int_o^{s_o} \left(\frac{dM_f}{ds} + m + Q \right) \bar{\varphi} ds = 0 \quad (7.11)$$

siendo $\bar{\varphi}$, al igual que anteriormente, un giro virtual y $\bar{\mathbf{v}}$ un desplazamiento virtual de componentes

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Integrando 7.11 por partes

$$\begin{aligned} M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} - \int\limits_o^{s_o} M_f \frac{d\bar{\varphi}}{ds} ds + \int\limits_o^{s_o} m \bar{\varphi} ds + \int\limits_o^{s_o} Q \bar{\varphi} ds + \boldsymbol{F} \cdot \bar{\mathbf{v}} \Big|_o^{s_o} - \\ - \int\limits_o^{s_o} \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{ds} ds + \int\limits_o^{s_o} \boldsymbol{p} \cdot \bar{\mathbf{v}} ds = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Por otra parte, si \mathbf{z} es la coordenada de un punto cualquiera de la directriz de la pieza antes de la deformación y \mathbf{z}' es la coordenada del mismo punto después de la deformación, los desplazamientos se escribirán

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}' - \mathbf{z} \quad (7.14)$$

y también

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d\mathbf{z}'}{ds} - \frac{d\mathbf{z}}{ds} = \mathbf{t} - \mathbf{e}_1 \quad (7.15)$$

siendo \mathbf{t} el vector tangente a la directriz después de la deformación (ver Fig. 7.3).

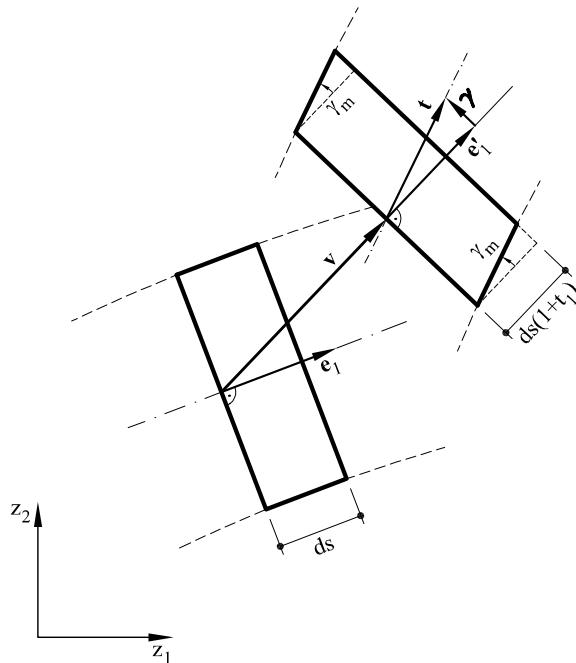


Fig. 7.3 Movimiento de una sección de una pieza plana

De acuerdo con la figura 7.3, \mathbf{e}'_1 es igual al vector \mathbf{e}_1 girado un *ángulo* φ y tal que

$$\|\mathbf{e}'_1\| = \|\mathbf{e}_1\|(1 + \epsilon_1) = (1 + \epsilon_1) \quad (7.16)$$

es decir

$$\mathbf{e}'_1 \frac{1}{1 + \epsilon_1} = \mathbf{e}_1 + \varphi \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (7.17)$$

además

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}'_1 + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \varphi \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \boldsymbol{\gamma} \quad (7.18)$$

sustituyendo en 7.15 se tendrá

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \mathbf{t} - \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \varphi \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_1 = \epsilon_1 \mathbf{e}_1 + \varphi(1 + \epsilon_1) \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_2 \quad (7.19)$$

y dado que los movimientos son pequeños, el producto $\varphi \epsilon_1$ puede despreciarse, por lo que la expresión 7.19 queda finalmente

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \epsilon_1 \mathbf{e}_1 + (\varphi + \gamma) \mathbf{e}_2 \quad (7.20)$$

Si los movimientos que se consideran son virtuales, la expresión anterior se transforma en

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{ds} = \bar{\epsilon}_1 \mathbf{e}_1 + (\bar{\varphi} + \bar{\gamma}) \mathbf{e}_2 \quad (7.21)$$

Sustituyendo 7.21 en la expresión 7.13 se obtiene

$$\begin{aligned} M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} - \int_o^{s_o} M_f \frac{d\bar{\varphi}}{ds} ds + \int_o^{s_o} m \bar{\varphi} ds + \int_o^{s_o} Q \bar{\varphi} ds + N \bar{v}_1 \Big|_o^{s_o} + Q \bar{v}_2 \Big|_o^{s_o} \\ - \int_o^{s_o} (N \mathbf{e}_1 + Q \mathbf{e}_2) \cdot [\bar{\epsilon}_1 \mathbf{e}_1 + (\bar{\varphi} + \bar{\gamma}) \mathbf{e}_2] ds + \int_o^{s_o} \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{v}} ds = 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

es decir

$$\begin{aligned} \int_o^{s_o} M_f \bar{\chi} ds + \int_o^{s_o} Q \bar{\gamma} ds + \int_o^{s_o} N \bar{\epsilon}_1 ds = \\ = M_f \bar{\varphi} \Big|_o^{s_o} + Q \bar{v}_2 \Big|_o^{s_o} + N \bar{v}_1 \Big|_o^{s_o} + \int_o^{s_o} m \bar{\varphi} ds + \int_o^{s_o} p_1 \bar{v}_1 ds + \int_o^{s_o} p_2 \bar{v}_2 ds \end{aligned} \quad (7.23)$$

expresión muy similar a la 7.7 pero válida ahora para cualquier tipo de pieza plana. Nótese asimismo que, para el caso de piezas curvas, se tiene que en general $\epsilon_1 \neq dv_1/ds$.

7.3 Teorema de los trabajos virtuales complementarios

7.3.1 Formulación

Considérese al igual que en el apartado anterior una pieza cualquiera sometida a un determinado sistema de cargas. Dicha pieza tendrá unos desplazamientos $\mathbf{v}(s)$ en cada punto. Supóngase seguidamente que a dicha pieza se aplica un sistema de cargas virtuales $\bar{\mathbf{p}}(s)$, las cuales motivarán la aparición de unos esfuerzos $\bar{\mathbf{F}}(s)$ y $\bar{\mathbf{M}}(s)$ también virtuales. Se cumplirán las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{d\bar{\mathbf{F}}}{ds} + \bar{\mathbf{p}}(s) = \mathbf{0} \quad (7.24a)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{ds} + \bar{\mathbf{m}} + \frac{d\mathbf{z}}{ds} \times \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (7.24b)$$

Al igual que antes, el teorema de los trabajos virtuales complementarios se realizará para piezas rectas. Para piezas curvas, sin embargo, y dada la similitud que presenta la demostración con el caso anterior, se escribirá únicamente la expresión general, dejando como ejercicio para el lector su demostración.

Para el caso particular de una pieza bidimensional, las anteriores ecuaciones tomarán la forma:

$$\frac{d\bar{N}}{dx_1} + \bar{p}_1 = 0 \quad (7.25a)$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dx_1} + \bar{p}_2 = 0 \quad (7.25b)$$

$$\frac{d\bar{M}_f}{dx_1} + \bar{m} + \bar{Q} = 0 \quad (7.25c)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma débil

$$\int_o^{s_o} \left(\frac{d\bar{M}_f}{dx_1} + \bar{m} + \bar{Q} \right) \varphi dx_1 + \int_o^{s_o} \left(\frac{d\bar{Q}}{dx_1} + \bar{p}_2 \right) v_2 dx_1 + \int_o^{s_o} \left(\frac{d\bar{N}}{dx_1} + \bar{p}_1 \right) v_1 dx_1 = 0 \quad (7.26)$$

siendo φ , v_1 y v_2 los giros y desplazamientos reales de la pieza. Procediendo igual que antes se llega a

$$\begin{aligned} & \int_o^{s_o} \bar{M}_f \chi dx_1 + \int_o^{s_o} \bar{Q} \gamma dx_1 + \int_o^{s_o} \bar{N} \frac{dv_1}{dx_1} dx_1 = \\ &= \bar{M}_f \varphi \Big|_o^{s_o} + \bar{Q} v_2 \Big|_o^{s_o} + \bar{N} v_1 \Big|_o^{s_o} + \int_o^{s_o} \bar{m} \varphi ds + \int_o^{s_o} \bar{p}_1 v_1 dx_1 + \int_o^{s_o} \bar{p}_2 v_2 dx_1 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Puede formularse, por tanto, el teorema de los trabajos virtuales complementarios como sigue: *Si a una pieza en equilibrio se la somete a unas determinadas cargas virtuales, el trabajo realizado por las fuerzas internas es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas.*

Nuevamente es preciso realizar la misma observación respecto al término de deformación por cortante, en el sentido de que si éste se desprecia, el término $\int_0^{s_o} \bar{Q}\gamma dx_1$ se anula.

Para el caso más general de piezas curvas, la expresión 7.27 de trabajos virtuales complementarios se escribe

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_o} \bar{M}_f \chi ds + \int_0^{s_o} \bar{Q}\gamma ds + \int_0^{s_o} \bar{N}\epsilon_1 ds = \\ &= \bar{M}_f \varphi \Big|_0^{s_o} + \bar{Q}v_2 \Big|_0^{s_o} + \bar{N}v_1 \Big|_0^{s_o} + \int_0^{s_o} \bar{m}\varphi ds + \int_0^{s_o} \bar{p}_1 v_1 ds + \int_0^{s_o} \bar{p}_2 v_2 ds \end{aligned} \quad (7.28)$$

Las expresiones 7.27 y 7.28 pueden escribirse de otra forma que en muchas ocasiones puede resultar más conveniente. Dado que

$$\chi = \frac{M_f}{EI} \quad (7.29a)$$

$$\gamma = \frac{Q}{kGA} \quad (7.29b)$$

$$\epsilon_1 = \frac{N}{EA} \quad (7.29c)$$

siendo kA el valor de la sección reducida a cortante, se puede reescribir la ecuación de trabajos virtuales complementarios en la forma

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_o} \frac{\bar{M}_f \bar{M}_f}{EI} ds + \int_0^{s_o} \frac{\bar{Q}\bar{Q}}{kGA} ds + \int_0^{s_o} \frac{\bar{N}\bar{N}}{EA} ds = \\ &= \bar{M}_f \varphi \Big|_0^{s_o} + \bar{Q}v_2 \Big|_0^{s_o} + \bar{N}v_1 \Big|_0^{s_o} + \int_0^{s_o} \bar{m}\varphi ds + \int_0^{s_o} \bar{p}_1 v_1 ds + \int_0^{s_o} \bar{p}_2 v_2 ds \end{aligned} \quad (7.30)$$

expresión más cómoda que la anterior.

7.3.2 Método de la fuerza unidad para la determinación de movimientos

El teorema de los trabajos virtuales complementarios anteriormente desarrollado tiene una interesante aplicación en la obtención de movimientos de una pieza cualquiera.

Supóngase una estructura cualquiera (isostática o hiperestática) en la que se conocen sus leyes de esfuerzos M_f , Q y N y de la que se desea obtener el movimiento de un punto

determinado C de la misma según una determinada dirección (Fig. 7.4). Para ello se aplica una fuerza virtual concentrada $\bar{\mathbf{F}} = 1$ en C en la dirección en que se desea obtener el movimiento.

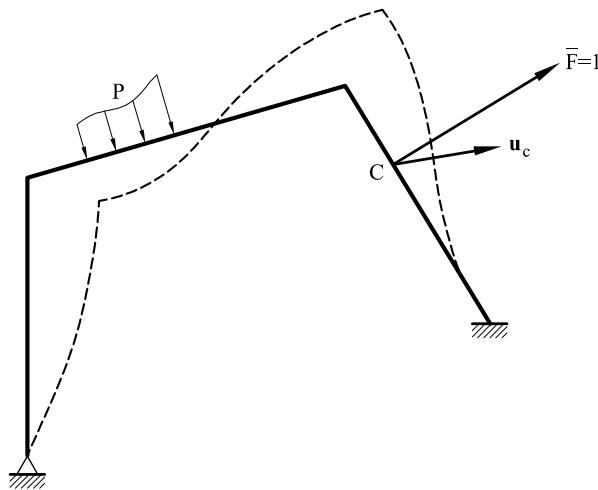


Fig. 7.4 Estructura sometida a fuerzas externas y a una fuerza virtual unidad

Sea:

M_f, Q, N los esfuerzos en la estructura bajo la acción de las cargas externas que en ella actúan.

m_f, q, n los esfuerzos en la misma estructura cuando en el punto C actúa una fuerza unidad $\bar{\mathbf{F}} = 1$ en una determinada dirección.

\mathbf{u}_c el vector movimiento total del punto C .

u_c^F la componente del movimiento \mathbf{u}_c en la dirección de $\bar{\mathbf{F}} = 1$.

Lógicamente

$$u_c^F = \mathbf{u}_c \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (7.31)$$

Aplicando la expresión 7.30 del teorema de los trabajos virtuales complementarios

$$\int_o^{s_o} \frac{M_f m_f}{EI} ds + \int_o^{s_o} \frac{Qq}{kGA} ds + \int_o^{s_o} \frac{Nn}{EA} ds = \mathbf{u}_c \cdot \bar{\mathbf{F}} = u_c^F \quad (7.32)$$

Expresión que proporciona el movimiento de cualquier punto de una estructura en una determinada dirección. Evidentemente, si se quisiera obtener el giro, se aplicaría un momento virtual $\bar{M} = 1$.

En la práctica, aparecen casos en los cuales no todas las deformaciones están producidas por los esfuerzos, sino que pueden tener otro origen, por ejemplo el térmico.

En tales casos, las expresiones 7.29 se pueden escribir de forma más general

$$\begin{aligned}\chi^t &= \chi + \chi^{nt} \\ \gamma^t &= \gamma + \gamma^{nt} \\ \epsilon_1^t &= \epsilon_1 + \epsilon_1^{nt}\end{aligned}$$

en donde χ^t, γ^t y ϵ_1^t son las deformaciones generalizadas totales, χ, γ y ϵ_1 son las deformaciones generalizadas debidas a los esfuerzos M_f, Q y N respectivamente (expresiones 7.29) y χ^{nt}, γ^{nt} y ϵ_1^{nt} son las deformaciones generalizadas producidas por otras causas (efectos térmicos, retracción, etc.).

Si a una estructura con las deformaciones generalizadas anteriores se le aplica una fuerza virtual concentrada $\bar{F} = 1$ en un punto C y en la dirección en que se desea obtener el movimiento de la estructura, la expresión 7.32 se reescribirá

$$\int_o^{s_o} \chi^t m_f \, ds + \int_o^{s_o} \gamma^t q \, ds + \int_o^{s_o} \epsilon_1^t n \, ds = u_c^F \quad (7.33a)$$

o también, desarrollando los términos de las deformaciones generalizadas

$$\int_o^{s_o} \frac{M_f m_f}{EI} \, ds + \int_o^{s_o} \frac{Q q}{kGA} \, ds + \int_o^{s_o} \frac{N n}{EA} \, ds + W_i^{nt} = u_c^F \quad (7.33b)$$

siendo

$$W_i^{nt} = \int_o^{s_o} \chi^{nt} m_f \, ds + \int_o^{s_o} \gamma^{nt} q \, ds + \int_o^{s_o} \epsilon_1^{nt} n \, ds$$

La expresión 7.32 (o la más general 7.33a y 7.33b) es extremadamente útil en la determinación de los movimientos de las estructuras y será utilizada en los capítulos que siguen.

♣ Problema resuelto P7.2 Supóngase que se desea determinar el movimiento vertical y el giro en el punto A de la ménsula de la figura P7.2.1.

Solución

Los esfuerzos en la pieza valen

$$\begin{aligned}M_f(x_1) &= -p \frac{x_1^2}{2} \\ Q(x_1) &= px_1\end{aligned}$$

Para determinar el desplazamiento vertical del punto A , se coloca una fuerza vertical en A de valor $\bar{F} = 1$. Los esfuerzos provocados por esta fuerza valdrán

$$\begin{aligned}m_f &= -x_1 \\ q &= 1\end{aligned}$$

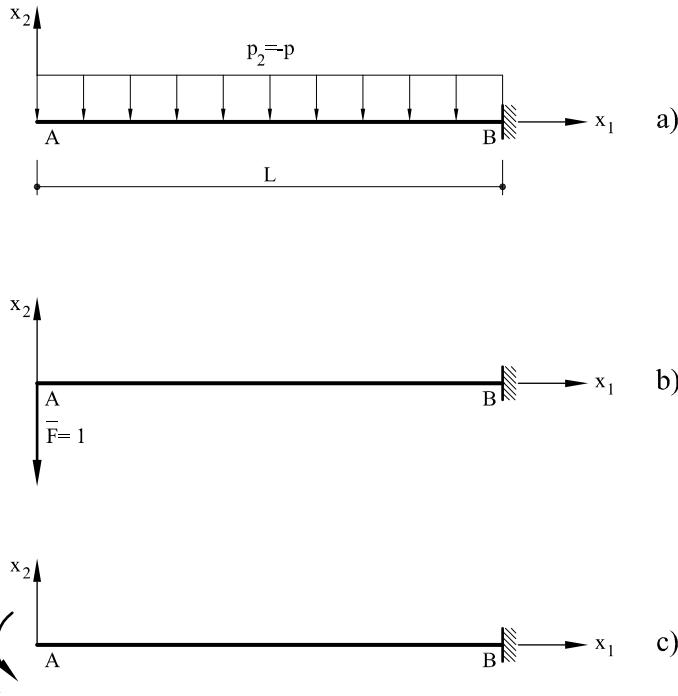


Fig. P7.2.1 Determinación de la flecha y el giro en el extremo de una ménsula

Aplicando la expresión 7.32 se obtendrá el desplazamiento vertical v_{2A} del punto A

$$v_{2A} = \int_0^L \frac{\left(-\frac{px_1^2}{2}\right)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^L \frac{px_1 \cdot 1}{kGA} dx_1 = \frac{pL^4}{8EI} + \frac{pL^2}{2kGA}$$

Es importante recordar que v_{2A} es el producto escalar del desplazamiento por la fuerza $\bar{F} = 1$, lo que quiere decir que un signo negativo indicaría que el desplazamiento tiene sentido contrario a la fuerza $\bar{F} = 1$.

Análogamente, para obtener el giro en el punto A se aplica en dicho punto un momento virtual $\bar{M} = 1$. Las leyes de esfuerzos que dicho momento producirá valen

$$\begin{aligned} m_f &= -1 \\ q &= 0 \end{aligned}$$

por lo que, aplicando nuevamente la expresión 7.32, se obtendrá el giro φ_A en el punto A

$$\varphi_A = \int_0^L \frac{\left(-\frac{px_1^2}{2}\right)(-1)}{EI} dx_1 = \frac{pL^3}{6EI}$$

La misma observación realizada anteriormente a propósito del signo de v_{2A} es igualmente aplicable ahora al giro.

7.4 Energía potencial total

El teorema de la minimización de la energía potencial total puede plantearse como una consecuencia directa del teorema de los trabajos virtuales. Para ello, basta con notar que los movimientos virtuales $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{\varphi}$ se pueden escribir como una variación arbitraria de los movimientos previamente existentes en la estructura, es decir, $\bar{v}_1 = \delta v_1$, $\bar{v}_2 = \delta v_2$, $\bar{\varphi} = \delta\varphi$, con lo cual $\bar{\chi} = \delta\chi$ y también $\bar{\gamma} = \delta\gamma$ y $\bar{\epsilon}_1 = \delta\epsilon_1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta\chi &= \frac{\delta M_f}{EI} \\ \delta\gamma &= \frac{\delta Q}{kGA} \\ \delta\epsilon_1 &= \frac{\delta N}{EA}\end{aligned}$$

Sustituyendo en 7.23, se obtiene

$$\int_o^{s_o} M_f \frac{\delta M_f}{EI} ds + \int_o^{s_o} Q \frac{\delta Q}{kGA} ds + \int_o^{s_o} N \frac{\delta N}{EA} - \left[\int_o^{s_o} p_1 \delta v_1 ds + \int_o^{s_o} p_2 \delta v_2 ds + \sum_i F_{1i} \delta v_{1i} + \sum_i F_{2i} \delta v_{2i} \right] = 0 \quad (7.34)$$

La expresión anterior, aunque escrita en forma ligeramente distinta a la 7.23, es la misma; únicamente se ha supuesto además que existen cargas concentradas en la pieza y considerado que las fuerzas y momentos de extremo de barra son unas cargas concentradas más. Teniendo en cuenta que

$$M_f \frac{\delta M_f}{EI} = \delta \left(\frac{M_f^2}{2EI} \right) \quad (7.35a)$$

$$Q \frac{\delta Q}{kGA} = \delta \left(\frac{Q^2}{2kGA} \right) \quad (7.35b)$$

$$N \frac{\delta N}{EA} = \delta \left(\frac{N^2}{2EA} \right) \quad (7.35c)$$

se obtiene

$$\delta \left[\int_o^{s_o} \frac{M_f^2}{2EI} ds + \int_o^{s_o} \frac{Q^2}{2kGA} ds + \int_o^{s_o} \frac{N^2}{2EA} ds + \left(- \int_o^{s_o} p_1 v_1 ds - \int_o^{s_o} p_2 v_2 ds - \sum_i F_{1i} v_{1i} - \sum_i F_{2i} v_{2i} \right) \right] = 0 \quad (7.36)$$

El término

$$\int_o^{s_o} \frac{M_f^2}{2EI} ds + \int_o^{s_o} \frac{Q^2}{2kGA} ds + \int_o^{s_o} \frac{N^2}{2EA} ds$$

es la energía interna de deformación W , mientras que el término entre paréntesis es la energía potencial de las fuerzas externas U_p . Por lo tanto, la expresión 7.36 puede escribirse

$$\delta W + \delta U_p = 0 \quad (7.37a)$$

$$\delta(W + U_p) = 0 \quad (7.37b)$$

Al término $\Pi = W + U_p$ se le denomina *energía potencial total* del sistema.

Las expresiones 7.37 indican que la energía potencial total del sistema debe ser estacionaria frente a cualquier variación de los desplazamientos. Se expresa también

$$\delta\Pi = 0 \quad (7.38)$$

y también

$$\delta\Pi = \sum_i \frac{\partial\Pi}{\partial v_i} \delta v_i \quad (7.39a)$$

y puesto que las variaciones δv_i son arbitrarias, es preciso que para todo i se cumpla que $\partial\Pi/\partial v_i = 0$, por lo que resulta que Π debe ser un máximo o un mínimo frente a los desplazamientos.

Si el equilibrio es estable, se trata de un mínimo, con lo cual $\delta^2\Pi > 0$, mientras que si $\delta^2\Pi < 0$ se estará en presencia de un problema de inestabilidad.

En 7.39a se ha supuesto que la energía potencial total se expresa en función de los desplazamientos referidos a las coordenadas locales. Lógicamente puede también expresarse en función de los desplazamientos referidos a las coordenadas globales. En este caso, 7.39a se reescribe

$$\delta\Pi = \sum_i \frac{\partial\Pi}{\partial u_i} \delta u_i \quad (7.39b)$$

con lo que igualmente se llega a la conclusión de extremo de Π .

7.5 Expresión de la energía elástica

Una vez llegados a este punto, es conveniente hacer un alto para analizar detenidamente las componentes de la energía elástica de deformación, así como sus diferentes posibles expresiones.

La energía elástica de deformación puede expresarse de diferentes formas:

- a) *Como una función de las variables externas.* En este caso es posible elegir varias alternativas:

- Expresar la energía elástica como una función de las fuerzas externas y de los desplazamientos existentes en los puntos de aplicación de las mismas.
 - Como una forma cuadrática de las fuerzas externas.
 - Como una forma cuadrática de los movimientos de los puntos de actuación de las fuerzas.
- b) *Como una función de las variables internas.* En este caso caben asimismo diferentes alternativas:
- Expresar la energía elástica como una función de los esfuerzos internos de la pieza (momentos flectores, esfuerzos cortantes, esfuerzos axiles y momentos torsores).
 - Como una función de los esfuerzos internos y de las deformaciones generalizadas (curvaturas, etc.).
 - Como una función de las deformaciones generalizadas.

Indudablemente, al ser la energía elástica una función de estado, todas las anteriores expresiones son equivalentes.

Seguidamente se analizan con algún detalle las diferentes expresiones de la energía elástica enunciadas anteriormente.

a) *Expresión de la energía elástica como una función de las variables externas*

Supóngase una pieza elástica cargada con unas fuerzas $\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_i \dots \mathbf{F}_n$ (Fig. 7.5) que producen unos movimientos $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i \dots \mathbf{u}_n$ en los puntos de aplicación de las mismas. Lógicamente pueden actuar también momentos, en cuyo caso el correspondiente movimiento a considerar sería un giro.

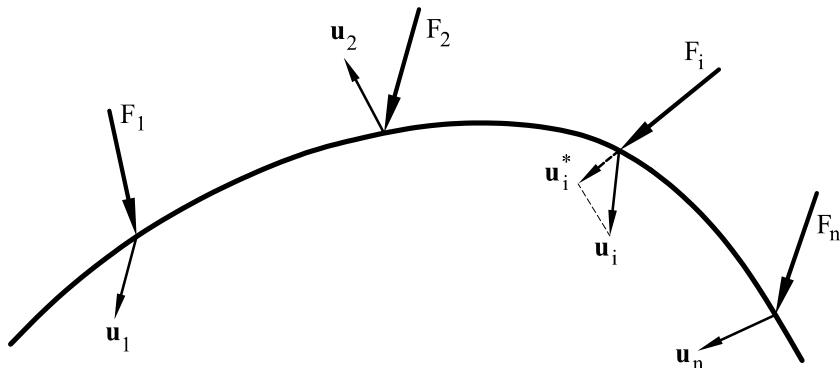


Fig. 7.5 Fuerzas y movimientos en una pieza elástica

Si todas las cargas se aumentan proporcionalmente desde cero a su valor final, es evidente que la energía de deformación vendrá dada por la suma de productos escalares,

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i \quad (7.40)$$

que también puede escribirse

$$W = \frac{1}{2} \sum_i F_i u_i^* \quad (7.41)$$

siendo F_i el módulo de \mathbf{F}_i y u_i^* la proyección (positiva o negativa) del movimiento \mathbf{u}_i en la dirección de la fuerza \mathbf{F}_i . A los movimientos u_i^* se les denomina *movimientos eficaces*.

La expresión anterior puede escribirse como función de las fuerzas externas. Para ello basta tener en cuenta que los desplazamientos eficaces u_i^* dependen linealmente de las fuerzas externas \mathbf{F}_j , es decir

$$u_i^* = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} F_j \quad (7.42)$$

siendo α_j unos coeficientes que serán conocidos una vez resuelto el problema elástico. Sustituyendo 7.42 en 7.41 se obtiene la energía elástica como una forma cuadrática de las fuerzas externas

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} F_i F_j \quad (7.43)$$

Análogamente, se puede escribir la energía elástica como una función de los movimientos eficaces. Para ello, invirtiendo las relaciones 7.42 se tendrá

$$F_i = \sum_j \beta_{ij} u_j^* \quad (7.44)$$

expresión que sustituida en 7.41 proporciona

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \beta_{ij} u_i^* u_j^* \quad (7.45)$$

lo cual proporciona la expresión de la energía elástica en función de los desplazamientos eficaces.

La expresión 7.45 puede escribirse también en función de los movimientos totales. Para ello, basta observar que 7.44 puede reescribirse

$$u_i^* = c_i u_i \quad (7.46)$$

siendo c_i el coseno del ángulo que forma el movimiento con la fuerza aplicada, por lo que 7.45 tomará la forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \beta'_{ij} u_j u_i \quad (7.47)$$

Es importante señalar que, puesto que el valor de la energía elástica es único, las expresiones anteriores son válidas independientemente del proceso de carga.

b) *Expresión de la energía elástica en función de variables internas.*

Tal como se ha tenido ocasión de indicar anteriormente, la energía elástica puede escribirse como semisuma de las integrales extendidas a toda la pieza de los esfuerzos multiplicados por las deformaciones generalizadas. Para el caso bidimensional dicha energía tendrá la forma

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} M_f \chi \, ds + \int_o^{s_o} Q \gamma \, ds + \int_o^{s_o} N \epsilon_1 \, ds \right] \quad (7.48a)$$

que también puede escribirse

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} \frac{M_f^2}{EI} \, ds + \int_o^{s_o} \frac{Q^2}{kGA} \, ds + \int_o^{s_o} \frac{N^2}{EA} \, ds \right] \quad (7.48b)$$

o también

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} EI \chi^2 \, ds + \int_o^{s_o} kGA \gamma^2 \, ds + \int_o^{s_o} EA \epsilon_1^2 \, ds \right] \quad (7.48c)$$

siendo equivalentes las tres expresiones.

♣ **Problema resuelto P7.3** Considerese la ménsula de la figura P7.3.1 en la que actúan dos fuerzas F_1 y F_2 . Para mayor simplicidad se desprecia la deformación debida al esfuerzo cortante. Tal como se verá más adelante, los desplazamientos en los puntos B y C valen:

$$u_{2B} = \frac{a^3}{6EI} (2F_1 + 5F_2) \quad (a)$$

$$u_{2C} = \frac{a^3}{6EI} (5F_1 + 16F_2) \quad (b)$$

Escribir las diversas expresiones de la energía elástica.

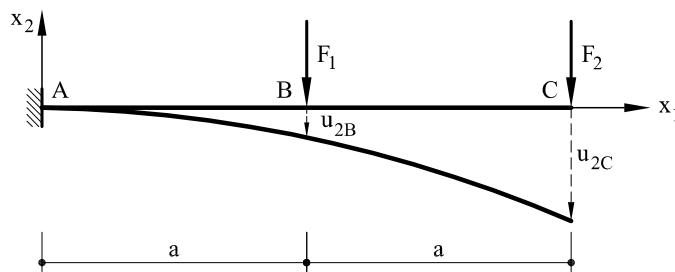


Fig. P7.3.1 Ménsula sometida a cargas externas

Solución

- a) En función de las variables externas, la energía elástica se escribirá:
 - En función de las fuerzas y los movimientos

$$W = \frac{1}{2}F_1u_{2B} + \frac{1}{2}F_2u_{2C} \quad (c)$$

- En función de las fuerzas

Sustituyendo en *c* las expresiones de los desplazamientos dados por las expresiones *a* y *b* se obtiene

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}F_1 \frac{a^3}{6EI} (2F_1 + 5F_2) + \frac{1}{2}F_2 \frac{a^3}{6EI} (5F_1 + 16F_2) \\ &= \frac{a^3}{6EI} (F_1^2 + 5F_1F_2 + 8F_2^2) \end{aligned} \quad (d)$$

- En función de los movimientos

Invirtiendo las relaciones *a* y *b* se obtiene

$$F_1 = \frac{6EI}{7a^3} (16u_{2B} - 5u_{2C})$$

$$F_2 = \frac{6EI}{7a^3} (-5u_{2B} + 2u_{2C})$$

y sustituyendo en *d*

$$W = \frac{6EI}{49a^3} (56u_{2B}^2 - 35u_{2B}u_{2C} + 7u_{2C}^2)$$

- b) En función de las fuerzas internas

La ley de momentos flectores se escribe

$$M_f|_A^B = -F_1(a - x_1) - F_2(2a - x_1)$$

$$M_f|_B^C = -F_2(2a - x_1)$$

Sustituyendo ambas expresiones en 7.48b y recordando que en este ejemplo se desprecia la energía de deformación debida al esfuerzo cortante, se obtiene

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int\limits_o^a \frac{[-F_1(a - x_1) - F_2(2a - x_1)]^2}{EI} dx_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int\limits_a^{2a} \frac{[-F_2(2a - x_1)]^2}{EI} dx_1 \end{aligned}$$

expresión que integrada coincide con la *d* tal como era de esperar.

7.6 Primer teorema de Castiglano

Supóngase un sistema elástico en equilibrio sometido a una serie de fuerzas externas F_i , las cuales deben ser independientes. Si u_i^* son los desplazamientos eficaces en los puntos de actuación de las fuerzas, la energía elástica se escribe

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i u_i^* \quad (7.49)$$

Se da a continuación un incremento diferencial de desplazamiento du_i^* al punto i y cero al resto. Lógicamente, cada una de las otras fuerzas F_j se modificará en un diferencial, aunque su contribución al incremento de energía será nulo, al serlo el incremento de los respectivos movimientos eficaces. El incremento de energía elástica valdrá

$$dW = F_i du_i^* + \frac{1}{2} dF_i du_i^* = F_i du_i^* \quad (7.50)$$

Este incremento de energía elástica puede también escribirse

$$dW = \frac{\partial W}{\partial u_i^*} du_i^* \quad (7.51)$$

e igualando

$$\frac{\partial W}{\partial u_i^*} du_i^* = F_i du_i^* \quad (7.52)$$

o sea

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i^*} \quad (7.53)$$

lo cual constituye la expresión del primer teorema de Castiglano.

Más adelante se verán las aplicaciones de este teorema al cálculo de estructuras hiperestáticas.

Otra deducción del primer teorema de Castiglano

Anteriormente se ha visto que la energía potencial total del sistema vale

$$\Pi = W - \sum F_i u_i^* \quad (7.54)$$

La primera variación de Π debe ser nula, es decir

$$\delta\Pi = \delta W - \sum F_i \delta u_i^* = \sum_i \frac{\partial W}{\partial u_i^*} \delta u_i^* - \sum_i F_i \delta u_i^* = \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial u_i^*} - F_i \right) \delta u_i^* \quad (7.55)$$

y puesto que las variaciones δu_i^* son arbitrarias

$$\frac{\partial W}{\partial u_i^*} - F_i = 0$$

o sea

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i^*} \quad (7.56)$$

lo cual constituye otra demostración del primer teorema de Castigliano.

7.7 Segundo teorema de Castigliano

7.7.1 Formulación

Supóngase al igual que antes un sistema elástico cargado con un conjunto de fuerzas independientes F_i . De acuerdo con la expresión del teorema de los trabajos virtuales complementarios puede escribirse

$$\int_o^{s_o} \overline{M}_f \chi \, ds + \int_o^{s_o} \overline{Q} \gamma \, ds + \int_o^{s_o} \overline{N} \epsilon_1 \, ds = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i u_i^* \quad (7.57)$$

Si los esfuerzos y fuerzas virtuales de la expresión anterior son una variación de los esfuerzos y fuerzas reales existentes debidos a las fuerzas F_i , se tendrá $\overline{M}_f = \delta M_f$, $\overline{Q} = \delta Q$, $\overline{N} = \delta N$, $\overline{F} = \delta F$. Además, como

$$\chi = \frac{M_f}{EI} \quad (7.58a)$$

$$\gamma = \frac{Q}{kGA} \quad (7.58b)$$

$$\epsilon_1 = \frac{N}{EA} \quad (7.58c)$$

la expresión 7.57 puede escribirse

$$\int_o^{s_o} \frac{M_f}{EI} \delta M_f \, ds + \int_o^{s_o} \frac{Q}{kGA} \delta Q \, ds + \int_o^{s_o} \frac{N}{EA} \delta N \, ds = \sum_i u_i^* \delta F_i \quad (7.59)$$

o sea

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_o^{s_o} \frac{M_f^2}{EI} \, ds + \frac{1}{2} \int_o^{s_o} \frac{Q^2}{kGA} \, ds + \frac{1}{2} \int_o^{s_o} \frac{N^2}{EA} \, ds \right] - \sum_i u_i^* \delta F_i = 0 \quad (7.60)$$

es decir

$$\delta W - \sum_i u_i^* \delta F_i = 0 \quad (7.61)$$

pero como $\delta W = \sum_i \frac{\partial W}{\partial F_i} \delta F_i$ sustituyendo en 7.61

$$\sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial F_i} - u_i^* \right) \delta F_i = 0 \quad (7.62)$$

y como las fuerzas virtuales son arbitrarias

$$u_i^* = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (7.63)$$

lo cual constituye la expresión del segundo teorema de Castigliano.

Otra demostración

La energía elástica de la pieza cargada vale W . Si se incrementa el valor de una fuerza cualquiera F_i en un diferencial dF_i la nueva energía elástica valdrá

$$W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i \quad (7.64)$$

Supóngase seguidamente que la carga se realiza cargando primeramente la fuerza dF_i y posteriormente el resto de las cargas. La energía elástica final valdrá

$$\frac{1}{2} dF_i du_i^* + dF_i u_i^* + \frac{1}{2} \sum_j F_j u_j^* = u_i^* dF_i + W \quad (7.65)$$

y puesto que las expresiones 7.64 y 7.65 deben ser equivalentes

$$u_i^* = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (7.66)$$

que constituye la expresión del segundo teorema de Castigliano.

7.7.2 Aplicación del segundo teorema de Castigliano a la determinación de movimientos

El segundo teorema de Castigliano, uno de los teoremas más importantes de todo el cálculo de estructuras, tiene dos importantes aplicaciones: por una parte en la determinación de los esfuerzos en estructuras hiperestáticas tal como se verá más adelante, y por otra en la determinación de movimientos, tal como se expone seguidamente.

Cabe considerar varios casos:

- a) *En el punto en que se desea determinar el movimiento existe una fuerza concentrada aplicada.* En este caso, la aplicación directa del segundo teorema de Castigliano proporciona el desplazamiento eficaz en este punto. Para aclararlo, considérese el siguiente ejemplo.

♣ **Problema resuelto P7.4** Sea la ménsula de la figura P7.4.1 sometida a las fuerzas allá indicadas. Se desea hallar el movimiento vertical del punto B.

Solución

Las leyes de esfuerzos serán

$$\begin{aligned} M_f &= -\frac{p}{2}(L - x_1)^2 + F(L - x_1) \\ Q &= F - p(L - x_1) \end{aligned}$$

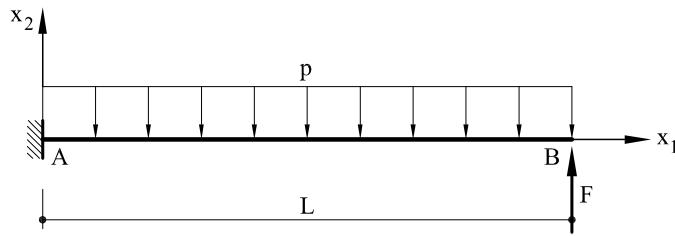


Fig. P7.4.1 Ménsula cargada

La energía elástica valdrá

$$W = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{M_f^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{Q^2}{kGA} ds$$

A partir de la expresión 7.66, se obtiene la flecha en *B*

$$u_{2B} = u_{2B}^* = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_0^s M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \frac{ds}{EI} + \int_0^s Q \frac{\partial Q}{\partial F} ds$$

y puesto que

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_f}{\partial F} &= (L - x_1) \\ \frac{\partial Q}{\partial F} &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{2B} &= \int_0^L \left[-\frac{p}{2}(L - x_1)^2 + F(L - x_1) \right] (L - x_1) \frac{dx_1}{EI} + \int_0^L \left[F - p(L - x_1) \right] \frac{dx_1}{kGA} \\ &= -\frac{pL^4}{8EI} + \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{kGA} - \frac{pL^2}{2kGA}\end{aligned}$$

- b) *En el punto en que se desea determinar el movimiento según una determinada dirección no hay aplicada ninguna fuerza concentrada en tal dirección.* En este caso se supone aplicada en dicho punto y en la dirección deseada una fuerza de valor *F*. Las nuevas leyes de esfuerzos valdrán:

$$M_f^t = M_f + Fm_f \quad (7.67a)$$

$$Q^t = Q + Fq \quad (7.67b)$$

$$N^t = N + Fn \quad (7.67c)$$

siendo M_f , Q y N los esfuerzos en la pieza con las cargas reales, y Fm_f , Fq y Fn los esfuerzos en la misma pieza debidos a la fuerza ficticia *F*. Lógicamente m_f , q y n serán

los esfuerzos debidos a una fuerza unidad aplicada en el mismo punto y con la misma dirección que F .

La energía elástica valdrá

$$W^t = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{(M_f^t)^2}{2EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{(Q^t)^2}{kGA} ds + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{(N^t)^2}{EA} ds \quad (7.68)$$

y de acuerdo con 7.66, el movimiento total debido a las cargas aplicadas y a la fuerza F será

$$u^{*t} = \frac{\partial W^t}{\partial F} = \int_0^s M_f \frac{\partial M_f^t}{\partial F} ds + \int_0^s Q^t \frac{\partial Q^t}{\partial F} ds + \int_0^s N^t \frac{\partial N^t}{\partial F} ds \quad (7.69)$$

y puesto que

$$\frac{\partial M_f^t}{\partial F} = m_f \quad (7.70a)$$

$$\frac{\partial Q^t}{\partial F} = q \quad (7.70b)$$

$$\frac{\partial N^t}{\partial F} = n \quad (7.70c)$$

sustituyendo en 7.69

$$u^{*t} = \int_0^s (M_f + Fm_f) m_f \frac{ds}{EI} + \int_0^s (Q + Fq) q \frac{ds}{kGA} + \int_0^s (N + Fn) n \frac{ds}{EA} \quad (7.71)$$

El movimiento u^{*t} y el movimiento u^* coincidirán si $F = 0$, por lo que

$$u^* = \int_0^s \frac{M_f m_f}{EI} ds + \int_0^s \frac{Q q}{kGA} ds + \int_0^s \frac{N n}{EA} ds \quad (7.72)$$

expresión que proporciona el movimiento eficaz en el punto de interés.

♣ Problema resuelto P7.5 Determinar el movimiento horizontal del punto A en la pieza de la figura P7.5.1 mediante la aplicación del teorema de Castigliano.

Solución

Se eligen coordenadas polares. Las leyes de esfuerzos serán

$$M_f = -p \frac{R^2}{2} (1 - \sin \theta)^2$$

$$Q = -pR(1 - \sin \theta) \cos \theta$$

$$N = pR(1 - \sin \theta) \sin \theta$$

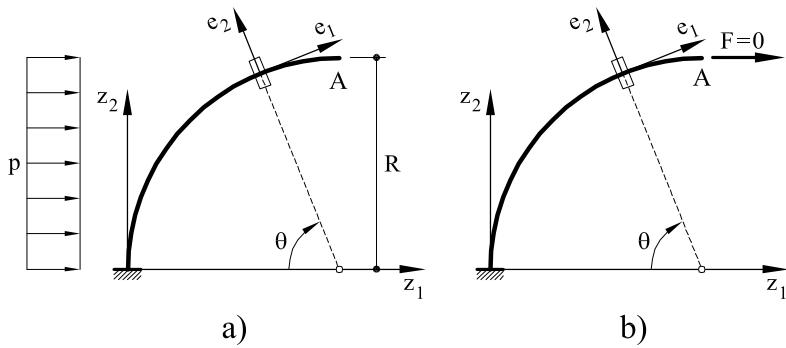


Fig. P7.5.1 Pieza circular: a) Cargas aplicadas, b) Carga unidad

Las leyes de esfuerzos debidos a una fuerza unidad valen

$$m_f = -R(1 - \sin \theta)$$

$$q = -\cos \theta$$

$$n = \sin \theta$$

Aplicando el teorema de Castigiano en su expresión 7.72,

$$\begin{aligned} u_A &= \int_0^{\pi/2} \left[-p \frac{R^2}{2} (1 - \sin \theta)^2 \right] \left[-R(1 - \sin \theta) \right] \frac{R d\theta}{EI} \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} \left[-pR (1 - \sin \theta) \cos \theta \right] (-\cos \theta) \frac{R d\theta}{kGA} \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} \left[pR (1 - \sin \theta) \sin \theta \right] \frac{R d\theta}{EA} \\ &= 0,1302 \frac{pR^4}{EI} + 0,4521 \frac{pR^2}{kGA} + 0,1187 \frac{pR^2}{EA} \end{aligned}$$

que proporciona el valor del desplazamiento del punto A en dirección horizontal.

c) *Determinación del movimiento total de un punto de una pieza.* Este caso es una consecuencia directa del anterior. Para determinar el desplazamiento total, es preciso hallar dos componentes en dos direcciones cualesquiera utilizando la metodología de la fuerza unidad expuesta en el punto anterior.

d) *Determinación del movimiento relativo entre dos puntos.* Supóngase que en una pieza cualquiera (Fig. 7.6) actúan una serie de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{F}_i, -\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_{i+1}, \dots, \mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_n$ de tal forma que dos de ellas $-\mathbf{F}_i$ y \mathbf{F}_i tengan igual módulo y signo contrario y estén aplicadas las dos en puntos distintos de la estructura A y B.

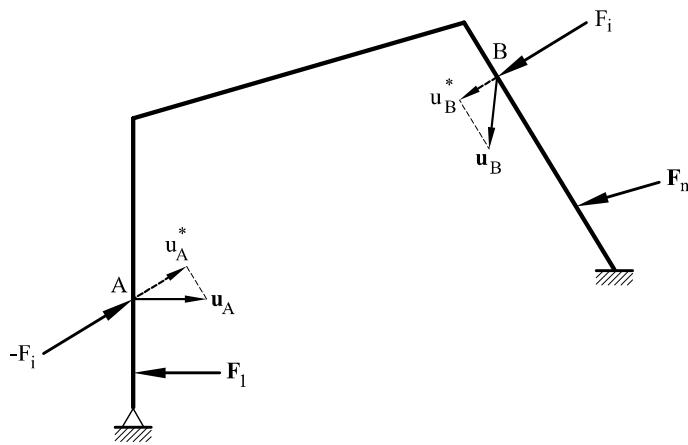


Fig. 7.6 Estructura cargada con un sistema de fuerzas, dos de ellas de igual magnitud y signo opuesto

Supóngase que se carga la estructura con $-d\mathbf{F}_i$ y al mismo tiempo con $d\mathbf{F}_i$. Posteriormente se colocan el resto de las cargas. La energía elástica final valdrá

$$dF_i du_A^* + \frac{1}{2} dF_i du_B^* + dF_i u_A^* + dF_i u_B^* + \frac{1}{2} \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{u}_j \quad (7.73)$$

La energía elástica dada por 7.73 también se puede escribir

$$W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i \quad (7.74)$$

E igualando se obtiene

$$u_{AB} = u_A^* + u_B^* = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (7.75)$$

lo cual proporciona la expresión del movimiento relativo de los puntos A y B en la línea de acción de \mathbf{F}_i .

♣ **Problema resuelto P7.6** Supóngase la viga biapoyada de la figura P7.6.1 cargada con una carga uniformemente repartida p y dos momentos M iguales y de signo contrario aplicados en los puntos de apoyo A y B . Se desea obtener el giro relativo de A respecto a B . Para mayor simplicidad se considerará únicamente la deformación debida al momento flector.

Solución

Las leyes de momentos valdrán

$$M_f = \frac{pL}{2}(L - x_1) - \frac{p(L - x_1)^2}{2} + M$$

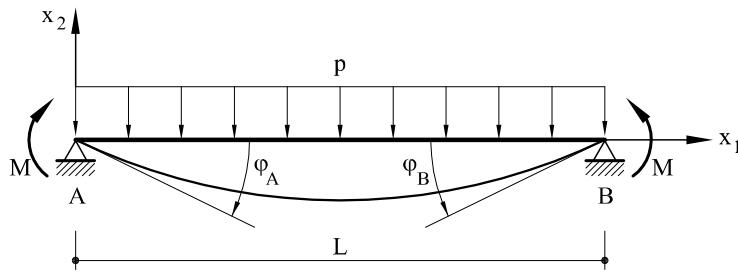


Fig. P7.6.1 Viga biapoyada sometida a carga uniformemente repartida y a momentos en sus extremos

y sus derivadas respecto a M

$$\frac{\partial M_f}{\partial M} = 1$$

Aplicando el teorema de Castigiano

$$\begin{aligned}\varphi_{AB} &= \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} \frac{dx}{EI} \\ &= \int_0^L \left[\frac{pL}{2}(L-x) - \frac{p(L-x)^2}{2} + M \right] \frac{dx}{EI} = \frac{pL^3}{12EI} + \frac{ML}{EI}\end{aligned}$$

lo cual proporciona el valor del giro relativo entre los extremos A y B .

7.8 Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

Este teorema fue enunciado en 1872 por E. Betti y poco más tarde en 1874 por Lord Rayleigh. Previamente, en 1864 Maxwell lo había formulado como un caso particular de su forma más general.

Considérese una pieza elástica cargada de forma independiente con dos sistemas de cargas (Fig. 7.7). El primer sistema consiste en una serie de fuerzas externas \mathbf{p} que darán lugar a un campo de movimientos \mathbf{v} .

El segundo sistema está formado por otras fuerzas distintas $\hat{\mathbf{p}}$ que darán lugar a otro campo de movimientos $\hat{\mathbf{v}}$. El primer sistema de fuerzas dará lugar a unos esfuerzos M_f, Q y N , mientras que el segundo a $\hat{M}_f, \hat{Q}, \hat{N}$. Lógicamente, en el caso tridimensional se tendrán además otros esfuerzos. Ambos sistemas de esfuerzos cumplirán las ecuaciones de equilibrio interno, es decir

$$\frac{d}{ds} (N\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (7.76a)$$

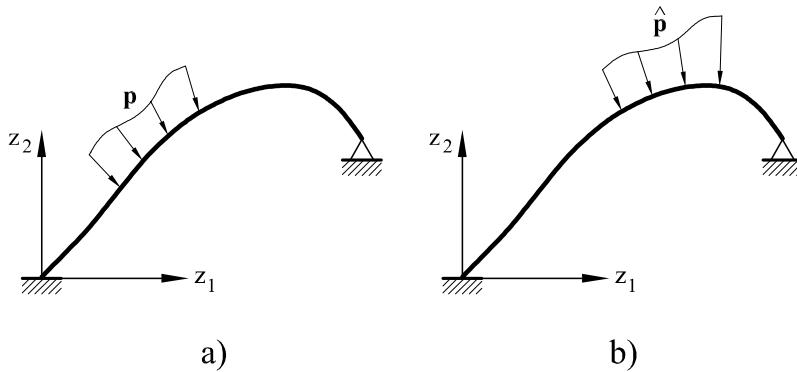


Fig. 7.7 Pieza elástica cargada con dos sistemas de fuerzas

$$\frac{dM_f}{ds} + Q = 0 \quad (7.76b)$$

y también

$$\frac{d}{ds}(\hat{N}\mathbf{e}_1 + \hat{Q}\mathbf{e}_2) + \hat{\mathbf{p}} = 0 \quad (7.77a)$$

$$\frac{d\hat{M}_f}{ds} + \hat{Q} = 0 \quad (7.77b)$$

por lo que también deberá verificarse

$$\int_o^{s_o} [(N\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2) + \mathbf{p}] \cdot \hat{\mathbf{v}} ds + \int_o^{s_o} \left(\frac{dM_f}{ds} + Q \right) \hat{\varphi} ds = 0 \quad (7.78a)$$

$$\int_o^{s_o} [(\hat{N}\mathbf{e}_1 + \hat{Q}\mathbf{e}_2) + \hat{\mathbf{p}}] \cdot \mathbf{v} ds + \int_o^{s_o} \left(\frac{d\hat{M}_f}{ds} + \hat{Q} \right) \varphi ds = 0 \quad (7.78b)$$

Procediendo de igual forma que en las demostraciones de los teoremas de trabajos virtuales (esto es, integrando por partes), la ecuación 7.78a se transforma en

$$\begin{aligned} & \int_o^{s_o} M_f \hat{M}_f \frac{ds}{EI} + \int_o^{s_o} Q \hat{Q} \frac{ds}{kGA} + \int_o^{s_o} N \hat{N} \frac{ds}{EA} \\ &= M_f \hat{\varphi} \Big|_o^{s_o} + Q \hat{v}_2 \Big|_o^{s_o} + N \hat{v}_1 \Big|_o^{s_o} + \int_o^{s_o} p_1 \hat{v}_1 ds + \int_o^{s_o} p_2 \hat{v}_2 ds \end{aligned} \quad (7.79)$$

mientras que la 7.78b se escribe

$$\begin{aligned} \int_0^{s_o} \hat{M}_f M_f \frac{ds}{EI} + \int_0^{s_o} \hat{Q} Q \frac{ds}{kGA} + \int_0^{s_o} \hat{N} N \frac{ds}{EA} = \\ = \hat{M}_f \varphi \Big|_0^{s_o} + \hat{Q} v_2 \Big|_0^{s_o} + \hat{N} v_1 \Big|_0^{s_o} + \int_0^{s_o} \hat{p}_1 v_1 ds + \int_0^{s_o} \hat{p}_2 v_2 ds \end{aligned} \quad (7.80)$$

y puesto que los primeros miembros de 7.79 y 7.80 son iguales, se puede escribir

$$\begin{aligned} M_f \hat{\varphi} \Big|_0^{s_o} + Q \hat{v}_2 \Big|_0^{s_o} + N \hat{v}_1 \Big|_0^{s_o} - \hat{M}_f \varphi \Big|_0^{s_o} - \hat{Q} v_2 \Big|_0^{s_o} - \hat{N} v_1 \Big|_0^{s_o} + \\ + \int_0^{s_o} p_1 \hat{v}_1 ds + \int_0^{s_o} p_2 \hat{v}_2 ds - \int_0^{s_o} \hat{p}_1 v_1 ds - \int_0^{s_o} \hat{p}_2 v_2 ds = 0 \end{aligned} \quad (7.81)$$

lo cual constituye la expresión general del teorema de Maxwell-Betti, que puede enunciarse así: *En una pieza elástica sometida a dos sistemas diferentes de fuerzas, el trabajo que realizarán las fuerzas del primer sistema con los movimientos del segundo es igual al trabajo que realizarán las fuerzas del segundo sistema con los movimientos del primero.*

Un caso particular muy interesante es el que se refiere al caso en que el primer sistema está formado por una única fuerza (o momento) \mathbf{F}_1 aplicada en un punto 1, mientras que para el segundo sistema se tiene una fuerza \mathbf{F}_2 aplicada en el punto 2 (Fig. 7.8).

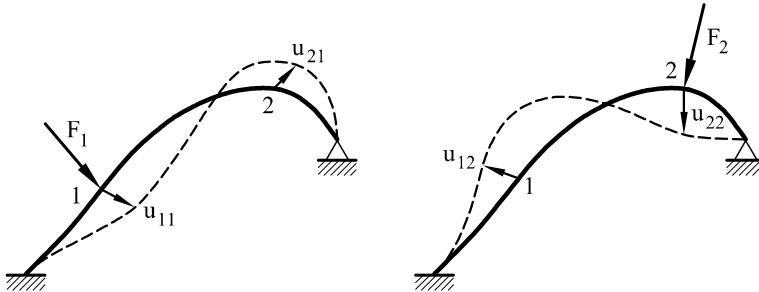


Fig. 7.8 Pieza elástica con dos sistemas de cargas formado cada uno de ellos por una fuerza (o momento) concentrado

Sea:

- \mathbf{u}_{11} el movimiento del punto 1 debido a la fuerza \mathbf{F}_1 .
- \mathbf{u}_{21} el movimiento del punto 2 debido a la fuerza \mathbf{F}_1 .
- \mathbf{u}_{12} el movimiento del punto 1 debido a la fuerza \mathbf{F}_2 .
- \mathbf{u}_{22} el movimiento del punto 2 debido a la fuerza \mathbf{F}_2 .

de acuerdo con 7.81 deberá cumplirse que

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{12} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{21} \quad (7.82)$$

Por su interés, es formativo deducir 7.82 por un camino distinto a como se ha deducido 7.81. Para ello, supóngase que se carga la estructura aplicando primeramente \mathbf{F}_1 y a continuación \mathbf{F}_2 . El trabajo total realizado será:

- Trabajo realizado por \mathbf{F}_1 cuando se carga \mathbf{F}_1 : $\frac{1}{2}\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{11}$
- Trabajo realizado por \mathbf{F}_1 cuando se carga con \mathbf{F}_2 : $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{12}$
- Trabajo realizado por \mathbf{F}_2 cuando se carga con \mathbf{F}_2 : $\frac{1}{2}\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{22}$

El trabajo total valdrá

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{11} + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{12} + \frac{1}{2}\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{22} \quad (7.83)$$

Análogamente, supóngase que se carga primeramente con \mathbf{F}_2 y posteriormente con \mathbf{F}_1 . El trabajo realizado valdrá:

- Trabajo realizado por \mathbf{F}_2 cuando se carga \mathbf{F}_2 : $\frac{1}{2}\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{22}$
- Trabajo realizado por \mathbf{F}_2 cuando se carga con \mathbf{F}_1 : $\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{21}$
- Trabajo realizado por \mathbf{F}_1 cuando se carga con \mathbf{F}_1 : $\frac{1}{2}\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{11}$

El trabajo total valdrá

$$W = \frac{1}{2}\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{11} + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{21} + \frac{1}{2}\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{22} \quad (7.84)$$

y puesto que las expresiones 7.83 y 7.84 son equivalentes

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_{12} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_{21}$$

tal como se enunció.

Una interesante aplicación del teorema de reciprocidad es la que hace referencia al centro de esfuerzos cortantes definido en el Capítulo 5.

Considérese una sección cualquiera (Fig. 7.9) en que los ejes x_2, x_3 son principales de inercia. Supóngase que el primer sistema de cargas está formado por un esfuerzo cortante Q_3 que pasa por el centro de esfuerzos cortantes C , mientras que el segundo sistema está formado por un momento torsor T que actúa en el centro de esfuerzos cortantes.

Al pasar Q_3 por el centro de esfuerzos cortantes, la sección no gira, teniendo únicamente un desplazamiento vertical de valor

$$dv_3 = \gamma_3 ds = \frac{Q_3}{k_3 GA} ds \quad (7.85)$$

Asimismo, cuando en la sección hay aplicado un momento torsor T , el punto C tiene

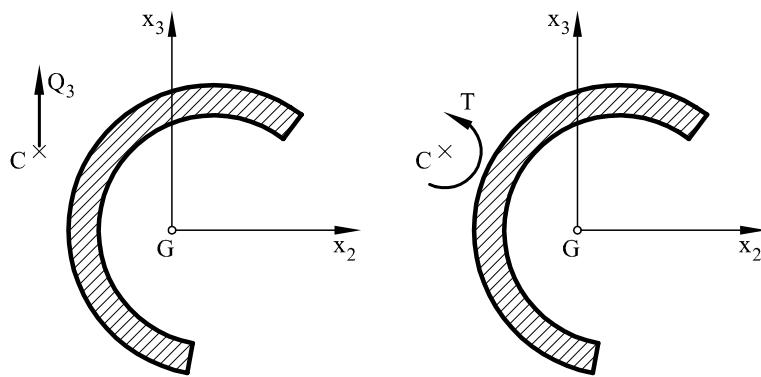


Fig. 7.9 Sección cargada con un esfuerzo cortante que pasa por el centro de esfuerzos cortantes y un momento torsor

un desplazamiento vertical dv_3 y un giro por torsión $d\varphi_1 = (T/GJ)ds$. De acuerdo con el teorema de Maxwell-Betti, el cortante Q_3 multiplicado por dv_3 debe ser igual al momento torsor T por el giro de la sección debido a Q_3 , es decir:

$$Q_3 \cdot dv_3 = T \cdot 0 \quad (7.86)$$

es decir $dv_3 = 0$.

Análogamente, si el cortante aplicado tuviera dirección horizontal, resultaría que $dv_2 = 0$, es decir, que cuando la sección está sometida a un momento torsor, el centro de esfuerzos cortantes solamente gira sin desplazarse, o sea, que *una sección sometida a un momento torsor gira alrededor del centro de esfuerzos cortantes*.

7.9 Minimización de la energía elástica respecto a las incógnitas hiperestáticas

Considérese una estructura hiperestática cualquiera (ver Fig. 7.10) en la que se han introducido los cortes suficientes para transformarla en isostática. En los puntos de corte se han introducido unas fuerzas y/o momentos X_i de tal manera que se restablezca la estructura original. Los movimientos eficaces de las X_i deben ser nulos, ya que en el caso de las hiperestáticas internas dicha nulidad de movimientos eficaces es necesaria para restablecer la continuidad de la estructura, mientras que para las hiperestáticas externas al tratarse de apoyos, también se exige la nulidad de movimientos.

Por lo tanto, de acuerdo con el segundo teorema de Castigiano

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0 \quad (7.87)$$

lo cual indica que la energía elástica debe ser un mínimo respecto a las incógnitas hiperestáticas.

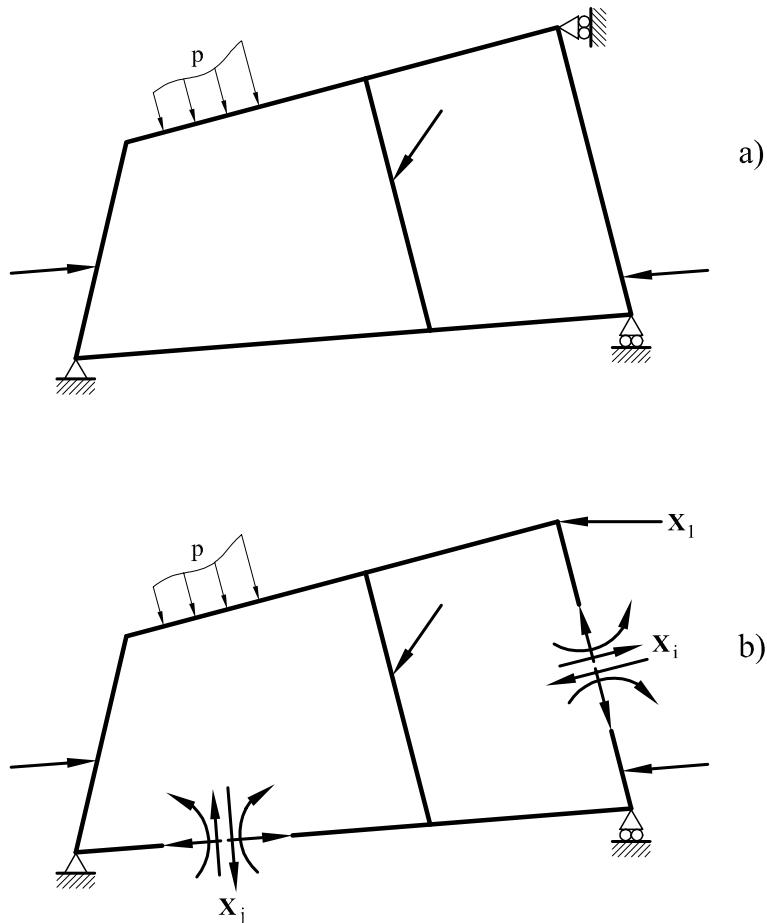


Fig. 7.10 a) Estructura hiperestática, b) Cortes y fuerzas introducidas para transformarla en isostática

7.10 Expresión de las deformaciones generalizadas ϵ_1, γ, χ y de los esfuerzos en función de los movimientos

Recuérdese que la expresión 7.20 establece

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \epsilon_1 \mathbf{e}_1 + (\varphi + \gamma) \mathbf{e}_2$$

Por otra parte,

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d}{ds}(v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) = \frac{dv_1}{ds} \mathbf{e}_1 + v_1 \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} + \frac{dv_2}{ds} \mathbf{e}_2 + v_2 \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} \quad (7.88)$$

Las derivadas respecto a la coordenada s de los vectores \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 vienen dadas por la

matriz Ω de acuerdo con las expresiones 2.13 y 2.22, es decir

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = -\Omega_{12}\mathbf{e}_2 \quad (7.89a)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \Omega_{12}\mathbf{e}_1 \quad (7.89b)$$

por lo que 7.88 puede escribirse

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \left(\frac{dv_1}{ds} + \Omega_{12}v_2 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{dv_2}{ds} - \Omega_{12}v_1 \right) \mathbf{e}_2 \quad (7.90)$$

Igualando 7.90 a 7.20 se obtiene

$$\epsilon_1 = \frac{dv_1}{ds} + \Omega_{12}v_2 \quad (7.91a)$$

$$\gamma = \frac{dv_2}{ds} - \varphi - \Omega_{12}v_1 \quad (7.91b)$$

y además

$$\chi = \frac{d\varphi}{ds} \quad (7.91c)$$

Las expresiones 7.91 pueden expresarse matricialmente

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

o sea

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{L}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\delta} \quad (7.93)$$

siendo $\boldsymbol{\Lambda}$ el vector de deformaciones generalizadas

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} \quad (7.94a)$$

\mathbf{L} es el operador diferencial bidimensional dado por

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \quad (7.94b)$$

El vector $\boldsymbol{\delta}$ es el vector de movimientos en coordenadas de la sección

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (7.94c)$$

La expresión 7.92 o su forma compacta 7.93 proporcionan las deformaciones generalizadas en función de los movimientos. Dichas expresiones son de especial importancia en la resolución de problemas de Cálculo de Estructuras utilizando métodos numéricos. Es de notar que en el caso de piezas rectas se verifica que $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, por lo que la expresión 7.93 para este caso particular adopta la forma

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{L}\boldsymbol{\delta} \quad (7.95)$$

Por lo que respecta a los esfuerzos, se puede escribir

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & kGA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \gamma \\ \chi \end{bmatrix} \quad (7.96a)$$

o en forma compacta

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda} \quad (7.96b)$$

Sustituyendo $\boldsymbol{\Lambda}$ por la expresión dada por 7.93

$$\mathbf{R} = \mathbf{CL}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}(\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\delta} \quad (7.97)$$

expresión que proporciona el valor de los esfuerzos en función de los movimientos.

7.11 Directriz que no pasa por el centro de gravedad de la sección

Todo lo estudiado hasta ahora supone que la directriz de la pieza pasa en cada punto por el centro de gravedad de la sección recta. Con ser éste el caso más habitual, no deja de ser un caso particular de uno más general, consistente en suponer una directriz cualquiera. En el Cálculo de Estructuras, existen importantes aplicaciones cuyo estudio se simplifica notablemente con una determinada directriz no coincidente con el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones rectas. Por ello, se exponen en este apartado las expresiones que resultarían de este cambio.

Sea en una sección cualquiera G el centro de gravedad de la misma y G' la intersección de dicha sección con la directriz. En G' se sitúa el origen del triedro local $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Sea $e(s)$ la posición del punto G respecto al origen de coordenadas G' . Se denominarán mediante N, Q y M_f los esfuerzos en G y mediante N', Q' y M'_f los esfuerzos en G' . Evidentemente, N', Q' y M'_f cumplen las ecuaciones de equilibrio interno 2.14. Por equilibrio se tendrá

$$N' = N \quad (7.98a)$$

$$Q' = Q \quad (7.98b)$$

$$M'_f = M_f - e(s)N \quad (7.98c)$$

Asimismo si ϵ'_1 , γ' y χ' son las deformaciones generalizadas respecto a G' , se puede escribir

$$\epsilon'_1 = \epsilon_1 + \chi e(s) \quad (7.99a)$$

$$\gamma' = \gamma \quad (7.99b)$$

$$\chi' = \chi \quad (7.99c)$$

y además

$$\epsilon'_1 = \frac{N'}{EA} + \frac{M'_f + e(s)N'}{EI} e(s) \quad (7.100a)$$

$$\gamma' = \frac{Q'}{kGA} \quad (7.100b)$$

$$\chi' = \frac{M'_f}{EI} = \frac{M'_f + e(s)N'}{EI} \quad (7.100c)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \gamma' \\ \chi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} + \frac{e^2(s)}{EI} & 0 & \frac{e(s)}{EI} \\ 0 & \frac{1}{kGA} & 0 \\ \frac{e(s)}{EI} & 0 & \frac{1}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N' \\ Q' \\ M'_f \end{bmatrix} \quad (7.101)$$

o sea

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \mathbf{D}' \mathbf{R}' \quad (7.102)$$

siendo

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} + \frac{e^2(s)}{EI} & 0 & \frac{e(s)}{EI} \\ 0 & \frac{1}{kGA} & 0 \\ \frac{e(s)}{EI} & 0 & \frac{1}{EA} \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

La relación 7.102 se puede invertir

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\Lambda}' \quad (7.104)$$

siendo

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{D}')^{-1} = \begin{bmatrix} EA & 0 & -e(s)EA \\ 0 & kGA & 0 \\ -e(s)EA & 0 & EI + e^2(s)EA \end{bmatrix} \quad (7.105)$$

Por lo que hace referencia a la expresión del teorema de los trabajos virtuales 7.23, sustituyendo en dicha expresión las ecuaciones 7.98 a 7.100 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_o^{s_o} M'_f \bar{\chi}' ds + \int_o^{s_o} Q' \bar{\gamma}' ds + \int_o^{s_o} N' \bar{\epsilon}_1' ds &= M'_f \bar{\varphi}' \Big|_o^{s_o} + Q' \bar{v}_2' \Big|_o^{s_o} + \\ &+ N' \bar{v}_1' \Big|_o^{s_o} + \int_o^{s_o} p'_1 \bar{v}_1' ds + \int_o^{s_o} p'_2 \bar{v}_2' ds = 0 \end{aligned} \quad (7.106)$$

lo cual constituye la expresión del teorema de los trabajos virtuales respecto a una directriz cualquiera.

En cuanto a la energía elástica, dada por la expresión 7.48a, se tendrá

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} M_f \chi ds + \int_o^{s_o} Q \gamma ds + \int_o^{s_o} N \epsilon_1 ds \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} (M'_f + e(s)N') \chi' ds + \int_o^{s_o} Q' \gamma' ds + \int_o^{s_o} N' (\epsilon_1' - e(s)\chi') ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} M'_f \chi' ds + \int_o^{s_o} Q' \gamma' ds + \int_o^{s_o} N' \epsilon_1'(s) ds \right] \end{aligned} \quad (7.107)$$

o también

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} M'_f \frac{M'_f + e(s)N'}{EI} ds + \int_o^{s_o} \frac{(Q')^2}{kGA} ds + \int_o^{s_o} N' \left(\frac{N'}{EA} + \frac{M'_f + e(s)N'}{EI} e(s) \right) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_o^{s_o} \frac{(M'_f)^2}{EI} ds + \int_o^{s_o} \frac{(Q')^2}{kGA} ds + \int_o^{s_o} (N')^2 \left(\frac{1}{EA} + \frac{e^2(s)}{EI} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_o^{s_o} \frac{e(s)M'_f N'}{EI} ds \right] \end{aligned} \quad (7.108)$$

y en función de las deformaciones generalizadas

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{s_o} [-e(s)EA\epsilon'_1 + (EI + e^2(s)EA)\chi'] \chi' ds + \int_0^{s_o} kGA(\gamma')^2 ds + \right. \\ \left. + \int_0^{s_o} [EA\epsilon'_1 - e(s)EA\chi'] \epsilon'_1 ds \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{s_o} (EI + e^2(s)EA)(\chi')^2 ds + \right. \\ \left. + \int_0^{s_o} kGA(\gamma')^2 ds + \int_0^{s_o} EA(\epsilon'_1)^2 ds - 2 \int_0^{s_o} e(s)EA\epsilon'_1\chi' ds \right\} \quad (7.109)$$

Finalmente, se desarrollan las expresiones que proporcionan las deformaciones generalizadas y los esfuerzos en función de los movimientos. Para ello nótese que la expresión 7.20 es válida para cualquier directriz, por lo que se puede escribir

$$\frac{d\mathbf{v}'}{ds} = \epsilon'_1 \mathbf{e}_1 + (\varphi' + \gamma') \mathbf{e}_2 \quad (7.110)$$

y procediendo análogamente al apartado 7.10

$$\epsilon'_1 = \frac{dv'_1}{ds} + \Omega_{12}v'_2 \quad (7.111a)$$

$$\gamma' = \frac{dv'_2}{ds} - \varphi' - \Omega_{12}v'_1 \quad (7.111b)$$

$$\chi' = \frac{d\varphi'}{ds} \quad (7.111c)$$

y escrito matricialmente

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \gamma' \\ \chi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (7.112)$$

o sea

$$\boldsymbol{\Lambda}' = (\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\delta}' \quad (7.113)$$

En cuanto a las relaciones entre los esfuerzos y los desplazamientos, introduciendo 7.113 en 7.104 se obtiene

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}'(\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\delta}' \quad (7.114)$$

expresión que proporciona los esfuerzos en función de los desplazamientos tomando como referencia una directriz cualquiera.

Notar finalmente que, tal como es de esperar, todos los teoremas generales deducidos en este capítulo son de igual aplicación al caso de una directriz no coincidente con el lugar geométrico de los centros de gravedad.

8 Estructuras articuladas

8.1 Introducción

Se denominan *estructuras articuladas* aquellas estructuras formadas por barras (en general rectas) unidas entre sí mediante articulaciones (Fig. 8.1). Las fuerzas externas se aplican en general a los nudos, por lo que dichas barras trabajan exclusivamente a esfuerzo axil. Este hecho permite un aprovechamiento óptimo del material, por lo cual son ampliamente utilizadas en la práctica de la construcción. Es habitual su uso en cubiertas de naves industriales, mercados, cubiertas de gasolineras, puentes ferroviarios, etc.

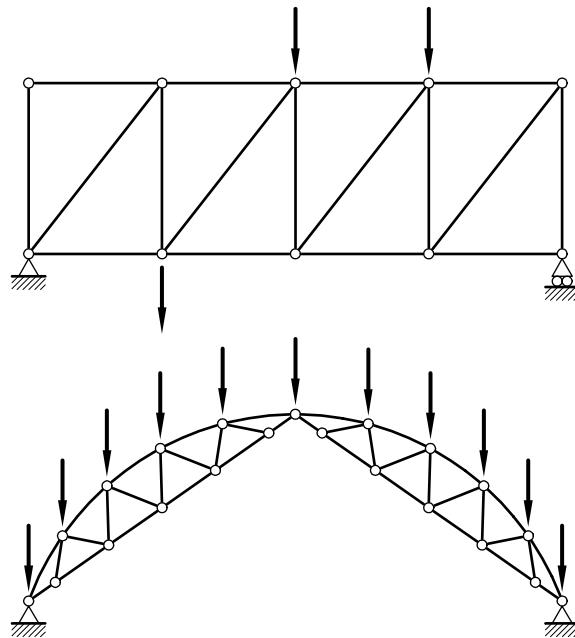


Fig. 8.1 Estructuras articuladas

Las incógnitas a determinar son, por tanto, los esfuerzos axiles en cada una de las barras y las reacciones. Por lo tanto, si:

nn es el número de nudos de la estructura

nb es el número de barras de la estructura

nr es el número de reacciones *simples* de la estructura,

entonces el número de incógnitas a determinar será $nb+nr$. Las ecuaciones se obtendrán de realizar el equilibrio en cada uno de los nudos: dos ecuaciones por nudo para el caso de estructuras planas y tres para estructuras espaciales. El número total de ecuaciones será, por tanto, $2 nn$ para el caso de una estructura plana.

El anterior razonamiento proporciona un criterio para determinar si una estructura es isostática o hiperestática. En efecto,

si $nb + nr > 2 nn$, la estructura es hiperestática

si $nb + nr = 2 nn$, la estructura es isostática

si $nb + nr < 2 nn$, la estructura es un mecanismo

y siempre con $nr \geq 3$.

La anterior clasificación debe, no obstante, ser tomada con precaución, en el sentido de condición necesaria, pero en algunos casos no suficiente. Considérese por ejemplo la estructura de la figura 8.2a, en que se está en presencia de una estructura isostática y en donde efectivamente $17 + 3 = 2 \times 10$. Asimismo, en la figura 8.2b se representa una estructura una vez hiperestática, ya que es idéntica a la anterior, pero con una barra (incógnita) más. Se cumple que $18 + 3 > 2 \times 10$. Sin embargo, en la figura 8.2c se aprecia un claro mecanismo, cumpliéndose sin embargo que $17 + 3 = 2 \times 10$. Ello es debido a que algunas de sus partes son hiperestáticas y otras constituyen un mecanismo. La clasificación anterior *promedia* ambos efectos y puede inducir a la falsa afirmación de que se trata de una estructura isostática.

Para el cálculo de estructuras articuladas hiperestáticas existen dos grandes grupos de métodos: método de compatibilidad y método de rigidez. Ambos métodos serán analizados con detalle.

8.2 Estructuras isostáticas

Como se ha dicho anteriormente, las estructuras isostáticas son aquellas en las cuales las ecuaciones de equilibrio de la estática son suficientes para determinar los esfuerzos axiles en todas las barras, así como las reacciones.

8.2.1 Metodología general de análisis. Matriz de conexión

Para fijar ideas, considérese la estructura articulada isostática representada en la Figura 8.3a. Supóngase que en dicha estructura se han numerado los nudos y las barras (ambos de forma independiente). Es evidente que puesto que la reacción en el nudo 4 es horizontal, el apoyo en dicho punto puede sustituirse por una barra horizontal de

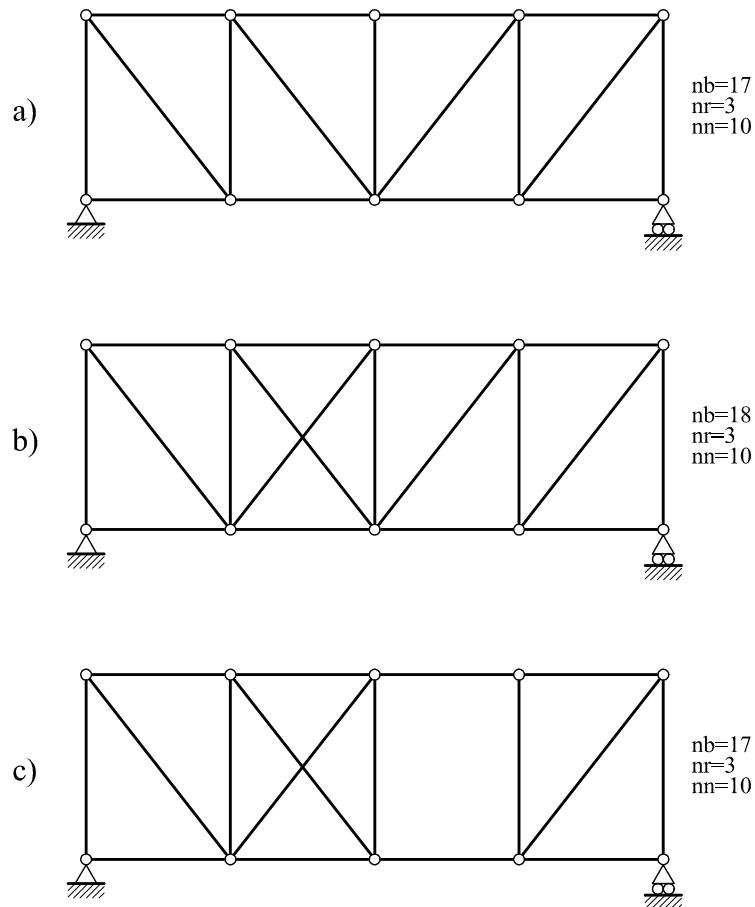


Fig. 8.2 a) Estructura isostática. b) Estructura hiperestática. c) Mecanismo

rigidez (producto EA/L) infinita (Fig. 8.3b). Asimismo, el apoyo 5 puede sustituirse por dos barras, una horizontal y otra vertical, de rigidez también infinita. Lógicamente, los valores de las reacciones en ambos puntos coincidirán con el valor del esfuerzo axil en las barras ficticias. Este simple artificio facilitará el cálculo.

En el caso particular de que algún apoyo fuera elástico, la barra ficticia correspondiente tendría una rigidez igual a la rigidez del apoyo elástico, es decir, si $R = -k\delta$, se tendrá que $EA/L = k$.

Dentro de una barra cualquiera, se denominará extremo A al de menor numeración global, y extremo B al de numeración global mayor. Al mismo tiempo, los ejes locales se elegirán de forma que el sentido del vector base \mathbf{e}_1 sea el que va del extremo A al B (Fig. 8.4).

Si se denomina N_I al esfuerzo axil en la barra I , es evidente (Fig. 8.5) que la fuerza axil que actúa en el extremo B vendrá dada en coordenadas globales por $N_I \mathbf{e}_1^I$, mientras que la que actúa en el extremo A valdrá $-N_I \mathbf{e}_1^I$.

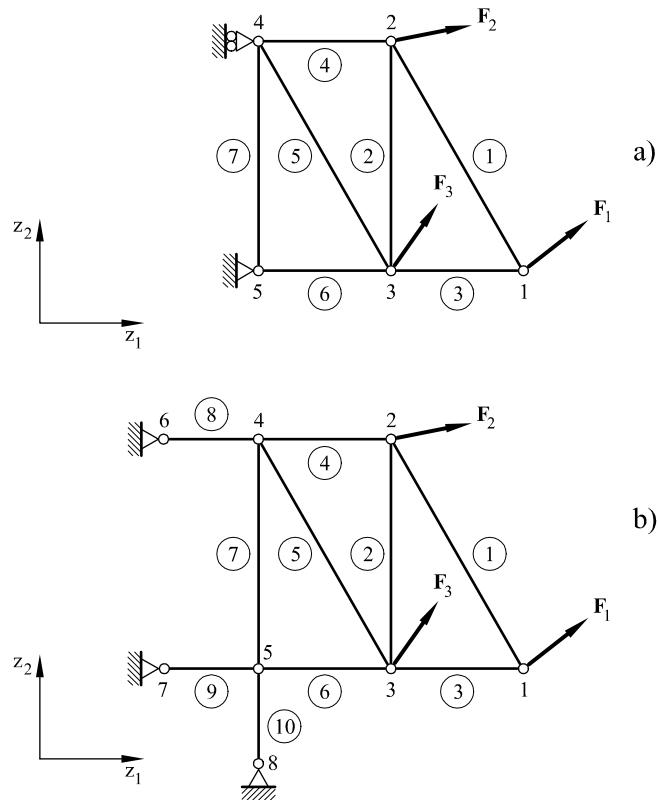


Fig. 8.3 a) Estructura articulada, b) Estructura articulada modificada

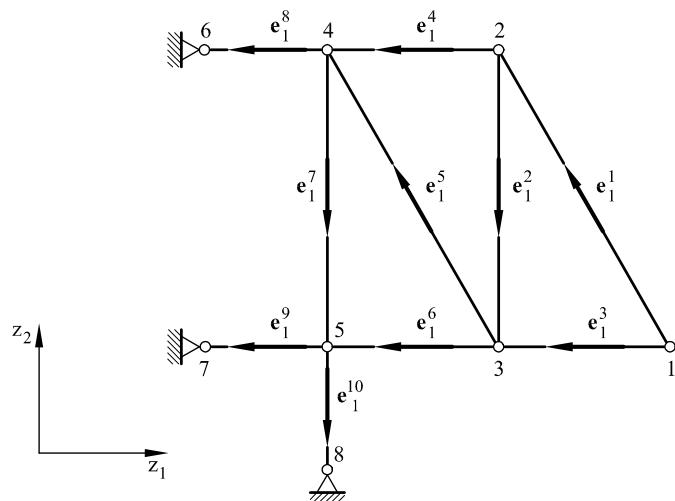


Fig. 8.4 Ejes locales para la estructura articulada de la figura 8.3 (se dibuja únicamente el eje local \mathbf{e}_1)

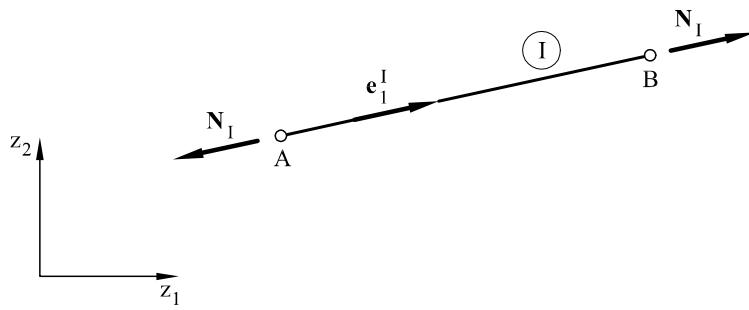


Fig. 8.5 Fuerzas de extremo de barra en coordenadas locales y globales

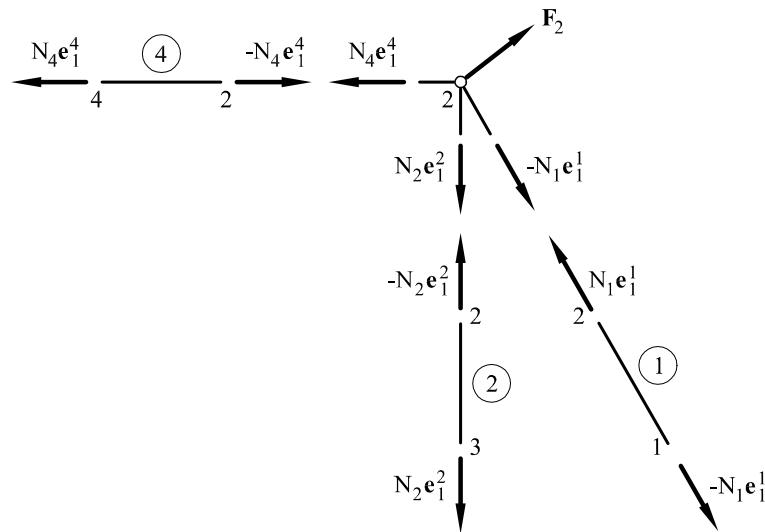


Fig. 8.6 Descomposición de fuerzas en el nudo 2

Con las consideraciones y definiciones anteriores, es ya posible ir nudo a nudo para establecer las correspondientes ecuaciones de equilibrio. Así por ejemplo, en la figura 8.6 pueden verse las fuerzas axiles de extremo de barra de las piezas que concurren en el nudo 2, así como las fuerzas que actúan en el nudo. Por equilibrio, es evidente que la suma de todas las fuerzas que actúan en el nudo debe ser cero, o lo que es lo mismo: la fuerza externa \mathbf{F}_2 que actúa en el nudo debe ser igual a la suma de las fuerzas de extremo de barra que concurren en él, es decir

$$N_1\mathbf{e}_1^1 - N_2\mathbf{e}_1^2 - N_4\mathbf{e}_1^4 = \mathbf{F}_2 \quad (8.1a)$$

Análogamente para los demás nudos

$$\text{Nudo } 1 : -N_1\mathbf{e}_1^1 - N_3\mathbf{e}_1^3 = \mathbf{F}_1 \quad (8.1b)$$

$$\text{Nudo } 3 : N_2\mathbf{e}_1^2 + N_3\mathbf{e}_1^3 - N_5\mathbf{e}_1^5 - N_6\mathbf{e}_1^6 = \mathbf{F}_3 \quad (8.1c)$$

$$\text{Nudo } 4 : N_4\mathbf{e}_1^4 + N_5\mathbf{e}_1^5 - N_7\mathbf{e}_1^7 - N_8\mathbf{e}_1^8 = \mathbf{F}_4 \quad (8.1d)$$

$$\text{Nudo } 5 : N_6\mathbf{e}_1^6 + N_7\mathbf{e}_1^7 - N_9\mathbf{e}_1^9 - N_{10}\mathbf{e}_1^{10} = \mathbf{F}_5 \quad (8.1e)$$

Las anteriores ecuaciones 8.1 forman un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1^1 & \mathbf{0} & -\mathbf{e}_1^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_1^1 & -\mathbf{e}_1^2 & \mathbf{0} & -\mathbf{e}_1^4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1^3 & \mathbf{0} & -\mathbf{e}_1^5 & -\mathbf{e}_1^6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_1^4 & \mathbf{e}_1^5 & \mathbf{0} & -\mathbf{e}_1^7 & -\mathbf{e}_1^8 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_1^6 & \mathbf{e}_1^7 & \mathbf{0} & -\mathbf{e}_1^9 & -\mathbf{e}_1^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \\ \mathbf{F}_5 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

que también puede escribirse como

$$\mathbf{C}_o \mathbf{N} = \mathbf{F} \quad (8.3)$$

Sistema que, resuelto, proporciona el valor de las incógnitas \mathbf{N} , es decir, los valores de los esfuerzos axiles y de las reacciones.

A la matriz \mathbf{C}_o se le denomina matriz de conexión del sistema isostático, la cual en un caso general se forma de la siguiente manera: Obsérvese (ecuación 8.2) que las filas de \mathbf{C}_o hacen referencia a nudos, mientras que las columnas hacen referencia a barras, por lo que el elemento (i, J) de \mathbf{C}_o se refiere al nudo i y a la barra J . Su valor será

- $\mathbf{0}$ si la barra J no concurre al nudo i
- \mathbf{e}_1^J si la barra J concurre al nudo i , y dicho nudo corresponde al extremo B (extremo de numeración mayor) de la barra J
- $-\mathbf{e}_1^J$ si la barra J concurre al nudo i , y dicho nudo corresponde al extremo A (extremo de numeración menor) de la barra J

Respecto a la matriz de conexión \mathbf{C}_o , es importante recalcar que es cuadrada debido a que la estructura es isostática. En el caso de una estructura hiperestática sería una matriz con más columnas que filas. Por el contrario, en el caso de un mecanismo se tendrían más filas que columnas. Podría también darse el caso de una estructura en que \mathbf{C}_o fuera cuadrada pero singular. En tal caso se estaría en presencia de una estructura crítica.

♣ **Problema resuelto P8.1.** Considérese la estructura articulada de la figura P8.1.1 con las cargas que en ella se indican. Se quiere conocer el esfuerzo axil en todas las barras así como las reacciones.

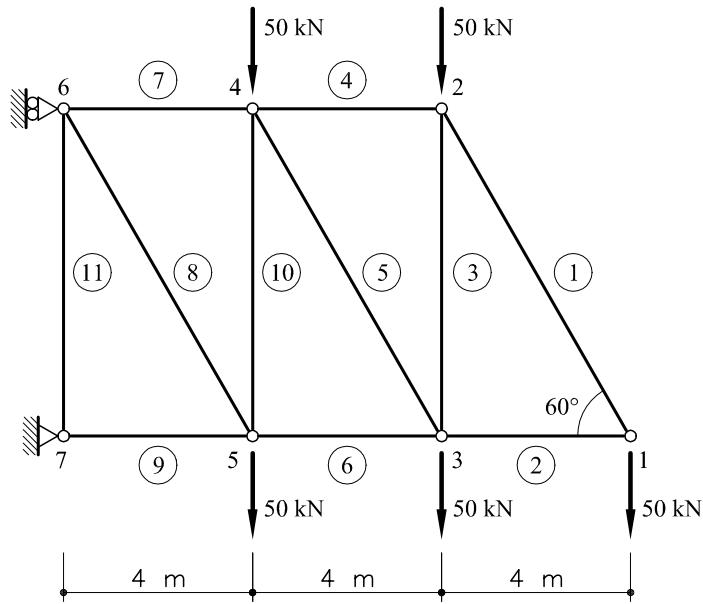


Fig. P8.1.1 Estructura articulada correspondiente al problema resuelto P8.1

Solución

En la figura P8.1.2 puede verse la misma estructura, pero modificada. Asimismo se ha señalado el sentido de los distintos vectores \mathbf{e}_i . Los valores \mathbf{e}_i^t valdrán

$$\mathbf{e}_1^t = \begin{bmatrix} -\cos 60 \\ \sin 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,866 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos 180 \\ \sin 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^5 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,866 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1^7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^8 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,866 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^9 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

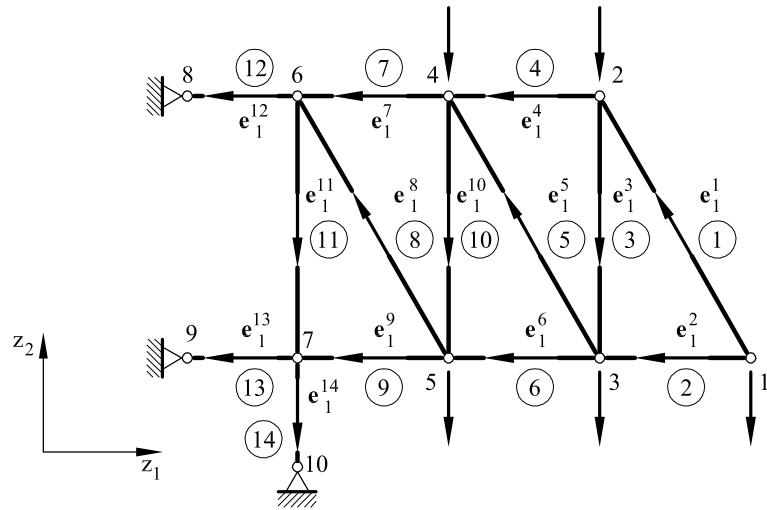


Fig. P8.1.2 Estructura articulada del problema P8.1 modificada

$$\mathbf{e}_1^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^{13} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e}_1^{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Realizando el equilibrio en los nudos 1 a 7, o bien, teniendo en cuenta las reglas de formación de la matriz de conexión \mathbf{C}_o , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} -\mathbf{e}_1^1 & -\mathbf{e}_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_1^1 & 0 & -\mathbf{e}_1^3 & -\mathbf{e}_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1^3 & 0 & -\mathbf{e}_1^5 & -\mathbf{e}_1^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1^4 & \mathbf{e}_1^5 & 0 & -\mathbf{e}_1^7 & 0 & 0 & -\mathbf{e}_1^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1^6 & 0 & -\mathbf{e}_1^8 & -\mathbf{e}_1^9 & \mathbf{e}_1^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1^7 & \mathbf{e}_1^8 & 0 & 0 & -\mathbf{e}_1^{11} & -\mathbf{e}_1^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1^9 & 0 & \mathbf{e}_1^{11} & 0 & -\mathbf{e}_1^{13} & -\mathbf{e}_1^{14} & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \\ N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \\ N_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \\ \mathbf{F}_5 \\ \mathbf{F}_6 \\ \mathbf{F}_7 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores previamente calculados de \mathbf{e}_1^I , así como los valores de \mathbf{F}_i , se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccc} 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,866 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,866 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,866 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \\ N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \\ N_{14} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

Sistema de ecuaciones que, resuelto, proporciona los valores de los esfuerzos axiles en todas las barras

$$\begin{aligned} N_1 &= 57,7 \text{ kN} & N_2 &= -28,9 \text{ kN} & N_3 &= -100 \text{ kN} \\ N_4 &= 28,9 \text{ kN} & N_5 &= 173,2 \text{ kN} & N_6 &= -115,5 \text{ kN} \\ N_7 &= 115,5 \text{ kN} & N_8 &= 288,7 \text{ kN} & N_9 &= -260 \text{ kN} \\ N_{10} &= -200 \text{ kN} & N_{11} &= -250 \text{ kN} & N_{12} &= 260 \text{ kN} \\ N_{13} &= -260 \text{ kN} & N_{14} &= -250 \text{ kN} \end{aligned}$$

Con lo que las reacciones en los puntos 6 y 7, y respecto a los ejes globales z_1, z_2 valdrán

$$R_{6,1} = -260 \text{ kN}, \quad R_{7,1} = 260 \text{ kN}, \quad R_{7,2} = 250 \text{ kN}$$

8.2.2 Cálculo de movimientos

Supóngase una estructura articulada isostática cualquiera (para fijar ideas, puede ser la de las Fig. 8.3) sometida a unas cargas \mathbf{F}_i en los nudos. Dichas cargas producirán unos esfuerzos axiles en cada barra de valor N_I que pueden calcularse tal como se ha indicado en el apartado anterior. La variación de longitud de cada barra valdrá $\delta_I = N_I L_I / E_I A_I$, siendo L_I la longitud de cada una de las barras. Dichas barras pueden además estar sometidas a cambios en su longitud debidos a causas no tensionales, por ejemplo variaciones térmicas, retracción, defectos de montaje, etc., de valor δ_I^{nt} . La variación total de longitud de cada barra será por tanto $\delta_I^t = \delta_I + \delta_I^{nt} = N_I L_I / E_I A_I + \delta_I^{nt}$.

Considérese un nudo cualquiera j del cual se desea conocer su movimiento w_j en una dirección cualquiera. Para ello se aplica el teorema de los trabajos virtuales complementarios desarrollado en el Capítulo 7. Sea

$\bar{\mathbf{F}}_j$ una fuerza virtual de módulo unidad aplicada en el nudo j de la estructura considerada

\bar{N}_I los esfuerzos axiles virtuales provocados por la fuerza virtual $\bar{\mathbf{F}}_j$ \mathbf{u}_j el vector desplazamiento del nudo j . Nótese que $w_j = \mathbf{u}_j \cdot \bar{\mathbf{F}}_j$

Aplicando el teorema de los trabajos virtuales complementarios, se tendrá

$$\sum_{I=1}^{nb} \bar{N}_I \delta_I^t = \mathbf{u}_j \cdot \bar{\mathbf{F}}_j = w_j \quad (8.4)$$

Expresión que también puede escribirse

$$\sum_{I=1}^{nb} \bar{N}_I \left(\frac{N_I L_I}{E_I A_I} + \delta_I^{nt} \right) = w_j \quad (8.5)$$

estando el sumatorio extendido a todas las barras de la estructura. La expresión anterior proporciona directamente el valor w_j del desplazamiento buscado.

Es de advertir que las expresiones 8.4 y 8.5 son también válidas para hallar el desplazamiento relativo entre dos puntos y según una determinada dirección. En este caso, los esfuerzos virtuales \bar{N}_I serán los debidos a dos fuerzas virtuales, iguales, de sentido contrario y de módulo unidad, aplicadas en los dos puntos entre los cuales quiere hallarse el desplazamiento relativo.

♣ **Problema resuelto 8.2** En la estructura articulada del problema resuelto P8.1, determinar el movimiento vertical del punto 1.

Solución

Se supondrá que todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad ($E = 210\,000\,MPa$) y la misma sección ($A = 6\,cm^2$). De esta forma se tiene que $EA = 126\,MN = 126\,000\,kN$.

Se aplica (Fig. P8.2.1) una fuerza virtual vertical en el nudo 1 de valor $\bar{\mathbf{F}}_1 = [0, -1]^T\,kN$. Dicha fuerza provoca unos esfuerzos \bar{N}_I en las barras de valor

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= 1,1547\,kN & \bar{N}_2 &= -0,5774\,kN & \bar{N}_3 &= -1\,kN \\ \bar{N}_4 &= 0,5774\,kN & \bar{N}_5 &= 1,1547\,kN & \bar{N}_6 &= -1,1547\,kN \\ \bar{N}_7 &= 1,1547\,kN & \bar{N}_8 &= 1,1547\,kN & \bar{N}_9 &= -1,7321\,kN \\ \bar{N}_{10} &= -1\,kN & \bar{N}_{11} &= -1\,kN \end{aligned}$$

Con estos resultados y los proporcionados por el problema P8.1 se obtiene el cuadro P8.2.1. Hay que tener presente además que $\delta_I^{nt} = 0$.

Aplicando la expresión 8.5, el desplazamiento vertical del punto 1 será descendente y su valor será

$$w_1 = \sum_{I=1}^{11} \frac{N_I \bar{N}_I}{E_I A_I} L_I = 92,14 \times 10^{-3}\,metros = 92,14\,mm$$

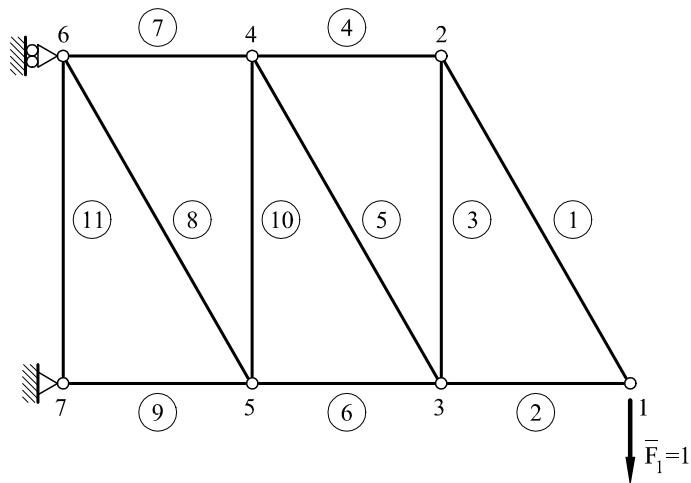


Fig. P8.2.1 Fuerza virtual aplicada en el nudo 1 de la estructura

Cuadro P8.2.1 Esfuerzos axiles

BARRA	ESFUERZO AXIL $N_I(kN)$	ESFUERZO AXIL VIRTUAL $\bar{N}_I(kN)$	$(\frac{L}{EA})_I \times 10^{-3} m/kN$	$N_I \bar{N}_I L_I / E_I A_I$
1	57,7	1,1547	0,063492	$4,23 \times 10^{-3}$
2	-28,9	-0,5774	0,031746	$0,53 \times 10^{-3}$
3	-100	-1	0,054986	$5,50 \times 10^{-3}$
4	28,9	0,5774	0,031746	$0,53 \times 10^{-3}$
5	173,2	1,1547	0,063492	$12,68 \times 10^{-3}$
6	-115,5	-1,1547	0,031746	$4,23 \times 10^{-3}$
7	115,5	1,1547	0,031746	$4,23 \times 10^{-3}$
8	288,7	1,1547	0,063492	$21,17 \times 10^{-3}$
9	-260	-1,7321	0,031746	$14,30 \times 10^{-3}$
10	-200	-1	0,054986	$11,00 \times 10^{-3}$
11	-250	-1	0,054986	$13,75 \times 10^{-3}$
$\sum N_I \bar{N}_I L_I / E_I A_I$				$92,14 \times 10^{-3}$

♣ **Problema resuelto P8.3** En la estructura del problema resuelto P8.1, determinar el movimiento relativo entre los puntos 2 y 5 en la dirección que une ambos puntos.

Para determinar el movimiento relativo entre 2 y 5 se colocan sendas fuerzas \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_5 iguales, de sentido contrario y de módulo unidad (Fig. P8.3.1). Al igual que antes, $\delta_I^{nt} = 0$ para todas las barras.

Los esfuerzos axiles virtuales producidos por las anteriores fuerzas valdrán

$$\bar{N}_1 = 0 \quad \bar{N}_2 = 0 \quad \bar{N}_3 = -0,866$$

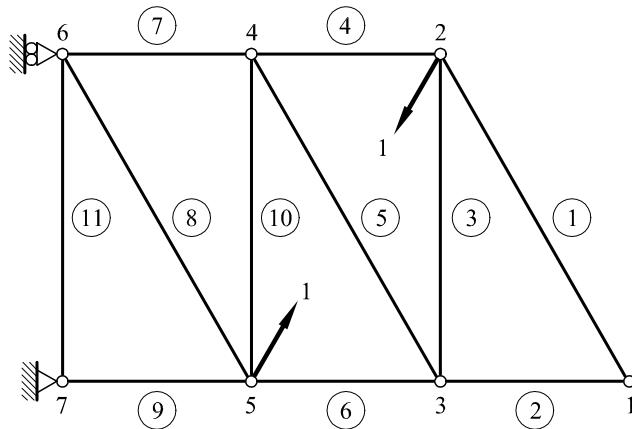


Fig. P8.3.1 Fuerzas virtuales unitarias aplicadas en los puntos 2 y 5 de la estructura

$$\begin{aligned}\bar{N}_4 &= -0,5 & \bar{N}_5 &= 1 & \bar{N}_6 &= -0,5 \\ \bar{N}_7 &= 0 & \bar{N}_8 &= 0 & \bar{N}_9 &= 0 \\ \bar{N}_{10} &= -0,866 & \bar{N}_{11} &= 0\end{aligned}$$

Con estos resultados se forma, al igual que en el ejercicio anterior, el cuadro P8.3.1.

Cuadro P8.3.1 Esfuerzos axiles

BARRA	ESFUERZO AXIL $N_I(kN)$	ESFUERZO AXIL VIRTUAL $\bar{N}_I(kN)$	$(\frac{L}{EA})_I \times 10^{-3} m/kN$	$N_I \bar{N}_I (\frac{L}{EA})_I$
1	57,7	0	0,063492	0
2	-28,9	0	0,031746	0
3	-100	-0,866	0,054986	$4,76 \times 10^{-3}$
4	28,9	-0,5	0,031746	$-0,46 \times 10^{-3}$
5	173,2	1	0,063492	$11,00 \times 10^{-3}$
6	-115,5	-0,5	0,031746	$1,83 \times 10^{-3}$
7	115,5	0	0,031746	0
8	288,7	0	0,063492	0
9	-260	0	0,031746	0
10	-200	-0,866	0,054986	$9,52 \times 10^{-3}$
11	-250	0	0,054986	0
$\sum N_I \bar{N}_I L_I / E_I A_I$				$26,65 \times 10^{-3}$

Aplicando nuevamente la expresión 8.4, el desplazamiento relativo entre los puntos 2 y 5 valdrá

$$w_{2,5} = \sum_{I=1}^{11} \frac{N_I \bar{N}_I}{E_I A_I} L_I = 26,65 \times 10^{-3} \text{ metros} = 26,65 \text{ mm}$$

y puesto que el resultado es positivo, significa que los puntos 2 y 5 se acercan.

♣ **Problema resuelto P8.4** La estructura del problema resuelto P8.1 está sometida, aparte de las cargas allá indicadas, a un incremento térmico en todas las barras de valor $t = 40^\circ\text{C}$, siendo el coeficiente de dilatación térmica lineal constante e igual a $\alpha = 1,2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Se desea conocer el movimiento vertical del punto 1.

Solución

El alargamiento de cada barra debido a la variación térmica valdrá

$$\delta_I^{nt} = \alpha L_I t = 40 \times 1,2 \times 10^{-5} L_I = 48 \times 10^{-5} L_I$$

Para hallar el movimiento vertical del punto 4, se coloca en dicho punto una fuerza virtual unitaria (1 kN), vertical descendente que provocará unos esfuerzos axiles virtuales de valor \bar{N}_I . Con ello se puede construir el cuadro P8.4.1.

Aplicando nuevamente la expresión 8.4, el desplazamiento vertical del punto 1 valdrá

$$w_1 = \sum_{I=1}^{11} \bar{N}_I \left(\frac{N_I L_I}{E_I A_I} + \delta_I^{nt} \right) = 92,1605 \times 10^{-3} \text{ metros} = 92,1605 \text{ mm}$$

valor algo mayor que el proporcionado por el problema resuelto P8.2.

Cuadro P8.4.1 Esfuerzos axiles y alargamiento de barras

BARRA	ESFUERZO AXIL $N_I(kN)$	$\left(\frac{L}{EA}\right)_I \times 10^{-3} \text{m/kN}$	$\frac{N_I L_I}{E_I A_I} \times 10^{-3} (\text{m})$	$\delta_I^{nt} \times 10^{-3} (\text{m})$	ESFUERZO AXIL VIRTUAL $\bar{N}_I(kN)$	$\bar{N}_I \left(\frac{N_I L_I}{E_I A_I} + \delta_I^{nt} \right)$
1	57,7	0,063492	3,6635	3,84	1,1547	$8,6642 \times 10^{-3}$
2	-28,9	0,031746	-0,9175	1,92	-0,5774	$-0,5788 \times 10^{-3}$
3	-100	0,054986	-5,4986	3,3255	-1	$2,1731 \times 10^{-3}$
4	28,9	0,031746	0,9175	1,92	0,5774	$1,6384 \times 10^{-3}$
5	173,2	0,063492	10,9968	3,84	1,1547	$17,1321 \times 10^{-3}$
6	-115,5	0,031746	-3,6667	1,92	-1,1547	$2,0169 \times 10^{-3}$
7	115,5	0,031746	3,6667	1,92	1,1547	$6,4510 \times 10^{-3}$
8	288,7	0,063492	18,3301	3,84	1,1547	$25,5998 \times 10^{-3}$
9	-260	0,031746	-8,2540	1,92	-1,7321	$10,9711 \times 10^{-3}$
10	-200	0,054986	-10,9972	3,3255	-1	$7,6717 \times 10^{-3}$
11	-250	0,054986	-13,7465	3,3255	-1	$10,4210 \times 10^{-3}$
$\sum \bar{N}_I \left(\frac{N_I L_I}{E_I A_I} + \delta_I^{nt} \right)$						$92,1605 \times 10^{-3}$

8.3 Estructuras hiperestáticas

Tal como se ha apuntado anteriormente, existen dos grandes metodologías de cálculo de estructuras hiperestáticas: el método de compatibilidad y el método de rigidez. El primero de ellos es una consecuencia del teorema de los trabajos virtuales complementarios (o bien, del segundo teorema de Castiglano) y sus incógnitas son las fuerzas o reacciones hiperestáticas. Conduce por tanto a un sistema de tantas ecuaciones como grados de hiperestatismo tiene la estructura. Por contra, el método de rigidez considera como incógnitas los movimientos de los nudos de la estructura. El número de ecuaciones resultante será, por tanto, el número total de grados de libertad. Puede asimismo ser considerado como una consecuencia del teorema de los trabajos virtuales o de los teoremas que de él se derivan (primer teorema de Castiglano y minimización de la energía potencial total).

8.3.1 Cálculo de estructuras hiperestáticas mediante el método de compatibilidad

Como ha sido comentado anteriormente, el método de compatibilidad toma como incógnitas los esfuerzos o reacciones hiperestáticos de la estructura. La metodología general de obtención de dichas incógnitas hiperestáticas consiste en realizar el suficiente número de cortes para convertir la estructura en isostática. A la estructura así obtenida se le denomina *estructura isostática base*. En dichos cortes, se colocan los esfuerzos (hiperestáticos) desconocidos en ellos existentes, obligando seguidamente a que en dichos puntos se verifiquen las condiciones cinemáticas de compatibilidad.

Para centrar ideas, considérese la estructura de la figura 8.7a, la cual, como puede observarse, es dos veces hiperestática. Para obtener el valor de las dos incógnitas hiperestáticas, se eliminan las barras 3 y 8, colocando en su lugar las fuerzas desconocidas X_1 y X_2 (Fig. 8.7b). La estructura así transformada es isostática, y por tanto pueden hallarse en ella todos los esfuerzos en función de las cargas y de las incógnitas hiperestáticas. A dicha estructura isostática de la denominada *estructura isostática base*. Sean:

- N_I^o los esfuerzos en todas las barras de la isostática base debidos a las cargas externas.
- N_I^1 los esfuerzos en todas las barras de la isostática base debidos a dos fuerzas unidad dirigidas la una hacia la otra y situadas en la línea de acción de la pieza 3.
- N_I^2 los esfuerzos en todas las barras de la isostática base debidos a dos fuerzas unidad dirigidas la una hacia la otra y situadas en la línea de acción de la pieza 8.

Por otro lado, las barras 3 y 8 estarán sometidas a unos esfuerzos de valor X_1 , X_2 , respectivamente.

Con las anteriores definiciones, es claro que los esfuerzos axiles en las barras valdrán

$$N_I = N_I^o + X_1 N_I^1 + X_2 N_I^2 \quad (8.6)$$

Por otra parte, aplicando el teorema de los trabajos virtuales complementarios, de acuerdo con la expresión 8.5, el movimiento relativo entre los puntos 1 y 4 de la

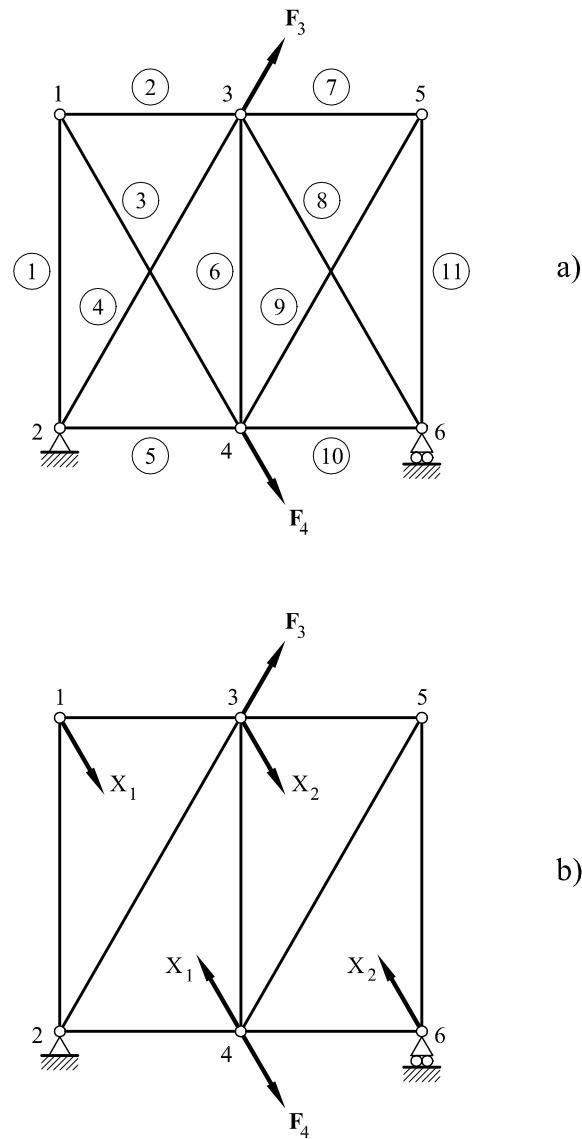


Fig. 8.7 a) Estructura hiperestática. b) Estructuras isostáticas base correspondiente a la anterior hiperestática

estructura isostática base valdrá (acercamiento de los puntos)

$$\begin{aligned}
 w_{1,4} = & \sum_{I=1}^{nbi} \left(\frac{N_I L_I}{E_I A_I} + \delta_I^{nt} \right) N_I^1 = \sum_{I=1}^{nbi} N_I^o N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} + \\
 & + X_1 \sum_{I=1}^{nbi} N_I^1 N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} + X_2 \sum_{I=1}^{nbi} N_I^2 N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} + \sum_{I=1}^{nbi} \delta_I^{nt} N_I^1
 \end{aligned} \tag{8.7a}$$

siendo nbi el número de barras de la estructura isostática base. Análogamente, el acercamiento entre los puntos 3 y 6 vale:

$$\begin{aligned} w_{3,6} = & \sum_{I=1}^{nbi} N_I^o N_I^2 \frac{L_I}{E_I A_I} + X_1 \sum_{I=1}^{nbi} N_I^1 N_I^2 \frac{L_I}{E_I A_I} + \\ & + X_2 \sum_{I=1}^{nbi} N_I^2 N_I^2 \frac{L_I}{E_I A_I} + \sum_{I=1}^{nbi} \delta_I^{nt} N_I^2 \end{aligned} \quad (8.7b)$$

La condición de compatibilidad cinemática para la incógnita hiperestática X_1 se expresa diciendo que el acercamiento de los puntos 1 y 4 $w_{1,4}$ debe ser igual al acortamiento de la barra 3, es decir:

$$w_{1,4} = -\frac{X_1 L_3}{E_3 A_3} - \delta_3^{nt} \quad (8.8a)$$

y de la misma forma para la hiperestática X_2 :

$$w_{3,6} = -\frac{X_2 L_8}{E_8 A_8} - \delta_8^{nt} \quad (8.8b)$$

con lo que igualando las expresiones 8.7 a las 8.8 se obtiene finalmente el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} X_1 \left[\frac{L_3}{E_3 A_3} + \sum_{I=1}^{nbi} N_I^1 N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} \right] + X_2 \sum_{I=1}^{nbi} N_I^2 N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} + \sum_{I=1}^{nbi} N_I^o N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} \\ + \sum_{I=1}^{nbi} \delta_I^{nt} N_I + \delta_3^{nt} = 0 \end{aligned} \quad (8.9a)$$

$$\begin{aligned} X_1 \sum_{I=1}^{nbi} N_I^1 N_I^2 \frac{L_I}{E_I A_I} + X_2 \left[\frac{L_8}{E_8 A_8} + \sum_{I=1}^{nbi} N_I^2 N_I^2 \frac{L_I}{E_I A_I} \right] + \sum_{I=1}^{nbi} N_I^o N_I^2 \frac{L_I}{E_I A_I} \\ + \sum_{I=1}^{nbi} \delta_I^{nt} N_I^2 + \delta_8^{nt} = 0 \end{aligned} \quad (8.9b)$$

El anterior sistema de ecuaciones se resuelve en X_1 y X_2 , obteniéndose el valor de las incógnitas hiperestáticas. Los esfuerzos en todas las barras se obtendrán mediante la aplicación de la expresión 8.6.

♣ Problema resuelto P8.5 Considérese la estructura articulada de la figura P8.5.1. Como puede observarse, la estructura es una vez hiperestática. Asimismo se ve que es la misma estructura que la del problema P8.1, en la cual se le ha añadido la pieza 12. Se desea conocer los esfuerzos axiles en todas las barras.

Solución

Se considera como incógnita hiperestática el esfuerzo axial en la pieza 12, por lo que la estructura isostática base será la que se representa en la figura P8.5.2. Si N_I^o son los

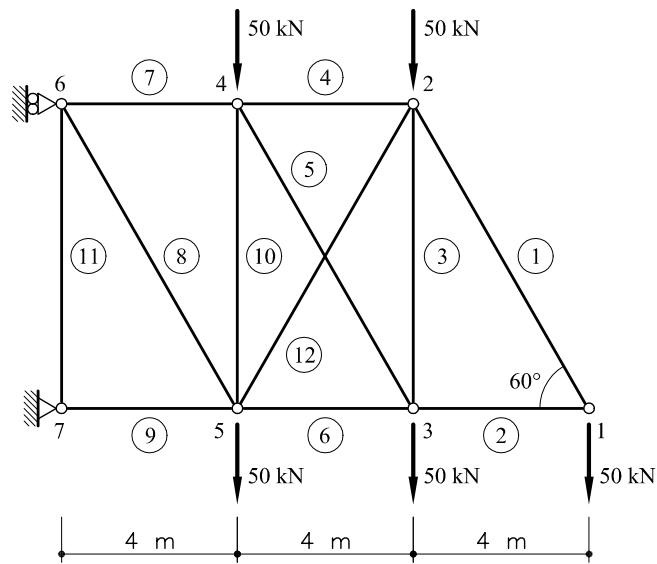


Fig. P8.5.1 Estructura articulada hiperestática

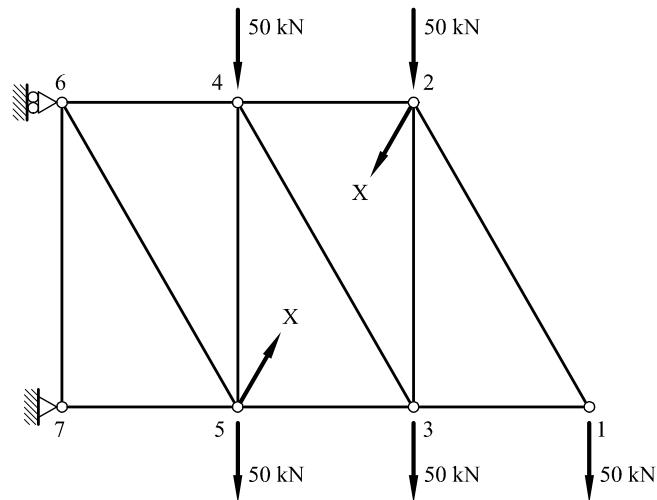


Fig. P8.5.2 Estructura isostática base correspondiente al problema resuelto P8.5

esfuerzos en la isostática base debidos a las cargas externas y N_I^1 los debidos a un par de fuerzas unidas iguales y de sentido contrario situadas en los puntos 2 y 5 y actuando según la dirección de la barra 12, los esfuerzos totales valdrán

$$N_I = N_I^o + XN_I^1$$

Teniendo por tanto en cuenta las expresiones 8.9 y que los esfuerzos N_I^o y N_I^1 han sido ya hallados en los problemas resueltos P8.1 y P8.3, respectivamente, se construye el cuadro P8.5.1.

El acercamiento entre los nudos 2 y 5 debido a las cargas externas vale

$$w_{2,5}^o = \sum_{I=1}^{nbi} N_I^o N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} = 26,65678 \times 10^{-3} m$$

El acercamiento entre los puntos 2 y 5 debido a la carga unidad vale

$$w_{2,5}^1 = \sum_{I=1}^{nbi} N_I^1 N_I^1 \frac{L_I}{E_I A_I} = 0,161840 \times 10^{-3} m$$

El acortamiento de la barra 12 debido a la hiperestática X valdrá $-XL_{12}/(E_{12}A_{12})$. La ecuación de compatibilidad se escribirá por tanto:

$$-X \frac{L_{12}}{E_{12} A_{12}} = w_{2,5}^o + X w_{2,5}^1$$

es decir

$$\begin{aligned} X \left(\frac{8}{126\,000} + 0,161840 \times 10^{-3} \right) + 26,65678 \times 10^{-3} &= 0 \\ X &= -118,51 \text{ kN (compresión)} \end{aligned}$$

Conocido el valor de la incógnita hiperestática, puede llenarse la última columna del cuadro P8.5.1 que proporciona el valor de los esfuerzos axiles en todas las barras.

Cuadro P8.5.1 Esfuerzos axiles y alargamiento de barras

BARRA	N_I^o	N_I^1	$(L/EA)_I \times 10^{-3}$	$N_I^o N_I^1 \left(\frac{L}{EA} \right)_I \times 10^{-3}$	$N_I^1 N_I^1 \left(\frac{L}{EA} \right)_I \times 10^{-3}$	$N_I = N_I^o + X N_I^1$
1	57,7	0	0,063492	0	0	57,7
2	-28,9	0	0,031746	0	0	-28,9
3	-100	-0,866	0,054986	4,761788	0,041237	2,6
4	28,9	-0,5	0,031746	-0,458730	0,007937	88,2
5	173,2	1	0,063492	10,996814	0,063492	54,7
6	-115,5	-0,5	0,031746	1,833333	0,007937	-56,2
7	115,5	0	0,031746	0	0	115,5
8	288,7	0	0,063492	0	0	288,7
9	-260	0	0,031746	0	0	-260
10	-200	-0,866	0,054986	9,523575	0,041237	-97,4
11	-250	0	0,054986	0	0	-250
SUMA				26,65678	0,161840	

8.3.2 Cálculo de estructuras hiperestáticas por el método de rigidez

El método de rigidez que se expone a continuación toma como incógnitas las desplazamientos de los nudos. Debido a su facilidad de automatización, es el método más utilizado en el cálculo de estructuras con ordenador. Para su deducción, considérese una barra cualquiera de longitud L , perteneciente a una estructura articulada (Fig. 8.8).

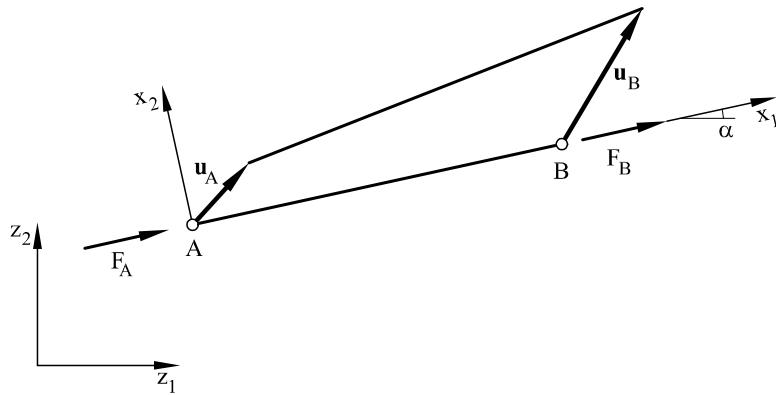


Fig. 8.8 Barra biarticulada referida a sus ejes locales

La barra tendrá un desplazamiento \mathbf{u}_A en su extremo A y \mathbf{u}_B en su extremo B . Asimismo, en el extremo B actuará una fuerza F_B y en el extremo A una fuerza F_A , de forma que por equilibrio se verifique que $F_A = -F_B$.

Respecto a los ejes locales, el movimiento de B según el eje x_1 (esto es, el movimiento de B en la dirección del eje de la pieza) valdrá

$$v_{1B} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{u}_B = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} u_{1B} \\ u_{2B} \end{bmatrix} \quad (8.10a)$$

y análogamente, para el punto A

$$v_{1A} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{u}_A = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} u_{1A} \\ u_{2A} \end{bmatrix} \quad (8.10b)$$

Por otra parte, la diferencia de movimientos entre B y A en la dirección de la barra debe ser igual a la suma del alargamiento de la misma motivado por el esfuerzo axil más el producido por causas no tensionales (temperaturas, etc.), es decir

$$v_{1B} - v_{1A} = \frac{F_B L}{EA} + \delta^{nt} \quad (8.11)$$

o sea,

$$F_B = \frac{EA}{L}(v_{1B} - v_{1A}) - \frac{EA}{L}\delta^{nt} \quad (8.12a)$$

$$F_A = -\frac{EA}{L}(v_{1B} - v_{1A}) + \frac{EA}{L}\delta^{nt} \quad (8.12b)$$

multiplicando F_A y F_B por \mathbf{e}_1 y teniendo en cuenta 8.10 las anteriores expresiones se escriben en coordenadas globales

$$\mathbf{F}_A^g = \mathbf{e}_1 F_A = (\mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \mathbf{e}_1^T) \mathbf{u}_A - (\mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \mathbf{e}_1^T) \mathbf{u}_B + \mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \delta^{nt} \quad (8.13a)$$

$$\mathbf{F}_B^g = \mathbf{e}_1 F_B = -(\mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \mathbf{e}_1^T) \mathbf{u}_A + (\mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \mathbf{e}_1^T) \mathbf{u}_B - \mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \delta^{nt} \quad (8.13b)$$

o sea,

$$\mathbf{F}_A^g = \mathbf{K}^e \mathbf{u}_A - \mathbf{K}^e \mathbf{u}_B + \mathbf{f}^{nt} \quad (8.14a)$$

$$\mathbf{F}_B^g = -\mathbf{K}^e \mathbf{u}_A + \mathbf{K}^e \mathbf{u}_B - \mathbf{f}^{nt} \quad (8.14b)$$

siendo

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \mathbf{e}_1^T$$

es decir

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

y

$$\mathbf{f}^{nt} = \mathbf{e}_1 \frac{EA}{L} \delta^{nt}$$

Las expresiones 8.14 constituyen las *ecuaciones elásticas* de una barra biarticulada plana, y constituyen la base del método de rigidez.

Para formar las ecuaciones globales de rigidez considérese la estructura de la Figura 8.9a sometida a unas cargas en los nudos \mathbf{F}_i . Supóngase seguidamente (Fig. 8.9b) que se sustituyen los apoyos por las correspondientes reacciones (en principio desconocidas).

Por compatibilidad, deberá verificarse que para cada barra los movimientos de extremo de barra deben ser iguales a los correspondientes movimientos de los nudos, y éstos siguen una numeración global. Las ecuaciones elásticas de cada barra se escribirán por tanto

Barra 1

$$(\mathbf{F}_A^g)^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}^1 \mathbf{u}_2 + (\mathbf{f}^{nt})^1 \quad (8.16a)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^1 = -\mathbf{K}^1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}^1 \mathbf{u}_2 - (\mathbf{f}^{nt})^1 \quad (8.16b)$$

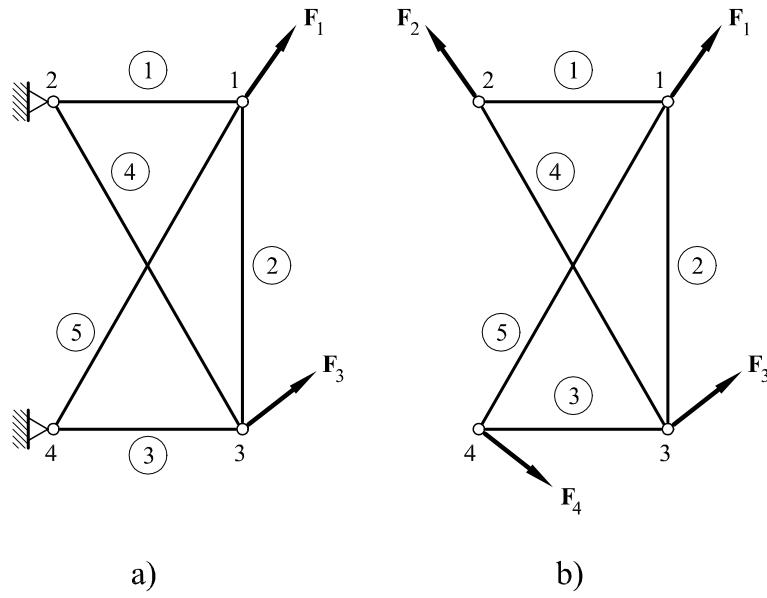


Fig. 8.9 a) Estructura articulada, b) Estructura articulada en la que se han sustituido los apoyos por las correspondientes reacciones

Barra 2

$$(\mathbf{F}_A^g)^2 = \mathbf{K}^2 \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}^2 \mathbf{u}_3 + (\mathbf{f}^{nt})^2 \quad (8.16c)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^2 = -\mathbf{K}^2 \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}_3 - (\mathbf{f}^{nt})^2 \quad (8.16d)$$

Barra 3

$$(\mathbf{F}_A^g)^3 = \mathbf{K}^3 \mathbf{u}_3 - \mathbf{K}^3 \mathbf{u}_4 + (\mathbf{f}^{nt})^3 \quad (8.16e)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^3 = -\mathbf{K}^3 \mathbf{u}_3 + \mathbf{K}^3 \mathbf{u}_4 - (\mathbf{f}^{nt})^3 \quad (8.16f)$$

Barra 4

$$(\mathbf{F}_A^g)^4 = \mathbf{K}^4 \mathbf{u}_2 - \mathbf{K}^4 \mathbf{u}_3 + (\mathbf{f}^{nt})^4 \quad (8.16g)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^4 = -\mathbf{K}^4 \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}^4 \mathbf{u}_3 - (\mathbf{f}^{nt})^4 \quad (8.16h)$$

Barra 5

$$(\mathbf{F}_A^g)^5 = \mathbf{K}^5 \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}^5 \mathbf{u}_4 + (\mathbf{f}^{nt})^5 \quad (8.16i)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^5 = -\mathbf{K}^5 \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}^5 \mathbf{u}_4 - (\mathbf{f}^{nt})^5 \quad (8.16j)$$

Por otra parte, por equilibrio en cada uno de los nudos

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}_A^g)^1 + (\mathbf{F}_A^g)^2 + (\mathbf{F}_A^g)^5 \quad (8.17a)$$

$$\mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}_B^g)^1 + (\mathbf{F}_A^g)^4 \quad (8.17b)$$

$$\mathbf{F}_3 = (\mathbf{F}_B^g)^2 + (\mathbf{F}_A^g)^3 + (\mathbf{F}_B^g)^4 \quad (8.17c)$$

$$\mathbf{F}_4 = (\mathbf{F}_B^g)^3 + (\mathbf{F}_B^g)^5 \quad (8.17d)$$

Introduciendo las ecuaciones 8.16 en las 8.17 se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^5 & -\mathbf{K}^1 & -\mathbf{K}^2 & -\mathbf{K}^5 \\ -\mathbf{K}^1 & \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^4 & -\mathbf{K}^4 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}^2 & -\mathbf{K}^4 & \mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^4 & -\mathbf{K}^3 \\ -\mathbf{K}^5 & \mathbf{0} & -\mathbf{K}^3 & \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (\mathbf{f}^{nt})^1 + (\mathbf{f}^{nt})^2 + (\mathbf{f}^{nt})^5 \\ -(\mathbf{f}^{nt})^1 + (\mathbf{f}^{nt})^4 \\ -(\mathbf{f}^{nt})^2 + (\mathbf{f}^{nt})^3 - (\mathbf{f}^{nt})^4 \\ -(\mathbf{f}^{nt})^3 - (\mathbf{f}^{nt})^5 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

o escrito en forma compacta

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{F}^{nt} \quad (8.19)$$

es decir

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^{nt} \quad (8.20)$$

El sistema anterior constituye el sistema de ecuaciones buscado. En él, la matriz \mathbf{K} es la matriz de rigidez global de la estructura, la cual es simétrica. El vector \mathbf{u} es el vector de desplazamientos incógnita, mientras que $\mathbf{F} - \mathbf{F}^{nt}$ es el vector de cargas.

A partir de la forma de la matriz \mathbf{K} es posible dar la regla general para formarla: *El elemento (i, i) de la diagonal principal, de la matriz de rigidez global, está formado por la suma de las matrices \mathbf{K}^I de todas las barras que concurren al nudo i . En el elemento (i, j) , si existe una barra que une los nudos i y j , se colocará la matriz \mathbf{K} correspondiente a tal barra, y la matriz nula en caso contrario.*

Es importante notar que el sistema de ecuaciones obtenido es singular, ya que lo es la matriz \mathbf{K} . Es lógico que así sea, puesto que han sido sustituidos los apoyos por las correspondientes reacciones. Es preciso, por lo tanto, modificar el anterior sistema para introducir las condiciones cinemáticas en los apoyos. Para este caso: $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$. Este hecho puede ser tenido en cuenta eliminando de la matriz de rigidez, y por tanto del sistema de ecuaciones, las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad de los nudos 2 y 4. En general, por tanto, se eliminarán de dicha matriz de rigidez las filas y columnas correspondientes a grados de libertad restringidos.

Resolviendo el sistema 8.20 se obtienen los desplazamientos de los nudos

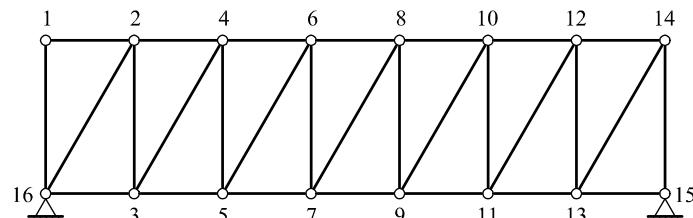
$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^{nt}) \quad (8.21)$$

Obtenidos los movimientos, se obtienen las fuerzas de extremo de barra en coordenadas globales mediante las expresiones 8.16, y a partir de ellas los esfuerzos en cada

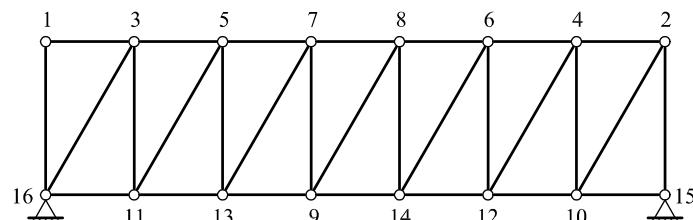
barra I (fuerzas en coordenadas locales) mediante

$$N_I = (\mathbf{e}_1^I)^T (\mathbf{F}_B^g)_I \quad (8.22)$$

Como puede verse, el método de rigidez conduce a un sistema de ecuaciones que (al revés que en el método de compatibilidad) es independiente del grado de hiperestatismo de la estructura.



a)



b)

Fig. 8.10 Diferentes numeraciones de una estructura

Es muy interesante analizar la topología de la matriz de rigidez \mathbf{K} . Para ello, considérese la estructura de la figura 8.10a. Si se señalan con un asterisco (*) los elementos no nulos de la matriz de rigidez global \mathbf{K} , se tendrá

Nudo					
1	*	*			
2	*	*	*		
3	*	*	*		
4	*	*	*		
5	*	*	*		
6	*	*	*		
7	*	*	*		
8	*	*	*		
9	*	*	*		
10			*	*	*
11			*	*	*
12			*	*	*
13			*	*	
14			*		

SIMETRICO

(8.23)

Al ser la matriz simétrica, se escribe únicamente media matriz. Se observa que todos los valores no nulos se sitúan en una banda paralela a la diagonal principal. El ancho de dicha banda depende de la numeración de los nudos de la estructura. Con la numeración de la figura 8.10b, el ancho de banda aumenta considerablemente de forma innecesaria, apareciendo multitud de ceros en el interior de la banda. Lógicamente hay que tender a numerar las estructuras de forma que el ancho de banda sea pequeño.

♣ Problema resuelto P8.6 *Obtener las ecuaciones del método de rigidez utilizando el teorema de los trabajos virtuales. Para mayor facilidad de desarrollo, se supondrá que no existen variaciones de longitud en las barras debidas a causas no tensionales.*

Solución

Considérese la misma estructura de la figura 8.9, en la que (por ejemplo) al nudo 3 se le da un desplazamiento virtual $\bar{\mathbf{u}}_3$. La ecuación de trabajos virtuales se escribirá

$$\bar{\mathbf{u}}_3^T [((\mathbf{F}_B^g)^2 + (\mathbf{F}_A^g)^3 + (\mathbf{F}_B^g)^4] = \bar{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{F}_3$$

y en virtud de las expresiones 8.16:

$$\bar{\mathbf{u}}_3^T [(-\mathbf{K}^2 \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}^2 \mathbf{u}_3) + (\mathbf{K}^3 \mathbf{u}_3 - \mathbf{K}^3 \mathbf{u}_4) + (-\mathbf{K}^4 \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}^4 \mathbf{u}_3)] = \bar{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{F}_3$$

y reorganizando términos

$$\bar{\mathbf{u}}_3^T [-\mathbf{K}^2 \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}^4 \mathbf{u}_2 + (\mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^4) \mathbf{u}_3 - \mathbf{K}^3 \mathbf{u}_4] = \bar{\mathbf{u}}_3^T \mathbf{F}_3$$

y puesto que el valor de $\bar{\mathbf{u}}_3$ es arbitrario, la ecuación anterior se escribe

$$-\mathbf{K}^2 \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}^4 \mathbf{u}_2 + (\mathbf{K}^2 + \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^4) \mathbf{u}_3 - \mathbf{K}^3 \mathbf{u}_4 = \mathbf{F}_3$$

expresión que coincide con la tercera de las ecuaciones 8.18. Las otras tres ecuaciones se obtendrán, obviamente, dando desplazamientos virtuales a los otros nudos.

♣ Problema resuelto P8.7 *Obtener las ecuaciones del método de rigidez mediante la minimización de la energía potencial total.*

Solución

Como es sabido, la energía potencial total es la suma de la energía interna W de la estructura más la energía potencial U_p de las cargas respecto de los desplazamientos, es decir

$$\Pi = W + U_p$$

La energía interna W de la estructura puede escribirse expresando las variables en coordenadas locales

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\text{barras}} [F_B(v_B - v_A)]$$

o expresándolas en coordenadas globales

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\text{barras}} [(\mathbf{u}_B^T - \mathbf{u}_A^T) \mathbf{F}_B^g] = \frac{1}{2} \sum_{\text{barras}} (\mathbf{u}_B^T \mathbf{F}_B^g + \mathbf{u}_A^T \mathbf{F}_A^g)$$

Eligiendo esta última expresión, la energía potencial total de la estructura de la figura 8.9 se escribirá

$$\begin{aligned} \Pi = & \underbrace{\frac{1}{2} [\mathbf{u}_2^T (\mathbf{F}_B^g)^1 + \mathbf{u}_1^T (\mathbf{F}_A^g)^1]}_{\text{Barra 1}} + \underbrace{\mathbf{u}_3^T (\mathbf{F}_B^g)^2 + \mathbf{u}_1^T (\mathbf{F}_A^g)^2}_{\text{Barra 2}} + \underbrace{\mathbf{u}_4^T (\mathbf{F}_B^g)^3 + \mathbf{u}_3^T (\mathbf{F}_A^g)^3}_{\text{Barra 3}} + \\ & + \underbrace{\mathbf{u}_3^T (\mathbf{F}_B^g)^4 + \mathbf{u}_2^T (\mathbf{F}_A^g)^4}_{\text{Barra 4}} + \underbrace{\mathbf{u}_4^T (\mathbf{F}_B^g)^5 + \mathbf{u}_1^T (\mathbf{F}_A^g)^5}_{\text{Barra 5}} - \mathbf{u}_1^T \mathbf{F}_1 - \mathbf{u}_2^T \mathbf{F}_2 - \mathbf{u}_3^T \mathbf{F}_3 - \mathbf{u}_4^T \mathbf{F}_4 \end{aligned}$$

Sustituyendo las fuerzas de extremo de barra \mathbf{F}_B^g y \mathbf{F}_A^g por las expresiones dadas en 8.16 y derivando después respecto a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ y \mathbf{u}_4 , se obtiene el sistema de ecuaciones 8.18.

♣ **Problema resuelto P8.8** *Determinar los movimientos en todos los nudos así como los esfuerzos axiles en las barras en la estructura articulada del problema resuelto P8.5.*

Solución

De acuerdo con la expresión 8.15, las matrices de rigidez de cada una de las barras valdrá

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^5 = \mathbf{K}^8 = 10^3 \begin{bmatrix} 3,94 & -6,82 \\ -6,82 & 11,81 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^4 = \mathbf{K}^6 = \mathbf{K}^7 = \mathbf{K}^9 = 10^3 \begin{bmatrix} 31,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^{10} = \mathbf{K}^{11} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18,19 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{12} = 10^3 \begin{bmatrix} 3,94 & 6,82 \\ 6,82 & 11,81 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global se formará a partir de las matrices de rigidez de cada barra, es decir

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 + \mathbf{K}^2 & -\mathbf{K}^1 & -\mathbf{K}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^4 + \mathbf{K}^{12} & -\mathbf{K}^3 & -\mathbf{K}^4 & -\mathbf{K}^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}^3 + \mathbf{K}^5 + \mathbf{K}^6 & -\mathbf{K}^5 & -\mathbf{K}^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}^4 + \mathbf{K}^5 + \mathbf{K}^7 + \mathbf{K}^{10} & -\mathbf{K}^{10} & -\mathbf{K}^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}^6 + \mathbf{K}^8 + \mathbf{K}^9 + \mathbf{K}^{10} + \mathbf{K}^{12} & -\mathbf{K}^8 & -\mathbf{K}^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Simétrica} & \mathbf{K}^7 + \mathbf{K}^8 + \mathbf{K}^{11} & -\mathbf{K}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{K}^9 + \mathbf{K}^{11} & & & & \end{bmatrix}$$

con lo que, sustituyendo los valores de las matrices de cada barra, se obtiene la matriz de rigidez dada por el cuadro P8.8.1. En dicho cuadro, aparecen escritas en negrita los elementos correspondientes a las filas y columnas eliminadas correspondientes a los grados de libertad con movimientos impididos (grado de libertad horizontal en apoyo 6 y grados de libertad horizontal y vertical en apoyo 7).

Cuadro P8.8.1 Matriz de rigidez ($\times 10^3$)

$$\begin{bmatrix} 35,44 & -6,82 & -3,94 & 6,82 & -31,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 11,81 & 6,82 & -11,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 39,38 & 0 & 0 & 0 & -31,5 & 0 & -3,94 & -6,82 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 41,81 & 0 & -18,19 & 0 & 0 & 0 & -6,82 & -1182 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 66,94 & -6,82 & -3,94 & 6,82 & 31,5 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & 30,00 & 6,82 & -11,82 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & 66,94 & -6,82 & 0 & 0 & -31,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & 30,00 & 0 & -18,19 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & & 70,88 & 0 & -3,94 & 6,82 & -31,50 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & & & 41,81 & \mathbf{6,82} & -11,81 & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ & & & & \mathbf{35,44} & -\mathbf{6,82} & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ & & & & & 30,00 & \mathbf{0} & -18,19 & \mathbf{31,50} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{18,19} \\ & & & & & & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{18,19} \\ \text{Simétrico} & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen los desplazamientos de los nudos

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -10,95 \\ -71,11 \end{bmatrix} \times 10^3 m. \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6,46 \\ -56,84 \end{bmatrix} \times 10^3 m.$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -10,04 \\ -56,97 \end{bmatrix} \times 10^3 m. \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 3,67 \\ -45,04 \end{bmatrix} \times 10^3 m.$$

$$\mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} -8, 25 \\ -39, 67 \end{bmatrix} \times 10^3 m. \quad \mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -13, 75 \end{bmatrix} \times 10^3 m.$$

Conocidos los desplazamientos, se calculan los esfuerzos a partir de 8.22

$$N_1 = 57,7 \text{ kN} \quad N_2 = -28,9 \text{ kN} \quad N_3 = 2,6 \text{ kN}$$

$$N_4 = 88,2 \text{ kN} \quad N_5 = 54,7 \text{ kN} \quad N_6 = -56,2 \text{ kN}$$

$$N_7 = 115,5 \text{ kN} \quad N_8 = 288,7 \text{ kN} \quad N_9 = -260 \text{ kN}$$

$$N_{10} = -97,4 \text{ kN} \quad N_{11} = -250 \text{ kN} \quad N_{12} = -118,5 \text{ kN}$$

8.4 Ejercicios propuestos

♣ **Ejercicio propuesto EP8.1** Para resolver la estructura articulada de la figura EP8.1, se toma como incógnita hiperestática la barra 6.

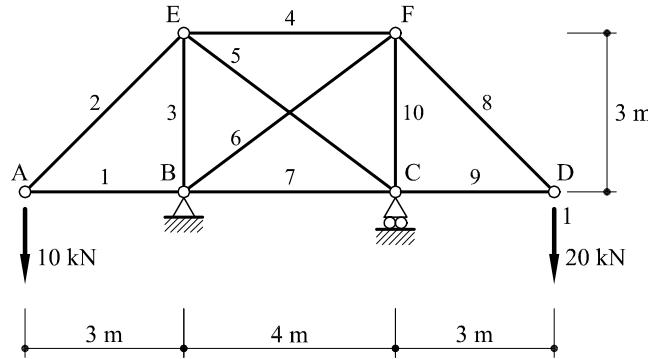


Fig. EP8.1

Todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad y la misma área, $EA = 10^3 \text{ kN}$.

Hallar:

- Esfuerzo en la barra 5
- Esfuerzo en la barra 6
- Alejamiento de los puntos B y F
- Alejamiento de los puntos E y C

Valor de control: El esfuerzo axil en la barra 6 vale $3,125 \text{ kN}$ (tracción).

- ♣ **Ejercicio propuesto EP8.2** En la estructura de la figura EP8.2, todas las piezas están articuladas entre sí. Las barras horizontales tienen una sección doble que el resto, siendo el módulo de elasticidad idéntico para todas ellas.

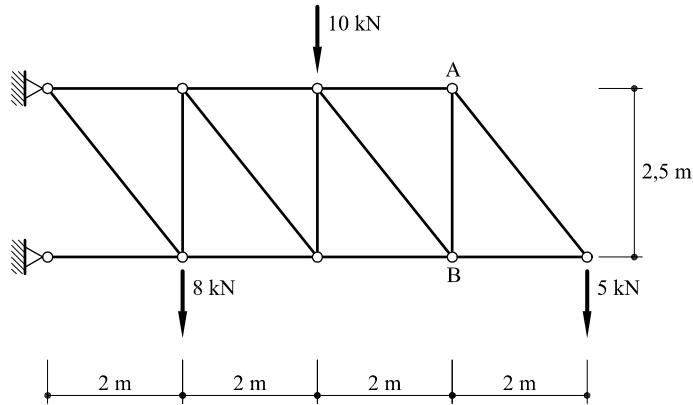


Fig. EP8.2

Determinar:

- Esfuerzo en todas las barras

Valor de control: Esfuerzo axil en la barra AB: -5 kN (compresión).

- ♣ **Ejercicio propuesto EP8.3** En la estructura de la figura EP8.3, todas las piezas están articuladas entre sí, teniendo todas la misma sección y el mismo módulo de elasticidad.

Determinar los esfuerzos en todas las barras.

Valor de control: Valor del esfuerzo axil en la barra AB : -32 kN (compresión).

- ♣ **Ejercicio propuesto EP8.4** En la estructura articulada de la figura EP8.4, todas las barras son de acero con un módulo de elasticidad de valor $E = 200 \text{ GPa}$. La sección recta de cada una de las barras es la siguiente:

Barra	1–6	4–5	1–2	3–4	2–5	3–6	2–6	3–5	2–3	6–5
Sección (cm^2)	22,35	22,35	32,00	32,00	25,00	25,00	15,00	15,00	20,00	20,00

Determinar los esfuerzos en todas las barras, así como el movimiento total del punto 3.

Valor de control: El esfuerzo axil en la barra 5–6 vale $0,26 \text{ kN}$ (tracción).

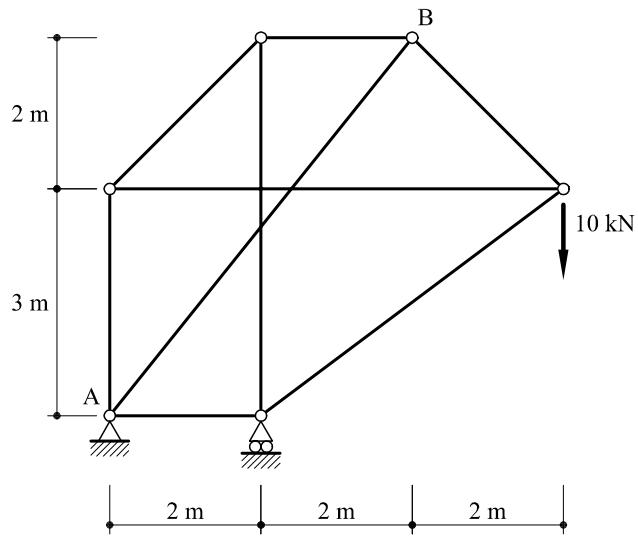


Fig. EP8.3

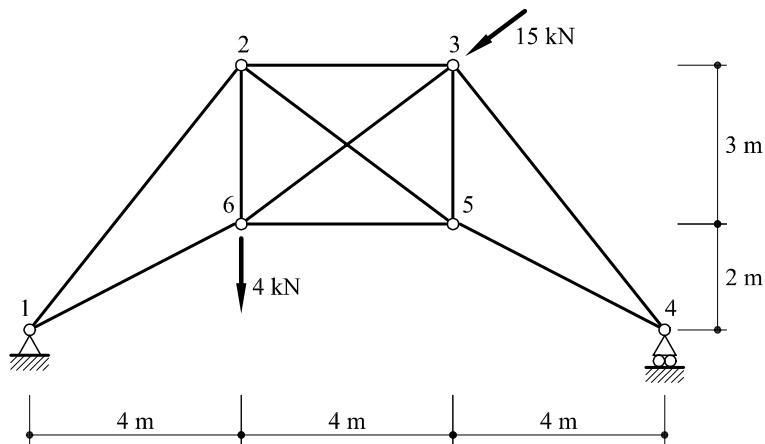


Fig. EP8.4

♣ **Ejercicio propuesto EP8.5** En la estructura que se muestra en la figura EP8.5, se pide: determinar los esfuerzos en todas las barras. Se supone que todas las barras tienen la misma sección A y el mismo módulo de elasticidad E.

Valor de control: El esfuerzo axil en la barra AB vale 11,2 kN (tracción).

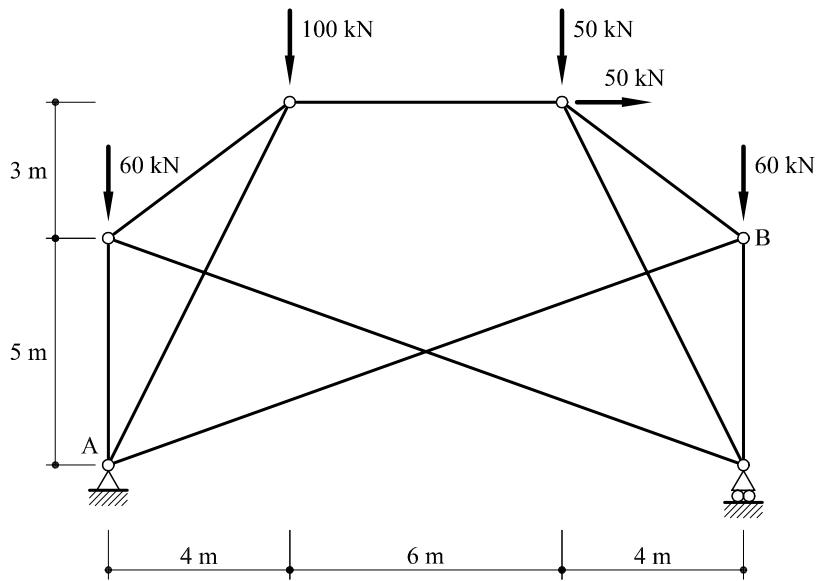


Fig. EP8.5

♣ **Ejercicio propuesto EP8.6** La estructura representada en la figura EP8.6, se encuentra sometida a la acción de las dos fuerzas indicadas y a una dilatación de 3 cm en la barra 3–5. El producto EA de las distintas barras vale:

- $EA_{25} = EA_{12} = EA_{23} = EA_{15} = EA_{35} = 3,46 \times 10^5 \text{ kN}$
- $EA_{13} = 6,15 \times 10^5 \text{ kN}$
- $EA_{34} = 7,00 \times 10^5 \text{ kN}$
- $EA_{45} = 6,15 \times 10^5 \text{ kN}$

Se pide determinar los esfuerzos en todas las barras.

Valor de control: El esfuerzo en la barra 1–3 vale 611 kN (tracción).

♣ **Ejercicio propuesto EP8.7** En la estructura que se muestra en la figura EP8.7 se pide: hallar movimientos del nudo A.

- La sección de todas las barras es $A = 10 \text{ cm}^2$
- Módulo de elasticidad lineal $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$

Valor de control: El movimiento total del punto A vale 4,84 cm.

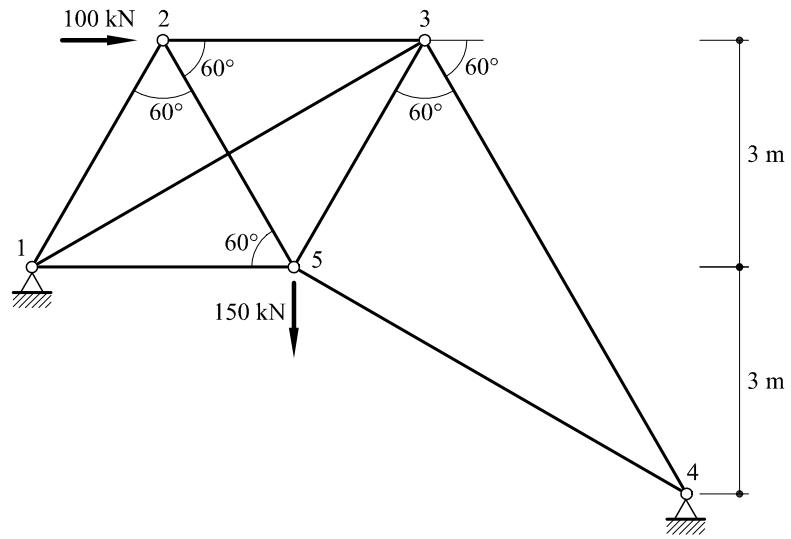


Fig. EP8.6

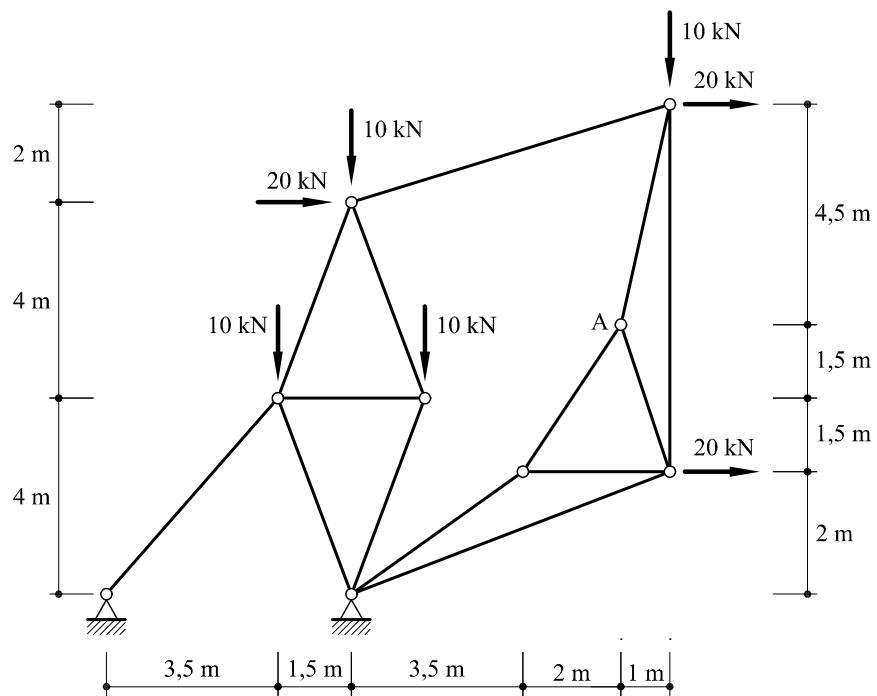


Fig. EP8.7

♣ **Ejercicio propuesto EP8.8** En la estructura de la figura EP8.8, sometida a la cargas que en ella se indican, se pide:

- Grado de hiperestatismo.
- Movimiento del nudo 6.
- Esfuerzos en todas las barras.

Características físicas de las barras:

Sección de las barras

Barra	2-6	4-7	1-6	3-6	3-7	5-7	6-7
Sección (cm ²)	10	10	11,547	11,547	11,547	11,547	10

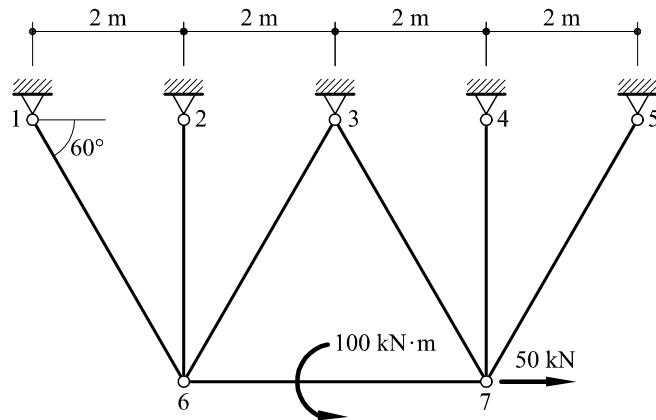


Fig. EP8.8

9 Vigas simples

9.1 Introducción

Se estudiarán en este capítulo las vigas simples, entendiendo por tales aquellas piezas de un solo vano sometidas a cualquier tipo de carga. En la mayor parte del estudio se prescindirá del esfuerzo axil, puesto que su inclusión es inmediata y no requiere un análisis especial. Se analizarán dos tipos de formulaciones: la primera de ellas, conocida como *formulación de vigas de Euler-Bernouilli*, prescinde de la deformación debida al esfuerzo cortante, mientras que la segunda, comúnmente denominada *formulación de vigas de Timoshenko* sí la tiene en cuenta. En la mayoría de los casos, la formulación de Euler-Bernouilli proporciona resultados suficientemente aproximados. Aún así, existe un número suficiente de situaciones en que es preciso la utilización de la viga de Timoshenko, lo que justifica sobradamente su inclusión en el presente capítulo. Por otro lado, en el cálculo de estructuras utilizando métodos numéricos, la inclusión del esfuerzo cortante supone un esfuerzo adicional de cálculo apenas apreciable.

A) FORMULACION DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

9.2 Ecuación de la elástica

Para el caso de una pieza recta bidimensional en la que se prescinde de la inclusión del esfuerzo axil, las ecuaciones de equilibrio interno 2.25 se escribirán

$$\frac{dQ}{dx_1} + p_2 = 0 \quad (9.1a)$$

$$\frac{dM_f}{dx_1} + m + Q = 0 \quad (9.1b)$$

que también pueden escribirse

$$\frac{d^2M_f}{dx_1^2} + \frac{dm}{dx_1} - p_2 = 0 \quad (9.2)$$

Por lo que hace referencia a las deformaciones generalizadas, la expresión 7.92 se escribirá en este caso

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

y si se prescinde de la influencia de la deformación por cortante, $\gamma = 0$, por lo que a partir de 9.3

$$0 = \frac{dv_2}{dx_1} - \varphi \quad (9.4a)$$

$$\chi = \frac{d\varphi}{dx_1} \quad (9.4b)$$

es decir

$$\chi = \frac{d^2v_2}{dx_1^2} \quad (9.5)$$

y puesto que $\chi = M_f/EI$, la expresión 9.5 puede escribirse

$$\frac{M_f}{EI} = \frac{d^2v_2}{dx_1^2} \quad (9.6a)$$

y también dado que

$$\begin{aligned} \frac{dM_f}{dx_1} + m + Q &= 0 \\ \frac{Q + m}{EI} &= -\frac{d^3v_2}{dx_1^3} \end{aligned} \quad (9.6b)$$

y como

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx_1} + p_2 &= 0 \\ \frac{p_2}{EI} - \frac{1}{EI} \frac{dm}{dx_1} &= \frac{d^4v_2}{dx_1^4} \end{aligned} \quad (9.6c)$$

Cualquiera de las expresiones 9.6 constituye la ecuación diferencial de los movimientos de la viga, conocida con el nombre de *ecuación diferencial de la curva elástica*, siendo lógicamente la curva elástica la deformada de la pieza recta.

9.2.1 Deformación de una ménsula sometida a carga uniformemente repartida

Considérese una ménsula de longitud L cargada con una carga uniformemente repartida $p_2 = -q$ (Fig. 9.1). Se trata de obtener la deformada y la ley de giros $\varphi(x_1)$.

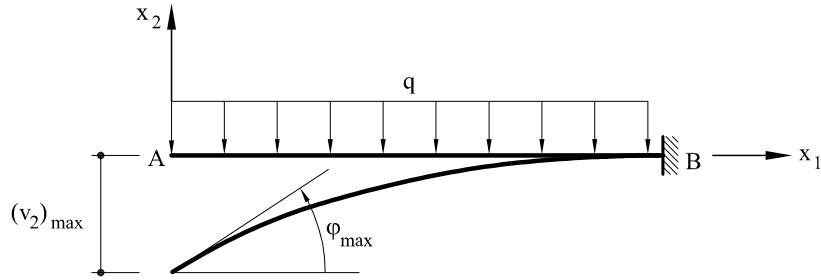


Fig. 9.1 Deformada de una ménsula con carga uniforme

Como pueden utilizarse cualquiera de las expresiones 9.6, para este apartado se partirá de 9.6a. Para ello, se escribe la ley de momentos flectores

$$M_f = -\frac{qx_1^2}{2} \quad (9.7)$$

por lo que la ecuación diferencial 9.6a de la elástica se escribirá

$$-\frac{qx_1^2}{2EI} = \frac{d^2v_2}{dx_1^2} \quad (9.8)$$

que una vez integrada da

$$v_2 = -\frac{qx_1^4}{24EI} + C_1x_1 + C_2 \quad (9.9)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtendrán de imponer la condiciones de contorno en B

$$\text{para } x_1 = L \Rightarrow v_2 = 0 \quad (9.10a)$$

$$\text{para } x_1 = L \Rightarrow \varphi = \frac{dv_2}{dx_1} = 0 \quad (9.10b)$$

es decir

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{qL^4}{24EI} + C_1L + C_2 = 0 \\ & -\frac{qL^3}{6EI} + C_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

de donde se obtiene $C_1 = qL^3/6EI$; $C_2 = -qL^4/8EI$, por lo que la expresión de la

deformada 9.9 se escribirá finalmente

$$v_2 = -\frac{qx_1^4}{24EI} + \frac{qL^3}{6EI}x_1 - \frac{qL^4}{8EI} \quad (9.12)$$

y derivando se obtiene la ley de giros

$$\varphi = \frac{dv_2}{dx_1} = -\frac{qx_1^3}{6EI} + \frac{qL^3}{6EI} \quad (9.13)$$

La flecha máxima se obtendrá en el punto A , por lo que sustituyendo para $x_1 = 0$ en la expresión 9.12 se obtiene $(v_2)_{\max} = -qL^4/8EI$. Asimismo, el giro máximo se producirá también en A y valdrá $\varphi_{\max} = qL^3/6EI$.

9.2.2 Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida

Considérese (Fig. 9.2) una viga biapoyada sometida a una carga uniformemente repartida de valor $p_2 = -q \text{ kN}$ por metro lineal. Se trata de hallar la ley de flechas, los giros, la flecha máxima y los giros en los apoyos

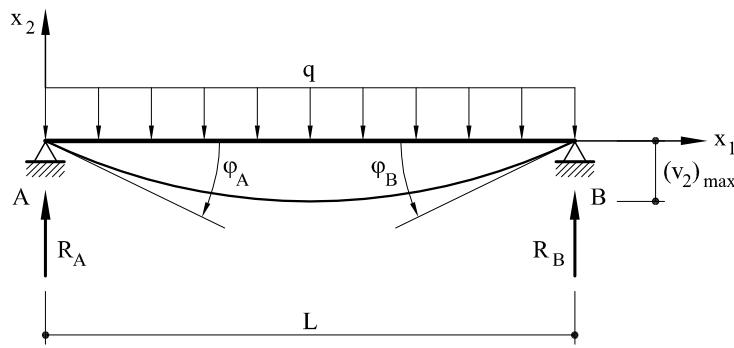


Fig. 9.2 Deformada de una viga biapoyada sometida a una carga uniforme

Las reacciones R_A y R_B valdrán $R_A = R_B = qL/2$.
La ley de momentos flectores valdrá

$$M_f(x_1) = R_B(L - x_1) - \frac{q}{2}(L - x_1)^2 = \frac{qLx_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2} \quad (9.14)$$

Sustituyendo en la expresión 9.6a

$$EI \frac{d^2v_2}{dx_1^2} = \frac{qLx_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2} \quad (9.15)$$

Integrando

$$EIv_2 = \frac{qLx_1^3}{12} - \frac{qx_1^4}{24} + C_1x_1 + C_2 \quad (9.16)$$

$$\text{para } x_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$$

$$\text{para } x_1 = L \Rightarrow v_2 = 0$$

Con lo cual $C_1 = -qL^3/24$, $C_2 = 0$, por lo que sustituyendo en 9.16 se tendrá

$$v_2 = \frac{qx_1}{24EI} (2Lx_1^2 - x_1^3 - L^3) \quad (9.17)$$

La flecha máxima $(v_2)_{\max}$ se obtendrá para $x_1 = L/2$, por lo que

$$(v_2)_{\max} = -\frac{5qL^4}{384EI} \quad (9.18)$$

En lo que respecta a los giros, derivando la expresión 9.17

$$\varphi = \frac{dv_2}{dx_1} = \frac{qLx_1^2}{4EI} - \frac{qx_1^3}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI} \quad (9.19)$$

Además, para $x_1 = 0$ se obtiene $\varphi_A = -qL^3/24EI$ y para $x_1 = L$, $\varphi_B = qL^3/24EI$.

9.2.3 Viga empotrada en un extremo y apoyada en otro sometida a carga uniformemente repartida

Considérese la viga de la figura 9.3 sometida a una carga uniformemente repartida q . Al ser la pieza hiperestática, no es posible utilizar la ecuación diferencial 9.6a al ser desconocida la ley de momentos flectores, por lo que será necesario partir de la 9.6c. Integrando dicha ecuación se obtiene

$$EIv_2(x_1) = -\frac{qx_1^4}{24} + \frac{C_1x_1^3}{6} + \frac{C_2x_1^2}{2} + C_3x_1 + C_4 \quad (9.20)$$

Las condiciones de contorno a imponer serán:

- para $x_1 = 0 \Rightarrow v_2(x_1) = 0$
- para $x_1 = 0 \Rightarrow \varphi(x_1) = dv_2/dx_1 = 0$
- para $x_1 = L \Rightarrow v_2(x_1) = 0$
- para $x_1 = L \Rightarrow M_f = EI d^2v_2/dx_1^2 = 0$

Imponiendo las anteriores condiciones a la ecuación 9.20 se obtienen los valores de las cuatro constantes de integración: $C_1 = 5qL/8$; $C_2 = -qL^2/8$; $C_3 = C_4 = 0$, con lo que la expresión de la ley de flechas será

$$v_2 = -\frac{qx_1^4}{24EI} + \frac{5qLx_1^3}{48EI} - \frac{qL^2x_1^2}{16EI} \quad (9.21)$$

y la ley de giros

$$\varphi = \frac{dv_2}{dx_1} = -\frac{qx_1^3}{6EI} + \frac{5qLx_1^2}{16EI} - \frac{qL^2x_1}{8EI} \quad (9.22)$$

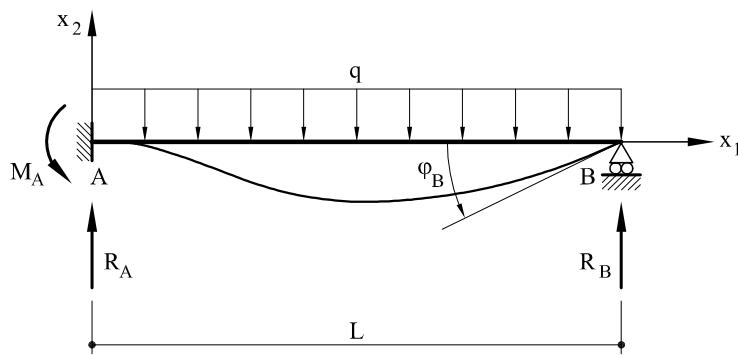


Fig. 9.3 Deformada de una viga simple empotrada y apoyada sometida a una carga uniformemente repartida

Las leyes de esfuerzos se obtendrán

$$M_f(x_1) = EI \frac{d^2v_2}{dx_1^2} = -\frac{qx_1^2}{2} + \frac{5qLx_1}{8} - \frac{qL^2}{8} \quad (9.23a)$$

$$Q(x_1) = -\frac{dM_f}{dx_1} = qx_1 - \frac{5qL}{8} \quad (9.23b)$$

y las reacciones

$$M_A = -M_f(x_1 = 0) = \frac{qL^2}{8}$$

$$R_A = -Q(x_1 = 0) = \frac{5qL}{8}$$

$$R_B = Q(x_1 = L) = \frac{3qL}{8}$$

En la figura 9.4 pueden verse dibujadas las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes

9.2.4 Cargas no uniformes. Utilización de la función de Heaviside

Las piezas estudiadas anteriormente tienen en común el hecho de que la carga es uniformemente repartida a lo largo de toda la luz de la pieza. Aparecen, sin embargo, muchos casos en los que la carga actúa únicamente en un trozo de la pieza, o bien, dicha carga es puntual. En estos casos es muy útil introducir la función de Heaviside, la cual se define (Fig. 9.5)

$$H(x_1 - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < a \\ 1 & \text{si } x_1 \geq a \end{cases} \quad (9.24)$$

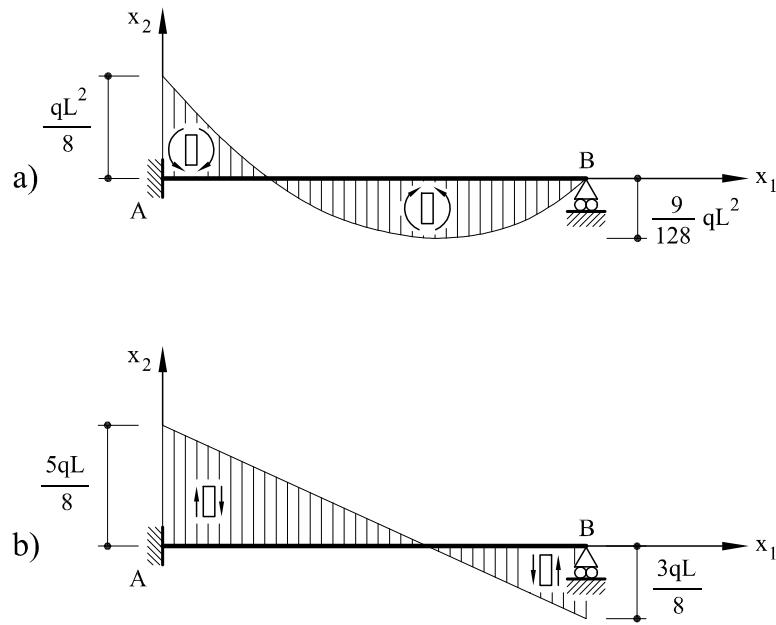


Fig. 9.4 Leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes en una viga empotrada y apoyada sometida a carga uniforme

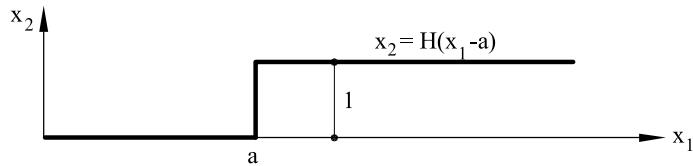


Fig. 9.5 Función de Heaviside

Mediante la función de Heaviside es posible representar funciones a trozos, lo que la convierte en una herramienta muy útil para representar analíticamente algunos tipos de cargas, momentos, etc. Así por ejemplo, las cargas representadas en las figuras 9.6a y 9.6b pueden escribirse respectivamente:

$$p_2(x_1) = -qH(x_1 - a) \quad (9.25a)$$

$$p_2(x_1) = -qH(x_1 - a) + qH(x_1 - b) \quad (9.25b)$$

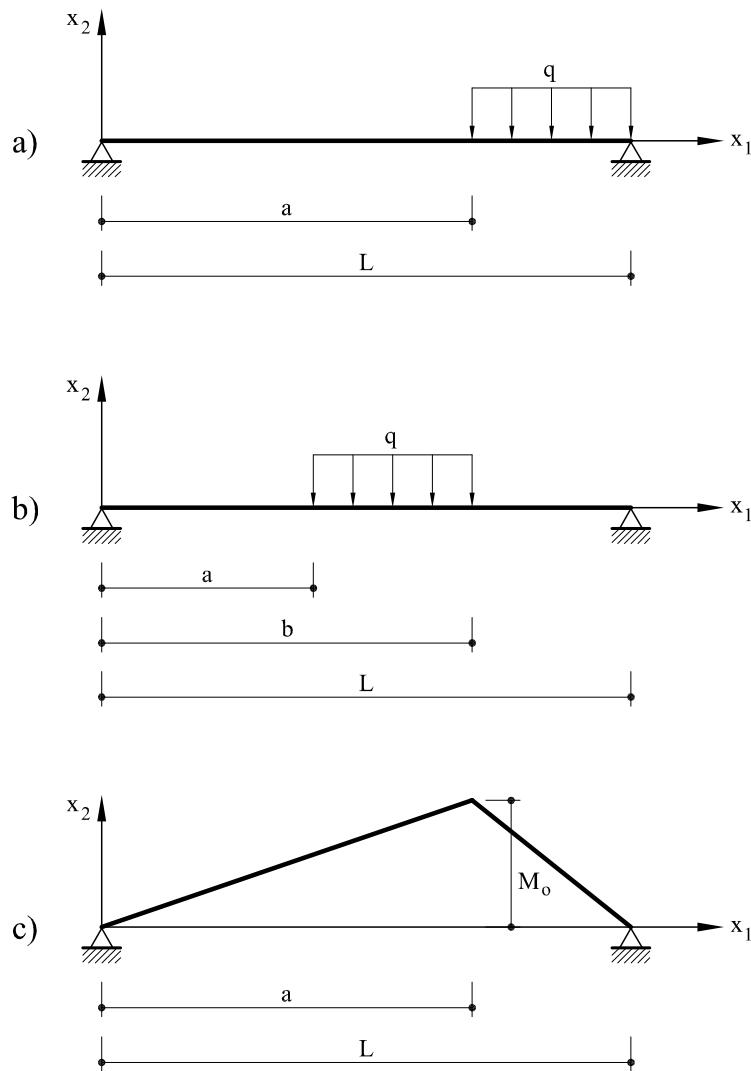


Fig. 9.6 Diversas cargas y leyes de esfuerzos en una pieza biapoyada

mientras que la ley de momentos flectores de la figura 9.6c se escribirá

$$M_f(x_1) = \frac{M_0}{a}x_1 + \frac{M_0L(a - x_1)}{a(L - a)}H(x_1 - a) \quad (9.25c)$$

Es interesante obtener la primera derivada así como la integral de la función de Heaviside

$$\frac{dH(x_1 - a)}{dx_1} = \delta(x_1 - a) \quad (9.26)$$

siendo $\delta(x_1 - a)$ la función delta de Dirac definida por

$$\delta(x_1 - a) = 0 \quad \text{si } x_1 \neq a \quad (9.27a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \delta(x_1 - a) dx_1 = f(a) \quad (9.27b)$$

asimismo

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(\xi) H(\xi - a) d\xi = H(x_1 - a) \int_a^{x_1} f(\xi) d\xi \quad (9.28)$$

A partir de estas expresiones ya es posible proceder a la integración de la ecuación de la elástica para cualquier tipo de carga.

9.2.5 Viga biapoyada sometida a una carga puntual F

La ecuación de la elástica se escribirá en este caso (Fig. 9.7):

$$\frac{d^4 v_2}{dx_1^4} = -\frac{F}{EI} \delta(x_1 - a) \quad (9.29)$$

cuyas sucesivas integrales serán

$$\frac{d^3 v_2}{dx_1^3} = -\frac{F}{EI} H(x_1 - a) + C_1 \quad (9.30a)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx_1^2} = -\frac{F}{EI} (x_1 - a) H(x_1 - a) + C_1 x_1 + C_2 \quad (9.30b)$$

$$\frac{dv_2}{dx_1} = -\frac{F}{EI} \frac{(x_1 - a)^2}{2} H(x_1 - a) + C_1 \frac{x_1^2}{2} + C_2 x_1 + C_3 \quad (9.30c)$$

$$v_2 = -\frac{F}{EI} \frac{(x_1 - a)^3}{6} H(x_1 - a) + C_1 \frac{x_1^3}{6} + C_2 \frac{x_1^2}{2} + C_3 x_1 + C_4 \quad (9.30d)$$

Las condiciones de contorno a imponer serán:

$$\begin{aligned} v_2(0) &= 0 \\ v_2(L) &= 0 \\ M_f(x_1 = 0) &= EI \frac{d^2 v_2}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0 \\ M_f(x_1 = L) &= EI \frac{d^2 v_2}{dx_1^2} \Big|_{x_1=L} = 0 \end{aligned}$$

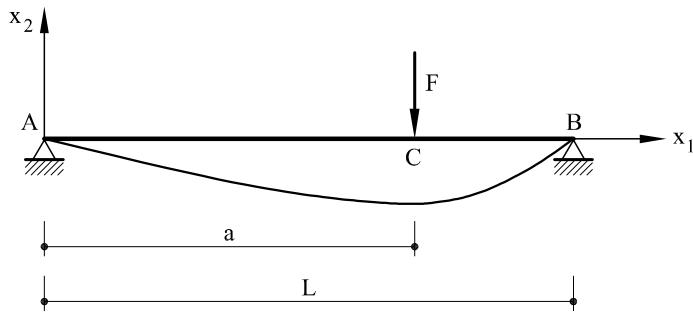


Fig. 9.7 Deformada de una viga biapoyada sometida a carga puntual

con lo cual las constantes de integración valdrán

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{F}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \\C_2 = C_4 &= 0 \\C_3 &= \frac{F}{6EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \left(\frac{a}{L} - 2\right) aL\end{aligned}$$

con lo que la ley de flechas se escribirá

$$\begin{aligned}v_2 &= -\frac{F}{6EI} (x_1 - a)^3 H(x_1 - a) + \frac{F}{6EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_1^3 \\&\quad + \frac{F}{6EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \left(\frac{a}{L} - 2\right) aL x_1\end{aligned}\tag{9.32}$$

La flecha en el punto C de actuación de la carga valdrá

$$v_{2C} = v_2(x_1 = a) = -\frac{F}{3EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right)^2 a^2 L\tag{9.33}$$

Los giros en A y B serán

$$\varphi_A = \varphi(0) = \frac{F}{6EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \left(\frac{a}{L} - 2\right) aL\tag{9.34a}$$

$$\varphi_B = \varphi(L) = \frac{F}{6EI} \left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2\right] aL\tag{9.34b}$$

9.2.6 Movimientos de apoyos en vigas simples

Las piezas analizadas hasta ahora, descansan todas ellas en apoyos fijos. Existen sin embargo casos en los cuales algún apoyo experimenta algún movimiento (desplaza-

miento o giro) conocido, o bien, dicho apoyo es elástico, entendiendo por tales aquellos apoyos que experimentan un movimiento proporcional a la acción existente en dicho apoyo (Fig. 9.8). Así por ejemplo, si el apoyo A es elástico a desplazamiento vertical, el desplazamiento en este punto no será nulo, sino que se escribirá $v_{2A} = -kR_A$, mientras que si es elástico al giro, éste valdrá $\varphi_A = -k'M_A$, siendo M_A el momento externo actuante en dicho apoyo. El signo menos tiene su origen en que el movimiento tiene signo opuesto a la acción.

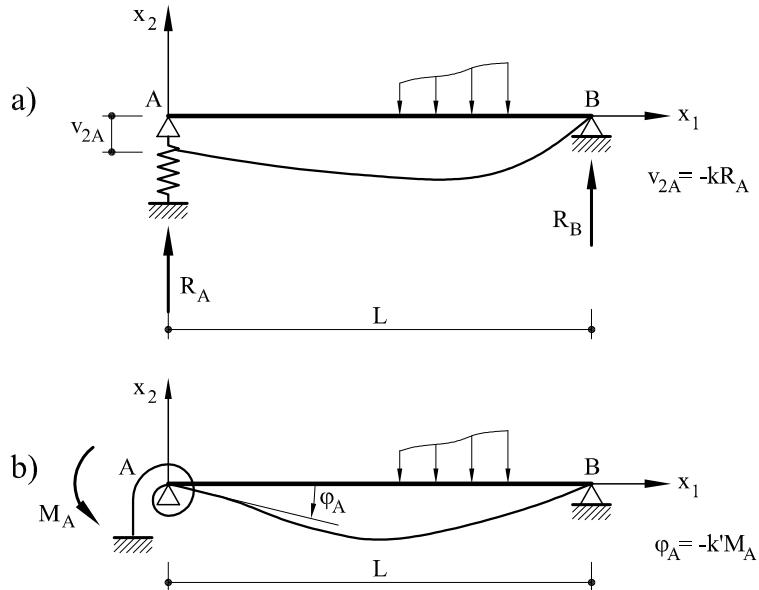


Fig. 9.8 Vigas sobre apoyos elásticos

A fin de ilustrar el proceso a seguir en ambos casos, considérese la viga simple de la figura 9.9. Se estudiará primeramente el caso en que los movimientos de los apoyos son dados

$$v_{2A} = v_2(x_1 = 0) = v_{2A}^o \quad (9.35a)$$

$$\varphi_B = \left. \frac{dv_2}{dx_1} \right|_{x_1=L} = \varphi_B^o \quad (9.35b)$$

$$v_{2B} = v_2(x_1 = L) = 0 \quad (9.35c)$$

La solución general viene dada por la expresión 9.20, en donde las cuatro constantes de integración se obtendrán imponiendo las condiciones de contorno dadas por 9.35 y

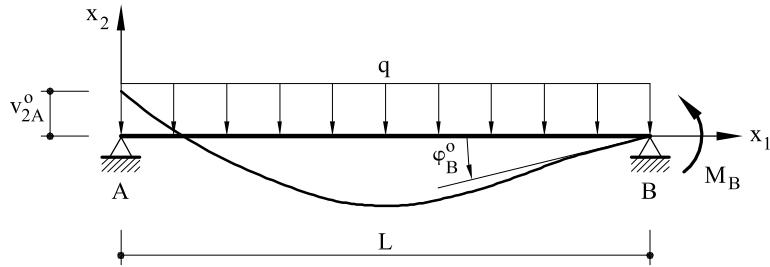


Fig. 9.9 Viga simple sometida a una carga uniformemente repartida y a un desplazamiento dado v_{2A}^o en A y a un giro dado φ_B^o en B

además $M_f(x_1 = 0) = EI \frac{d^2v_2}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0$. Con ello se obtiene

$$C_1 = \frac{3qL}{8} + EI \left(\frac{3v_{2A}^o}{L^3} + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} \right) \quad C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{-qL^3}{48} - EI \left(\frac{\varphi_B^o}{2} + \frac{3v_{2A}^o}{2L} \right) \quad C_4 = v_{2A}^o EI$$

Con lo que la expresión de la flecha vendrá dada por

$$v_2 = -\frac{qx_1^4}{24EI} + \left(\frac{3qL}{8EI} + \frac{3v_{2A}^o}{L^3} + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} \right) \frac{x_1^3}{6} - \left(\frac{qL^3}{48EI} + \frac{\varphi_B^o}{2} + \frac{3v_{2A}^o}{2L} \right) x_1 + v_{2A}^o \quad (9.36)$$

La ley de giros vendrá dada por

$$\varphi(x_1) = -\frac{qx_1^3}{6EI} + \left(\frac{3qL}{8EI} + \frac{3v_{2A}^o}{L^3} + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} \right) \frac{x_1^2}{2} - \left(\frac{qL^3}{48EI} + \frac{\varphi_B^o}{2} + \frac{3v_{2A}^o}{2L} \right) x_1 \quad (9.37)$$

La ley de momentos flectores será (Fig. 9.10a)

$$M_f(x_1) = EI \frac{d^2v_2}{dx_1^2} = -\frac{qx_1^2}{2} + EI \left(\frac{3qL}{8EI} + \frac{3v_{2A}^o}{L^3} + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} \right) x_1 \quad (9.38)$$

El momento en el extremo B valdrá

$$\begin{aligned} M_B &= M_f(x_1 = L) = -\frac{qL^2}{2} + \left(\frac{3qL}{8} + \frac{3v_{2A}^o}{L^3} EI + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} EI \right) L \\ &= -\frac{qL^2}{8} + \frac{3v_{2A}^o}{L^2} EI + \frac{3\varphi_B^o}{L} EI \end{aligned} \quad (9.39)$$

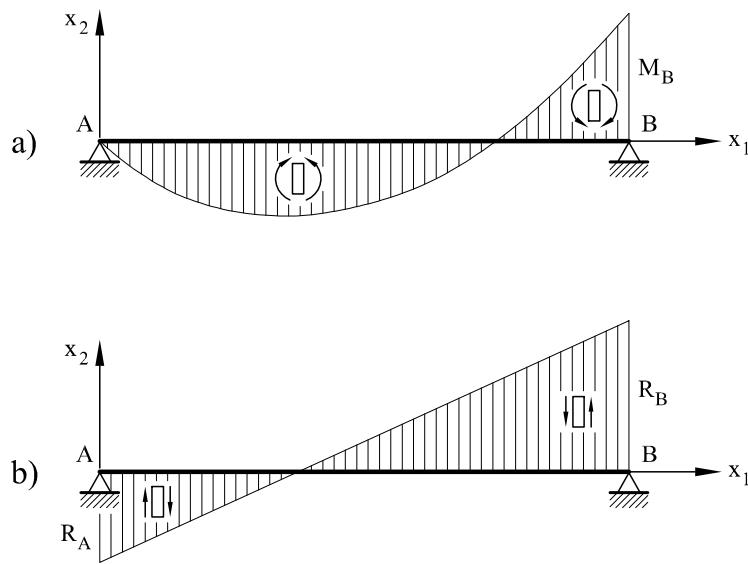


Fig. 9.10 Leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes para la viga simple de la figura 9.9

mientras que la ley de cortantes (Fig. 9.10b)

$$Q = -EI \frac{d^3 v_2}{dx_1^3} = qx_1 - \frac{3qL}{8} - EI \left(\frac{3v_{2A}^o}{L^3} + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} \right) \quad (9.40)$$

en tanto que las reacciones en *A* y *B*

$$\begin{aligned} R_A &= -Q(x_1 = 0) = \frac{3qL}{8} + \frac{3v_{2A}^o}{L^3} EI + \frac{3\varphi_B^o}{L^2} EI \\ R_B &= Q(x_1 = L) = \frac{5qL}{8} - \frac{3v_{2A}^o}{L^3} EI - \frac{3\varphi_B^o}{L^2} EI \end{aligned}$$

En el caso de una viga con apoyos elásticos, la solución general de la elástica seguirá siendo la 9.20, siendo distintas las condiciones de apoyo a imponer. Considérese por ejemplo la viga simple de la figura 9.11, en la cual el apoyo *A* es elástico en dirección vertical y el apoyo *B* es elástico a giro.

Las condiciones de contorno a imponer serán:

- para $x_1 = 0 \Rightarrow v_{2A} = -kR_A \Rightarrow v_2(x_1 = 0) = -kEI \frac{d^3 v_2}{dx_1^3} \Big|_{x_1=0}$
- para $x_1 = 0 \Rightarrow M_f = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v_2}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0$
- para $x_1 = L \Rightarrow v_2(x_1 = L) = 0$

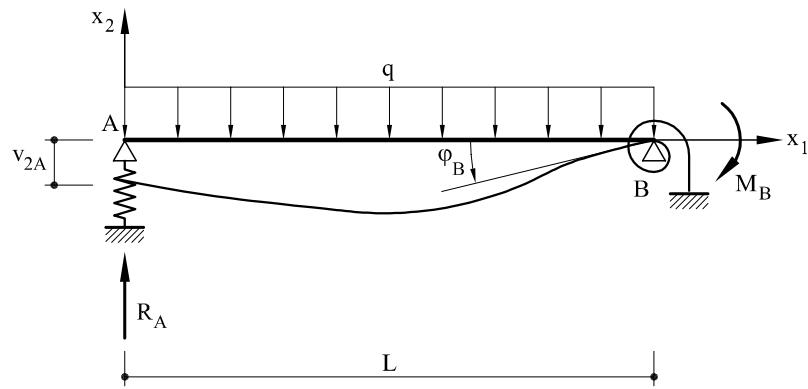


Fig. 9.11 Viga sobre apoyos elásticos

$$\text{para } x_1 = L \Rightarrow \varphi_B = -k'M_B \Rightarrow \left. \frac{dv_2}{dx_1} \right|_{x_1=L} = -k'EI \left. \frac{d^2v_2}{dx_1^2} \right|_{x_1=L}$$

Con lo cual las constantes de integración C_1 , C_2 , C_3 y C_4 valdrán

$$C_1 = 3qL \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{q}{6} \frac{72(EI)^2kk' + 24EIkL + 6EIk'L^3 + L^4}{\Delta_2}$$

$$C_4 = 3qEIkL \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

siendo

$$\Delta_1 = 4EIk' + L$$

$$\Delta_2 = 8(-3EIk + 3EIk'L^2 + L^3)/L^2$$

Las leyes de esfuerzos, reacciones etc. se obtendrán de la misma forma que anteriormente.

9.2.7 Efectos térmicos

El estudio de los movimientos y las tensiones producidas por los efectos térmicos es en general un tema complejo cuyo análisis en profundidad excede los límites de este texto. Sin embargo, en piezas formadas por una sección rectangular o asimilable existe una solución aproximada, válida para un número considerable de aplicaciones. Dicha

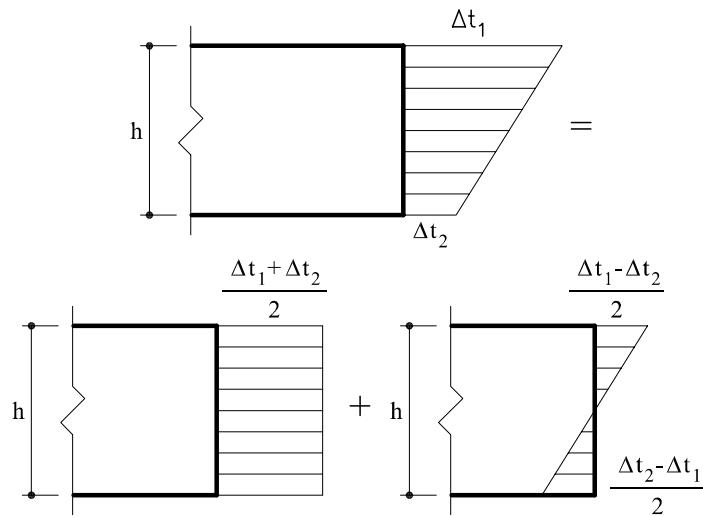


Fig. 9.12 Distribución de temperaturas a través de una sección y descomposición de las mismas en una variación uniforme y en otra variable

aproximación consiste en admitir una distribución lineal de temperaturas a través del canto de la sección (Fig. 9.12).

Como puede verse en la figura 9.12, una variación lineal de temperatura puede descomponerse en una variación uniforme y una distribución variable, de forma que en las caras superior e inferior los incrementos térmicos sean iguales y de sentido contrario. En el primer caso se produce un alargamiento de toda la sección de valor $(\Delta t_1 + \Delta t_2)\alpha/2$ por unidad de longitud. Sus efectos en las piezas rectas serán estudiadas al final de este capítulo. Por lo que respecta al segundo caso, las variaciones térmicas producen una curvatura en la sección (ver Capítulo 4) de valor

$$\chi^{nt} = -\frac{\alpha(\Delta t_1 - \Delta t_2)}{h} \quad (9.41)$$

siendo α el coeficiente de dilatación lineal y h el canto de la sección. La curvatura total de una sección valdrá por tanto

$$\chi^t = \frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \quad (9.42)$$

por lo que las ecuaciones 9.6 se transforman en

$$\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} = \frac{d^2 v_2}{dx_1^2} \quad (9.43a)$$

$$-\frac{Q + m}{EI} + \frac{d\chi^{nt}}{dx_1} = \frac{d^3 v_2}{dx_1^3} \quad (9.43b)$$

$$\frac{p_2}{EI} - \frac{1}{EI} \frac{dm}{dx_1} + \frac{d^2\chi^{nt}}{dx_1^2} = \frac{d^4v_2}{dx_1^4} \quad (9.43c)$$

y si la variación térmica es constante en toda la longitud de la pieza

$$\frac{d^2\chi^{nt}}{dx_1^2} = \frac{d\chi^{nt}}{dx_1} = 0$$

Es importante señalar que si la pieza es isostática los momentos flectores y esfuerzos cortantes producidos por las variaciones térmicas serán nulos, aunque no los movimientos.

♣ Problema resuelto P9.1

La pieza de la figura P9.1.1 está sometida a la variación térmica indicada. Dado que $\Delta t_1 = t$ y $\Delta t_2 = -t$, la curvatura debido a la variación térmica vale

$$\chi^{nt} = -\frac{2\alpha t}{h}$$

Integrando la ecuación 9.43c

$$v_2 = C_1 \frac{x_1^3}{6} + C_2 \frac{x_1^2}{2} + C_3 x_1 + C_4$$

Las condiciones de contorno a aplicar serán

$$v_{2A} = v_2(x_1 = 0) = 0$$

$$\varphi_A = \left. \frac{dv_2}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0$$

$$v_{2B} = v_2(x_1 = L) = 0$$

$$M_f(x_1 = L) = EI \left(\left. \frac{d^2v_2}{dx_1^2} \right|_{x_1=L} - \chi^{nt} \right) = 0$$

por lo que las constantes C_1 , C_2 , C_3 y C_4 valdrán

$$C_1 = \frac{3}{2L} \chi^{nt}$$

$$C_2 = -\frac{\chi^{nt}}{2}$$

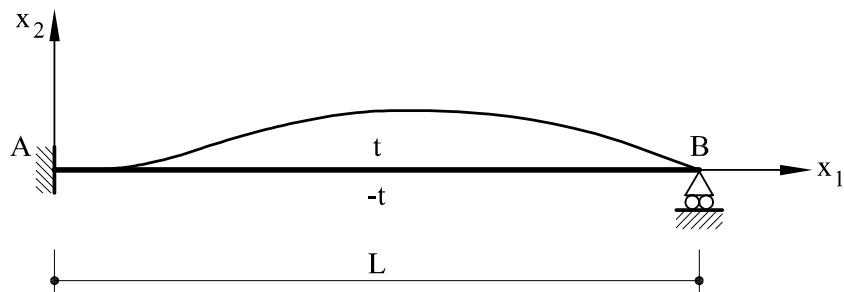


Fig. P9.1.1 Viga empotrada y apoyada sometida a una variación térmica

$$C_3 = C_4 = 0$$

La ecuación de la deformada será

$$v_2 = \frac{\chi^{nt}}{4L}x_1^3 - \frac{\chi^{nt}}{4}x_1^2$$

Las leyes de momentos flectores se obtendrán a partir de 9.43a

$$M_f(x_1) = EI \left(\frac{d^2v_2}{dx_1^2} - \chi^{nt} \right) = \frac{3}{2}\chi^{nt} \left(\frac{x_1}{L} - 1 \right) EI$$

y el momento reacción en A

$$M_A = -M_f(x_1 = 0) = \frac{3}{2}\chi^{nt}EI = -\frac{3\alpha t EI}{h}$$

En cuanto a la ley de esfuerzos cortantes, a partir de 9.43b

$$Q = -EI \frac{d^3v_2}{dx_1^3} = -\frac{3}{2L}\chi^{nt}EI = \frac{3\alpha t}{hL}EI$$

y las reacciones

$$R_A = -Q(x_1 = 0) = \frac{3}{2L}\chi^{nt} = -\frac{3\alpha t}{hL}EI$$

$$R_B = Q(x_1 = L) = -\frac{3}{2L}\chi^{nt} = \frac{3\alpha t}{hL}EI$$

En la figura (P9.1.2) pueden verse representadas las leyes de esfuerzos y las reacciones.

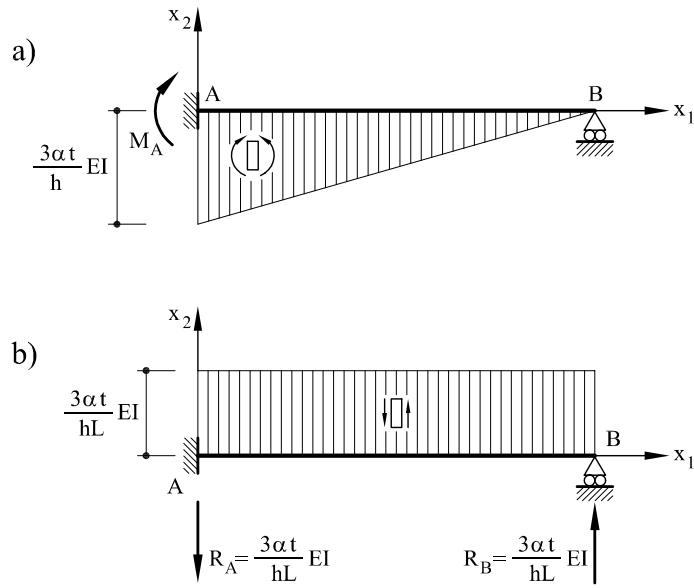


Fig. P9.1.2 Leyes de esfuerzos y reacciones para el problema resuelto P9.1

9.2.8 Vigas sobre lecho elástico

El objeto de este apartado es el análisis de un tipo especial de vigas simples que no descansan sobre apoyos fijos, sino que están apoyadas en toda su longitud sobre un lecho elástico (Fig. 9.13), caracterizado por el coeficiente de balasto k . Tal tipo de vigas aparecen frecuentemente en la práctica estructural asociadas a problemas de cimentaciones, depósitos, etc.

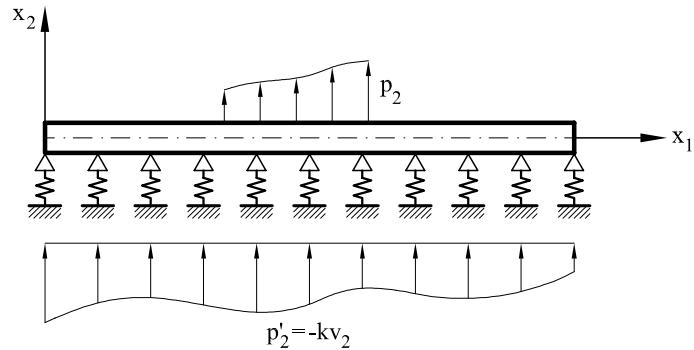


Fig. 9.13 Viga apoyada sobre lecho elástico

La ecuación de la elástica se escribirá ahora

$$EI \frac{d^4 v_2}{dx_1^4} = p_2(x_1) + p'_2(x_1) \quad (9.44)$$

y dado que $p'_2(x_1) = -kv_2$

$$EI \frac{d^4 v_2}{dx_1^4} + kv_2 = p_2 \quad (9.45)$$

Como es sabido, la solución de la ecuación anterior es suma de la solución de la ecuación homogénea más una solución particular, es decir

$$v_2 = e^{\beta x_1} (C_1 \cos \beta x_1 + C_2 \sin \beta x_1) + e^{-\beta x_1} (C_3 \cos \beta x_1 + C_4 \sin \beta x_1) + v_{2p} \quad (9.46)$$

siendo v_{2p} la solución particular dependiente de las cargas p y $\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$.

Las constantes C_1 a C_4 se obtendrán en cada caso particular, imponiendo las condiciones de contorno apropiadas de la misma forma que se ha hecho hasta ahora.

Por su importancia práctica en cimentaciones, se van a estudiar dos casos de especial interés: el primero de ellos corresponde a una viga infinita sobre lecho elástico cargada con una fuerza puntual F , mientras que el segundo se refiere a la misma viga cargada ahora con un momento concentrado M .

- a) *Viga infinita sobre lecho elástico cargada con una fuerza concentrada F (Figura 9.14)*

Para este, caso la solución particular v_{2p} es nula, es decir $v_{2p} = 0$, por lo que habrá que determinar las constantes C_1 a C_4 de la expresión 9.46.

Se considerará únicamente la solución en el semieje x_1 positivo, ya que por simetría los correspondientes valores del semieje x_1 negativo se deducen inmediatamente. Para dicho semieje x_1 positivo, las constantes C_1 y C_2 deben ser nulas, pues de lo contrario se tendrán valores infinitos de la flecha en $x_1 = \infty$ (para x_1 negativo las constantes nulas deben ser por la misma razón C_3 y C_4), es decir

$$v_2 = e^{-\beta x_1} (C_3 \cos \beta x_1 + C_4 \sin \beta x_1) \quad (9.47)$$

Las condiciones de contorno a aplicar a la expresión anterior serán

$$\varphi(x_1 = 0) = \left. \frac{dv_2}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0 \quad (9.48a)$$

$$Q(x_1^+ = 0) = -EI \left. \frac{d^3 v_2}{dx_1^3} \right|_{x_1^+=0} = \frac{F}{2} \quad (9.48b)$$

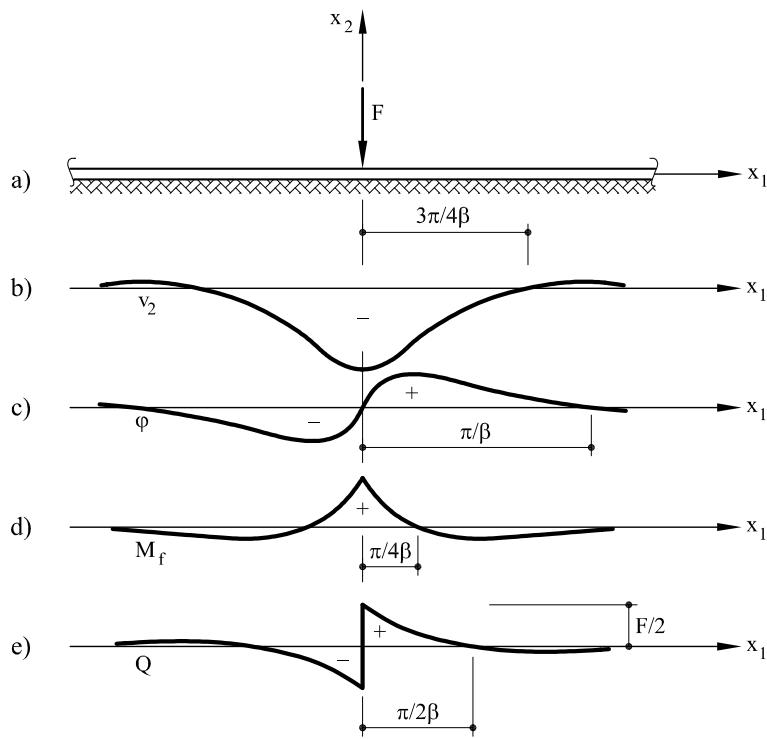


Fig. 9.14 Viga infinita apoyada en lecho elástico y cargada con una fuerza concentrada en el origen

Derivando 9.47

$$\frac{dv_2}{dx_1} = \beta e^{-\beta x_1} [(-C_3 + C_4) \cos \beta x_1 - (C_3 + C_4) \sin \beta x_1] \quad (9.49a)$$

$$\frac{d^2v_2}{dx_1^2} = 2\beta^2 e^{-\beta x_1} (-C_4 \cos \beta x_1 + C_3 \sin \beta x_1) \quad (9.49b)$$

$$\frac{d^3v_2}{dx_1^3} = 2\beta^3 e^{-\beta x_1} [(C_3 + C_4) \cos \beta x_1 + (-C_3 + C_4) \sin \beta x_1] \quad (9.49c)$$

los constantes C_3 y C_4 valdrán

$$C_3 = C_4 = -\frac{F}{8\beta^3 EI}$$

por lo que

$$v_2 = -\frac{F}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x_1} (\cos \beta x_1 + \sin \beta x_1) \quad (9.50a)$$

$$\varphi = \frac{dv_2}{dx_1} = \frac{F}{4\beta^2 EI} e^{-\beta x_1} \sin \beta x_1 \quad (9.50b)$$

$$M_f = EI \frac{d^2 v_2}{dx_1^2} = \frac{F}{4\beta} e^{-\beta x_1} (\cos \beta x_1 - \sin \beta x_1) \quad (9.50c)$$

$$Q = -EI \frac{d^3 v_2}{dx_1^3} = \frac{F}{2} e^{-\beta x_1} \cos \beta x_1 \quad (9.50d)$$

y si se introduce la notación

$$g_1(\beta x_1) = e^{-\beta x_1} (\cos \beta x_1 + \sin \beta x_1) \quad (9.51a)$$

$$g_2(\beta x_1) = e^{-\beta x_1} \sin \beta x_1 \quad (9.51a)$$

$$g_3(\beta x_1) = e^{-\beta x_1} (\cos \beta x_1 - \sin \beta x_1) \quad (9.51a)$$

$$g_4(\beta x_1) = e^{-\beta x_1} \cos \beta x_1 \quad (9.51b)$$

En la tabla 9.1 pueden verse los valores numéricos de $g_1(\beta x_1)$ a $g_4(\beta x_1)$ en función de βx_1 .

Las expresiones 9.50 quedan

$$v_2 = -\frac{F}{8\beta^3 EI} g_1(\beta x_1) \quad (9.52a)$$

$$\varphi = \frac{F}{4\beta^2 EI} g_2(\beta x_1) \quad (9.52b)$$

$$M_f = \frac{F}{4\beta} g_3(\beta x_1) \quad (9.52c)$$

$$Q = \frac{F}{2} g_4(\beta x_1) \quad (9.52d)$$

En la figura 9.14 se representan estos valores.

b) *Viga infinita sobre lecho elástico cargada con un momento concentrado M*
(Fig. 9.15)

Al igual que en el caso anterior, la solución v_{2p} vale cero, es decir $v_{2p} = 0$. Asimismo se considerará la solución en el semieje x_1 positivo, ya que por antisimetría, una vez conocidos los valores buscados en dicho semieje, es inmediato determinar los correspondientes a x_1 negativo. También por las mismas razones apuntadas antes $C_1 = C_2 = 0$ y la solución general 9.47 seguirá siendo válida. Las condiciones de contorno a aplicar en este caso serán

$$v_2(x_1 = 0) = 0 \quad (9.53a)$$

$$M_f(x_1^+ = 0) = EI \frac{d^2 v_2}{dx_1^2} \Big|_{x_1=0} = -\frac{M}{2} \quad (9.53b)$$

Tabla 9.1 Valores de las funciones $g_1(\beta x_1)$ y $g_2(\beta x_1)$

βx_1	$g_1(\beta x_1)$	$g_2(\beta x_1)$	$g_3(\beta x_1)$	$g_4(\beta x_1)$
0,00	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
0,02	0,9996	0,0196	0,9604	0,9800
0,05	0,9976	0,0475	0,9025	0,9500
0,10	0,9907	0,0903	0,8100	0,9003
0,20	0,9651	0,1627	0,6398	0,8024
0,40	0,8784	0,2610	0,3564	0,6174
0,60	0,7628	0,3099	0,1431	0,4530
0,80	0,6354	0,3223	-0,0093	0,3131
1,00	0,5083	0,3096	-0,1108	0,1988
1,20	0,3899	0,2807	-0,1716	0,1091
1,40	0,2849	0,2430	-0,2011	0,0419
1,60	0,1959	0,2018	-0,2077	-0,0059
1,80	0,1234	0,1610	-0,1985	-0,0376
2,00	0,0667	0,1231	-0,1794	-0,0563
2,20	0,0244	0,0896	-0,1548	-0,0652
2,40	-0,0056	0,0613	-0,1282	-0,0669
2,60	-0,0254	0,0383	-0,1019	-0,0636
2,80	-0,0369	0,0204	-0,0777	-0,0573
3,00	-0,0423	0,0070	-0,0563	-0,0493
3,20	-0,0431	-0,0024	-0,0383	-0,0407
3,40	-0,0408	-0,0085	-0,0237	-0,0323
3,60	-0,0366	-0,0121	-0,0124	-0,0245
3,80	-0,0314	-0,0137	-0,0040	-0,0177
4,00	-0,0258	-0,0139	0,0019	-0,0120
4,20	-0,0204	-0,0131	0,0057	-0,0074
4,40	-0,0155	-0,0117	0,0079	-0,0038
4,60	-0,0111	-0,0100	0,0089	-0,0011
4,80	-0,0075	-0,0082	0,0089	0,0007
5,00	-0,0045	-0,0065	0,0084	0,0019
5,20	-0,0023	-0,0049	0,0075	0,0026
5,40	-0,0006	-0,0035	0,0064	0,0029
5,60	0,0005	-0,0023	0,0052	0,0029
5,80	0,0013	-0,0014	0,0041	0,0027
6,00	0,0017	-0,0007	0,0031	0,0024

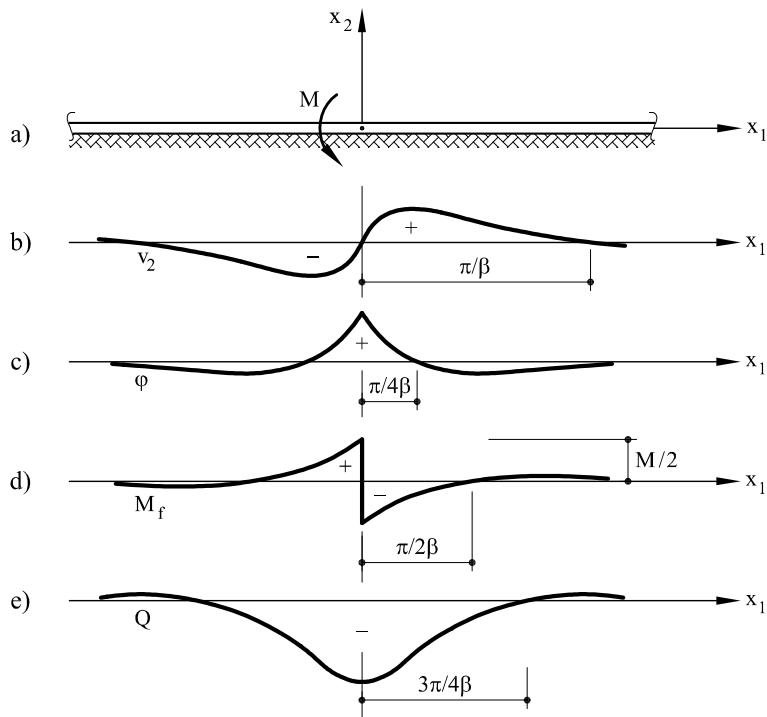


Fig. 9.15 Viga infinita sobre lecho elástico cargada con un momento puntual M en el origen de coordenadas

por lo que las constantes C_3 y C_4 valdrán

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = \frac{M}{4\beta^2 EI}$$

con lo cual

$$v_2 = \frac{M}{4\beta^2 EI} g_2(\beta x_1) \quad (9.54a)$$

$$\varphi = \frac{M}{4\beta EI} g_3(\beta x_1) \quad (9.54b)$$

$$M_f = -\frac{M}{2} g_4(\beta x_1) \quad (9.54c)$$

$$Q = -\frac{M\beta}{2} g_1(\beta x_1) \quad (9.54d)$$

En la figura 9.15 pueden verse representadas los anteriores valores.

9.3 Deformación de vigas isostáticas: teoremas de Mohr y Castigliano

En los apartados anteriores se han estudiado los movimientos en las vigas simples utilizando la ecuación de la elástica. De la integración de dicha ecuación se obtienen las flechas y los giros en todos los puntos de la pieza. En muchos casos es, sin embargo, suficiente con obtener los movimientos únicamente en un reducido número de secciones. En tales casos, es útil la aplicación de los teoremas de Mohr o del segundo teorema de Castigliano.

9.3.1 Primer teorema de Mohr

Considérese una pieza simple cualquiera sometida a un sistema de cargas y sean A y B dos puntos cualesquiera de la misma (Fig. 9.16).

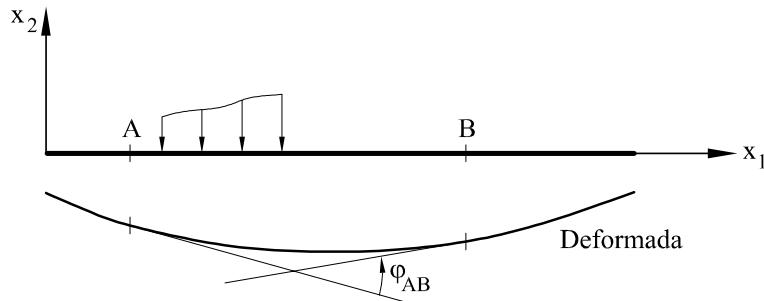


Fig. 9.16 Viga simple y su deformada

A partir de la expresión 9.4b se tiene

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_A^B \chi dx_1 = \varphi_A + \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.55)$$

y dado que $\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A$ es el giro relativo de B respecto de A se tendrá que

$$\varphi_{AB} = \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.56)$$

lo cual constituye la expresión del primer teorema de Mohr, que proporciona el valor del giro relativo entre dos puntos de una pieza recta.

9.3.2 Segundo teorema de Mohr

Considérese una viga simple en la que un punto A de la misma no gira ni tiene desplazamiento vertical (Fig. 9.17), y sea un punto B del que se desea hallar los

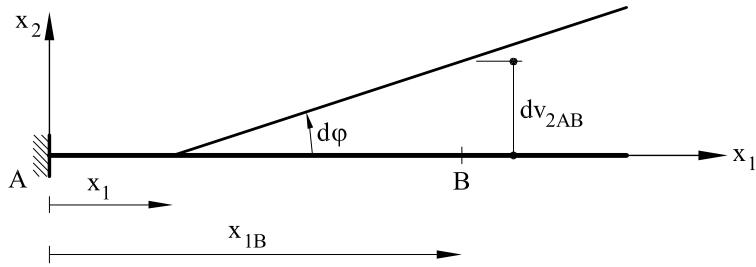


Fig. 9.17 Desplazamientos relativos entre dos puntos A y B

movimientos respecto de A. El diferencial de desplazamiento vertical debido a la flexibilidad de cualquier punto entre A y B valdrá

$$dv_{2AB} = (x_{1B} - x_1) d\varphi = \frac{M_f}{EI} (x_{1B} - x_1) dx_1 \quad (9.57)$$

o sea

$$v_{2AB} = \int_A^B \frac{M_f}{EI} (x_{1B} - x_1) dx_1 \quad (9.58)$$

Lógicamente (Fig. 9.18), si el punto A tiene un giro φ_A y un desplazamiento v_{2A} , el desplazamiento del punto B valdrá

$$v_{2B} = v_{2A} + (x_{1B} - x_{1A})\varphi_A + \int_A^B \frac{M_f}{EI} (x_{1B} - x_1) dx_1 \quad (9.59)$$

Las expresiones 9.58 y 9.59 constituyen la expresión del segundo teorema de Mohr, el cual permite hallar el desplazamiento de un punto de una viga recta.

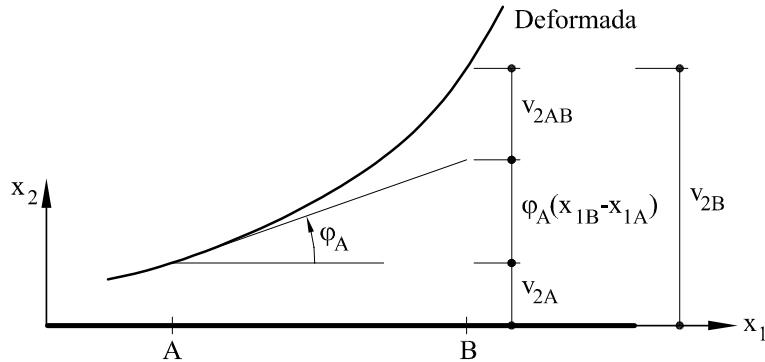


Fig. 9.18 Desplazamiento total de un punto

A la misma expresión 9.59 se puede llegar a partir de que $\varphi = dv_2/dx_1$

$$\begin{aligned}
 v_{2B} &= v_{2A} + \int_A^B \varphi dx_1 = v_{2A} + \varphi x_1 \Big|_A^B - \int_A^B x_1 d\varphi = v_{2A} + \varphi_B x_{1B} - \varphi_A x_{1A} - \\
 &- \int_A^B \frac{M_f}{EI} x_1 dx_1 = v_{2A} + \left(\varphi_A + \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \right) x_{1B} - \varphi_A x_{1A} - \int_A^B \frac{M_f}{EI} x_1 dx_1 = \\
 &= v_{2A} + \varphi_A (x_{1B} - x_{1A}) + \int_A^B (x_{1B} - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1
 \end{aligned} \tag{9.60}$$

expresión idéntica a la 9.59.

9.3.3 Determinación de flechas y giros utilizando los teoremas de Mohr

a) Determinación de giros

En el caso en que se conozca el giro de un punto cualquiera A (caso de una ménsula), mediante la aplicación directa de la expresión 9.55 es posible determinar el giro de otro punto cualquiera B . En caso contrario (caso de una viga biapoyada), es preciso la utilización simultánea de los dos teoremas de Mohr.

Considérese la viga biapoyada de la figura 9.19 en la cual se quiere determinar el giro del punto B . De acuerdo con el primer teorema de Mohr,

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \tag{9.61}$$

y a partir del segundo teorema de Mohr,

$$v_{2C} = 0 = v_{2A} + \varphi_A (x_{1C} - x_{1A}) + \int_A^C \frac{M_f}{EI} (x_{1C} - x_1) dx_1 \tag{9.62}$$

de donde (y teniendo en cuenta que $x_{1A} = 0$; $x_{1C} = L$; $v_{2A} = 0$)

$$\varphi_A = -\frac{1}{L} \int_A^C \frac{M_f}{EI} (L - x_1) dx_1 \tag{9.63}$$

expresión que sustituida en 9.61

$$\varphi_B = -\frac{1}{L} \int_A^C \frac{M_f}{EI} (L - x_1) dx_1 + \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \tag{9.64}$$

proporciona el valor del giro en B

b) Cálculo de flechas

Al igual que en el caso de los giros para determinar las flechas en una ménsula

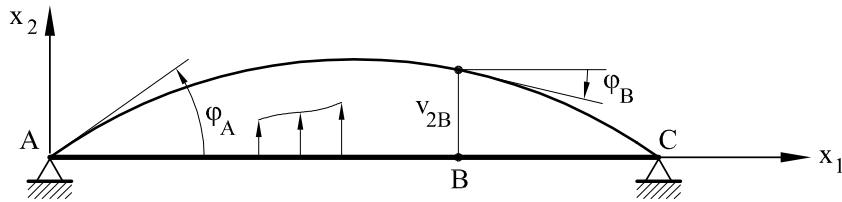


Fig. 9.19 Flecha y giro de un punto cualquiera B en una viga biapoyada

se puede aplicar directamente el segundo teorema de Mohr. En el caso de una pieza biapoyada (Fig. 9.19), se tendrá

$$\begin{aligned} v_{2B} &= v_{2A} + \varphi_A(x_{1B} - x_{1A}) + \int_A^B \frac{M_f}{EI}(x_{1B} - x_1) dx_1 = \\ &= \varphi_A x_{1B} + \int_A^B \frac{M_f}{EI}(x_{1B} - x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (9.65)$$

Sustituyendo en la expresión anterior el valor del giro en A dado por 9.63, se tendrá finalmente

$$v_{2B} = -\frac{x_{1B}}{L} \int_A^C \frac{M_f}{EI}(L - x_1) dx_1 + \int_A^B \frac{M_f}{EI}(x_{1B} - x_1) dx_1 \quad (9.66)$$

lo cual proporciona el valor de la flecha en un punto cualquiera B .

♣ **Problema resuelto P9.2** Dada la pieza biapoyada de la figura P9.2.1, determinar el giro y el movimiento vertical del punto B .

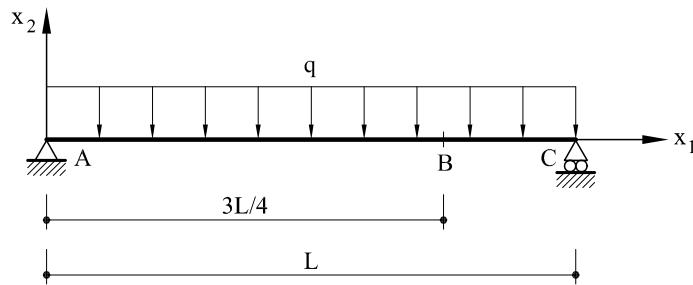


Fig. P9.2.1 Viga biapoyada correspondiente a los problemas resueltos P9.2 y P9.3.

Solución

La ley de momento flectores se escribe:

$$M_f = \frac{qL}{2}x_1 - \frac{q}{2}x_1^2 \quad (a)$$

De acuerdo con los teoremas de Mohr, el giro y el movimiento vertical de B se escriben:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_0^{3L/4} \frac{M_f}{EI} dx_1$$

$$v_{2B} = v_{2A} + \frac{3L}{4}\varphi_A + \int_0^{3L/4} \frac{M_f}{EI} \left(\frac{3L}{4} - x_1 \right) dx_1$$

y sustituyendo la ley de momentos flectores dada por a e integrando

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{9}{128EI}qL^3 \quad (b)$$

$$v_{2B} = v_{2A} + \frac{3L}{4}\varphi_A + \frac{45}{2048EI}qL^4 \quad (c)$$

Por otra parte, el desplazamiento vertical del punto C vale

$$v_{2C} = v_{2A} + L\varphi_A + \int_0^L \frac{M_f}{EI} (L - x_1) dx_1 = v_{2A} + L\varphi_A + \frac{1}{24EI}qL^4$$

y dado que $v_{2A} = v_{2C} = 0$, de esta última expresión resulta que

$$\varphi_A = -\frac{1}{24EI}qL^3$$

por lo que sustituyendo en b y c ,

$$\varphi_B = 0,02865 \frac{qL^3}{EI}$$

$$v_{2B} = -0,00928 \frac{qL^4}{EI}$$

Los valores anteriores son, respectivamente, el giro y el desplazamiento vertical del punto B .

9.3.4 Cálculo de movimientos utilizando el segundo teorema de Castigiano y el método de la fuerza unidad

Tanto el segundo teorema de Castigiano como el método de la fuerza unidad son alternativas muy útiles para la determinación de movimientos. La metodología de aplicación se ha analizado en el Capítulo 7, por lo que no se repite aquí. Se estudia simplemente un ejemplo.

♣ **Problema resuelto P9.3** Utilizando el segundo teorema de Castigliano y el método de la fuerza unidad, determinar el giro y el desplazamiento vertical del punto B de la viga correspondiente al problema resuelto P9.2.

Solución

a) Utilizando el segundo teorema de Castigliano

Para obtener el giro del punto B, se introducirá un momento externo M en el punto B que posteriormente se anulará (Fig. P9.3.1).

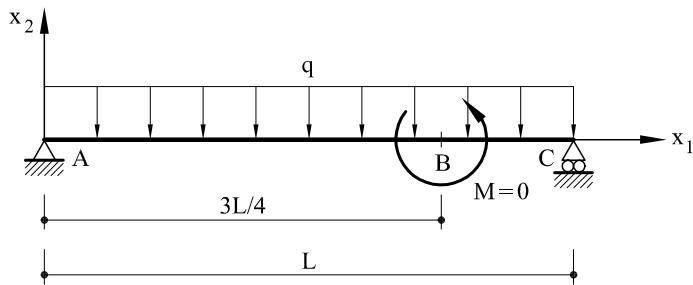


Fig. P9.3.1 Viga con carga uniformemente repartida y un momento $M = 0$ aplicado en el punto B.

Las leyes de momentos flectores valdrán

$$\begin{aligned} M_f^t \Big|_A^B &= \frac{qL}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} + \frac{M}{L}x_1 \\ M_f^t \Big|_B^C &= \frac{qL}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} - \frac{M}{L}(L-x_1) \end{aligned}$$

Derivando las anteriores expresiones con respecto a M

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_f}{\partial M} \Big|_A^B &= \frac{x_1}{L} \\ \frac{\partial M_f}{\partial M} \Big|_B^C &= -\frac{L-x_1}{L} \end{aligned}$$

por lo que, dado que $M = 0$, el giro valdrá

$$\varphi_B = \int_0^{3L/4} M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} \Big|_A^B \frac{dx_1}{EI} + \int_{3L/4}^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial M} \Big|_B^C \frac{dx_1}{EI} = 0,02865 \frac{qL^3}{EI}$$

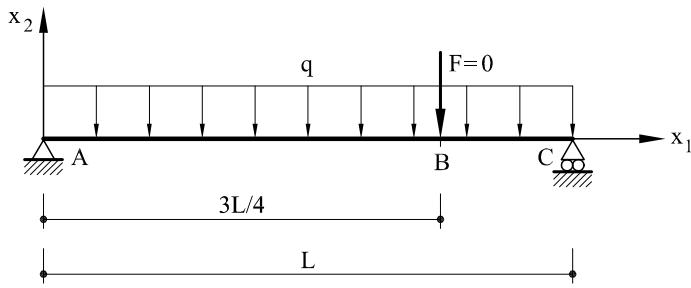


Fig. P9.3.2 Viga con carga uniformemente repartida y una fuerza $F = 0$ aplicada en el punto B .

Análogamente, para obtener la flecha v_{2B} se introduce una fuerza $F = 0$ en el punto B (Fig. P9.3.2).

Las leyes de momentos flectores valdrán:

$$\begin{aligned} M_f^t \Big|_A^B &= \frac{qL}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} + \frac{F}{4}x_1 \\ M_f^t \Big|_B^C &= \frac{qL}{2}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} + \frac{3F}{4}(L - x_1) \end{aligned}$$

Derivando las anteriores expresiones respecto a F

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_f}{\partial F} \Big|_A^B &= \frac{x_1}{4} \\ \frac{\partial M_f}{\partial F} \Big|_B^C &= \frac{3}{4}(L - x_1) \end{aligned}$$

por lo que, particularizando para $F = 0$, la flecha v_{2B} valdrá

$$\varphi_{2B} = \int_0^{3L/4} M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \Big|_A^B \frac{dx_1}{EI} + \int_{3L/4}^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial F} \Big|_B^C \frac{dx_1}{EI} = 0,00928 \frac{qL^4}{EI}$$

Nótese que en este caso la flecha v_{2B} sale positiva (en el ejercicio propuesto P9.2 salía negativa). Ello es debido a que en este caso el signo es positivo si el desplazamiento coincide con el sentido de la fuerza $F = 0$.

b) Aplicando el método de la fuerza unidad

Para obtener el giro φ_B se aplicará un momento $\bar{M} = 1$ en el punto B (ver Fig. P9.3.3).

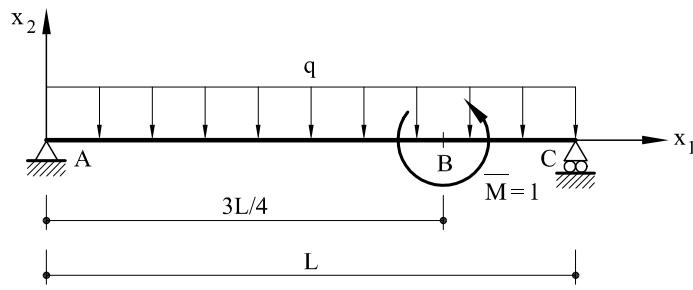


Fig. P9.3.3 Viga con carga uniformemente repartida y un momento unidad aplicado en el punto B.

Las leyes de momentos flectores debidas a $\bar{M} = 1$ valen:

$$\begin{aligned} m_f \Big|_A^B &= \frac{x_1}{L} \\ m_f \Big|_B^C &= -\frac{L - x_1}{L} \end{aligned}$$

por lo que, de acuerdo con (7.32), el giro en B valdrá

$$\varphi_B = \int_0^{3L/4} M_f m_f \Big|_A^B \frac{dx_1}{EI} + \int_{3L/4}^L M_f m_f \Big|_B^C \frac{dx_1}{EI}$$

y realizando las sustituciones, se obtiene nuevamente

$$\varphi_B = 0,02865 \frac{qL^3}{EI}$$

De la misma forma, para obtener el desplazamiento v_{2B} se introducirá una fuerza unidad $\bar{F} = 1$ en el punto B. Las leyes de esfuerzos debidos a dicha fuerza unidad valen:

$$\begin{aligned} m_f \Big|_A^B &= \frac{x_1}{4} \\ m_f \Big|_B^C &= \frac{3}{4}(L - x_1) \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la expresión (7.32) se obtiene

$$v_{2B} = \int_0^{3L/4} M_f m_f \Big|_A^B \frac{dx_1}{EI} + \int_{3L/4}^L M_f m_f \Big|_B^C \frac{dx_1}{EI} = 0,00928 \frac{qL^4}{EI}$$

expresión que proporciona el desplazamiento vertical del punto B.

9.3.5 Efectos térmicos

De acuerdo con lo analizado en el apartado 9.2.7 la curvatura de origen térmico viene dada por la expresión 9.41, es decir

$$\chi^{nt} = -\frac{\alpha(\Delta t_1 - \Delta t_2)}{h}$$

por lo que la curvatura total será igual a la curvatura térmica más la mecánica. Es decir, de acuerdo con 9.42

$$\chi^t = \frac{M_f}{EI} + \chi^{nt}$$

Sustituyendo la expresión anterior en 9.4b y observando nuevamente la figura 9.16, se tendrá

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_A^B \chi^t dx_1 = \varphi_A + \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) dx_1 = \varphi_A + \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 + \int_A^B \chi^{nt} dx_1$$

Por lo que el giro relativo de punto *B* respecto al punto *A* vendrá dado por

$$\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 + \int_A^B \chi^{nt} dx_1 \quad (9.67)$$

lo cual constituye la expresión del primer teorema de Mohr cuando se incluyen efectos térmicos.

Por lo que respecta al segundo teorema, la expresión 9.57 se reescribe

$$dv_{2AB} = (x_{1B} - x_1) d\varphi = (x_{1B} - x_1) \chi^t dx_1 = (x_{1B} - x_1) \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) dx_1$$

Por lo cual, el movimiento total del punto *B* (Fig. 9.18) vendrá dado por

$$v_{2B} = v_{2A} + (x_{1B} - x_{1A}) \varphi_A + \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) (x_{1B} - x_1) dx_1 \quad (9.68)$$

A partir de las expresiones anteriores, la determinación de flechas y giros sigue las mismas pautas que las señaladas anteriormente.

El giro y la flecha en un punto debido a efectos térmicos puede también calcularse utilizando el método de la fuerza unidad desarrollado en el apartado 7.3.2. En efecto, supóngase primeramente que se desea calcular el giro en un punto cualquiera *B* de una pieza simple sometida a cargas y a efectos térmicos. Para ello, si se coloca un momento unidad en el punto *B*, el giro en este punto, de acuerdo con (7.32) valdrá

$$\varphi_B = \int_A^C \chi^t m_f dx_1$$

siendo m_f la ley de momentos flectores en la pieza producidos por un momento unidad aplicado en B . Sustituyendo la curvatura total χ^t por su expresión 9.42, el giro queda finalmente

$$\varphi_B = \int_A^C \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) m_f dx_1 \quad (9.69)$$

Análogamente, cuando se desea hallar el desplazamiento vertical de B , se coloca en dicho punto una fuerza unidad. Si m_f representa ahora la ley de momentos flectores en la pieza debida a dicha fuerza unidad, el desplazamiento en B se escribe

$$v_{2B} = \int_A^C \chi^t m_f dx_1$$

y sustituyendo nuevamente la curvatura total χ^t por su expresión 9.42, se obtiene

$$v_{2B} = \int_A^C \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) m_f dx_1 \quad (9.70)$$

lo cual representa el valor del desplazamiento vertical del punto B .

9.4 Vigas rectas hiperestáticas. Aplicación de los teoremas de Mohr y segundo de Castigliano

9.4.1 Viga empotrada y apoyada

Considérese la pieza de la figura 9.20 sometida a unas cargas cualesquiera. Dicha pieza es una vez hiperestática. Supóngase que se elige como incógnita hiperestática el momento reacción en A .

Para obtener el valor de la incógnita hiperestática, se libera la coacción al giro que tiene el punto A colocándose en su lugar un momento de valor desconocido \widehat{M} , con lo cual la estructura se ha convertido en isostática. El valor del giro en A en dicha estructura isostática será igual al giro producido por las cargas externas más el giro producido por el momento \widehat{M} , es decir,

$$\varphi_A = \varphi_A^C + \varphi_A^1 \quad (9.71)$$

El valor del momento \widehat{M} se obtendrá de imponer la condición de giro φ_A nulo. Para ello, si M_f^C es la ley de momentos flectores en la pieza debido a las cargas externas, de acuerdo con 9.63 se tendrá

$$\varphi_A^C = -\frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_f^C}{EI} (L - x_1) dx_1 \quad (9.72)$$

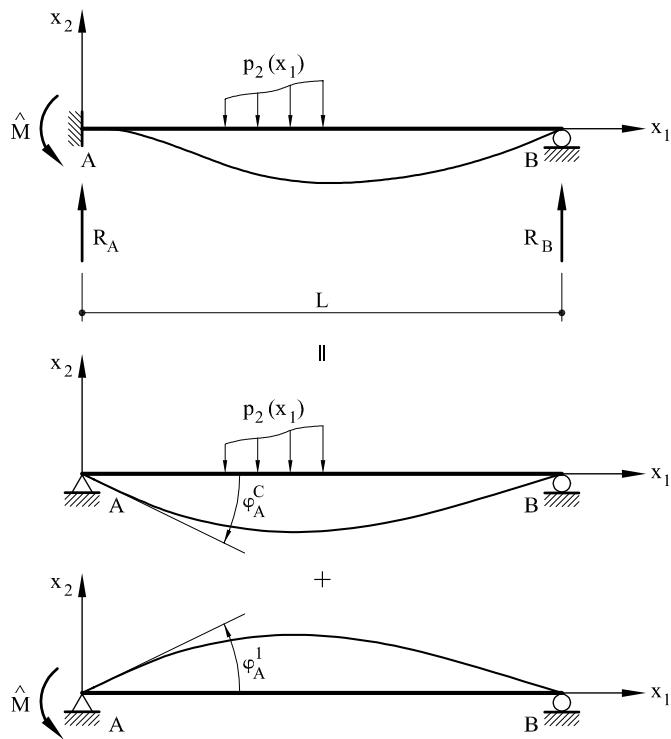


Fig. 9.20. Pieza empotrada y apoyada

Por otro lado, la ley de momentos flectores debida a \hat{M} será

$$M_f^1 = -\hat{M} \left(1 - \frac{x_1}{L} \right) \quad (9.73)$$

que introducida en 9.63 proporciona

$$\varphi_A^1 = -\frac{1}{L} \int_0^L \frac{-\hat{M}(1 - \frac{x_1}{L})}{EI} (L - x_1) dx_1 = \frac{\hat{M}L}{3EI} \quad (9.74)$$

por lo que sustituyendo en 9.71

$$\varphi_A = 0 = -\frac{1}{L} \int_0^L \frac{M_f^C}{EI} (L - x_1) dx_1 + \frac{\hat{M}L}{3EI} \quad (9.75)$$

y despejando \hat{M}

$$\hat{M} = \frac{3}{L^2} \int_0^L M_f^C (L - x_1) dx_1 \quad (9.76)$$

Una vez conocido el valor de \hat{M} , las leyes de esfuerzos se obtienen en la forma habitual.

♣ **Problema resuelto P9.4** Determinar las reacciones y las leyes de esfuerzos en la viga empotrada y apoyada de la figura P9.4.1

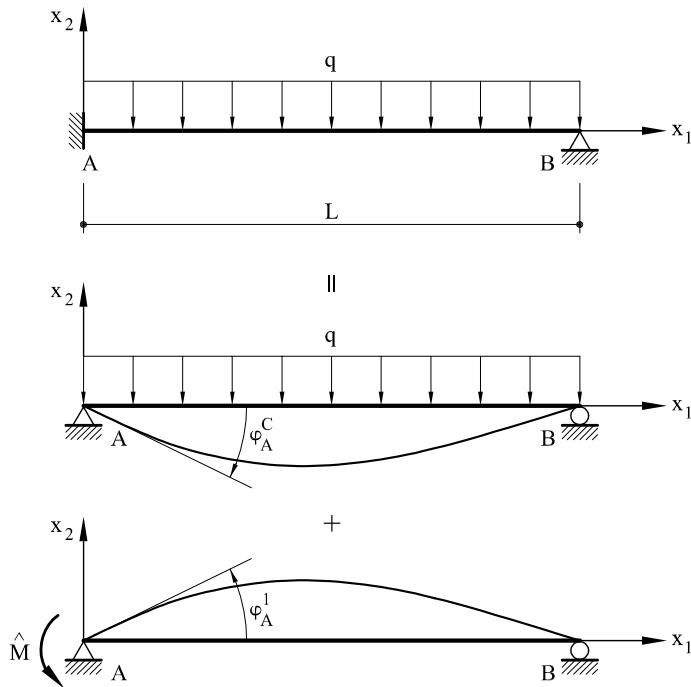


Fig. P9.4.1 Viga empotrada y apoyada sometida a una carga uniformemente repartida

Solución

Para determinar el valor de la incógnita hiperestática, se libera la coacción al giro en A colocando en su lugar un momento desconocido \hat{M} , y se calcula el valor del giro en A . Para ello, se considera primeramente la pieza isostática sometida a las cargas externas. La ley de momentos M_f^C vale

$$M_f^C = \frac{qL}{2}(L - x_1) - \frac{q}{2}(L - x_1)^2$$

por lo que, de acuerdo con 9.63, el giro en A valdrá

$$\varphi_A^C = -\frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{qL}{2}(L - x_1) - \frac{q}{2}(L - x_1)^2 \right] \frac{dx_1}{EI} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

mientras que, de acuerdo con 9.74, el giro debido al momento vale $(\hat{M}L)/(3EI)$. Por lo tanto, y dado que el giro total debe ser nulo

$$\varphi_A = 0 = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{ML}{3EI}$$

de donde

$$\widehat{M} = \frac{qL^2}{8}$$

Mientras que las reacciones en *A* y *B* valdrán

$$R_A = \frac{5}{8}qL$$

$$R_B = \frac{3}{8}qL$$

En la figura P9.4.2 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos y la deformada. Como puede observarse en la figura P9.4.2, el punto de inflexión de la deformada (curvatura nula) coincide con el punto de momento nulo, ya que $\chi = M_f/(EI)$.

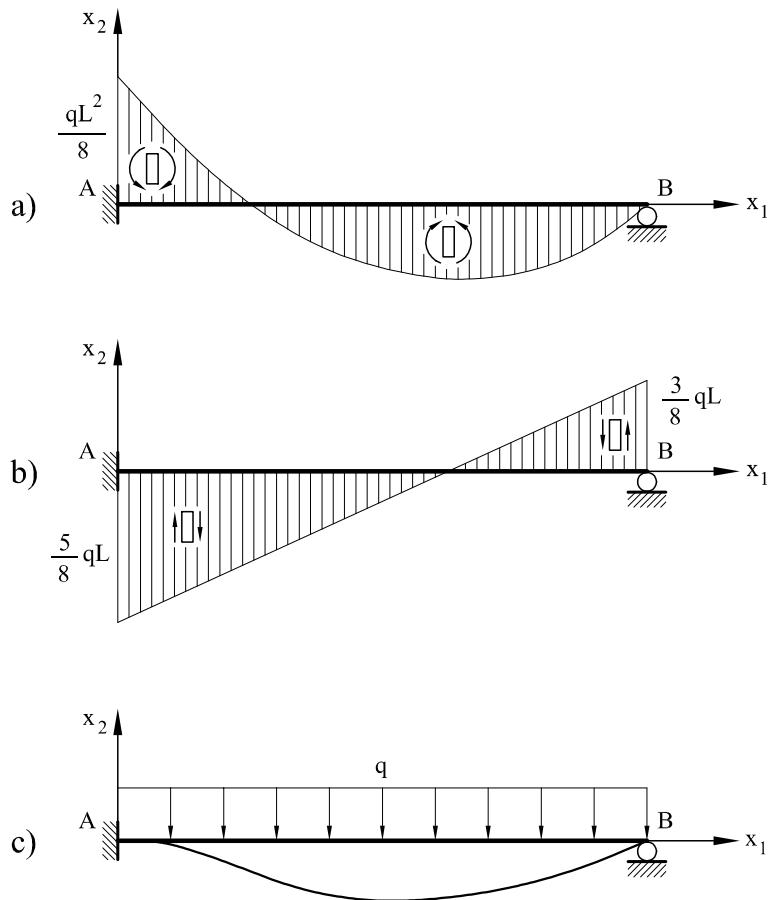


Fig. P9.4.2 Leyes de esfuerzos y deformada para la estructura de la figura P9.4.1. a) Ley de momentos flectores. b) Ley de esfuerzos cortantes. c) Deformada

Otra opción a seguir en el caso de la viga empotrada y apoyada consiste en tomar como incógnita hiperestática la reacción vertical en B . En este caso, la pieza se transforma en isostática liberando el apoyo en B y colocando en su lugar una reacción desconocida R_B (Fig. 9.21). El desplazamiento vertical en B valdrá

$$v_{2B} = v_{2B}^C + v_{2B}^1 \quad (9.77)$$

siendo v_{2B}^C la flecha en B debida a la carga y v_{2B}^1 la flecha también en B originada por la reacción hiperestática R_B .

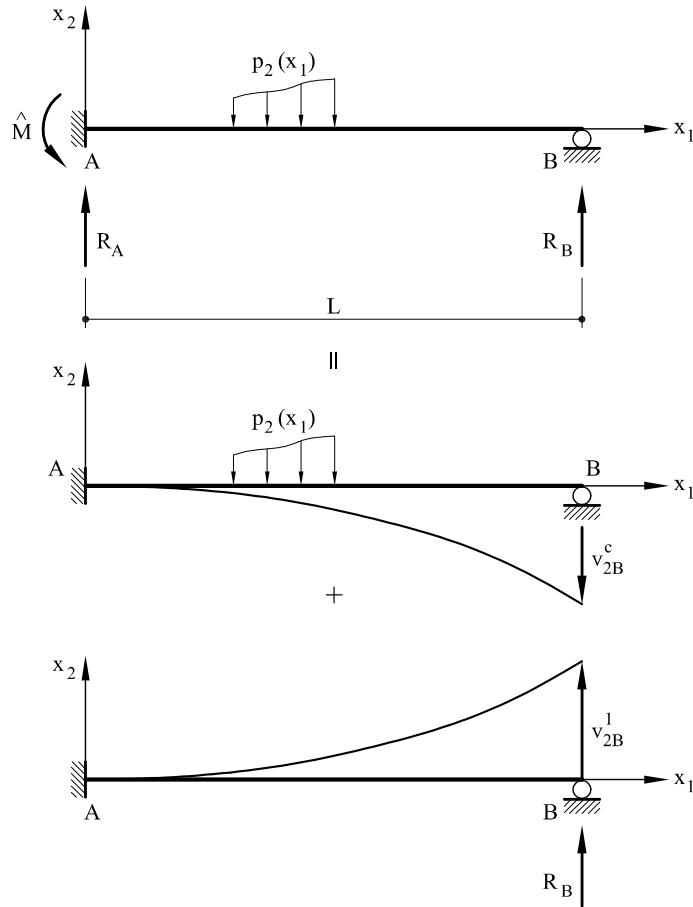


Fig. 9.21 Pieza empotrada y apoyada

Si M_f^C es la ley de momentos flectores debida a las cargas externas de la estructura isostática, la flecha v_{2B}^C , de acuerdo con el segundo teorema de Mohr, valdrá

$$v_{2B}^C = \int_0^L M_f^C(L - x_1) \frac{dx_1}{EI} \quad (9.78)$$

mientras que también de acuerdo con el segundo teorema de Mohr el valor de la flecha v_{2B}^1 será

$$v_{2B}^1 = \int_0^L M_f^1(L - x_1) \frac{dx_1}{EI} = \int_0^L R_B(L - x_1)^2 \frac{dx_1}{EI} = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad (9.79)$$

por lo que, al ser la flecha total en B nula, se puede escribir

$$v_{2B} = v_{2B}^C + v_{2B}^1 = \int_0^L M_f^C(L - x_1) \frac{dx_1}{EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \quad (9.80)$$

y despejando R_B

$$R_B = -\frac{3}{L^3} \int_0^L M_f^C(L - x_1) \frac{dx_1}{EI}$$

con lo cual se obtiene el valor de la incógnita hiperestática R_B y es posible obtener el resto de las reacciones, así como las leyes de esfuerzos.

9.4.2 Viga biempotrada

Sea la viga biempotrada de la figura 9.22 sometida a una carga cualquiera $p_2(x_1)$ normal a la directriz. La pieza será, por tanto, dos veces hiperestática. Al igual que en el apartado anterior, se eligirán como incógnitas hiperestáticas los momentos en A y B (Fig. 9.22).

Al igual que en el apartado anterior, se liberan las coacciones a giro en A y en B colocándose en su lugar sendos momentos \widehat{M}_A y \widehat{M}_B , que constituyen las incógnitas hiperestáticas del problema. Los giros totales en A y B deben ser nulos. Dichos giros, en la estructura isostática, son los debidos a las cargas más los debidos a los momentos, y para determinarlos se utilizará el teorema de Castigiano. Para ello, los momentos flectores totales en la viga valdrán

$$M_f = M_f^C + M_f^A + M_f^B$$

siendo M_f^C los momentos flectores debidos a las cargas externas en la estructura isostática, M_f^A los momentos flectores en la estructura isostática debidos al momento \widehat{M}_A y M_f^B los momentos flectores en la estructura isostática debidos al momento \widehat{M}_B , es decir,

$$M_f = M_f^C - \widehat{M}_A \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) + \widehat{M}_B \frac{x_1}{L}$$

Las derivadas del momento flector respecto a \widehat{M}_A y \widehat{M}_B valen

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_A} &= -\left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \\ \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_B} &= \frac{x_1}{L} \end{aligned}$$

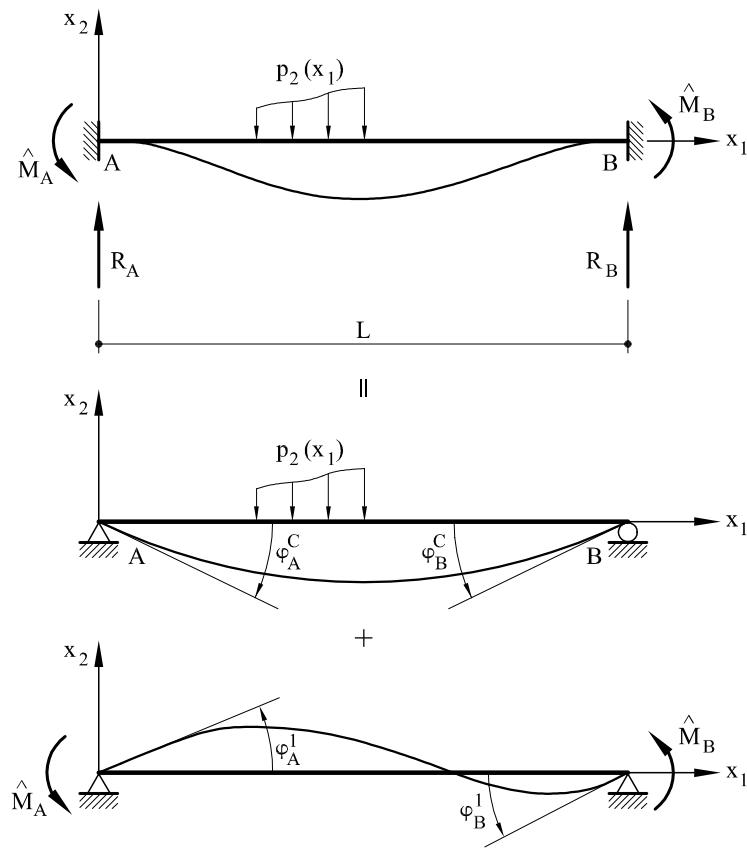


Fig. 9.22 Viga biempotrada

Por lo que de acuerdo con el segundo teorema de Castigliano

$$\begin{aligned} \varphi_A = & \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_A} \frac{dx_1}{EI} = - \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \widehat{M}_A \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right)^2 \frac{dx_1}{EI} - \\ & - \widehat{M}_B \int_0^L \frac{x_1}{L} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} \end{aligned} \quad (9.81a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_B = & \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_B} \frac{dx_1}{EI} = \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} - \widehat{M}_A \int_0^L \frac{x_1}{L} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \\ & + \widehat{M}_B \int_0^L \left(\frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} \end{aligned} \quad (9.81b)$$

y llamando

$$\gamma_1 = \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right)^2 \frac{dx_1}{EI} \quad (9.82a)$$

$$\gamma_2 = \int_0^L \frac{x_1}{L} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} \quad (9.82b)$$

$$\gamma_3 = \int_0^L \left(\frac{x_1}{L}\right)^3 \frac{dx_1}{EI} \quad (9.82c)$$

y sustituyendo en 9.81 se obtiene

$$\gamma_1 \widehat{M}_A - \gamma_2 \widehat{M}_B = \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} \quad (9.83a)$$

$$-\gamma_2 \widehat{M}_A + \gamma_3 \widehat{M}_B = - \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} \quad (9.83b)$$

Sistema que, resuelto, proporciona los valores de los momentos de empotramiento perfecto en A y B

$$\widehat{M}_A = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \left[\gamma_3 \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} - \gamma_2 \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} \right] \quad (9.84a)$$

$$\widehat{M}_B = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \left[\gamma_2 \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} - \gamma_1 \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} \right] \quad (9.84b)$$

Si el producto EI fuera constante, puede sacarse fuera de las integrales, por lo que

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{L}{3EI}$$

$$\gamma_2 = \frac{L}{6EI}$$

y por lo tanto:

$$\widehat{M}_A = \frac{2}{L} \left[2 \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) dx_1 - \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} dx_1 \right] \quad (9.85a)$$

$$\widehat{M}_B = \frac{2}{L} \left[\int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) dx_1 - 2 \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} dx_1 \right] \quad (9.85b)$$

Una vez obtenidos los valores de estos momentos, ya es posible obtener las reacciones, leyes de esfuerzos y movimientos en cualquier punto.

En el caso en que las cargas fueran de origen térmico, la metodología a aplicar sigue las mismas pautas hasta ahora expuestas. La única diferencia consiste en sustituir la curvatura mecánica producida por las cargas que actúan en el interior de la viga $M_f^C/(EI)$ por la curvatura de origen térmico χ^{nt} . Las expresiones resultantes son formalmente las mismas.

♣ **Problema resuelto P9.5** Determinar las leyes de esfuerzos en una viga biempotrada de sección constante sometida a una curvatura térmica $\chi^{nt}(x_1)$. Particularizar para el caso en que dicha curvatura sea constante $\chi^{nt} = -(\alpha(\Delta t_1 - \Delta t_2))/h$.

Solución

El problema puede solucionarse bien utilizando el teorema de la fuerza unidad (expresión 9.69), o bien, los teoremas de Mohr. Aquí se seguirá la primera opción, dejando la segunda como ejercicio para el lector.

Si \widehat{M}_A y \widehat{M}_B son respectivamente los momentos de empotramiento perfecto en A y B , la ley de momentos flectores valdrá

$$M_f = -\widehat{M}_A \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) + \widehat{M}_B \frac{x_1}{L}$$

y de acuerdo con 9.69 los giros en A y B valdrán

$$\begin{aligned} \varphi_A &= - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \left(\chi^{nt} + \frac{M_f}{EI}\right) dx_1 = - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \chi^{nt} dx_1 + \widehat{M}_A \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right)^2 \frac{dx_1}{EI} - \\ &\quad - \widehat{M}_B \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} = - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \chi^{nt} dx_1 + \frac{\widehat{M}_A L}{3EI} - \frac{\widehat{M}_B L}{6EI} \\ \varphi_B &= \int_0^L \frac{x_1}{L} \left(\chi^{nt} + \frac{M_f}{EI}\right) dx_1 = \int_0^L \frac{x_1}{L} \chi^{nt} dx_1 - \frac{\widehat{M}_A L}{6EI} + \frac{\widehat{M}_B L}{3EI} \end{aligned}$$

Igualando a cero los anteriores giros se obtiene

$$\widehat{M}_A = \frac{2EI}{L} \left[2 \int_0^L \chi^{nt} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) dx_1 - \int_0^L \chi^{nt} \frac{x_1}{L} dx_1 \right]$$

$$\widehat{M}_B = \frac{2EI}{L} \left[\int_0^L \chi^{nt} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) dx_1 - 2 \int_0^L \chi^{nt} \frac{x_1}{L} dx_1 \right]$$

y para el caso en que χ^{nt} sea constante, los anteriores momentos de empotramiento valdrán

$$\begin{aligned} \widehat{M}_A &= \chi^{nt} EI \\ \widehat{M}_B &= -\chi^{nt} EI \end{aligned}$$

Una vez conocidos los valores de los momentos de empotramiento perfecto es inmediato determinar las leyes de esfuerzos. Efectivamente

$$\begin{aligned} M_f &= \widehat{M}_B = -\chi^{nt} EI \\ Q &= O \end{aligned}$$

9.5 Ecuaciones elásticas

Las relaciones entre los esfuerzos (o tensiones generalizadas) y las deformaciones generalizadas vistas en el Capítulo 7 proporcionan a nivel local la unión entre el campo estático y el cinemático. El objeto del presente apartado es obtener unas relaciones entre los esfuerzos de extremo de barra y los movimientos también de extremo de barra para una viga recta. Tales ecuaciones son extremadamente útiles en el cálculo de estructuras y constituyen el punto de partida del método de rigidez.

9.5.1 Relaciones momentos - giros

Considérese la pieza simple biapoyada de la figura 9.23. En ella actúan unas cargas externas $p_2(x_1)$ normales a la directriz y unos momentos en los extremos M_A y M_B .

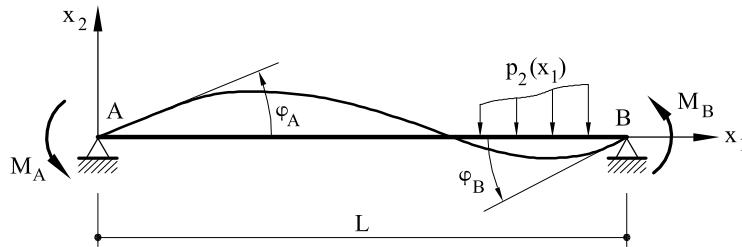


Fig. 9.23 Viga biapoyada con cargas y momentos en los extremos

La ley de momentos flectores será

$$M_f = M_f^C - M_A \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) + M_B \frac{x_1}{L} \quad (9.86)$$

siendo M_f^C la ley de momentos flectores en la pieza debida a las cargas $p_2(x_1)$. De acuerdo con el segundo teorema de Castigliano, los giros en A y B valdrán

$$\varphi_A = \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial M_A} \frac{dx_1}{EI} = - \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \gamma_1 M_A - \gamma_2 M_B \quad (9.87a)$$

$$\varphi_B = \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial M_B} \frac{dx_1}{EI} = \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} - \gamma_2 M_A + \gamma_3 M_B \quad (9.87b)$$

viniendo γ , γ_2 y γ_3 dadas por 9.82.

Resolviendo en M_A y M_B las relaciones 9.87 se obtiene,

$$M_A = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \left[\gamma_3 \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} - \gamma_2 \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} \right] + \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \left[\gamma_3 \varphi_A + \gamma_2 \varphi_B \right] \quad (9.88a)$$

$$M_B = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \left[\gamma_2 \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} - \gamma_1 \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} \right] + \frac{1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \left[\gamma_2 \varphi_A + \gamma_1 \varphi_B \right] \quad (9.88b)$$

y teniendo presente 9.84, las anteriores ecuaciones se escriben

$$M_A = \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \varphi_A + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \varphi_B + \widehat{M}_A \quad (9.89a)$$

$$M_B = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \varphi_A + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2} \varphi_B + \widehat{M}_B \quad (9.89b)$$

y si la inercia es constante

$$M_A = \frac{4EI}{L} \varphi_A + \frac{2EI}{L} \varphi_B + \widehat{M}_A \quad (9.90a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} \varphi_A + \frac{4EI}{L} \varphi_B + \widehat{M}_B \quad (9.90b)$$

Las ecuaciones anteriores forman las relaciones momentos de extremo de barra versus giros de extremo de barra buscadas.

9.5.2 Relaciones momentos - desplazamientos

Supóngase la misma pieza que anteriormente, pero en la cual han dejado de actuar las cargas externas. La pieza está ahora sometida a un desplazamiento del apoyo B de valor Δ , de tal forma que los giros en A y B son nulos (Fig. 9.24).

Para obtener el valor de los momentos M_A y M_B en función del desplazamiento Δ se pueden utilizar las ecuaciones momentos-giros vistas anteriormente, en las que $\widehat{M}_A = \widehat{M}_B = 0$ y (ver la Fig. 9.25) $\varphi_A = \varphi_B = -\Delta/L$.

Por lo que de acuerdo con 9.90

$$M_A = -\frac{4EI}{L} \frac{\Delta}{L} - \frac{2EI}{L} \frac{\Delta}{L} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta \quad (9.91a)$$

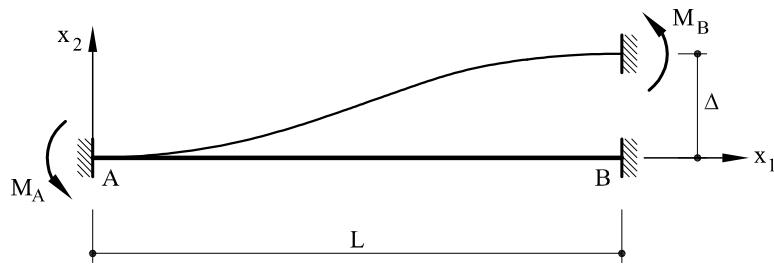


Fig. 9.24 Pieza sometida a un desplazamiento de apoyo

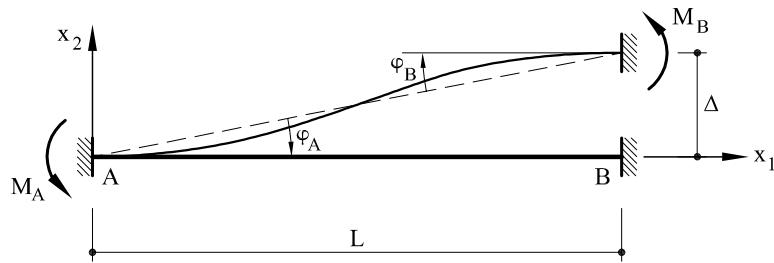


Fig. 9.25 Giros equivalentes a un desplazamiento dado

$$M_B = -\frac{2EI}{L} \frac{\Delta}{L} - \frac{4EI}{L} \frac{\Delta}{L} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta \quad (9.91b)$$

que constituyen las relaciones buscadas.

9.5.3 Inclusión del axil y cortante. Ecuaciones elásticas

Sea en general una estructura cualquiera sometida a una serie de cargas. Por efecto de dichas cargas, todos los nudos experimentarán unos desplazamientos y giros, por lo que si de forma arbitraria se separa una pieza cualquiera, dicha pieza tendrá unos movimientos en A y B. Dichos movimientos pueden expresarse en ejes globales (lo cual se hará cuando se analice toda la estructura) o en los ejes locales propios de cada barra (Fig. 9.26).

Si \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B son los vectores desplazamiento en A y en B expresados en ejes locales, se tendrá que

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} v_{1A} \\ v_{2A} \end{bmatrix} \quad (9.92a)$$

$$\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} v_{1B} \\ v_{2B} \end{bmatrix} \quad (9.92b)$$

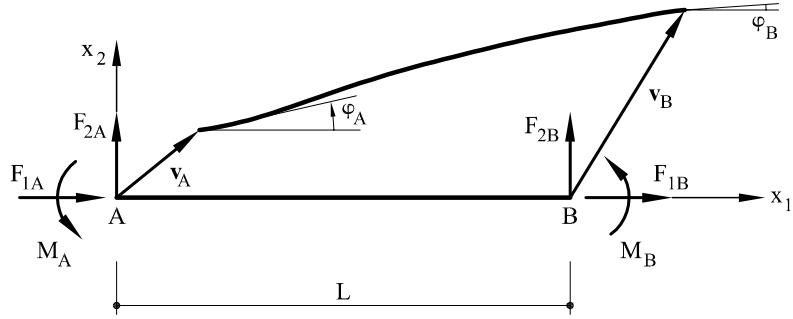


Fig. 9.26 Esfuerzos de extremo de barra y movimientos en una pieza recta

Sean asimismo $p_1(x_1)$ y $p_2(x_1)$ las cargas que actúan en la pieza expresadas en ejes locales

De acuerdo con lo visto hasta ahora y dado que $\Delta = v_{2B} - v_{2A}$, se tendrá

$$M_A = \frac{4EI}{L}\varphi_A + \frac{2EI}{L}\varphi_B - \frac{6EI}{L^2}(v_{2B} - v_{2A}) + \widehat{M}_A \quad (9.93a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L}\varphi_A + \frac{4EI}{L}\varphi_B - \frac{6EI}{L^2}(v_{2B} - v_{2A}) + \widehat{M}_B \quad (9.93b)$$

como, por equilibrio en la pieza,

$$F_{2B} + F_{2A} + \int_0^L p_2(x_1)dx_1 = 0 \quad (9.94a)$$

$$F_{2B} = -\frac{M_A + M_B}{L} - \frac{1}{L} \int_0^L x_1 p_2(x_1)dx_1 \quad (9.94b)$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} F_{2A} &= \frac{6EI}{L^2}\varphi_A + \frac{6EI}{L^2}\varphi_B - \frac{12EI}{L^3}(v_{2B} - v_{2A}) + \frac{\widehat{M}_A + \widehat{M}_B}{L} - \\ &\quad - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) p_2(x_1)dx_1 \end{aligned} \quad (9.95a)$$

$$\begin{aligned} F_{2B} &= -\frac{6EI}{L^2}\varphi_A - \frac{6EI}{L^2}\varphi_B + \frac{12EI}{L^3}(v_{2B} - v_{2A}) - \frac{\widehat{M}_A + \widehat{M}_B}{L} - \\ &\quad - \int_0^L \frac{x_1}{L} p_2(x_1)dx_1 \end{aligned} \quad (9.95b)$$

y llamando

$$\hat{F}_{2A} = \frac{\hat{M}_A + \hat{M}_B}{L} - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) p_2(x_1) dx_1 \quad (9.96a)$$

$$\hat{F}_{2B} = -\frac{\hat{M}_A + \hat{M}_B}{L} - \int_0^L \frac{x_1}{L} p_2(x_1) dx_1 \quad (9.96b)$$

se puede escribir finalmente

$$F_{2A} = \frac{6EI}{L^2} \varphi_A + \frac{6EI}{L^2} \varphi_B - \frac{12EI}{L^3} (v_{2B} - v_{2A}) + \hat{F}_{2A} \quad (9.97a)$$

$$F_{2B} = -\frac{6EI}{L^2} \varphi_A - \frac{6EI}{L^2} \varphi_B + \frac{12EI}{L^3} (v_{2B} - v_{2A}) + \hat{F}_{2B} \quad (9.97b)$$

Como puede observarse, \hat{F}_{2A} y \hat{F}_{2B} son las reacciones en dirección al eje x_2 que aparecen cuando se impiden los giros y los desplazamientos de la pieza en los extremos A y B (reacciones de empotramiento perfecto).

Por lo que respecta a los esfuerzos axiles, por equilibrio

$$F_{1B} + F_{2A} + \int_0^L p_1(x_1) dx_1 = 0 \quad (9.98)$$

Asimismo, es evidente que

$$v_{1B} - v_{1A} = \frac{F_{1B}L}{EA} + \int_0^L x_1 p_1(x_1) \frac{dx_1}{EA} \quad (9.99)$$

por lo que

$$\begin{aligned} F_{1A} &= -F_{1B} - \int_0^L p_1(x_1) dx_1 = -\frac{EA}{L} (v_{1B} - v_{1A}) - EA \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) p_1(x_1) \frac{dx_1}{EA} \\ &= \frac{-EA}{L} (v_{1B} - v_{1A}) - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) p_1(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (9.100a)$$

$$F_{1B} = \frac{EA}{L} (v_{1B} - v_{1A}) - \int_0^L \frac{x_1}{L} p_1(x_1) dx_1 \quad (9.100b)$$

y llamando

$$\hat{F}_{1A} = - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) p_1(x_1) dx_1 \quad (9.101a)$$

$$\hat{F}_{1B} = - \int_0^L \frac{x_1}{L} p_1(x_1) dx_1 \quad (9.101b)$$

las expresiones 9.100 quedan

$$F_{1A} = -\frac{EA}{L}(v_{1B} - v_{1A}) + \hat{F}_{1A} \quad (9.102a)$$

$$F_{1B} = \frac{EA}{L}(v_{1B} - v_{1A}) + \hat{F}_{1B} \quad (9.102b)$$

Las expresiones 9.93, 9.97 y 9.102 constituyen las ecuaciones elásticas en coordenadas locales de una pieza recta. Dichas expresiones pueden escribirse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_{1A} \\ F_{A_2} \\ M_A \\ F_{1B} \\ F_{B_2} \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1A} \\ v_{A_2} \\ \varphi_A \\ v_{1B} \\ v_{B_2} \\ \varphi_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{F}_{1A} \\ \hat{F}_{A_2} \\ \hat{M}_A \\ \hat{F}_{1B} \\ \hat{F}_{B_2} \\ \hat{M}_B \end{bmatrix} \quad (9.103)$$

o bien, escrito en forma compacta,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_A \\ \mathbf{v}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_A \\ \hat{\mathbf{F}}_B \end{bmatrix} \quad (9.104)$$

o también

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{F}} \quad (9.105)$$

en donde la simbología es evidente.

Como fácilmente se comprueba, las matrices \mathbf{K}_{AA} y \mathbf{K}_{BB} son simétricas y $\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BA}^T$. A la matriz \mathbf{K} se la conoce con el nombre de *matriz de rigidez* de la barra AB expresada en coordenadas locales y es una matriz simétrica.

Las expresiones 9.103 a 9.105 pueden escribirse en coordenadas globales. Para ello (ver Fig. 9.27), la relación entre las componentes globales \mathbf{Y}^g de un vector cualquiera y las componentes locales \mathbf{Y} se escriben

$$\mathbf{Y}^g = \mathbf{T}\mathbf{Y} \quad (9.106)$$

siendo

$$\mathbf{Y}^g = \begin{bmatrix} Y_1^g \\ Y_2^g \\ Y_3^g \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

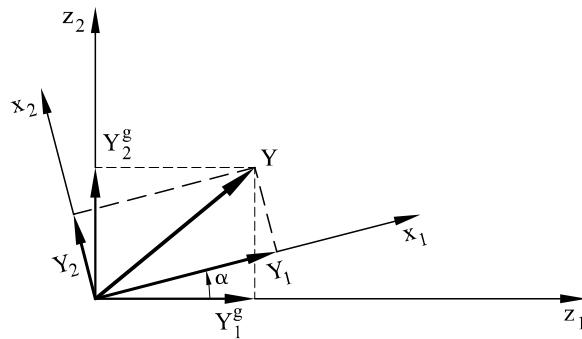


Fig. 9.27 Relación entre las coordenadas locales y globales

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nótese además que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$.

Las ecuaciones 9.104 pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{F}_A^g \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{F}_B^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{u}_A \\ \mathbf{T}^T & \mathbf{u}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \hat{\mathbf{F}}_A^g \\ \mathbf{T}^T & \hat{\mathbf{F}}_B^g \end{bmatrix} \quad (9.107)$$

siendo \mathbf{u}_A y \mathbf{u}_B los movimientos en A y B en coordenadas globales. Multiplicando por la izquierda la expresión anterior por la matriz \mathbf{T} , se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_A^g \\ \mathbf{F}_B^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^g & \mathbf{K}_{AB}^g \\ \mathbf{K}_{BA}^g & \mathbf{K}_{BB}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_A^g \\ \hat{\mathbf{F}}_B^g \end{bmatrix} \quad (9.108)$$

siendo

$$\mathbf{K}_{AA}^g = \mathbf{T} \mathbf{K}_{AA} \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & -\frac{6EI}{L^2} S \\ -\frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & \frac{12EI}{L^3} C^2 + \frac{EA}{L} S^2 & \frac{6EI}{L^2} C \\ -\frac{6EI}{L^2} S & \frac{6EI}{L^2} C & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.109a)$$

$$\mathbf{K}_{AB}^g = \mathbf{T} \mathbf{K}_{AB} \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} C^2 - \frac{12EI}{L^3} S^2 & \frac{12EI}{L^3} SC - \frac{EA}{L} SC & -\frac{6EI}{L^2} S \\ \frac{12EI}{L^3} SC - \frac{EA}{L} SC & -\frac{12EI}{L^3} C^2 - \frac{EA}{L} S^2 & \frac{6EI}{L^2} C \\ \frac{6EI}{L^2} S & -\frac{6EI}{L^2} C & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.109b)$$

$$\mathbf{K}_{BB}^g = \mathbf{T} \mathbf{K}_{BB} \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + \frac{12EI}{L^3} S^2 & -\frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & \frac{6EI}{L^2} S \\ -\frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & \frac{12EI}{L^3} C^2 + \frac{EA}{L} S^2 & -\frac{6EI}{L^2} C \\ \frac{6EI}{L^2} S & -\frac{6EI}{L^2} C & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.109c)$$

$$\mathbf{K}_{BA}^g = (\mathbf{K}_{AA}^g)^T \quad (9.109d)$$

En donde $S = \sin \alpha$ y $C = \cos \alpha$.

Las ecuaciones elásticas 9.108 juegan un papel capital en todo el cálculo de estructuras al constituir el fundamento del método de rigidez.

Lógicamente, el vector $\hat{\mathbf{F}}$ de la expresión 9.105 engloba todo tipo de cargas que actúan sobre la pieza, estando incluidas entre ellas las correspondientes a deformaciones o movimientos impuestos (por ejemplo, cargas térmicas).

9.5.4 Ecuaciones elásticas cuando la directriz no coincide con la línea de centros de gravedad

A partir de las ecuaciones 7.98 se obtiene

$$\begin{bmatrix} F'_{1i} \\ F'_{2i} \\ M'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -e & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \\ M_i \end{bmatrix} \quad (9.110a)$$

que escrito en forma compacta

$$\mathbf{F}'_i = \mathbf{S}_e \mathbf{F}_i \quad (9.110b)$$

También es evidente que

$$\begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \varphi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{1i} \\ v'_{2i} \\ \varphi'_i \end{bmatrix} \quad (9.111a)$$

o sea

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{S}_e^T \mathbf{v}'_i \quad (9.111b)$$

Premultiplicando por la izquierda por \mathbf{S}_e las ecuaciones 9.104 y teniendo en cuenta 9.111, se obtiene

$$\mathbf{F}'_A = \mathbf{S}_e \mathbf{F}_A = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{AA} \mathbf{S}_e^T \mathbf{v}'_A + \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{AB} \mathbf{S}_e^T \mathbf{v}'_B + \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{F}}_A \quad (9.112a)$$

$$\mathbf{F}'_B = \mathbf{S}_e \mathbf{F}_B = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{BA} \mathbf{S}_e^T \mathbf{v}'_A + \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{BB} \mathbf{S}_e^T \mathbf{v}'_B + \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{F}}_B \quad (9.112b)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}'_A \\ \mathbf{F}'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{AA} & \mathbf{K}'_{AB} \\ \mathbf{K}'_{BA} & \mathbf{K}'_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_A \\ \mathbf{v}'_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{F}}'_A \\ \widehat{\mathbf{F}}'_B \end{bmatrix} \quad (9.113)$$

siendo

$$\mathbf{K}'_{AA} = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{AA} \mathbf{S}_e^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -e \frac{EA}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -e \frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & e^2 \frac{EA}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.114a)$$

$$\mathbf{K}'_{AB} = \mathbf{K}'_{BA} = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{AB} \mathbf{S}_e^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & e \frac{EA}{L} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L} \\ e \frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -e^2 \frac{EA}{L} + \frac{2EI}{L^2} \end{bmatrix} \quad (9.114b)$$

$$\mathbf{K}'_{BB} = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{BB} \mathbf{S}_e^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -e \frac{EA}{L} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -e \frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & e^2 \frac{EA}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.114c)$$

El vector $[\widehat{\mathbf{F}}'_A, \widehat{\mathbf{F}}'_B]^T$ representa las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto respecto a la nueva directriz.

Las ecuaciones 9.113 constituyen las ecuaciones elásticas de una barra recta en ejes locales cuando la directriz no coincide con la línea de centros de gravedad. Para escribir dichas ecuaciones elásticas en ejes globales, se procede como anteriormente, resultando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}'_A \\ \mathbf{F}'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{AA}^g & \mathbf{K}'_{AB}^g \\ \mathbf{K}'_{BA}^g & \mathbf{K}'_{BB}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_A \\ \mathbf{v}'_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{F}}'^g_A \\ \widehat{\mathbf{F}}'^g_B \end{bmatrix} \quad (9.115)$$

en donde

$$\mathbf{K}'_{AA}^g = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{AA} \mathbf{T}^T \quad (9.116a)$$

$$\mathbf{K}'_{AB}^g = (\mathbf{K}'_{BA}^g)^T = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{AB} \mathbf{T}^T \quad (9.116b)$$

$$\mathbf{K}'_{BB}^g = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{BB} \mathbf{T}^T \quad (9.116c)$$

y también

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{F}}'^g_A \\ \widehat{\mathbf{F}}'^g_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \widehat{\mathbf{F}}'_A \\ \mathbf{T} \widehat{\mathbf{F}}'_B \end{bmatrix} \quad (9.117)$$

constituyen los esfuerzos de empotramiento perfecto en coordenadas globales.

Las expresiones anteriores pueden también obtenerse a partir de la integración de las ecuaciones 7.101, despreciando la deformación por efecto del esfuerzo cortante.

♣ **Problema resuelto P9.6** A partir de las expresiones 7.101, deducir las ecuaciones elásticas de una pieza recta en coordenadas locales, cuando la línea de centros de gravedad no coincide con la directriz de la pieza.

Solución

A efectos de simplicidad, se considerarán únicamente fuerzas y momentos en los extremos de barra, dejando para el lector la generalización a otros tipos de cargas.

De acuerdo con 7.101

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \gamma' \\ \chi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} + \frac{e^2}{EI} & 0 & \frac{e}{EI} \\ 0 & \frac{1}{kGA} & 0 \\ \frac{e}{EI} & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N' \\ Q' \\ M'_f \end{bmatrix}$$

Expresiones que, invertidas

$$\begin{bmatrix} N' \\ Q' \\ M'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & -eEA \\ 0 & kGA & 0 \\ -eEA & 0 & EI + e^2EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \gamma' \\ \chi' \end{bmatrix}$$

y puesto que no se considera la influencia del esfuerzo cortante en la deformación, las expresiones anteriores pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \chi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} + \frac{e^2}{EI} & \frac{e}{EI} \\ \frac{e}{EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N' \\ M'_f \end{bmatrix} \quad (a)$$

y la relación inversa

$$\begin{bmatrix} N' \\ M'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & -eEA \\ -eEA & EI + e^2EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon'_1 \\ \chi' \end{bmatrix}$$

Las leyes de esfuerzos N' y M'_f pueden escribirse en función de las fuerzas y momentos de extremo de pieza (Fig. P9.6.1)

$$\begin{aligned} N' &= F'_{1B} \\ M'_f &= (L - x_1)F'_{2B} + M'_B \end{aligned}$$

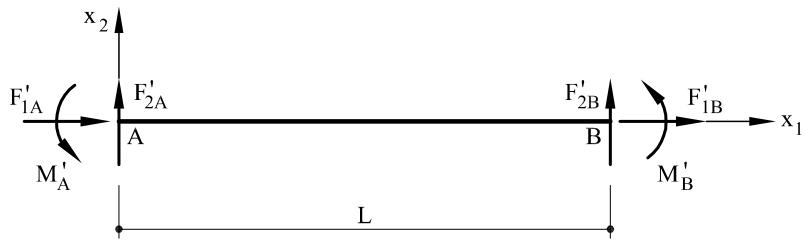


Fig. P9.6.1 Esfuerzos de extremo de barra

Sustituyendo en a y teniendo en cuenta la relación entre deformaciones y movimientos se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{dv'_1}{ds} \\ \frac{d\varphi'}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} + \frac{e^2}{EI} & \frac{e}{EI}(L - x_1) & \frac{e}{EI} \\ \frac{e}{EI} & \frac{1}{EI}(L - x_1) & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{1B} \\ F'_{2B} \\ M'_B \end{bmatrix}$$

Integrando la expresión anterior a lo largo de toda la longitud de la barra

$$\begin{bmatrix} v'_{1B} - v'_{1A} \\ \varphi'_B - \varphi'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{e^2 L}{EI} & \frac{e L^2}{2EI} & \frac{e L}{EI} \\ \frac{e L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{1B} \\ F'_{2B} \\ M'_B \end{bmatrix}$$

De la integración de $\varphi' = dv'_2/ds$:

$$[v'_{2B} - v'_{2A} - \varphi'_A L] = \left[\frac{e L^2}{2EI}, \frac{L^3}{3EI}, \frac{L^2}{2EI} \right] \begin{bmatrix} F'_{1B} \\ F'_{2B} \\ M'_B \end{bmatrix}$$

Escribiendo de forma conjunta las dos expresiones anteriores

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{e^2 L}{EI} & \frac{e L^2}{2EI} & \frac{e L}{EI} \\ \frac{e L^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{e L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{1B} \\ F'_{2B} \\ M'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_{1B} - v'_{1A} \\ v'_{2B} - v'_{2A} - \varphi'_A L \\ \varphi'_B - \varphi'_A \end{bmatrix}$$

que se puede reescribir

$$\begin{bmatrix} F'_{1B} \\ F'_{2B} \\ M'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{e^2 L}{EI} & \frac{eL^2}{2EI} & \frac{eL}{EI} \\ \frac{eL^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{eL}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{1B} \\ v'_{2B} \\ \varphi'_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{1A} \\ v'_{2A} \\ \varphi'_A \end{bmatrix} \right\}$$

De donde se obtienen las matrices \mathbf{K}'_{BA} y \mathbf{K}'_{BB} dadas por las expresiones 9.114, pudiéndose comprobar que

$$\mathbf{K}'_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{e^2 L}{EI} & \frac{eL^2}{2EI} & \frac{eL}{EI} \\ \frac{eL^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{eL}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{K}'_{BA} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{e^2 L}{EI} & \frac{eL^2}{2EI} & \frac{eL}{EI} \\ \frac{eL^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{eL}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las otras dos matrices se obtienen a partir del equilibrio

$$F'_{1A} + F'_{1B} = 0$$

$$F'_{2A} + F'_{2B} = 0$$

$$F'_{2B}L + M'_A + M'_B = 0$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} F'_{1A} \\ F'_{2A} \\ M'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{1B} \\ F'_{2B} \\ M'_B \end{bmatrix}$$

Y sustituyendo en la expresión anterior los valores del vector \mathbf{F}'_B , dadas previamente, se obtienen las expresiones de las matrices \mathbf{K}'_{AA} y \mathbf{K}'_{AB} .

B) FORMULACION DE TIMOSHENKO

9.6 Ecuación de la elástica

Para el estudio de la pieza bidimensional se partirá, al igual que para el caso de la formulación de Euler-Bernouilli, de las ecuaciones 2.24 de equilibrio interno, es decir

$$\frac{dQ}{dx_1} + p_2 = 0 \quad (9.118a)$$

$$\frac{dM_f}{dx_1} + m + Q = 0 \quad (9.118b)$$

o también

$$\frac{d^2M_f}{dx_1^2} + \frac{dm}{dx_1} - p_2 = 0 \quad (9.118c)$$

Las ecuaciones cinemáticas 7.92 se escribirán igualmente

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (9.119)$$

Asimismo, las relaciones entre las tensiones y las deformaciones generalizadas son

$$Q = kGA\gamma \quad (9.120a)$$

$$M_f = EI\chi \quad (9.120b)$$

Sustituyendo en la expresión 9.120b el valor de χ , dado por la segunda ecuación 9.119, se tendrá

$$M_f = EI \frac{d\varphi}{dx_1} \quad (9.121)$$

Introduciendo en 9.118c el valor de M_f , dado por 9.121, se obtiene

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left(EI \frac{d\varphi}{dx_1} \right) = p_2 - \frac{dm}{dx_1} \quad (9.122)$$

Por otra parte, sustituyendo la primera expresión 9.119 en 9.120a

$$Q = kGA \left(\frac{dv_2}{dx_1} - \varphi \right) \quad (9.123)$$

Introduciendo en 9.118b los valores de M_f y de Q , dadas por 9.121 y 9.123, se obtiene

$$\frac{d}{dx_1} \left(EI \frac{d\varphi}{dx_1} \right) + m + kGA \left(\frac{dv_2}{dx_1} - \varphi \right) = 0 \quad (9.124)$$

Las expresiones 9.122 y 9.124 constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas incógnitas φ y v_2 proporcionan la solución del problema buscado. Dichas expresiones constituyen, por tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales de la elástica, generalizado al caso en que se considera la deformación por esfuerzo cortante.

Lógicamente, si son conocidas las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, pueden utilizarse de forma alternativa las expresiones 9.121 y 9.123.

Para el caso de piezas de sección constante, las expresiones 9.122 y 9.124 se escriben

$$EI \frac{d^3\varphi}{dx_1^3} = p_2 - \frac{dm}{dx_1} \quad (9.125a)$$

$$\frac{dv_2}{dx_1} = \varphi + \alpha \frac{d^2\varphi}{dx_1^2} - \frac{m}{EI} \quad (9.125b)$$

siendo α la relación entre las rigideces a flexión y cortante

$$\alpha = \frac{EI}{kGA}$$

De la integración de 9.125b, resulta

$$v_2 = \int \varphi dx_1 - \alpha \frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{1}{EI} \int m dx_1 \quad (9.126)$$

De la observación de 9.125a y 9.6c se deduce, que si v_{NB} es la solución general de la viga elástica de Navier-Bernouilli para una carga $p_2(x_1)$ dada, entonces

$$\varphi = \frac{dv_{NB}}{dx_1} \quad (9.127)$$

y también, a partir de 9.126, para el caso en que $m = 0$

$$v_2 = v_{NB} - \alpha \frac{d^2v_{NB}}{dx_1^2} \quad (9.128)$$

y teniendo presente 9.6a

$$v_2 = v_{NB} - \alpha M_f$$

Expresión que proporciona la solución general en la viga de Timoshenko, conocida la solución general para la formulación de Navier-Bernouilli. Únicamente es preciso añadir condiciones de contorno. No se repetirán por tanto todos los desarrollos realizados anteriormente, dejándolos como ejercicio para el lector.

9.6.1 Deformación de una ménsula sometida a carga uniformemente repartida

Considérese nuevamente la ménsula representada en la figura 9.1. De acuerdo con 9.7, las leyes de momentos flectores se escriben

$$M_f = -\frac{qx_1^2}{2}$$

y las de esfuerzos cortantes

$$Q = qx_1$$

Sustituyendo respectivamente en 9.121 y 9.123, se tendrá

$$-\frac{qx_1^2}{2} = EI \frac{d\varphi}{dx_1} \quad (9.129a)$$

$$qx_1 = kGA \left(\frac{dv_2}{dx_1} - \varphi \right) \quad (9.129b)$$

Integrando

$$\varphi = -\frac{qx_1^3}{6EI} + C_1 \quad (9.130a)$$

$$v_2 = \frac{qx_1^2}{2kGA} - \frac{qx_1^4}{24EI} + C_1x_1 + C_2 \quad (9.130b)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se obtendrán imponiendo las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} x_1 = L &\implies \varphi = 0 \\ x_1 = L &\implies v_2 = 0 \end{aligned}$$

Ello conduce a que $C_1 = qL^3/(6EI)$ y $C_2 = -qL^2/(2kGA) - qL^4/(8EI)$. Por tanto, los giros y las flechas valdrán

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{6EI}(L^3 - x_1^3) \\ v_2 &= -\frac{q}{2EI} \left(\frac{x_1^4}{12} - \frac{x_1 L^3}{3} + \frac{L^4}{4} \right) - \frac{q}{2kGA}(L^2 - x_1^2) \end{aligned} \quad (9.131)$$

La flecha máxima se obtendrá en el punto A , es decir

$$(v_2)_{\max} = v_2(x_1 = 0) = -\frac{qL^4}{8EI} - \frac{qL^2}{2kGA} \quad (9.132a)$$

El giro máximo se producirá asimismo en A y valdrá

$$\varphi_{\max} = \varphi(x_1 = 0) = -\frac{qL^3}{6EI} \quad (9.132b)$$

De la comparación de los valores anteriores con los dados en el apartado 9.1, se deduce por una parte la igualdad de giros y, por otra, un aumento de las flechas cuando se considera la deformación por esfuerzo cortante.

9.6.2 Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida y momentos en los extremos

Considérese la viga de la figura 9.28 en la que $p_2 = -q$.

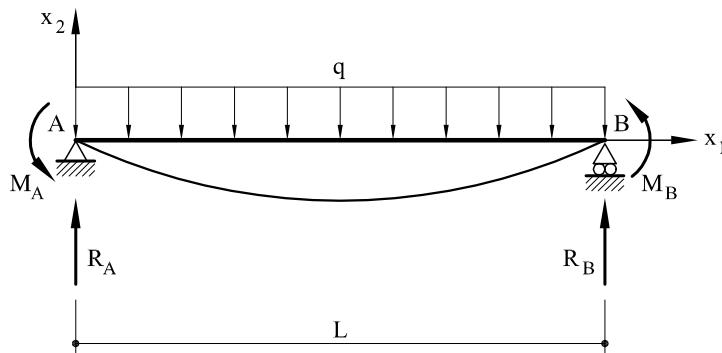


Fig. 9.28 Viga biapoyada sometida a una carga uniformemente repartida y a unos momentos en los extremos

Dicha pieza es la misma que la representada en la figura 9.2. Sin embargo, a diferencia de ese caso, al considerar la deformación por cortante, los giros en A y B no coincidirán con las tangentes a la directriz en A y B . Dichos giros corresponden al giro de las secciones, las cuales no serán en general normales a la directriz deformada.

Las leyes de esfuerzos se escriben

$$M_f = -\frac{qx_1^2}{2} + \left(\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{qL}{2} \right) x_1 - M_A \quad (9.133a)$$

$$Q = qx_1 - \frac{M_A + M_B}{L} - \frac{qL}{2} \quad (9.133b)$$

Sustituyendo respectivamente en 9.121 y 9.123

$$-\frac{qx_1^2}{2} + \left(\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{qL}{2} \right) x_1 - M_A = EI \frac{d\varphi}{dx_1} \quad (9.134a)$$

$$qx_1 - \frac{M_A + M_B}{L} - \frac{qL}{2} = kGA \left(\frac{dv_2}{dx_1} - \varphi \right) \quad (9.134b)$$

Integrando

$$\varphi = -\frac{qx_1^3}{6EI} + \left(\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{qL}{2} \right) \frac{x_1^2}{2EI} - \frac{M_A x_1}{EI} + C_1 \quad (9.135a)$$

$$v_2 = q \left(\frac{x_1^2}{2kGA} - \frac{x_1^4}{24EI} \right) + \left(\frac{M_A + M_B}{L} + \frac{pL}{2} \right) \left(\frac{x_1^3}{6EI} - \frac{x_1}{kGA} \right) - \frac{M_A x_1^2}{2EI} + C_1 x_1 + C_2 \quad (9.135b)$$

Imponiendo la condición de flecha nula en A y en B , se obtiene, una vez reorganizados términos, las expresiones finales para flechas y giros

$$EI\varphi = -q \left(\frac{L^3}{24} + \frac{x_1^3}{6} - \frac{Lx_1^2}{4} \right) + \left(\frac{M_A + M_B}{L} \right) \left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{L^2}{6} + \alpha \right) + M_A \left(\frac{L}{2} - x_1 \right) \quad (9.136a)$$

$$EIv_2 = \frac{qx_1}{2} \left[\alpha(x - L) - \frac{L^3}{12} + \frac{Lx_1^2}{6} - \frac{x_1^3}{12} \right] + \frac{M_A + M_B}{6L} (x_1^2 - L^2)x_1 + \frac{M_A x_1}{2}(L - x_1) \quad (9.136b)$$

9.6.3 Viga empotrada y apoyada

Se trata de analizar la viga representada en la figura 9.29 sometida a una carga uniforme, vertical descendente, de valor q .

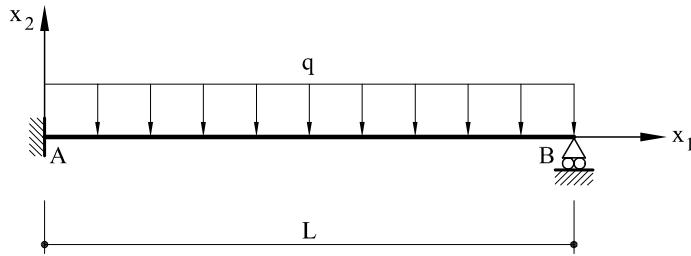


Fig. 9.29 Viga empotrada y apoyada sometida a carga uniforme

A partir de 9.20, la solución general para la formulación de Navier-Bernoulli vale

$$v_{NB} = -\frac{qx_1^4}{24EI} + C_1 \frac{x_1^3}{6EI} + C_2 \frac{x_1^2}{2EI} + C_3 \frac{x_1}{EI} + C_4 \quad (9.20)$$

Por lo que, de acuerdo con 9.128, se tendrá

$$\begin{aligned} v_2 = & -\frac{qx_1^4}{24EI} + \alpha \frac{qx_1^2}{2EI} + \frac{C_1 x_1}{EI} + \left(\frac{x_1^2}{6} - \alpha \right) + \\ & + \frac{C_2}{EI} \left(\frac{x_1^2}{2} - \alpha \right) + \frac{C_3}{EI} x_1 + \frac{C_4}{EI} \end{aligned} \quad (9.137)$$

Las condiciones de contorno en el empotramiento (punto *A*) serán:

- para $x_1 = 0$:

$$\varphi(x_1 = 0) = \frac{dv_{NB}}{dx_1} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (9.138a)$$

- para $x_1 = 0$:

$$v_2(x_1 = 0) = 0 \quad (9.138b)$$

Mientras que para el apoyo simple *B* serán:

- para $x_1 = L$:

$$v_2(x_1 = L) = 0 \quad (9.138c)$$

- para $x_1 = L$:

$$M_f(x_1 = L) = EI \frac{d\varphi}{dx_1} \Big|_{x_1=L} = EI \frac{d^2 v_{NB}}{dx_1^2} \Big|_{x_1=L} = 0 \quad (9.138d)$$

Imponiendo dichas condiciones en 9.137 se tiene

$$C_1 = \frac{5qL}{8} \frac{1 + 12\alpha/(5L^2)}{1 + 3\alpha/L^2} \quad (9.139a)$$

$$C_2 = -\frac{qL^2}{8} \frac{1}{1 + 3\alpha/L^2} \quad (9.139b)$$

$$C_3 = C_4 = 0 \quad (9.139c)$$

Con lo cual, las leyes de flechas y giros valdrán

$$\begin{aligned} EIv_2 = & -\frac{qx_1^4}{24} + \alpha \frac{qx_1^2}{2} + \frac{5qL}{8} \frac{1 + 12\alpha/(5L^2)}{1 + 3\alpha/L^2} \left(\frac{x_1^2}{6} - \alpha \right) x_1 - \\ & - \frac{qL^2}{8} \frac{1}{1 + 3\alpha/L^2} \left(\frac{x_1^2}{2} - \alpha \right) \end{aligned} \quad (9.140)$$

$$\begin{aligned} EI\varphi = & EI \frac{dv_{NB}}{dx_1} = -\frac{qx_1^3}{6} + \frac{1}{2} \frac{5qL}{8} \frac{1 + 12\alpha/(5L^2)}{1 + 3\alpha/L^2} x_1^2 - \\ & - \frac{qL^2}{8} \frac{1}{1 + 3\alpha/L^2} x_1 \end{aligned} \quad (9.141)$$

Expresiones que cuando $\alpha = 0$ coinciden respectivamente con 9.21 y 9.22. Por lo que respecta a los esfuerzos

$$M_f = EI \frac{d\varphi}{dx_1} = -\frac{qx_1^2}{2} + \frac{5qL}{8} \frac{1+12\alpha/(5L^2)}{1+3\alpha/L^2} x_1 - \frac{qL^2}{8} \frac{1}{1+3\alpha/L^2} \quad (9.142a)$$

$$Q = -\frac{dM_f}{dx_1} = qx_1 - \frac{5qL}{8} \frac{1+12\alpha/(5L^2)}{1+3\alpha/L^2} \quad (9.142b)$$

y las reacciones

$$M_A = -M_f(x_1 = 0) = \frac{qL^2}{8} \frac{1}{1+3\alpha/L^2} \quad (9.143a)$$

$$R_A = -Q(x_1 = 0) = \frac{5qL}{8} \frac{1+12\alpha/(5L^2)}{1+3\alpha/L^2} \quad (9.143a)$$

$$R_B = Q(x_1 = L) = \frac{3qL}{8} \frac{1+4\alpha/L^2}{1+3\alpha/L^2} \quad (9.143a)$$

Lógicamente, las expresiones anteriores coinciden con las vistas en el apartado 9.2.3 cuando $\alpha = 0$.

9.6.4 Importancia relativa de los términos de cortante frente a los de flector

A partir de los resultados obtenidos en los apartados precedentes es posible realizar un somero análisis de la importancia del esfuerzo cortante en la deformación. Para ello se elegirán dos tipos de secciones: secciones de alma llena y secciones de paredes delgadas.

a) Secciones de alma llena

Considérese para fijar ideas una sección rectangular de ancho b y canto h . El momento de inercia y la sección reducida valdrán respectivamente $I = (1/12)bh^3$, $kA = (5/6)bh$. Admitiendo un coeficiente de Poisson de valor $\nu = 0,25$, se tendrá

$$\alpha = \frac{EI}{kGA} = 0,25h^2 \quad (9.144)$$

Según los resultados obtenidos en el apartado 9.6.1, la flecha máxima de una ménsula con carga uniformemente repartida vale (expresión 9.132a)

$$(v_2)_{\max} = -\frac{qL^4}{8EI} - \frac{qL^2}{2kGA} \quad (9.145)$$

por lo que la relación de flechas máximas considerando y sin considerar la deformación por cortante vale

$$\lambda_v = \frac{-\frac{qL^4}{8EI} - \frac{qL^2}{2kGA}}{-\frac{qL^4}{8EI}} = 1 + \frac{4\alpha}{L^2} = 1 + \left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (9.146)$$

Por otra parte, en el apartado 9.6.3 se han obtenido las leyes de esfuerzos para una pieza empotrada y apoyada. El momento de empotramiento perfecto en A (Fig. 9.29) vale

$$M_A = \frac{qL^2}{8} \frac{1}{1 + 3\alpha/L^2} \quad (9.147)$$

por lo que la relación entre momentos de empotramiento considerando y sin considerar la deformación por cortante vale

$$\lambda_M = \frac{\frac{qL^2}{8} \frac{1}{1 + 3\alpha/L^2}}{\frac{qL^2}{8}} = \frac{1}{1 + 3\alpha/L^2} = \frac{1}{1 + 0,75 \left(\frac{h}{L}\right)^2} \quad (9.148)$$

En la tabla 9.2 pueden verse representadas las expresiones 9.146 y 9.148 en función de la relación canto/luz h/L y del error, viniendo este último expresado por

$$E(\%) \text{ en flecha} = \left(\frac{h}{L}\right)^2 \times 100$$

$$E(\%) \text{ en momento} = \frac{0,75 \left(\frac{h}{L}\right)^2}{1 + 0,75 \left(\frac{h}{L}\right)^2} \times 100$$

Tabla 9.2 Influencia de la deformación por cortante en las flechas y en los esfuerzos y error cometido si se desprecia la influencia del cortante (sección rectangular)

h/L	λ_v	ERROR (%)	λ_M	ERROR (%)
1/2	1,2500	16,00	0,8421	15,79
1/4	1,0625	5,54	0,9552	4,48
1/8	1,0156	1,51	0,9884	1,16
1/16	1,0039	0,39	0,9971	0,29
1/32	1,0010	0,10	0,9993	0,07
1/64	1,0002	0,02	0,9998	0,02

b) Secciones de pared delgada

Centrando el análisis en un perfil IPE, el valor de α no es el mismo para todos los perfiles. Sin embargo, tomando un valor medio de $I/(kA) = 0,4 h^2$, resulta $\alpha = h^2$. Por tanto

$$\lambda_v = 1 + \frac{4\alpha}{L^2} = 1 + 4 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \quad (9.149)$$

$$\lambda_M = \frac{L^2}{L^2 + 3\alpha} = \frac{1}{1 + 3 \left(\frac{h}{L} \right)^2} \quad (9.150)$$

En la tabla 9.3 se representan los valores λ_v y λ_M dados por las expresiones 9.149 y 9.150, así como el error porcentual cometido al considerar únicamente la deformación por momento flector

Tabla 9.3 Influencia de la deformación por cortante en las flechas y en los esfuerzos y error cometido si se desprecia su influencia (sección IPE)

h/L	λ_v	ERROR (%)	λ_M	ERROR (%)
1/2	2,0000	50,00	0,5714	42,86
1/4	1,2500	16,00	0,8421	15,79
1/8	1,0625	5,54	0,9552	4,48
1/16	1,0156	1,51	0,9884	1,16
1/32	1,0039	0,39	0,9971	0,29
1/64	1,0010	0,10	0,9993	0,07

c) Conclusiones

Los cálculos realizados en los dos apartados anteriores corresponden a casos particulares que, lógicamente, no pueden ser generalizados. Sin embargo, sí permiten sacar algunas conclusiones de interés:

- La deformación por cortante es más importante en piezas cortas (relación canto/luz grande) que en piezas largas (relación canto/luz pequeña).
- La importancia de la deformación por cortante es superior en piezas de paredes delgadas que en secciones macizas (ver tablas).
- Es también fácil comprobar que la importancia de la deformación por cortante es superior cuando existen cargas concentradas que cuando éstas son repartidas.

9.7 Deformación de vigas isostáticas: teoremas de Mohr generalizados

En el apartado 9.3 se han estudiado los movimientos de vigas isostáticas bajo la hipótesis de deformación de Navier-Bernouilli. Al igual que antes, es también posible utilizar el segundo teorema de Castigiano para determinar los movimientos en un punto de una viga incluyendo la deformación por cortante. Basta con introducir dicho término en la energía de deformación, tal como se ha visto en el Capítulo 7.

Los teoremas de Mohr son, por otra parte, una herramienta muy útil para hallar los citados movimientos, y a ellos se dedica el resto del presente apartado.

Por lo que hace referencia al primero de los teoremas de Mohr, es preciso notar que, se incluya o no la deformación por esfuerzo cortante, su exposición es la misma, es decir, el giro relativo entre dos puntos A y B (Fig. 9.16) viene dado por

$$\varphi_{AB} = \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.151)$$

Sin embargo, es importante resaltar el distinto significado de la expresión anterior cuando se desprecia o no la deformación por cortante. Efectivamente, en ambos casos se mide el giro entre dos secciones rectas de la viga. La diferencia estriba en que en el primer caso dicho giro coincide con el giro relativo de la directriz de la pieza (Fig. 9.16) entre estos dos puntos, mientras que en el segundo no, dado que las secciones rectas no permanecen normales a la directriz después de la deformación.

9.7.1 Segundo teorema de Mohr generalizado

Considérese una viga simple, isostática, en la que en el punto A no tiene desplazamiento, ni la sección recta gira (Fig. 9.30). Considérese otro punto B de la viga del que se desea hallar los movimientos respecto a A . El diferencial de desplazamiento vertical $d(v_2)_{AB}$ de B , debido a la flexibilidad de cualquier rebanada diferencial entre A y B , vendrá dado por la suma de las contribuciones de los movimientos debidos al cortante y debidos al momento flector (Fig. 9.30).

A partir de la figura 9.30 es evidente que

$$d(v_2^Q)_{AB} = \gamma dx_1 = \frac{Q}{kGA} dx_1 \quad (9.152a)$$

$$d(v_2^M)_{AB} = (x_{1B} - x_1) d\varphi = (x_{1B} - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.152b)$$

y por lo tanto

$$d(v_2)_{AB} = \frac{Q}{kGA} dx_1 + (x_{1B} - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.153)$$

o sea

$$(v_2)_{AB} = \int_A^B \frac{Q}{kGA} dx_1 + \int_A^B (x_{1B} - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.154)$$

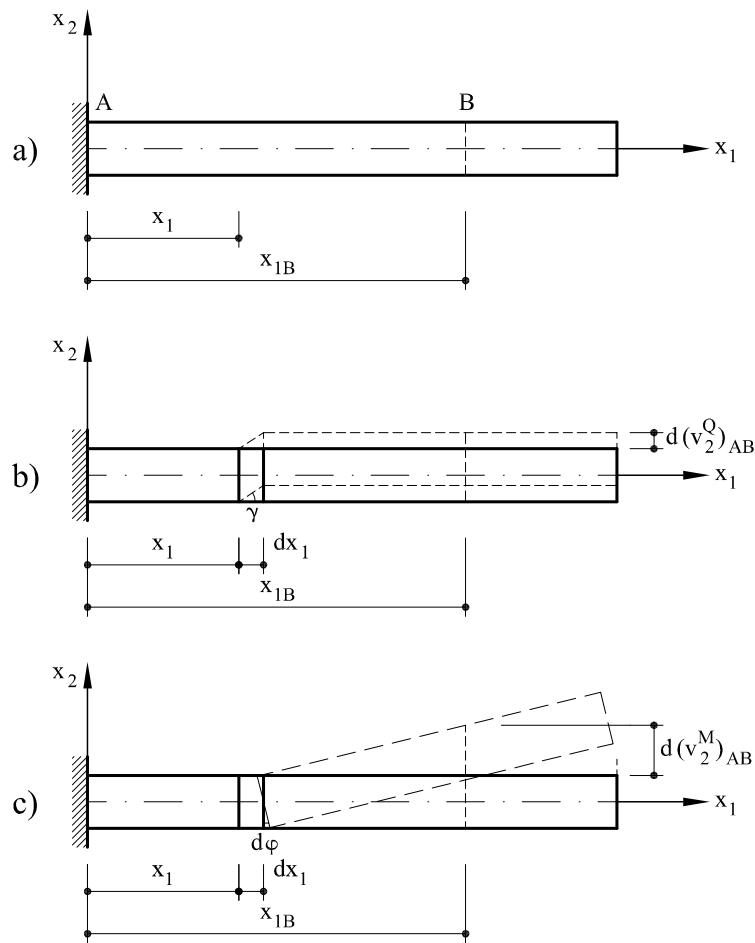


Fig. 9.30 Movimiento diferencial de un punto B debido a la flexibilidad de una rebanada. a) Geometría de la pieza. b) Movimiento debido al esfuerzo cortante. c) Movimiento debido al momento fletor

Lógicamente, si el punto A tiene un desplazamiento vertical v_{2A} y su sección recta un giro φ_A , el desplazamiento del punto B valdrá

$$v_{2B} = v_{2A} + \varphi_A(x_{1B} - x_{1A}) + \int_A^B \frac{Q}{kGA} dx_1 + \int_A^B (x_{1B} - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.155)$$

Las dos expresiones anteriores constituyen el segundo teorema de Mohr generalizado.

Para la determinación de flechas y giros utilizando los teoremas de Mohr se siguen las mismas pautas ya expuestas en el apartado 9.3.3. En este caso, las expresiones del

giro y del desplazamiento en un punto cualquiera B de una viga biapoyada entre dos puntos A y C vienen dadas por

$$\varphi_B = -\frac{1}{L} \int_A^C \frac{Q}{kGA} dx_1 - \frac{1}{L} \int_A^C (L - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 + \int_A^B \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.156)$$

$$v_{2B} = -\frac{x_{1B}}{L} \int_A^C \frac{Q}{kGA} dx_1 - \frac{x_{1B}}{L} \int_A^C (L - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 + \\ + \int_A^B \frac{Q}{kGA} dx_1 + \int_A^B (x_{1B} - x_1) \frac{M_f}{EI} dx_1 \quad (9.157)$$

9.8 Estudio de la pieza recta biempotrada

Considere la viga biempotrada de la figura 9.31 en la que actúa una carga cualquiera $p_2 = p_2(x_1)$ normal a la directriz. La pieza es dos veces hiperestática, y al igual que en el apartado 9.4.2, se tomarán como incógnitas hiperestáticas los momentos de empotramiento perfecto en A y B , \hat{M}_A y \hat{M}_B , respectivamente.

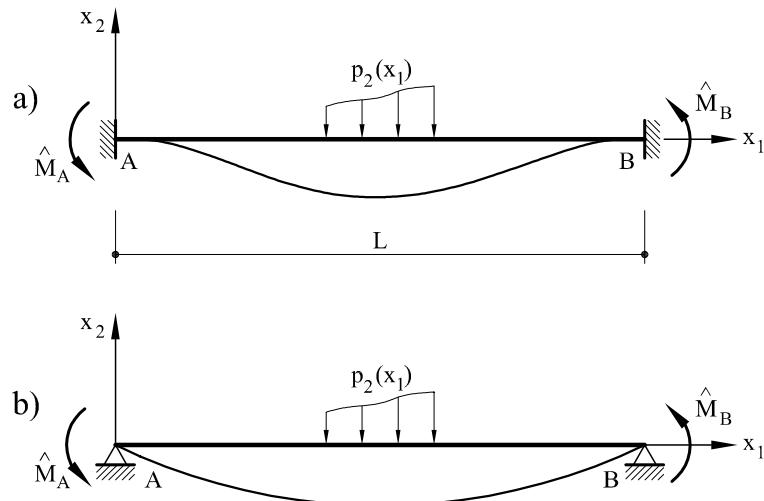


Fig. 9.31 a) Pieza recta biempotrada. b) Estructura isostática base: los momentos \hat{M}_A y \hat{M}_B se tratan como cargas externas

La ley de momentos flectores en la pieza isostática base valdrá

$$M_f = M_f^C + M_f^A + M_f^B \quad (9.158)$$

siendo M_f^C la ley de momentos flectores debida a las cargas externas, M_f^A la ley de momentos flectores debida al momento \widehat{M}_A y M_f^B la ley de momentos flectores debida al momento \widehat{M}_B , es decir,

$$M_f = M_f^C - \widehat{M}_A \left(1 - \frac{x_1}{L} \right) + \widehat{M}_B \frac{x_1}{L} \quad (9.159)$$

Por otro lado, la ley de esfuerzos cortantes será

$$Q = Q^C - \frac{\widehat{M}_A + \widehat{M}_B}{L} \quad (9.160)$$

en donde $Q^C = -(dM_f^C)/(dx_1)$ es la distribución de esfuerzos cortantes en la pieza isostática debido a las cargas externas $p_2(x_1)$

Las derivadas respecto a \widehat{M}_A y \widehat{M}_B valen

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_A} &= - \left(1 - \frac{x_1}{L} \right) \\ \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_B} &= \frac{x_1}{L} \\ \frac{\partial Q}{\partial \widehat{M}_A} &= -\frac{1}{L} \\ \frac{\partial Q}{\partial \widehat{M}_B} &= -\frac{1}{L} \end{aligned}$$

Por lo que, de acuerdo con el segundo teorema de Castigliano,

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_0^L Q \frac{\partial Q}{\partial \widehat{M}_A} \frac{dx_1}{kGA} + \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_A} \frac{dx_1}{EI} = -\frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} + \\ &+ \frac{\widehat{M}_A}{L^2} \int_0^L \frac{dx_1}{kGA} + \frac{\widehat{M}_B}{L^2} \int_0^L \frac{dx_1}{kGA} - \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L} \right) \frac{dx_1}{EI} + \\ &+ \widehat{M}_A \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L} \right)^2 \frac{dx_1}{EI} - \widehat{M}_B \int_0^L \frac{x_1}{L} \left(1 - \frac{x_1}{L} \right) \frac{dx_1}{EI} = 0 \end{aligned} \quad (9.161a)$$

$$\begin{aligned}\varphi_B = & \int_0^L Q \frac{\partial Q}{\partial \widehat{M}_B} \frac{dx_1}{kGA} + \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial \widehat{M}_B} \frac{dx_1}{EI} = -\frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} + \\ & + \frac{\widehat{M}_A}{L^2} \int_0^L \frac{dx_1}{kGA} + \frac{\widehat{M}_B}{L^2} \int_0^L \frac{dx_1}{kGA} - \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} - \\ & - \widehat{M}_A \int_0^L \frac{x_1}{L} \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \widehat{M}_B \int_0^L \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 \frac{dx_1}{EI} = 0\end{aligned}\quad (9.161b)$$

y ampliando la notación proporcionada por las expresiones 9.82, se tiene que

$$\gamma_4 = \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx_1}{kGA}$$

Las expresiones anteriores pueden escribirse

$$\begin{aligned}(\gamma_1 + \gamma_4) \widehat{M}_A - (\gamma_2 - \gamma_4) \widehat{M}_B = & \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \\ & + \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA}\end{aligned}\quad (9.162a)$$

$$-(\gamma_2 - \gamma_4) \widehat{M}_A + (\gamma_3 + \gamma_4) \widehat{M}_B = \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} + \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA}\quad (9.162b)$$

Sistema que, resuelto, proporciona los valores de los momentos de empotramiento perfecto \widehat{M}_A y \widehat{M}_B

$$\begin{aligned}\widehat{M}_A = & \frac{1}{\gamma} \left\{ (\gamma_3 + \gamma_4) \left[\int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} \right] + \right. \\ & \left. + (\gamma_2 - \gamma_4) \left[- \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} + \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} \right] \right\}\end{aligned}\quad (9.163a)$$

$$\begin{aligned}\widehat{M}_B = & \frac{1}{\gamma} \left\{ (\gamma_2 - \gamma_4) \left[\int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} + \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} \right] + \right. \\ & \left. + (\gamma_1 + \gamma_4) \left[- \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} + \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} \right] \right\}\end{aligned}\quad (9.163b)$$

con

$$\gamma = (\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_3 + \gamma_4) - (\gamma_2 - \gamma_4)^2\quad (9.164)$$

Si la pieza es de sección constante, entonces

$$\int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} = -\frac{1}{kGA} \int_0^L \frac{dM_f^C}{dx_1} dx_1 = -\frac{1}{kGA} \int_0^L dM_f^C = -\frac{1}{kGA} [M_f^C]_0^L = 0$$

y además

$$\begin{aligned}\gamma_1 + \gamma_4 &= \gamma_3 + \gamma_4 = \frac{L}{3EI} \left(1 + \frac{3\alpha}{L^2}\right) \\ \gamma_2 - \gamma_4 &= \frac{L}{6EI} \left(1 - \frac{6\alpha}{L^2}\right) \\ \gamma &= \frac{L^2}{12(EI)^2} \left[1 + \frac{12\alpha}{L^2}\right]\end{aligned}$$

por lo que

$$\widehat{M}_A = \frac{2}{L} \left[2A_{11} \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) dx_1 - A_{12} \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} dx_1 \right] \quad (9.165a)$$

$$\widehat{M}_B = \frac{2}{L} \left[A_{21} \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) dx_1 - 2A_{22} \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} dx_1 \right] \quad (9.165b)$$

siendo los coeficientes

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1 + 3\alpha/L^2}{1 + 12\alpha/L^2} \quad (9.166a)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1 - 6\alpha/L^2}{1 + 12\alpha/L^2} \quad (9.166b)$$

Lógicamente, las expresiones anteriores coinciden con las 9.85 para el caso en que la deformación por cortante no se considere o sea muy pequeña ($\alpha = 0$).

Una vez obtenidos los valores de estos momentos, se pueden obtener por equilibrio las reacciones, siendo asimismo posible obtener los movimientos en cualquier punto.

9.9 Ecuaciones elásticas

9.9.1 Relaciones momentos - giros

Considérese una pieza cualquiera, biapoyada, sometida a unas cargas externas $p_2(x_1)$ normales a la directriz y unos momentos en los extremos de valor M_A y M_B (Fig. 9.32).

Las leyes de esfuerzos serán

a) Ley de momentos flectores

$$M_f = M_f^C - M_A \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) + M_B \frac{x_1}{L}$$

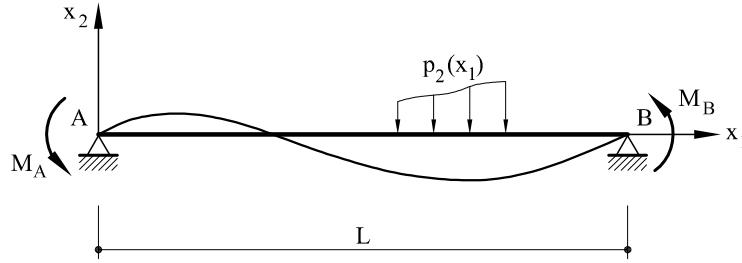


Fig. 9.32 Viga biapoyada cargada

b) Ley de esfuerzos cortantes

$$Q = Q^C - \frac{M_A + M_B}{L}$$

siendo respectivamente M_f^C y Q^C la ley de momentos flectores y de esfuerzos cortantes debidos a las cargas externas $p_2(x_1)$.

De acuerdo con el segundo teorema de Castigliano, los giros de las secciones en A y B valdrán

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial M_A} \frac{dx_1}{EI} + \int_0^L Q \frac{\partial Q}{\partial M_A} \frac{dx_1}{kGA} = - \int_0^L M_f^C \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \frac{dx_1}{EI} - \\ &\quad - \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} + (\gamma_1 + \gamma_4) M_A - (\gamma_2 - \gamma_4) M_B \end{aligned} \quad (9.167a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \int_0^L M_f \frac{\partial M_f}{\partial M_B} \frac{dx_1}{EI} + \int_0^L Q \frac{\partial Q}{\partial M_B} \frac{dx_1}{kGA} = - \int_0^L M_f^C \frac{x_1}{L} \frac{dx_1}{EI} - \\ &\quad - \frac{1}{L} \int_0^L Q^C \frac{dx_1}{kGA} - (\gamma_2 - \gamma_4) M_A + (\gamma_3 + \gamma_4) M_B \end{aligned} \quad (9.167b)$$

Resolviendo las ecuaciones para M_A y M_B se tendrá

$$M_A = \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{\gamma} \varphi_A + \frac{\gamma_2 - \gamma_4}{\gamma} \varphi_B + \widehat{M}_A \quad (9.168a)$$

$$M_B = \frac{\gamma_2 - \gamma_4}{\gamma} \varphi_A + \frac{\gamma_1 + \gamma_4}{\gamma} \varphi_B + \widehat{M}_B \quad (9.168b)$$

viniendo \widehat{M}_A y \widehat{M}_B los momentos de empotramiento perfecto dados por 9.163.

Si la sección de la pieza es constante en toda su longitud, las anteriores ecuaciones se escriben

$$M_A = \frac{4EI}{L} A_{11} \varphi_A + \frac{2EI}{L} A_{12} \varphi_B + \widehat{M}_A \quad (9.169a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} A_{21} \varphi_A + \frac{4EI}{L} A_{22} \varphi_B + \widehat{M}_B \quad (9.169b)$$

viniendo dado el significado de A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} por las expresiones 9.166.

9.9.2 Relaciones momentos - desplazamientos

Si al igual que en el caso de la viga de Navier-Bernouilli, se produce un desplazamiento relativo Δ entre los puntos A y B , en dirección perpendicular a la directriz y sin que se permita el giro en A y B (Fig. 9.33), la expresión de los momentos vendrá dada por

$$M_A = -\frac{4EI}{L} A_{11} \frac{\Delta}{L} - \frac{2EI}{L} A_{12} \frac{\Delta}{L} = -\frac{6EI}{L^2} \frac{2A_{11} + A_{12}}{3} \Delta = -\frac{6EI}{L^2} A_{33} \Delta \quad (9.170a)$$

$$M_B = -\frac{2EI}{L} A_{21} \frac{\Delta}{L} - \frac{4EI}{L} A_{22} \frac{\Delta}{L} = -\frac{6EI}{L^2} \frac{A_{21} + 2A_{22}}{3} \Delta = -\frac{6EI}{L^2} A_{33} \Delta \quad (9.170b)$$

siendo

$$A_{33} = \frac{2A_{11} + A_{12}}{3} = \frac{1}{1 + 12\alpha/L^2}$$

Por lo tanto, las ecuaciones elásticas completas para piezas de inercia constante se escribirán

$$M_A = \frac{4EI}{L} A_{11} \varphi_A + \frac{2EI}{L} A_{12} \varphi_B - \frac{6EI}{L^2} A_{33} \Delta \quad (9.171a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} A_{21} \varphi_A + \frac{4EI}{L} A_{22} \varphi_B - \frac{6EI}{L^2} A_{33} \Delta \quad (9.171b)$$

expresiones que tienen en cuenta la deformación por esfuerzo cortante.

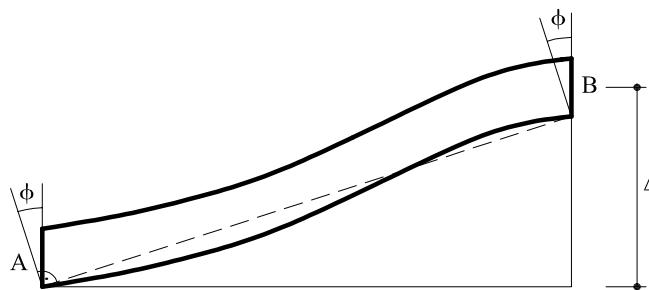


Fig. 9.33 Viga simple sometida a un desplazamiento Δ

9.9.3 Inclusión del axil y del cortante. Ecuaciones elásticas

Si la pieza está sometida a unos giros φ_A y φ_B en los extremos, así como a unos desplazamientos en A y B de valor $\mathbf{v}_A = [v_{1A}, v_{2A}]^T$, $\mathbf{v}_B = [v_{1B}, v_{2B}]^T$, las ecuaciones 9.171 se escribirán

$$M_A = \frac{4EI}{L} A_{11} \varphi_A + \frac{2EI}{L} A_{12} \varphi_B - \frac{6EI}{L^2} A_{33} (v_{2B} - v_{2A}) \quad (9.172a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} A_{21} \varphi_A + \frac{4EI}{L} A_{22} \varphi_B - \frac{6EI}{L^2} A_{33} (v_{2B} - v_{2A}) \quad (9.172b)$$

Sean asimismo $p_1(x_1)$ y $p_2(x_1)$ las cargas que actúan en la pieza expresadas en los ejes de la barra. Procediendo al igual que en el apartado 9.5.3, se obtienen los valores de las fuerzas y momentos de extremo de barra (ver Fig. 9.26) en función de los movimientos (también de extremo de barra) y de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto

$$\begin{bmatrix} F_{1A} \\ F_{2A} \\ M_A \\ F_{1B} \\ F_{2B} \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} A_{33} & \frac{6EI}{L^2} A_{33} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} A_{33} & \frac{6EI}{L^2} A_{33} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} A_{33} & \frac{4EI}{L} A_{11} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} A_{33} & \frac{2EI}{L} A_{12} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} A_{33} & -\frac{6EI}{L^2} A_{33} & 0 & \frac{12EI}{L^3} A_{33} & -\frac{6EI}{L^2} A_{33} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} A_{33} & \frac{2EI}{L} A_{21} & 0 & \frac{6EI}{L^2} A_{33} & \frac{4EI}{L} A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_{1A} \\ v_{2A} \\ \varphi_A \\ v_{1B} \\ v_{2B} \\ \varphi_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{F}_{1A} \\ \hat{F}_{2A} \\ \hat{M}_A \\ \hat{F}_{1B} \\ \hat{F}_{2B} \\ \hat{M}_B \end{bmatrix} \quad (9.172c)$$

siendo

$$\hat{F}_{1A} = - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L} \right) p_1(x_1) dx_1 \quad (9.173a)$$

$$\widehat{F}_{1B} = - \int_0^L \frac{x_1}{L} p_1(x_1) dx_1 \quad (9.173b)$$

$$\widehat{F}_{2A} = \frac{\widehat{M}_A + \widehat{M}_B}{L} - \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) p_2(x_1) dx_1 \quad (9.173c)$$

$$\widehat{F}_{2B} = -\frac{\widehat{M}_A + \widehat{M}_B}{L} - \int_0^L \frac{x_1}{L} p_2(x_1) dx_1 \quad (9.173d)$$

La expresión 9.172 constituye la expresión matricial de las ecuaciones elásticas de una pieza recta en coordenadas locales cuando se incluye la deformación por esfuerzo cortante.

Estas mismas ecuaciones se expresan en coordenadas globales

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_A^g \\ \mathbf{F}_B^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^g & \mathbf{K}_{AB}^g \\ \mathbf{K}_{BA}^g & \mathbf{K}_{BB}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{F}}_A^g \\ \widehat{\mathbf{F}}_B^g \end{bmatrix} \quad (9.174)$$

siendo

$$\mathbf{K}_{AA}^g = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + A_{33} \frac{12EI}{L^3} S^2 & -A_{33} \frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & -A_{33} \frac{6EI}{L^2} S \\ -A_{33} \frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & A_{33} \frac{12EI}{L^3} C^2 + \frac{EA}{L} S^2 & A_{33} \frac{6EI}{L^2} C \\ -A_{33} \frac{6EI}{L^2} S & A_{33} \frac{6EI}{L^2} C & A_{11} \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.175a)$$

$$\mathbf{K}_{AB}^g = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} C^2 - A_{33} \frac{12EI}{L^3} S^2 & A_{33} \frac{12EI}{L^3} SC - \frac{EA}{L} SC & -A_{33} \frac{6EI}{L^2} S \\ A_{33} \frac{12EI}{L^3} SC - \frac{EA}{L} SC & -A_{33} \frac{12EI}{L^3} C^2 - \frac{EA}{L} S^2 & A_{33} \frac{6EI}{L^2} C \\ A_{33} \frac{6EI}{L^2} S & -A_{33} \frac{6EI}{L^2} C & A_{12} \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.175b)$$

$$\mathbf{K}_{BA}^g = (\mathbf{K}_{AB}^g)^T \quad (9.175c)$$

$$\mathbf{K}_{BB}^g = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} C^2 + A_{33} \frac{12EI}{L^3} S^2 & -A_{33} \frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & A_{33} \frac{6EI}{L^2} S \\ -A_{33} \frac{12EI}{L^3} SC + \frac{EA}{L} SC & -A_{33} \frac{12EI}{L^3} C^2 + \frac{EA}{L} S^2 & -A_{33} \frac{6EI}{L^2} C \\ A_{33} \frac{6EI}{L^2} S & -A_{33} \frac{6EI}{L^2} C & A_{22} \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.175d)$$

siendo, como anteriormente, $S = \sin \alpha$ y $C = \cos \alpha$.

Tal como se ha indicado anteriormente, las ecuaciones anteriores juegan un papel fundamental en el cálculo de estructuras.

9.9.4 Ecuaciones elásticas cuando la directriz no coincide con la línea de centros de gravedad

La deducción de las ecuaciones elásticas sigue en este caso las mismas pautas ya desarrolladas en el apartado 9.5.4. Si \mathbf{S}_e es la matriz definida en 9.110b se tendrá

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}'_A \\ \mathbf{F}'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{AA} & \mathbf{K}'_{AB} \\ \mathbf{K}'_{BA} & \mathbf{K}'_{BB} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_A \\ \mathbf{v}'_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}'_A \\ \hat{\mathbf{F}}'_B \end{bmatrix} \quad (9.176)$$

siendo \mathbf{F}'_A y \mathbf{F}'_B las fuerzas de extremo de barra referidos a la nueva directriz. Asimismo, $\hat{\mathbf{F}}'_A$ y $\hat{\mathbf{F}}'_B$ son las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto referidos a la nueva directriz. Vienen dadas por

$$\hat{\mathbf{F}}'_A = \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{F}}_A \quad (9.177a)$$

$$\hat{\mathbf{F}}'_B = \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{F}}_B \quad (9.177b)$$

Por lo tanto, procediendo igual que en el apartado 9.5.4, las matrices de rigidez valdrán

$$\mathbf{K}'_{AA} = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{AA} \mathbf{S}_e^T \quad (9.178a)$$

$$\mathbf{K}'_{AB} = \mathbf{K}'_{BA}^T = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{AB} \mathbf{S}_e^T \quad (9.178b)$$

$$\mathbf{K}'_{BB} = \mathbf{S}_e \mathbf{K}_{BB} \mathbf{S}_e^T \quad (9.178c)$$

Es posible asimismo transformar las anteriores expresiones a coordenadas globales, resultando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}'^g_A \\ \mathbf{F}'^g_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'^g_{AA} & \mathbf{K}'^g_{AB} \\ \mathbf{K}'^g_{BA} & \mathbf{K}'^g_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_A \\ \mathbf{u}'_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}'^g_A \\ \hat{\mathbf{F}}'^g_B \end{bmatrix} \quad (9.179)$$

en donde

$$\mathbf{K}'^g_{AA} = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{AA} \mathbf{T}^T \quad (9.180a)$$

$$\mathbf{K}'^g_{AB} = (\mathbf{K}'^g_{BA})^T = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{AB} \mathbf{T}^T \quad (9.180b)$$

$$\mathbf{K}'^g_{BB} = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{BB} \mathbf{T}^T \quad (9.180c)$$

y también

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}'^g_A \\ \hat{\mathbf{F}}'^g_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \hat{\mathbf{F}}'_A \\ \mathbf{T} & \hat{\mathbf{F}}'_B \end{bmatrix} \quad (9.181)$$

que constituyen las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto en coordenadas globales.

C) PIEZAS CURVAS

Para cerrar el capítulo referente a vigas simples, se realiza una introducción en el campo de las piezas curvas. Concretamente se formula la ecuación de la pieza deformada (*ecuación de la elástica*) en las coordenadas locales de la directriz. El sistema de ecuaciones diferenciales resultante es, en general, demasiado complejo como para ser utilizado en la resolución de los problemas que se presentan en la práctica. Por ello, dichos problemas se tratan en general utilizando las técnicas generales descritas en el Capítulo 11.

9.10 Ecuación de la elástica en piezas curvas

Tal como se ha estudiado para el caso de piezas rectas, la obtención de la ecuación de la elástica parte de tres tipos de relaciones:

- *Ecuaciones de equilibrio interno* (ecuaciones 2.24)

$$\frac{dN}{ds} + \Omega_{12}Q + p_1 = 0 \quad (9.182a)$$

$$-\Omega_{12}N + \frac{dQ}{ds} + p_2 = 0 \quad (9.182b)$$

$$\frac{dM_f}{ds} + Q + m = 0 \quad (9.182c)$$

Ecuaciones que en forma compacta se escriben

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & 0 \\ -\Omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ m \end{bmatrix} = 0 \quad (9.183a)$$

o bien

$$(\mathbf{L}' + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{R} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9.183b)$$

- *Relación esfuerzos-deformaciones generalizadas* (expresiones 7.96)

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda} \quad (9.184)$$

- *Relación deformaciones generalizadas-movimientos* (expresión 7.93)

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\delta} \quad (9.185)$$

Introduciendo el vector de deformaciones generalizadas dado por 9.185 en 9.184 e

introduciendo a su vez el vector de esfuerzos \mathbf{R} dado por 9.184 en 9.183b, se obtiene la expresión de la ecuación de la elástica para piezas curvas

$$(\mathbf{L}' + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{C}(\mathbf{L} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\delta} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9.186)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales 9.186 representa el caso más completo en cuanto a elementos que se considera que intervienen en la deformación. Por ello, admite expresiones más sencillas en función, por una parte, de las aproximaciones que se realicen y, por otra, del conocimiento que se tenga de la solución (por ejemplo, si se conocen las leyes de esfuerzos).

En el caso en que las leyes de esfuerzos sean conocidas, introduciendo 9.185 en 9.184 se obtiene:

$$\frac{dv_1}{ds} + \Omega_{12}v_2 = \frac{N}{EA} \quad (9.187a)$$

$$-\Omega_{12}v_1 + \frac{dv_2}{ds} - \varphi = \frac{Q}{kGA} \quad (9.187b)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_f}{EI} \quad (9.187c)$$

Si en las expresiones anteriores se desprecia la deformación por esfuerzo cortante, el cociente $Q/(kGA)$ es nulo. Asimismo, sería nulo el cociente $N/(EA)$ en el caso en que no se tuviera en cuenta la deformación debida al esfuerzo axil.

♣ Problema resuelto P9.7 Utilizando las ecuaciones 9.187, determinar la ley de movimientos y giros en la ménsula circular de la figura P9.7.1.

Las leyes de esfuerzos valdrán

$$N = -F \cos \theta \quad (a)$$

$$Q = -F \sin \theta \quad (b)$$

$$M_f = -FR \cos \theta \quad (c)$$

Por otra parte

$$\mathbf{e}_1 = \sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{e}_2 = -\cos \theta \mathbf{i}_1 + \sin \theta \mathbf{i}_2$$

siendo además $\Omega_{12} = 1/R$.

Teniendo presente además que $d/ds = (1/R) d/d\theta$, las expresiones 9.187 se escriben

$$\frac{dv_1}{d\theta} + v_2 = -\frac{RF}{EA} \cos \theta \quad (d)$$

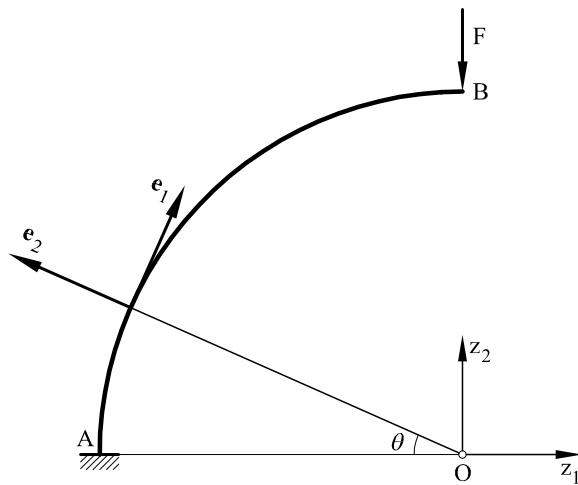


Fig. P9.7.1 Ménsula circular de radio R

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{1}{R} \frac{dv_2}{d\theta} - \varphi = -\frac{F}{kGA} \sin \theta \quad (e)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{FR^2}{EI} \cos \theta \quad (f)$$

Derivando e con respecto a θ y sustituyendo el valor de $dv_1/d\theta$ dado por d y el valor de $d\varphi/d\theta$ dado por f se obtiene

$$\frac{d^2v_2}{d\theta^2} + v_2 = -\frac{FR^3}{EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right) \cos \theta$$

La solución de la ecuación anterior es, como se sabe, suma de la solución de la ecuación homogénea más una solución particular, es decir,

$$v_2 = v_2^0 + v_2^p$$

con

$$\frac{d^2v_2^0}{d\theta^2} + v_2^0 = 0 \quad (g)$$

y siendo v_2^p una solución particular de

$$\frac{d^2v_2^p}{d\theta^2} + v_2^p = -\frac{FR^3}{EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right) \cos \theta$$

La solución de g es

$$v_2^0 = C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta$$

pudiéndose tomar para v_2^p

$$v_2^p = -\frac{FR^3}{2EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right) \theta \sin \theta$$

Por lo que

$$v_2 = C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta - \frac{FR^3}{2EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right) \theta \sin \theta$$

La expresión anterior constituye la solución para los desplazamientos radiales v_2 , a falta de determinar las constantes de integración C_1 y C_2

Por otra parte, a partir de f se obtiene

$$\varphi = -\frac{FR^2}{2EI} \sin \theta + C_3$$

y despejando v_1 de la expresión e

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d^2v_2}{d\theta^2} - R\varphi + \frac{FR}{kGA} \sin \theta = C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta - \\ &- \frac{FR^3}{2EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right) (\sin \theta + \theta \cos \theta) + \\ &+ \frac{FR^3}{EI} \sin \theta + C_3 R + \frac{FR}{kGA} \sin \theta \end{aligned}$$

Las tres constantes C_1 , C_2 y C_3 se obtendrán imponiendo las tres siguientes condiciones para $\theta = 0$

$$v_1(\theta = 0) = 0$$

$$v_2(\theta = 0) = 0$$

$$\varphi(\theta = 0) = 0$$

es decir

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

por lo que la solución de la elástica vendrá dada por

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{FR^3}{2EI} \left[\frac{EI}{R^2EA} (\sin \theta + \theta \cos \theta) + \frac{EI}{R^2kGA} (-\sin \theta + \theta \cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + (-\sin \theta + \theta \cos \theta) \right] \end{aligned} \tag{h}$$

$$v_2 = -\frac{FR^3}{2EI} \left[\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right] \theta \sin \theta \tag{i}$$

$$\varphi = -\frac{FR^2}{EI} \sin \theta \tag{j}$$

Los movimientos en el extremo de la ménsula valdrán

$$v_1 \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{FR^3}{2EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} - 1 \right) \quad (k)$$

$$v_2 \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{FR^3\pi}{4EI} \left(\frac{EI}{R^2EA} + \frac{EI}{R^2kGA} + 1 \right) \quad (l)$$

$$\varphi \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{FR^2}{EI} \quad (m)$$

Nótese que en las expresiones h a m está explícita la importancia relativa de la deformación por esfuerzo axil y de la deformación por cortante frente a la deformación por momento flector. Los ejemplos de los apartados 9.6.4 dan idea de la importancia relativa de tales términos.

9.11 Ejercicios propuestos

- ♣ **Ejercicio propuesto EP9.1** En la estructura de la figura, las rectas BC y AB son tirantes de sección $w = 2 \text{ cm}^2$. La viga BD tiene inercia $I = 10^6 \text{ cm}^4$ y está cargada con una carga uniformemente repartida de valor $p = 100 \text{ kN/m}$.

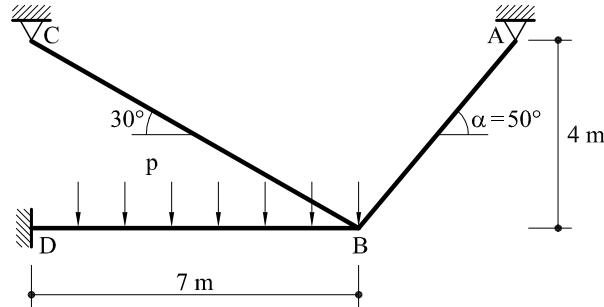


Fig. EP9.1

Hallar las leyes de esfuerzos en todas las piezas de la estructura, así como el movimiento del punto B .

Valor de control: El esfuerzo axil en AB vale: $66,4 \text{ kN}$.

♣ **Ejercicio propuesto EP9.2** En la estructura de la figura las piezas AD y $A'D'$ tienen rigidez infinita. Las rectas DC y $D'C'$ son dos tirantes de sección ω . Sobre la pieza $A'BA$ actúa una carga uniformemente distribuida de valor $p = 15 \text{ kN/m}$. La inercia de las piezas $A'BA$ y BC es I .

- Determinar el valor de b para que los tirantes no trabajen.
- Con el valor de b obtenido anteriormente, supóngase que previamente a la introducción de la carga p se da al tirante una tensión previa de 50 kN , introduciendo seguidamente la carga p . Determinar y dibujar las leyes de esfuerzos para el estado final.

Nota: A excepción de los tirantes, solamente se tendrá en cuenta la deformación por Momento Flector.

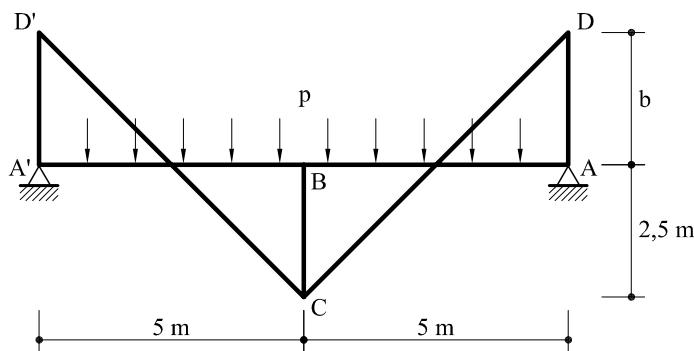


Fig. EP9.2

Valor de control: El valor de b es $b = 4,16 \text{ m}$. El momento flector en B de la barra BA vale: $112,3 \text{ kNm}$.

♣ **Ejercicio propuesto EP9.3** La estructura de la figura está compuesta por las siguientes piezas:

- Las rectas AD y DC representan un tirante único ADC .
- La pieza ABC es un perfil metálico IPE 450 ($I = 33\,740 \text{ cm}^4$).
- La pieza BD es infinitamente rígida y sobre el punto D desliza libremente el tirante ADC .

Sobre la pieza ABC actúa una carga normal a la pieza, uniformemente repartida y con sentido descendente, de valor $p = 12 \text{ kN/m}$.

La sección del cable es tal que el momento flector en el punto B de la viga BC es la mitad del que tendría si no hubiera cable.

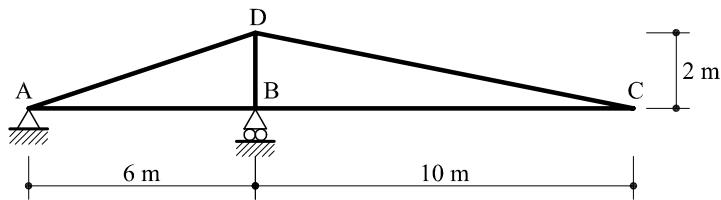


Fig. EP9.3

En un determinado momento de la vida de la estructura, y al comprobar que los cables se encuentran en deficiente estado de conservación, se decide colocar un apoyo en C y a continuación eliminar el cable ADC .

Hallar: Ley final de momentos flectores en la estructura. Giro final del punto B .

Valor de control: El giro final en B vale: $351,3 / EI$.

♣ **Ejercicio propuesto EP9.4** La pasarela de peatones de la figura está sometida a una sobrecarga vertical en la viga horizontal de 35 kN/m .

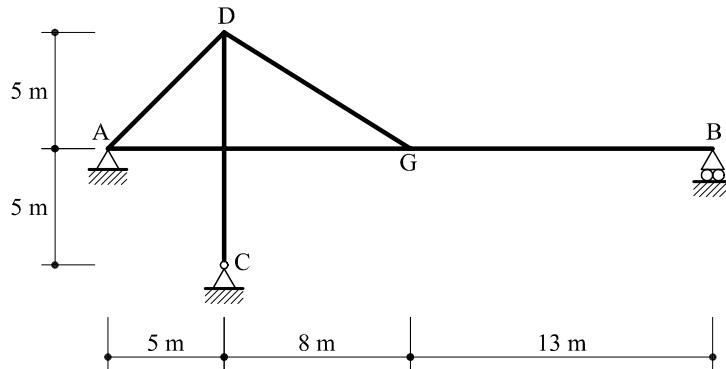


Fig. EP9.4

Las rectas AD y DG son dos tirantes de sección ω y módulo de elasticidad $E_t = 210 \text{ GPa}$. En el extremo D del mástil DC , los dos tirantes se unen al mástil. Las rectas AG y DC se cruzan sin cortarse.

La inercia de la viga AGB vale $I = 0,1 \text{ m}^4$ y el módulo de elasticidad $E_v = 30 \text{ GPa}$. Sabiendo que la sección de los cables es de $\omega = 20 \text{ cm}^2$, determinar:

- Leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.
- Movimientos de los puntos D y G .

Nota: Se considerará exclusivamente la deformación por esfuerzo axial en los tirantes

Valor de control: Esfuerzo axial en el cable DG : 407 kN .

- ♣ **Ejercicio propuesto EP9.5** Se considera la misma estructura del Ejercicio Propuesto EP9.4 con las características geométricas y mecánicas allá indicadas. Sin embargo, en el punto C existe un empotramiento y en el punto A una deslizadera. Contestar a las mismas preguntas del mencionado ejercicio.

Valor de control: El esfuerzo axil en DG vale: 407 kN .

- ♣ **Ejercicio propuesto EP9.6** En la estructura de la figura, las rectas BS y BT representan tirantes de 70 cm^2 de sección cada uno y un módulo de elasticidad $E_t = 210 \text{ GPa}$.

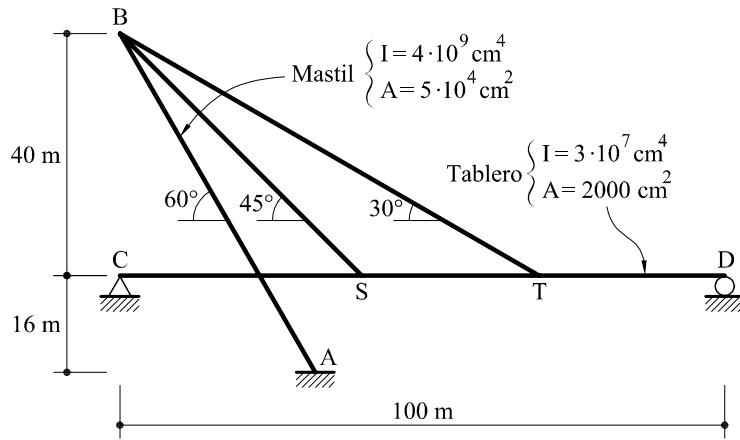


Fig. EP9.6

El mástil BA tiene una inercia de 40 m^4 y se cruza con el tablero, el cual tiene un momento de inercia de valor $0,3 \text{ m}^4$. Tanto el tablero como el mástil tienen un módulo de Elasticidad de 30 GPa .

Sobre el tablero actúa una fuerza repartida de valor $p = 75 \text{ kN/m}$. Determinar:

- Leyes de esfuerzos.
- Movimiento del punto B .

Valor de control: El esfuerzo axil en BS vale: 5030 kN .

10 Vigas continuas

10.1 Introducción

Se denominan vigas continuas a aquellas piezas rectas hiperestáticas que descansan sobre más de dos apoyos (Fig. 10.1). Se supondrá que las cargas actúan normalmente al eje de la pieza, por lo que en la misma no habrá esfuerzos axiles en ningún punto.

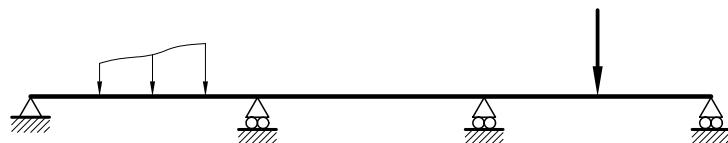


Fig. 10.1 Viga continua sobre cuatro apoyos

Tal tipo de estructura aparece con cierta frecuencia en la práctica de la ingeniería: puentes (Fig. 10.2), correas de naves industriales, vigas carrileras, etc. Por tal motivo, se justifica su estudio separado del resto de las estructuras hiperestáticas.

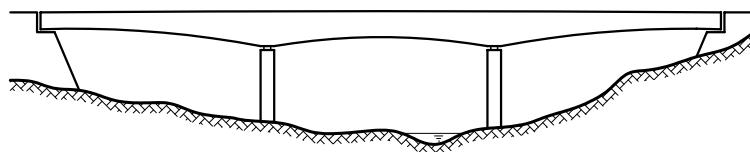


Fig. 10.2 Puente simplemente apoyado sobre cuatro apoyos (dos pilares y dos estribos)

El análisis de las vigas continuas puede abordarse bien mediante un método de compatibilidad, bien mediante un método de rigidez, tal como se describe en los apartados que siguen.

Tanto cuando se utiliza un método de compatibilidad como cuando se prefiere un método de rigidez, es posible incluir o no la deformación por esfuerzo cortante. En la exposición que se realiza en el presente capítulo, se prescinde a efectos de claridad de dicha deformación. En cualquier caso, su inclusión es muy sencilla (de acuerdo con lo analizado en el capítulo 9) y se deja como ejercicio para el lector interesado.

10.2 Cálculo de vigas continuas mediante métodos de compatibilidad

Existen primordialmente dos procedimientos para analizar vigas continuas mediante el método de compatibilidad. En el primero de ellos, se toman como incógnitas hiperestáticas las reacciones en los apoyos intermedios, mientras que en el segundo, como hiperestáticas se eligen los momentos flectores también en los apoyos intermedios. En lo que sigue, se desarrollan ambos procedimientos.

10.2.1 Cálculo de vigas continuas tomando como incógnitas hiperestáticas las reacciones de los apoyos intermedios

Considérese la viga continua de cuatro tramos, representada en la figura 10.3, sometida a unas cargas cualesquiera $p_2(x_1)$. La longitud total de la pieza será $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.

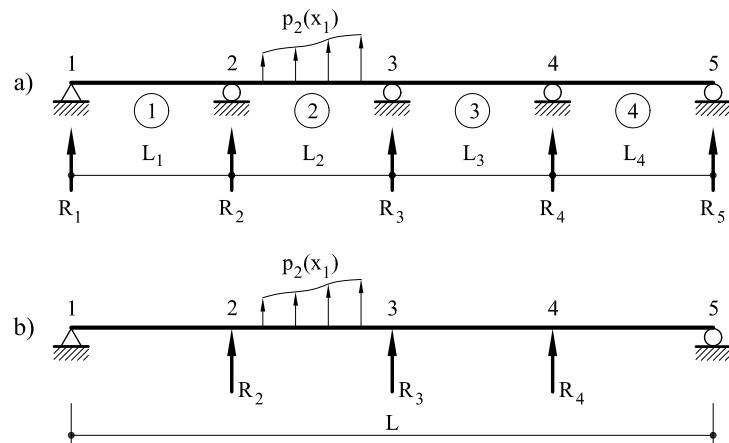


Fig. 10.3 a) Viga continua de cuatro tramos, b) Transformación de la viga continua anterior en una viga simple biapoyada

La pieza es tres veces hiperestática y, de acuerdo con lo señalado anteriormente, se tomarán las reacciones en los puntos intermedios R_2, R_3 y R_4 como incógnitas hiperestáticas. El desplazamiento vertical de los puntos 2, 3 y 4 valdrá

$$\Delta_2 = \Delta_2^c + \alpha_{22}R_2 + \alpha_{23}R_3 + \alpha_{24}R_4 \quad (10.1a)$$

$$\Delta_3 = \Delta_3^c + \alpha_{32}R_2 + \alpha_{33}R_3 + \alpha_{34}R_4 \quad (10.1b)$$

$$\Delta_4 = \Delta_4^c + \alpha_{42}R_2 + \alpha_{43}R_3 + \alpha_{44}R_4 \quad (10.1c)$$

en donde Δ_2^c , Δ_3^c y Δ_4^c son respectivamente los movimientos verticales de los puntos 2,3 y 4 debido a las cargas externas $p_2(x_1)$. Los coeficientes α_{ij} se determinan utilizando el teorema de Castiglano, Mohr, etc. Nótese que se ha utilizado el símbolo Δ para indicar los movimientos v_2 en dirección perpendicular al eje de la pieza. Dicho cambio de simbología, en el presente capítulo, viene justificado para evitar confusiones en los desarrollos que siguen.

Imponiendo la condición de nulidad en los desplazamientos verticales de los puntos 2,3 y 4 ($\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$), el sistema de ecuaciones 10.1 proporciona el valor de las reacciones (incógnitas hiperestáticas) en los apoyos intermedios.

En el caso en que hubiera desplazamientos de apoyos, simplemente se sustituye su valor en las expresiones 10.1.

Análogamente, en el caso en que alguno de los apoyos fuera elástico (por ejemplo, el apoyo 3), se tendrá que

$$R_3 = -k\Delta_3 \quad (10.2)$$

por lo que sustituyendo en 10.1, dichas expresiones se modifican quedando

$$0 = \Delta_2^c + \alpha_{22}R_2 + \alpha_{23}R_3 + \alpha_{24}R_4 \quad (10.3a)$$

$$0 = \Delta_3^c + \alpha_{32}R_2 + \left(\alpha_{33} + \frac{1}{k}\right)R_3 + \alpha_{34}R_4 \quad (10.3b)$$

$$0 = \Delta_4^c + \alpha_{42}R_2 + \alpha_{43}R_3 + \alpha_{44}R_4 \quad (10.3c)$$

Nótese finalmente que las cargas pueden consistir en variaciones térmicas de la viga, sin que la estructura de las ecuaciones 10.1 experimente variaciones.

♣ Problema resuelto P10.1 Determinar las leyes de esfuerzos y el valor de las reacciones en la viga continua de la figura P10.1.1. Solamente se considerará la deformación debida al momento fletor.

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática la reacción del apoyo 2. Para ello, se sustituye dicho apoyo por una fuerza R_2 . Utilizando cualquiera de los métodos estudiados en los capítulos anteriores, la flecha del punto 2 valdrá

$$\Delta_2 = \frac{4}{9EI}R_2L^3 - \frac{11}{12EI}qL^4 = 0$$

por lo que

$$R_2 = 2,0625 qL$$

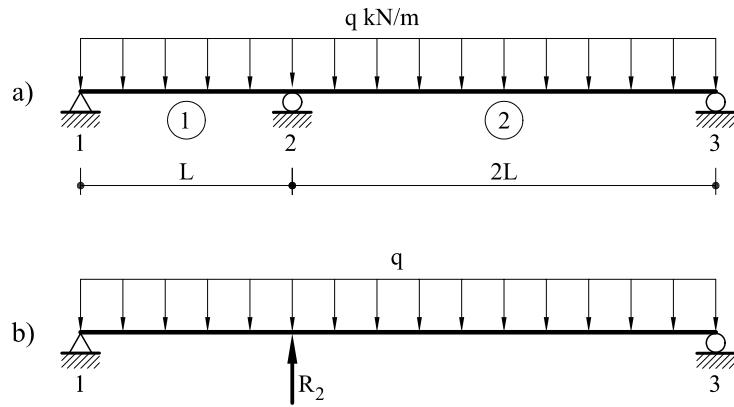


Fig. P10.1.1 a) Viga continua, b) Viga isostática base

y por equilibrio

$$R_1 = 0,125 qL$$

$$R_3 = 0,8125 qL$$

En la figura P10.1.2 puede verse representada la ley de momentos flectores y de esfuerzos cortantes.

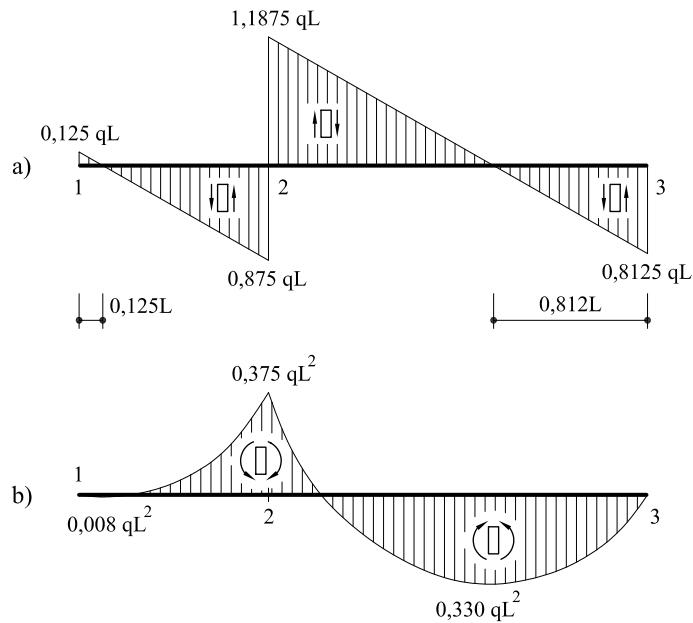


Fig. P10.1.2 a) Ley de esfuerzos cortantes, b) Ley de momentos flectores.

10.2.2 Cálculo de vigas continuas tomando como incógnitas hiperestáticas los momentos flectores en los apoyos intermedios: Teorema de los tres momentos

Considérense (Fig. 10.4) dos tramos intermedios cualesquiera de una viga continua y sea

$(M_f)_{i-1}$: Momento flector en el apoyo $i - 1$

$(M_f)_i$: Momento flector en el apoyo i

$(M_f)_{i+1}$: Momento flector en el apoyo $i + 1$

Si la viga continua se descompone en vigas simples, es preciso colocar en sus extremos los correspondientes valores de los momentos flectores, que serán considerados como las incógnitas hiperestáticas del problema.

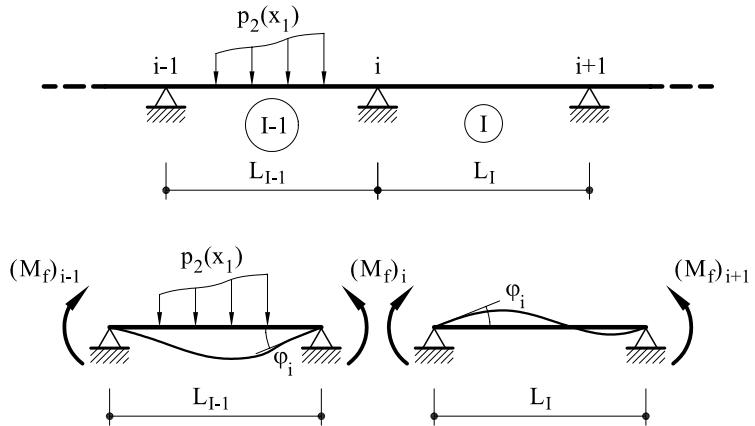


Fig. 10.4 Tramos intermedios de una viga continua.

Para obtener los valores de las incógnitas hiperestáticas, es preciso plantear la igualdad de giros en cada uno de los apoyos intermedios. Es decir

- Giro en i de la pieza $I - 1$

$$\varphi_i = \frac{(M_f)_{i-1}L_{i-1}}{6EI_{i-1}} + \frac{(M_f)_iL_{i-1}}{3EI_{i-1}} + \varphi_{i,I-1}^c \quad (10.4a)$$

- Giro en i de la pieza I

$$\varphi_i = -\frac{(M_f)_iL_I}{3EI_I} - \frac{(M_f)_{i+1}L_I}{6EI_I} + \varphi_{i,I}^c \quad (10.4b)$$

siendo, respectivamente, $\varphi_{i,I-1}^c$ y $\varphi_{i,I}^c$ los giros en i de las piezas $I - 1$ e I debidas a las cargas $p_2(x_1)$ que actúan en el interior de las mismas.

De la igualdad de las dos expresiones 10.4

$$\frac{(M_f)_{i-1}L_{I-1}}{6EI_{I-1}} + \frac{(M_f)_i}{3E} \left(\frac{L_{I-1}}{I_{I-1}} + \frac{L_I}{I_I} \right) + \frac{(M_f)_{i+1}L_I}{6EI_I} = \varphi_{i,I}^c - \varphi_{i,I-1}^c \quad (10.5)$$

Esta igualdad constituye la expresión del teorema de los tres momentos. Dicha ecuación planteada para cada uno de los apoyos intermedios proporciona un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas hiperestáticas tiene el problema.

♣ **Problema resuelto P10.2.2** *Dada la viga continua de la figura P10.2.1 con las cargas que en ella se indican, determinar las leyes de esfuerzos.*

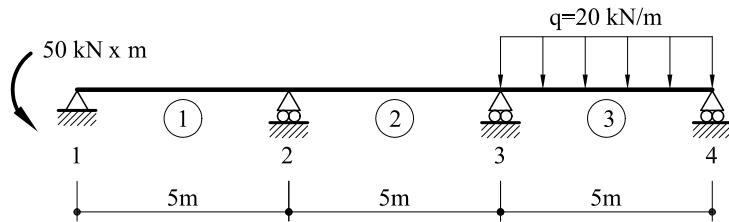


Fig. P10.2.1 Viga continua de tres tramos

Solución

Se tomarán como incógnitas hiperestáticas los momentos flectores en los apoyos 2 y 3: $(M_f)_2$ y $(M_f)_3$, respectivamente. Para determinarlos, se descompone la viga continua en tres vigas simples (Fig. P10.2.2).

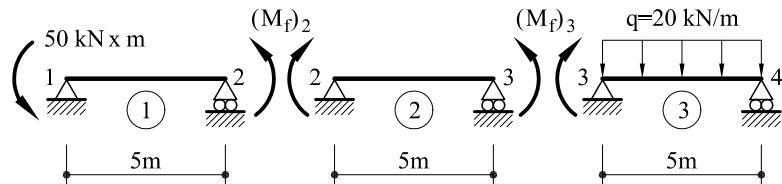


Fig. P10.2.2 Descomposición en vigas simples

Se plantea a continuación la igualdad de giros en los apoyos 2 y 3

- Giro en el punto 2 de la pieza 1

$$\varphi_2 = \frac{(M_f)_2 \times 5}{3EI} - \frac{50 \times 5}{6EI}$$

- Giro en el punto 2 de la pieza 2

$$\varphi_2 = -\frac{(M_f)_2 \times 5}{3EI} - \frac{(M_f)_3 \times 5}{6EI}$$

De la igualdad de las dos expresiones anteriores

$$4(M_f)_2 + (M_f)_3 = 50 \quad (a)$$

Análogamente para el apoyo 3

- Giro en el punto 3 de la pieza 2

$$\varphi_3 = \frac{(M_f)_2 \times 5}{6EI} + \frac{(M_f)_3 \times 5}{3EI}$$

- Giro en el punto 3 de la pieza 3

$$\varphi_3 = -\frac{(M_f)_3 \times 5}{3EI} - \frac{20 \times 5^3}{24EI}$$

Igualando las dos expresiones anteriores

$$(M_f)_2 + 4(M_f)_3 = -125 \quad (b)$$

lo cual constituye la segunda ecuación del problema. Resolviendo el sistema formado por a y b se obtiene

$$\begin{aligned} (M_f)_2 &= 21,7 \text{ kN m} \\ (M_f)_3 &= -36,7 \text{ kN m} \end{aligned}$$

A partir de los anteriores valores, es posible determinar las leyes de esfuerzos (Fig. P10.2.3) y calcular las reacciones. A partir de las leyes de cortantes, se obtienen las reacciones

$$\begin{aligned} R_1 &= 14,3 \text{ kN} && \text{(sentido ascendente)} \\ R_2 &= -(14,3 + 11,6) = -25,9 \text{ kN} && \text{(sentido descendente)} \\ R_3 &= 11,6 + 57,3 = 68,9 \text{ kN} && \text{(sentido ascendente)} \\ R_4 &= 42,7 \text{ kN} && \text{(sentido ascendente)} \end{aligned}$$

Como puede observarse, $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 20 \times 5 = 100 \text{ kN}$

10.2.3 Movimientos de apoyos: Valores conocidos de un descenso de apoyo y apoyos elásticos

En el caso en que algún o algunos apoyos tengan un desplazamiento vertical (bien sea éste conocido o se produzca como consecuencia de la elasticidad del apoyo), es también posible utilizar el teorema de los tres momentos para obtener el valor de las incógnitas hiperestáticas $(M_f)_i$. Considérese para ello la figura 10.5, que al igual que la figura 10.4, representa varios tramos de una viga continua. La diferencia entre ambas

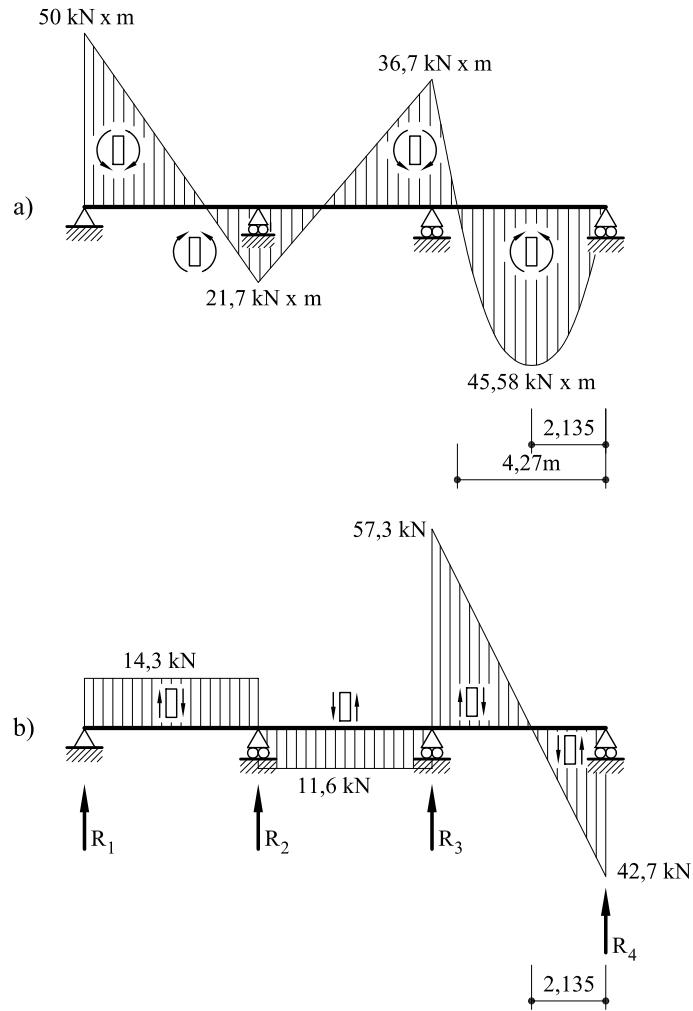


Fig. P10.2.3 Leyes de esfuerzos: a) Ley de momentos flectores, b) Ley de esfuerzos cortantes

radica en el hecho de que mientras que en la figura 10.4 no se consideran movimientos de apoyos, en la figura 10.5 sí se consideran.

Al igual que antes los valores de las incógnitas hiperestáticas se obtendrán de igualar los giros en los apoyos, teniendo presente que ahora el giro, además de a los momentos y a las cargas externas, será también debido al movimiento del apoyo. Es decir

- Giro en i de la pieza $I - 1$

$$\varphi_i = \alpha_i + \beta_i = \frac{\Delta_i}{L_{I-1}} + \frac{(M_f)_{i-1} L_{I-1}}{6EI_{I-1}} + \frac{(M_f)_i L_{I-1}}{3EI_{I-1}} + \varphi_{i,I-1}^c \quad (10.6a)$$

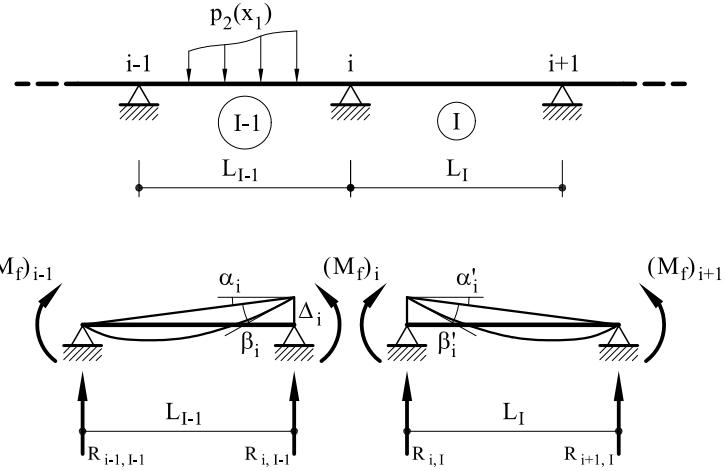


Fig. 10.5 Tramos intermedios de una viga continua con movimiento de apoyo

- Giro en i de la pieza I

$$\varphi_i = \alpha'_i + \beta'_i = -\frac{\Delta_i}{L_I} - \frac{(M_f)_i L_I}{3EI_I} - \frac{(M_f)_{i+1} L_I}{6EI_I} + \varphi_{i,I}^c \quad (10.6b)$$

De la igualdad de las expresiones 10.6 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{(M_f)_{i-1} L_{I-1}}{6EI_{I-1}} + \frac{(M_f)_i}{3E} \left(\frac{L_{I-1}}{I_{I-1}} + \frac{L_I}{I_I} \right) + \frac{(M_f)_{i+1} L_I}{6EI_I} &= \\ &= \varphi_{i,I}^c - \varphi_{i,I-1}^c - \Delta_i \left(\frac{1}{L_{I-1}} + \frac{1}{L_I} \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

lo cual constituye la expresión del teorema de los tres momentos para el caso en que existe un desplazamiento de apoyo en el punto i .

Si el desplazamiento Δ_i del apoyo es conocido, se puede sustituir en la expresión 10.7, con lo cual quedan únicamente como incógnitas los momentos flectores.

En el caso en el que el apoyo i fuera elástico, existe una relación entre el desplazamiento y la reacción en i dada por

$$R_i = -k\Delta_i \quad (10.8)$$

siendo k el coeficiente de balasto.

Por otra parte, la reacción R_i vendrá dada por la suma (Figura 10.5)

$$R_i = R_{i,I-1} + R_{i,I} \quad (10.9)$$

y por equilibrio

$$R_{i,I-1} = \frac{(M_f)_{i-1} - (M_f)_i}{L_{I-1}} + R_{i,I-1}^c \quad (10.10a)$$

$$R_{i,I} = \frac{(M_f)_{i+1} - (M_f)_i}{L_I} + R_{i,I}^c \quad (10.10b)$$

siendo respectivamente $R_{i,I-1}^c$ y $R_{i,I}^c$ las reacciones en el apoyo I de las vigas simples $I-1$ e I debidas únicamente a las cargas que actúan en su interior. Sumando las dos expresiones anteriores y teniendo en cuenta 10.8 se puede escribir

$$\Delta_i = -\frac{R_i}{k} = -\frac{1}{k} \left[\frac{(M_f)_{i-1}}{L_{I-1}} - (M_f)_i \left(\frac{1}{L_{I-1}} + \frac{1}{L_I} \right) + \frac{(M_f)_{i+1}}{L_I} + R_{i,I-1}^c + R_{i,I}^c \right] \quad (10.11)$$

y sustituyendo en 10.7

$$\begin{aligned} \frac{(M_f)_{i-1} L_{I-1}}{6EI_{I-1}} + \frac{(M_f)_i}{3E} \left(\frac{L_{I-1}}{I_{I-1}} + \frac{L_I}{I_I} \right) + \frac{(M_f)_{i+1} L_I}{6EI_I} &= \varphi_{i,I}^c - \varphi_{i,I-1}^c + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{L_{I-1}} + \frac{1}{L_I} \right) \times \\ \left[\frac{(M_f)_{i-1}}{L_{I-1}} - (M_f)_i \left(\frac{1}{L_{I-1}} + \frac{1}{L_I} \right) + \frac{(M_f)_{i+1}}{L_I} + R_{i,I-1}^c + R_{i,I}^c \right] \end{aligned} \quad (10.12)$$

expresión que contiene únicamente las incógnitas hiperestáticas y valores conocidos (bien de giros, bien de reacciones).

♣ Problema resuelto 10.3 Considérese la misma viga que en el problema P10.2, en la cual el apoyo 3 es elástico, con un coeficiente de balasto de valor k . Determinar los momentos flectores en los apoyos 2 y 3 y el movimiento vertical del punto 3.

Solución

La viga continua se descompone en las tres vigas simples de la figura P10.3.1.

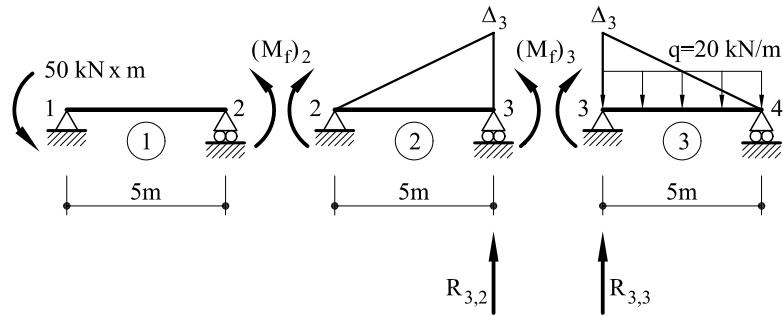


Fig. P10.3.1 Descomposición en vigas simples

Se plantea la igualdad de giros en los apoyos 2 y 3.

- Giro en el punto 2 de la pieza 1

$$\varphi_2 = \frac{(M_f)_2 \times 5}{3EI} - \frac{50 \times 5}{6EI}$$

- Giro en el punto 2 de la pieza 2

$$\varphi_2 = -\frac{(M_f)_2 \times 5}{3EI} - \frac{(M_f)_3 \times 5}{6EI} + \frac{\Delta_3}{5}$$

De la igualdad de las dos expresiones anteriores

$$100(M_f)_2 + 25(M_f)_3 = 1250 + 6EI \Delta_3 \quad (a)$$

De la misma forma, en el apoyo 3

- Giro en el punto 3 de la pieza 2

$$\varphi_3 = \frac{(M_f)_2 \times 5}{6EI} + \frac{(M_f)_3 \times 5}{3EI} + \frac{\Delta_3}{5}$$

- Giro en el punto 3 de la pieza 3

$$-\frac{(M_f)_3 \times 5}{3EI} - \frac{20 \times 5^3}{24EI} - \frac{\Delta_3}{5}$$

Igualando

$$25(M_f)_2 + 100(M_f)_3 = -3125 - 12EI \Delta_3 \quad (b)$$

Por otra parte, tomando momentos en el apoyo 2 de la viga 2, se obtendrá el valor de la reacción $R_{3,2}$. Es decir

$$R_{3,2} = \frac{(M_f)_2 - (M_f)_3}{5}$$

Asimismo, tomando momentos en el apoyo 4 de la pieza 3, se tiene

$$R_{3,3} = \frac{20 \times 5^2}{2 \times 5} - \frac{(M_f)_3}{5} = 50 - \frac{(M_f)_3}{5}$$

La reacción en el apoyo 3 vale

$$R_3 = R_{3,2} + R_{3,3} = 50 + \frac{(M_f)_2 - 2(M_f)_3}{5}$$

y como también

$$R_3 = -k \Delta_3$$

Igualando las dos expresiones anteriores

$$(M_f)_2 - 2(M_f)_3 = -250 - 5k \Delta_3 \quad (c)$$

Las expresiones a , b y c constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuya resolución proporciona la solución del problema. Resolviendo

$$(M_f)_2 = 21,7 - \frac{4\,140}{48 + 625k'} \text{ kNm}$$

$$(M_f)_3 = -36,7 + \frac{6\,210}{48 + 625k'} \text{ kNm}$$

$$\Delta_3 = -\frac{43\,125}{(48 + 625k')EI} \text{ m}$$

siendo $k' = k/EI$.

Para el caso de apoyo rígido ($k = \infty$), la solución obtenida coincide con la proporcionada por el problema P10.2.

10.3 Cálculo de vigas continuas mediante el método de rigidez

Así como en los métodos de compatibilidad la solución del problema se obtiene hallando el valor de las incógnitas hiperestáticas, en el método de rigidez la solución se obtiene mediante la determinación de los movimientos en los nudos. Para ello se utilizan las ecuaciones elásticas desarrolladas en el Capítulo 9.

Es importante advertir que los desarrollos que se incluyen en el presente apartado constituyen una particularización del método de rigidez que se expondrá en el capítulo siguiente.

10.3.1 Vigas continuas con nudos fijos

En este caso, puesto que los desplazamientos de los nudos son nulos, el único movimiento desconocido en cada nudo es el correspondiente al giro. Por ello, la expresión de los momentos en las ecuaciones 9.103 para una viga simple puede escribirse únicamente en función de los giros, es decir

$$M_A = \frac{4EI}{L}\varphi_A + \frac{2EI}{L}\varphi_B + \widehat{M}_A \quad (10.13a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L}\varphi_A + \frac{4EI}{L}\varphi_B + \widehat{M}_B \quad (10.13b)$$

Al estar compuesta la estructura por diferentes barras, es preciso completar la anterior nomenclatura en el sentido siguiente (Fig. 10.6): Para una barra cualquiera I , cuyos extremos sean i y j , se denominará extremo A al extremo de menor numeración y extremo B al de numeración mayor, de forma que el eje local x_1 irá del extremo A al B .

Escribiendo las ecuaciones elásticas correspondientes a los momentos de extremo de

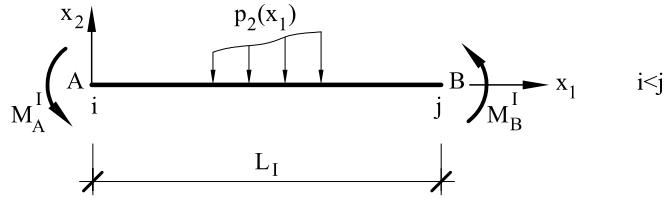


Fig. 10.6 Nomenclatura para una pieza recta

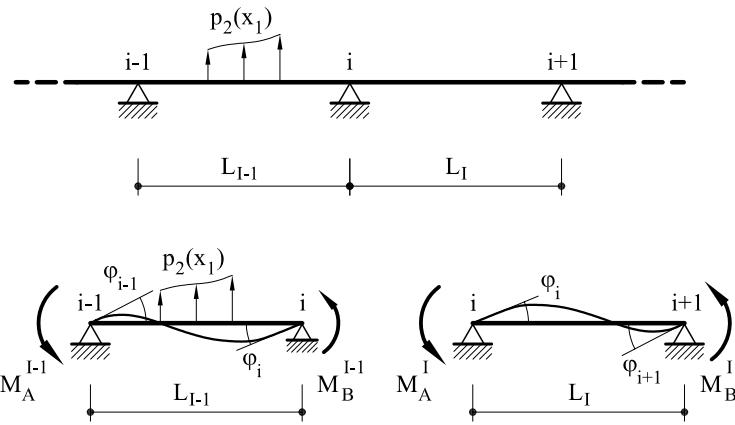


Fig. 10.7 Tramos intermedios de una viga continua

barra de las dos piezas que concurren en el nudo i , se tendrá (Fig. 10.7)

$$M_B^{I-1} = 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_A^{I-1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_B^{I-1} + \widehat{M}_B^{I-1} \quad (10.14a)$$

$$M_A^I = 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_A^I + 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_B^I + \widehat{M}_A^I \quad (10.14b)$$

y teniendo en cuenta que $\varphi_A^{I-1} = \varphi_{i-1}$; $\varphi_B^{I-1} = \varphi_i$; $\varphi_A^I = \varphi_i$; $\varphi_B^I = \varphi_{i+1}$, las anteriores ecuaciones quedan

$$M_B^{I-1} = 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_{i-1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_i + \widehat{M}_B^{I-1} \quad (10.15a)$$

$$M_A^I = 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_i + 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_{i+1} + \widehat{M}_A^I$$

Por equilibrio, es evidente que debe cumplirse que $M_B^{I-1} + M_A^I$ debe ser igual (si lo

hubiese) al momento externo M_i^{ext} aplicado en i , es decir

$$\begin{aligned} M_i^{ext} = & 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_{i-1} + \left[4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \right] \varphi_i + \\ & + 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_{i+1} + \widehat{M}_B^{I-1} + \widehat{M}_A^I \end{aligned} \quad (10.16)$$

y llamando

$$M_i = M_i^{ext} - (\widehat{M}_B^{I-1} + \widehat{M}_A^I) \quad (10.17)$$

la expresión 10.16 puede escribirse

$$2 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_{i-1} + \left[4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \right] \varphi_i + 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_{i+1} = M_i \quad (10.18)$$

Igualmente, una ecuación similar a la anterior puede escribirse para cada uno de los apoyos de la viga continua, llegándose a la formación de la siguiente expresión matricial

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{M} \quad (10.19)$$

siendo $\boldsymbol{\varphi}$ el vector de incógnitas

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

\mathbf{M} es el vector de cargas

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}$$

y \mathbf{K} es la matriz de rigidez de la estructura. Un elemento cualquiera K_{rs} se escribe

$$K_{rs} = 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{s-1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_s \quad \text{si } s = r \quad (10.21a)$$

$$K_{rs} = 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_s \quad \text{si } s = r + 1 \quad (10.21b)$$

$$K_{rs} = 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_s \quad \text{si } s = r - 1 \quad (10.21c)$$

$$K_{rs} = 0 \quad \text{en los demás casos} \quad (10.21d)$$

Como puede observarse, la matriz de rigidez \mathbf{K} es tridiagonal y simétrica. Dicha simetría constituye una importante propiedad de las matrices de rigidez de una estructura y puede demostrarse con carácter general a partir del teorema de Maxwell-Betti. Físicamente, un elemento cualquiera K_{rs} se interpreta como el momento externo M_r que existe (o que hay que aplicar) en el apoyo r cuando se da un giro unidad al apoyo s y cero al resto.

De la resolución del sistema de ecuaciones 10.19, se obtiene el vector de giros (vector de incógnitas). Sustituyendo en las ecuaciones elásticas 10.14, se obtienen finalmente los momentos de extremo de barra.

Asimismo, en el caso en que existieran cargas térmicas, los momentos de empotramiento perfecto serían los correspondientes a tales cargas (ver capítulo 9).

♣ **Problema resuelto P10.4** *Calcular la viga del problema P10.2 utilizando el método de rigidez*

Solución

Aunque, de acuerdo con las reglas dadas por 10.21 es posible escribir directamente la matriz de rigidez, ésta se va a deducir paso a paso, a fin de facilitar la comprensión del proceso:

Ecuación elástica para el apoyo 1

$$M_A^1 = 4 \frac{EI}{5} \varphi_1 + 2 \frac{EI}{5} \varphi_2 + 0$$

y puesto que el momento externo aplicado en el apoyo 1 vale $50 \text{ kN} \times m$, la ecuación anterior se escribe

$$50 = 0,8 EI \varphi_1 + 0,4 EI \varphi_2 \quad (a)$$

Ecuaciones elásticas para el apoyo 2

$$M_B^1 = 4 \frac{EI}{5} \varphi_2 + 2 \frac{EI}{5} \varphi_1 + 0$$

$$M_A^2 = 4 \frac{EI}{5} \varphi_2 + 2 \frac{EI}{5} \varphi_3 + 0$$

Teniendo presente que en el apoyo 2 no hay aplicado ningún momento externo, resulta que $M_B^1 + M_A^2 = 0$, por lo que se obtiene la ecuación

$$0 = 0,4 EI \varphi_1 + 1,6 EI \varphi_2 + 0,4 EI \varphi_3 \quad (b)$$

Análogamente, para el apoyo 3

$$\begin{aligned}M_B^2 &= 4 \frac{EI}{5} \varphi_3 + 2 \frac{EI}{5} \varphi_2 + 0 \\M_A^3 &= 4 \frac{EI}{5} \varphi_3 + 2 \frac{EI}{5} \varphi_4 + \frac{20 \times 5^2}{12}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $M_B^2 + M_A^3 = 0$, se tendrá

$$-41,67 = 0,4 EI \varphi_2 + 1,6 EI \varphi_3 + 0,4 \varphi_4 \quad (c)$$

Y para el apoyo 4

$$M_B^3 = \frac{4EI}{5} \varphi_4 + 2 \frac{EI}{5} \varphi_3 - 41,67$$

y puesto que $M_B^3 = M_4 = 0$

$$41,67 = 0,4 EI \varphi_3 + 0,8 EI \varphi_4 \quad (d)$$

Las expresiones a, b, c y d forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Matricialmente se escribe

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,4 & 1,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ -41,67 \\ 41,67 \end{bmatrix}$$

Sistema que una vez resuelto proporciona el valor de los giros

$$\varphi_1 = \frac{65,28}{EI} ; \quad \varphi_2 = \frac{-5,55}{EI} ; \quad \varphi_3 = \frac{-43,06}{EI} ; \quad \varphi_4 = \frac{73,62}{EI}$$

Valores que sustituidos en las diferentes expresiones de los momentos de extremo de barra dan

$$M_A^1 = 50 \text{ kN} \times m$$

$$M_B^1 = 0,8 \times (-5,55) + 0,4 \times 65,28 = 21,7 \text{ kN} \times m$$

$$M_A^2 = 0,8 \times (-5,55) + 0,4 \times (-43,06) = -21,7 \text{ kN} \times m$$

$$M_B^2 = 0,8 \times (-43,06) + 0,4 \times (-5,55) = -36,7 \text{ kN} \times m$$

$$M_A^3 = 0,8 \times (-43,06) + 0,4 \times 73,62 + \frac{20 \times 5^2}{12} = 36,7 \text{ kN} \times m$$

Puede observarse que se cumple el equilibrio de momentos en cada nudo. Asimismo puede comprobarse que los valores de los momentos coinciden con los obtenidos en el problema P10.2. Igualmente se comprueba que

$$M_B^3 = 0,4 \times (-43,06) + 0,8 \times 73,62 - \frac{20 \times 5^2}{12} = 0$$

Una vez obtenidos los anteriores valores, se obtienen las reacciones y leyes de esfuerzos de forma similar a como se obtuvieron en el problema P10.2.

10.3.2 Viga continua con movimientos de apoyo

Cuando en la viga continua los apoyos pueden experimentar desplazamiento vertical, pueden considerarse dos casos. En primer lugar cabe hablar de aquellas situaciones en las cuales el valor del movimiento (o de los movimientos, si hubiera más de un apoyo móvil) es conocido. En tales casos, tal como se expone más abajo, se obtiene el mismo sistema de ecuaciones, modificando el término de cargas. En segundo lugar, si los apoyos fueran elásticos, sólo es conocida una relación entre la reacción del apoyo y el desplazamiento del mismo. La resolución de ambos casos no plantea especiales problemas, aunque el segundo caso es preferible abordarlo desde una perspectiva más general, por lo que se expondrá en el Capítulo 11, cuando se desarrolle el método de rigidez. Se expone seguidamente la resolución de una viga continua con movimiento dado de apoyos.

Para este caso, es preciso ampliar las ecuaciones elásticas 10.14 para introducir los términos correspondientes a los movimientos, es decir

$$\begin{aligned} M_B^{I-1} = & 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_A^{I-1} + 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_{I-1} \varphi_B^{I-1} + \\ & + 6 \left(\frac{EI}{L^2} \right)_{I-1} (\Delta_A^{I-1} - \Delta_B^{I-1}) + \widehat{M}_B^{I-1} \end{aligned} \quad (10.22a)$$

$$M_A^I = 4 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_A^I + 2 \left(\frac{EI}{L} \right)_I \varphi_B^I + 6 \left(\frac{EI}{L^2} \right)_I (\Delta_A^I - \Delta_B^I) + \widehat{M}_A^I \quad (10.22b)$$

y puesto que $\Delta_A^{I-1} = \Delta_{i-1}$; $\Delta_B^{I-1} = \Delta_i$; $\Delta_A^I = \Delta_i$ y $\Delta_B^I = \Delta_{i+1}$, y además estos valores son conocidos, la expresión 10.17 se modifica en el sentido de que el valor de M_i viene dado ahora por

$$M_i = M_i^{ext} - (\widehat{M}_B^{I-1} + \widehat{M}_A^I) + 6 \left(\frac{EI}{L^2} \right)_{I-1} (\Delta_i - \Delta_{i-1}) + 6 \left(\frac{EI}{L^2} \right)_I (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (10.23)$$

permaneciendo inalteradas el resto de las ecuaciones.

10.4 Ejercicios Propuestos

- ♣ **Ejercicio propuesto EP10.1** En la viga continua de la figura, hallar las leyes de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, así como las reacciones. Hallar asimismo la flecha del punto A.

Valor de control: El momento flector en B vale: 49,67 kNm.

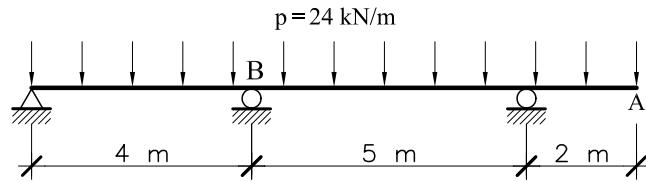


Fig. EP10.1

♣ **Ejercicio propuesto EP10.2** Determinar las reacciones, leyes de momentos flectores y leyes de esfuerzos cortantes de la estructura que se acota en la figura. Hallar también el desplazamiento vertical del punto A.

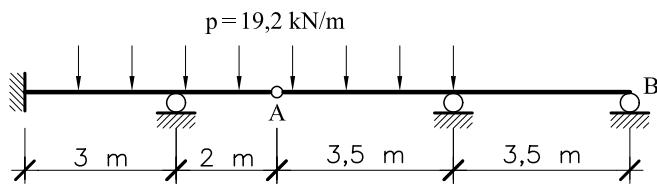


Fig. EP10.2

Valor de control: La reacción en B vale: 11,23 kN.

♣ **Ejercicio propuesto EP10.3** La viga de la figura tiene una rótula situada en el punto A. En dicho punto y a ambos lados de la rótula actuan sendos momentos iguales y de sentido contrario de valor M .

Hallar:

- Desplazamiento vertical de la rótula.
- Giro relativo a ambos lados de la rótula.

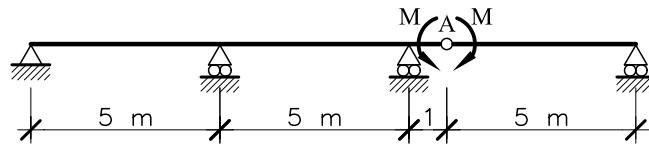


Fig. EP10.3

Valor de control: El desplazamiento de la rótula vale $139 M/(60 EI)$.

- ♣ **Ejercicio propuesto EP10.4** La viga continua de la figura tiene una sección rectangular de ancho 1 y canto h . Dicha pieza sufre una variación térmica de valor t en su cara superior y $-t$ en su cara inferior. Teniendo en cuenta la deformación por momento flector y por esfuerzo cortante, y tomando como incógnita hiperestática el momento flector en el apoyo intermedio, determinar y dibujar las leyes de esfuerzos.

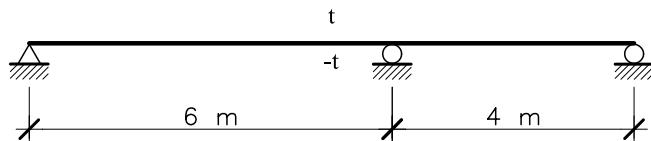


Fig. EP10.4

Valor de control: El momento flector en el apoyo intermedio vale

$$M_f = \frac{10\alpha t}{h(3,33/EI + 0,5/Gh)}$$

- ♣ **Ejercicio propuesto EP10.5** En la viga continua de la figura, el apoyo 2 es elástico con un valor de la constante k igual a 5 kN/m . La inercia de todas las piezas es la misma e igual a 10^6 cm^4 , siendo el módulo de elasticidad $E = 210 \text{ GPa}$. Hallar las leyes de esfuerzos así como el movimiento del punto 5.

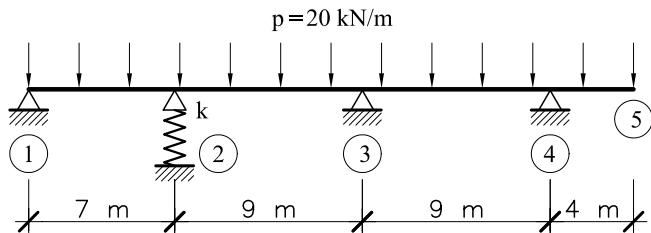


Fig. EP10.5

Valor de control: El movimiento vertical del punto 5 vale: $0,00136 \text{ m}$.

♣ **Ejercicio propuesto EP10.6** En la estructura de la figura, la pieza $E'D'ADE$ es una pieza metálica formada por un IPE 450. Asimismo, las piezas $C'D'$, CD y AB están formadas por el mismo material y la misma sección. Las piezas $E'C'$, $C'B$, BC y CE son tirantes de 2 cm^2 de sección.

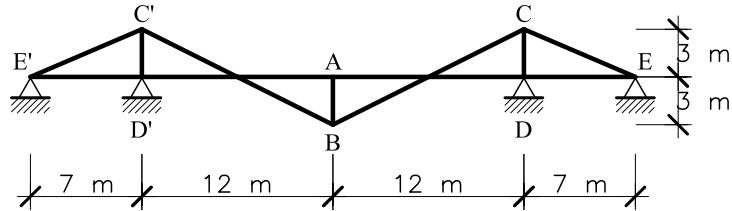


Fig. EP10.6

Sobre la pieza recta horizontal actúa una carga uniformemente repartida vertical descendente de valor $p = 3 \text{ kN/m}$. Determinar las leyes de esfuerzos en todas las piezas.

- Módulo de Elasticidad del acero $E = 210 \text{ GPa}$.

Valor de control: El momento flector en A vale: $20,7 \text{ kN} \times \text{m}$.

11 Estructuras reticuladas

11.1 Introducción

Se denominan estructuras reticuladas a las estructuras formadas por la unión de varias vigas (rectas o curvas) entre sí mediante nudos rígidos. La mayor parte de las estructuras que se construyen caen dentro de esta categoría: pórticos, marcos, arcos, etc. En la figura 11.1 pueden verse representados diversos ejemplos de este tipo de estructuras.

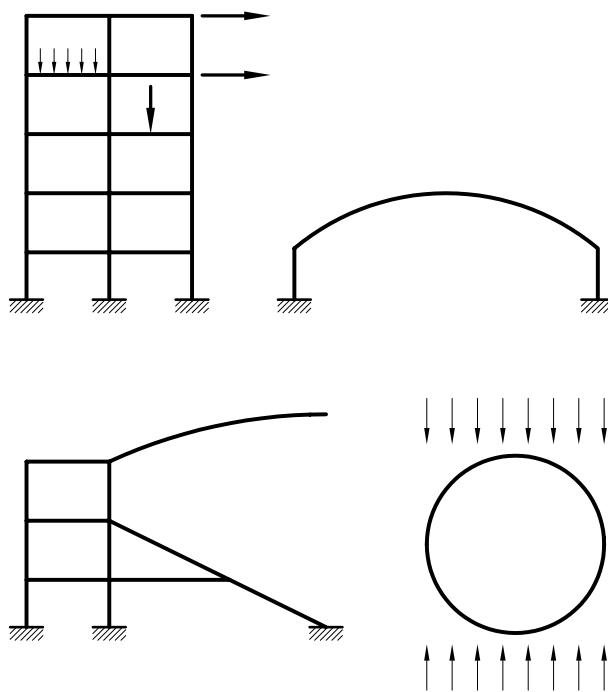


Fig. 11.1 Diversas estructuras reticuladas

En el presente capítulo se van a abordar las metodologías más habituales de cálculo de estructuras. Dichas metodologías son independientes de que la estructura sea plana o espacial, aunque por motivos de claridad de exposición se hará referencia únicamente a las primeras. Las estructuras espaciales serán analizadas en el Capítulo 12.

11.2 Simetrías y Antimetrías

Previo al análisis y cálculo de las estructuras reticuladas es interesante estudiar las propiedades y simplificaciones que pueden realizarse en las estructuras simétricas y en las antimétricas.

11.2.1 Simetrías

Se dice que una estructura es simétrica respecto a un eje cuando respecto a él es simétrica de forma y cargas. Al indicar simétrica de forma se hace referencia a que la simetría es no sólo geométrica, sino también de propiedades mecánicas: área, momento de inercia, módulo de elasticidad, módulo de elasticidad transversal y sección reducida. En la figura 11.2 pueden verse diferentes estructuras simétricas en contraposición con otras que no lo son. Lógicamente una estructura puede tener más de un eje de simetría, como es el caso del anillo de la figuras 11.2c.

Para analizar las propiedades de las estructuras simétricas, considérese una estructura simétrica cualquiera, por ejemplo la representada en la figura 11.3a. Si se analiza el punto de corte de la estructura con el eje de simetría (punto B) y las fuerzas internas y externas que en él actúan (Fig. 11.3b), puede observarse que debido a dicha simetría debe verificarse que

$$H = H' \quad ; \quad V = V' \quad ; \quad M = M'$$

Por otra parte el equilibrio en el nudo B se verifica siempre que sea $V = F/2$, y si no existen cargas externas puntuales aplicadas en dicho nudo, se cumple que $V = 0$. En uno u otro caso, está claro que el valor de V es conocido, lo cual reduce en un grado de hiperestaticidad del problema. Si el corte del eje de simetría con la estructura fuera en una barra (punto D), entonces V sería el esfuerzo cortante existente en dicho punto.

Por lo que hace referencia a las variables cinemáticas, el desplazamiento horizontal (perpendicular al eje de simetría) de los puntos B y D debe ser nulo, ya que si un punto situado un infinitésimo a la izquierda de B (y también de D) tuviera un movimiento δ hacia la izquierda, su correspondiente punto simétrico tendría también un desplazamiento δ pero hacia la derecha, lo cual es absurdo. Análogamente, también es nulo el giro en los puntos B y D de corte de la estructura con el eje de simetría.

Según todo lo anterior, la estructura de la figura 11.3 puede simplificarse tal como se representa en la figura 11.4.

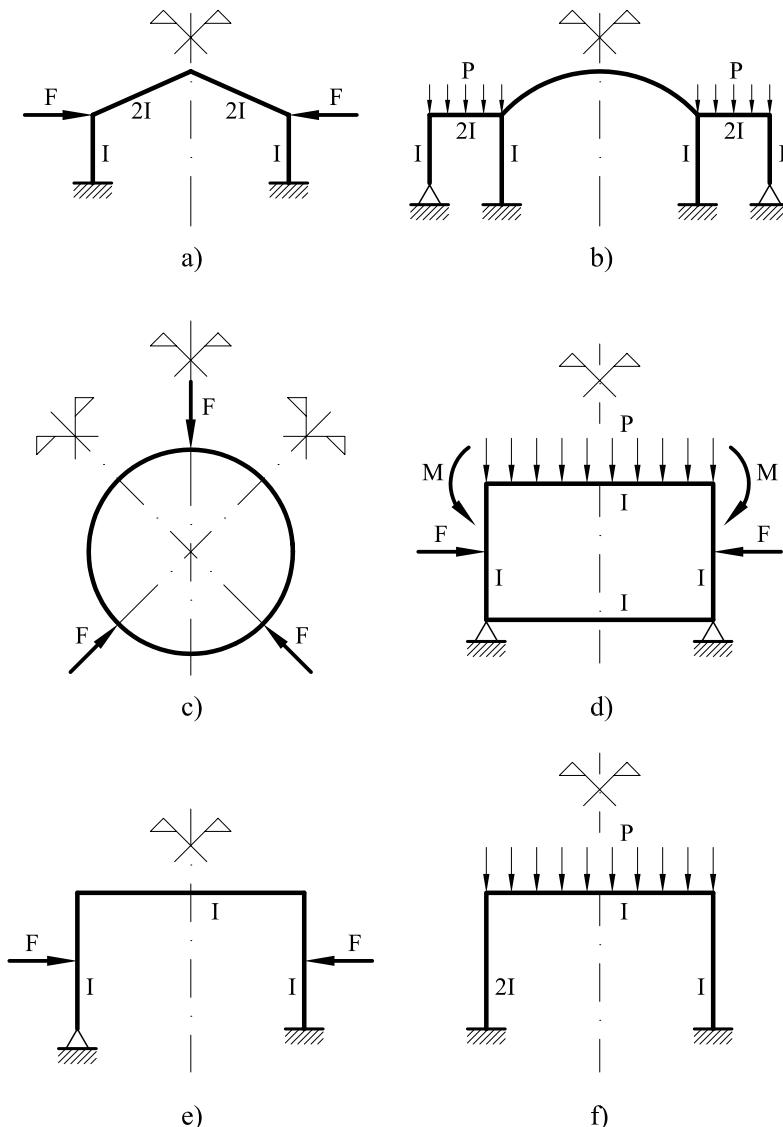


Fig. 11.2 a), b), c), d): Estructuras simétricas. e), f): Estructuras no simétricas

11.2.2 Antimetrías

Una estructura es antimétrica, cuando es simétrica de forma y antimétrica de cargas. En la figura 11.5 pueden verse representadas diferentes estructuras antimétricas.

A fin de estudiar las propiedades que presentan las estructuras antimétricas, considérese la estructura antimétrica de la figura 11.6. Cabe considerar dos casos distintos: los puntos A y D en los cuales el eje de antimetría corta a la estructura pero no coincide

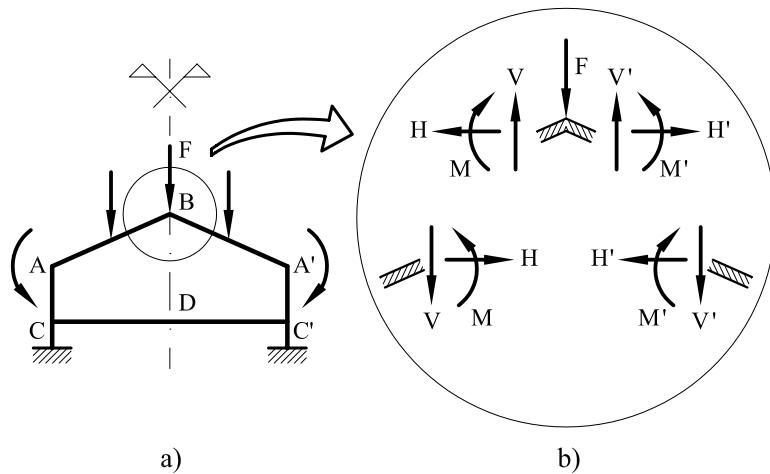


Fig. 11.3 Estructura simétrica

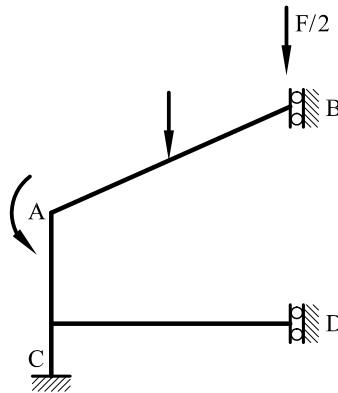


Fig. 11.4 Reducción de una estructura simétrica.

con ninguna barra de la misma, y el punto G, en donde sí coincide. Por lo que respecta al primer caso, es evidente que, por antimetría (Fig. 11.6b),

$$H = H' \quad y \quad M_f = M'_f$$

Además, por equilibrio del nudo, debe verificarse que $V = V'$; $M_f = M/2$; $H = F/2$. Lógicamente, si en el nudo no hay cargas puntuales externas aplicadas, $H = 0$ y además $M_f = 0$. Es decir, que tanto en uno como en otro caso es conocido el esfuerzo horizontal (perpendicular al plano de antimetría) y el momento flector.

Si al igual que antes, se analizan las variables cinemáticas, el movimiento vertical de los puntos A y D debe ser nulo, ya que si un punto situado un infinitésimo a la izquierda de A (o de D) tiene un movimiento vertical δ descendente, su correspondiente punto al

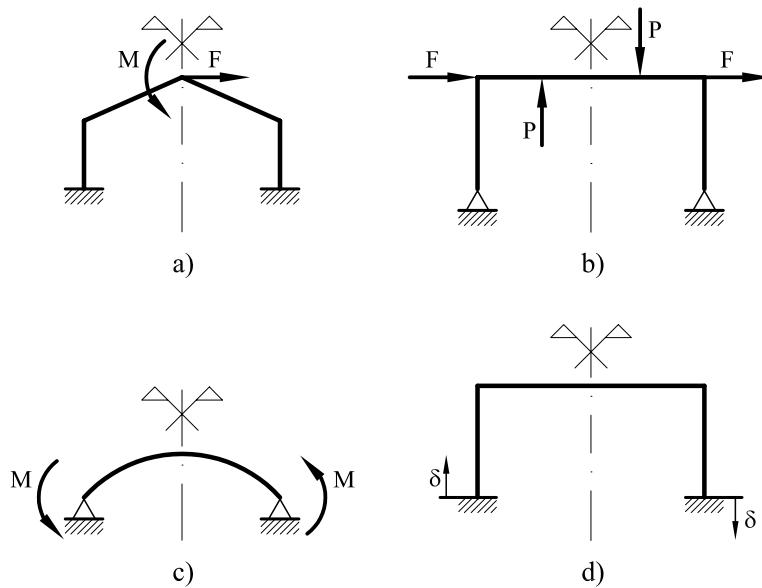


Fig. 11.5 Diversas estructuras antimétricas.

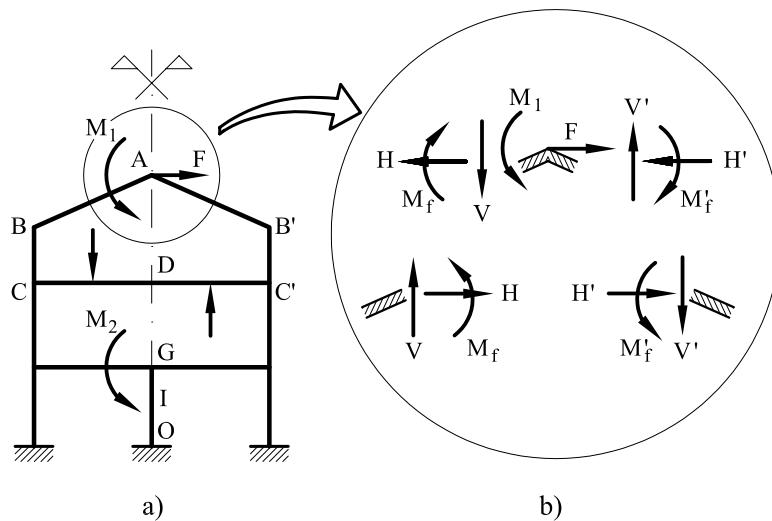


Fig. 11.6 Estructuras antimétricas

otro lado del eje de antimetría debe tener un movimiento vertical δ ascendente, lo cual es imposible.

Por lo que respecta al punto G , los esfuerzos cortantes a la izquierda y derecha de G deben ser iguales y del mismo signo (esto es, las fuerzas V iguales y de sentido contrario) y el esfuerzo axil en GO debe ser nulo.

Con todo lo anterior, la estructura de la figura 11.6 puede descomponerse tal como se representa en la figura 11.7. Como puede observarse, se ha sustituido la inercia de la barra GO por una inercia mitad. El hecho de que tal sustitución es correcta puede demostrarse a partir de la matriz de rigidez global de la estructura. Tal matriz de rigidez se estudiará más adelante.

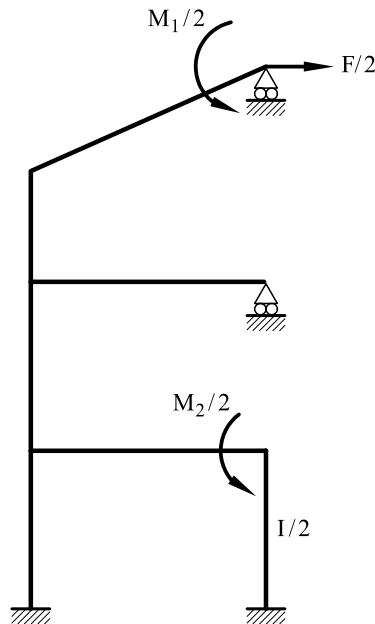


Fig. 11.7 Simplificaciones en una estructura antisimétrica

11.3 Métodos generales de cálculo de estructuras: compatibilidad y rigidez

Dentro del análisis estructural existen dos grandes grupos de métodos para determinar el estado tensodeformacional de las estructuras. El método de compatibilidad y el método de rigidez. En esta sección se dará una panorámica general sobre ambos métodos, ilustrándola con algún ejemplo. En los apartados siguientes se desarrollarán los fundamentos de ambas metodologías.

Para el método de compatibilidad, las incógnitas a determinar son los esfuerzos o reacciones hiperestáticas de la estructura. Es decir, dada una estructura h veces hiperestática, es posible convertir la estructura en isostática (isostática base) mediante la realización de h cortes en la misma y colocando en dichos puntos de corte los esfuerzos o reacciones hiperestáticas a determinar. Mediante las oportunas ecuaciones de compatibilidad de movimientos en los puntos de corte, se obtendrán los valores de las hiperestáticas. Considérese, por ejemplo, la estructura articulada de la figura 11.8a la cual es una vez hiperestática. Supóngase que se aísla la barra OA realizando el

oportuno corte. La incógnita hiperestática será N_{OA} y la ecuación correspondiente se obtendrá de imponer la compatibilidad de movimientos en O.

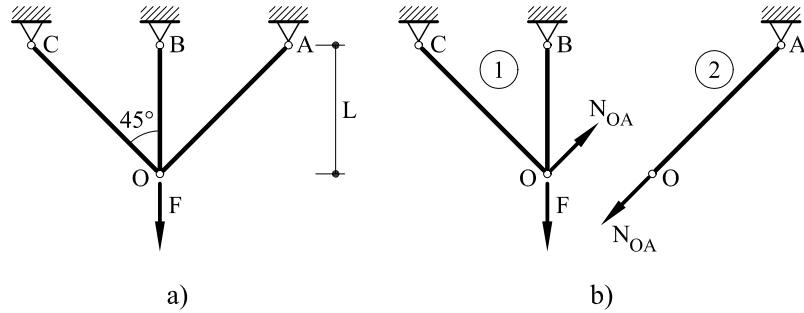


Fig. 11.8 Descomposición de una estructura hiperestática

Los esfuerzos en cada una de las barras valdrán:

$$N_{OC} = N_{OA} \quad (\text{tracción si } N_{OA} \text{ tiene el sentido de la figura})$$

$$N_{OB} = -N_{OA}\sqrt{2} + F$$

El movimiento del punto O en dirección OA de la estructura isostática base (estructura 1 de la Fig. 11.8b) valdrá, de acuerdo con el segundo teorema de Castigliano:

$$u_{OA} = \frac{\partial W}{\partial N_{OA}} = \frac{\partial}{\partial N_{OA}} \left[\frac{1}{2} \frac{N_{OC}^2 L_{OC}}{EA} + \frac{1}{2} \frac{N_{OB}^2 L_{OB}}{EA} \right]$$

y substituyendo en la expresión anterior los valores previamente obtenidos:

$$u_{OA} = \frac{\partial}{\partial N_{OA}} \left[\frac{1}{2} \frac{N_{OA}^2 L \sqrt{2}}{EA} + \frac{1}{2} \frac{(-N_{OA}\sqrt{2} + F)^2 L}{EA} \right] = \frac{L}{EA} [(2 + \sqrt{2})N_{OA} - F\sqrt{2}]$$

En la pieza OA el desplazamiento de O en dirección OA valdrá

$$u_{OA} = -\frac{N_{OA} L \sqrt{2}}{EA}$$

e igualando se obtiene el valor del esfuerzo hiperestático que se buscaba.

$$N_{OA} = F \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

Una vez obtenido el valor de la hiperestática, se determinan el resto de los esfuerzos:

$$\begin{aligned} N_{OC} &= F \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \\ N_{OB} &= -\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} F + F = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} F \end{aligned}$$

Por lo que respecta al método de rigidez, su punto de partida son los movimientos de los distintos nudos de la estructura. El grado de libertad de un nudo en una determinada dirección (normalmente coincidente con uno de los ejes de coordenadas o con un giro) indica la posibilidad de movimiento de dicho nudo en la dirección indicada. El número total de grados de libertad de una estructura será por tanto el número total de movimientos posibles de todos los nudos de la estructura. Así, en una estructura articulada plana, dado que cada nudo tiene dos grados de libertad (movimiento horizontal y vertical), el número de grados de libertad será igual a dos veces el número de nudos menos los movimientos coaccionados en los apoyos. Así, por ejemplo, la estructura de la figura 8.3 tiene $2 \times 5 - 3 = 7$ grados de libertad. La estructura de la figura 8.7 tiene $2 \times 6 - 3 = 9$ grados de libertad. Asimismo, la estructura hiperestática de la figura 8.5.1 tiene $2 \times 7 - 3 = 11$ grados de libertad. Para una estructura reticulada plana, el número de grados de libertad por nudo es de tres (dos traslaciones y un giro). El número total de grados de libertad será por lo tanto igual a tres veces el número de nudos menos el número de coacciones de apoyo. Es muy importante observar que el número de grados de libertad de una estructura es independiente de si es isostática o hiperestática, y en este segundo caso del número de veces h que lo sea.

Para ilustrar el método de rigidez considérese nuevamente la estructura de la figura 11.8. Dicha estructura tiene dos grados de libertad: el movimiento horizontal y el movimiento vertical del punto O . Se les denominará u_1 y u_2 respectivamente (Fig. 11.9).

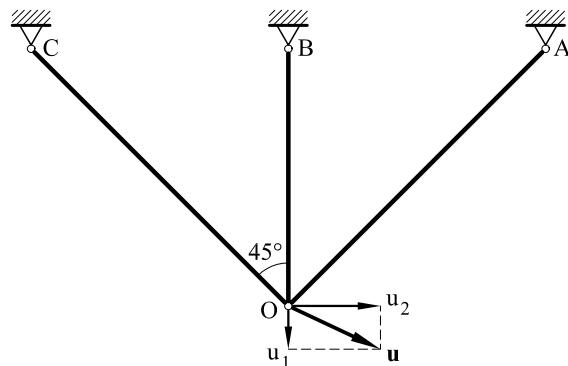


Fig. 11.9 Movimientos de una estructura

Los alargamientos de cada barra valdrán:

$$u_{OA} = u_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - u_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u_{OB} = u_1$$

$$u_{OC} = u_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + u_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

con lo que los esfuerzos axiles de cada barra serán

$$\begin{aligned}N_{OA} &= \frac{u_{OA}EA}{L_{OA}} = \frac{1}{2} \frac{EA}{L}(u_1 - u_2) \\N_{OB} &= \frac{EA}{L}u_1 \\N_{OC} &= \frac{1}{2} \frac{EA}{L}(u_1 + u_2)\end{aligned}$$

La energía elástica se escribirá por tanto:

$$W = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \left[(u_1 - u_2)^2 \frac{\sqrt{2}}{4} + u_1^2 + (u_1 + u_2)^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

y de acuerdo con el primer teorema de Castigiano, las derivadas parciales de W con respecto a u_1 y u_2 darán la fuerza horizontal y vertical aplicadas en O , es decir F y cero:

$$\begin{aligned}F &= \frac{\partial W}{\partial u_1} = \frac{EA}{L} \left[(u_1 - u_2) \frac{\sqrt{2}}{4} + u_1 + (u_1 + u_2) \frac{\sqrt{2}}{4} \right] \\0 &= \frac{\partial W}{\partial u_2} = \frac{EA}{L} \left[-(u_1 - u_2) \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 + (u_1 + u_2) \frac{\sqrt{2}}{4} \right]\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{L}{EA} \frac{2}{2 + \sqrt{2}} F \\u_2 &= 0\end{aligned}$$

por lo que sustituyendo en los valores de los esfuerzos

$$N_{OA} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F ; \quad N_{OB} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} F ; \quad N_{OC} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} F$$

Valores lógicamente idénticos a los obtenidos previamente.

11.4 Determinación de movimientos. Fórmulas de Navier-Bresse

Por lo visto hasta ahora, la determinación de los movimientos de los distintos puntos de corte en estructuras hiperestáticas constituye la base de los métodos de compatibilidad. En el Capítulo 7 se demostró el segundo teorema de Castigiano que, conjuntamente con el de la fuerza unidad, ha sido utilizado en los Capítulos 8, 9 y 10 para determinar los movimientos de cualquier punto. Seguidamente se van a exponer y desarrollar las fórmulas de Navier-Bresse como una tercera alternativa para hallar los

mencionados movimientos. Como fácilmente podrá comprobarse, constituyen una generalización a piezas cualesquiera de los teoremas de Mohr de piezas rectas. Se supondrá en primer lugar que la directriz Γ de la pieza coincide con la línea de centros de gravedad de las secciones rectas, aunque posteriormente, y para mayor generalidad, se supondrá que la directriz de la pieza no coincide necesariamente con el lugar geométrico de dichos centros de gravedad.

11.4.1 Movimiento relativo entre dos puntos

Supóngase la pieza de la figura 11.10, en la cual quiere determinarse el movimiento relativo del punto B respecto al punto A. En la pieza actuarán por una parte unas determinadas cargas, las cuales darán lugar a las correspondientes leyes de esfuerzos. Para cada punto, la relación entre dichos esfuerzos y las correspondientes deformaciones generalizadas viene dada por la expresión 7.96. Asimismo, cada sección puede sufrir otras deformaciones debidas a otras causas, tales como efectos térmicos, etc. A las deformaciones motivadas por dichas causas no tensionales se las designará por el superíndice nt .

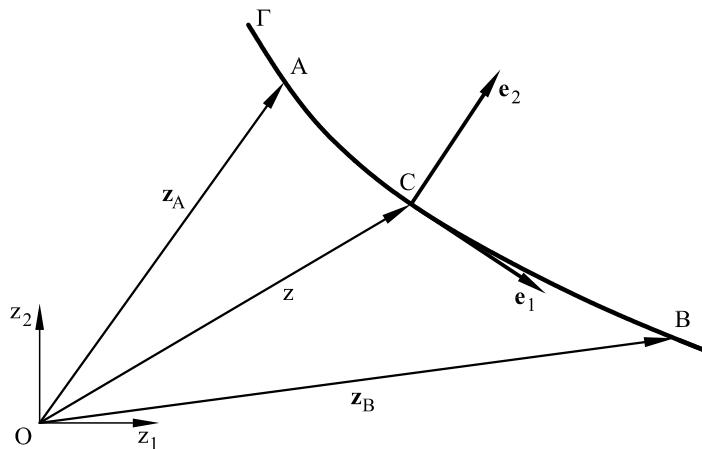


Fig. 11.10 Pieza en el plano

En tales condiciones, se pretende obtener:

$(u_1)_{AB}$: Movimiento relativo en la dirección z_1 del punto B respecto al punto A

$(u_2)_{AB}$: Movimiento relativo en la dirección z_2 del punto B respecto al punto A

φ_{AB} : Giro relativo del punto B respecto al punto A

Para ello supóngase una dovela cualquiera de longitud ds situada entre A y B, esto es en el punto C (Fig. 11.10). Las deformaciones generalizadas de dicha dovela debidas

a los esfuerzos vendrán dadas por 7.96, existiendo además unas deformaciones ϵ_1^{nt} , γ^{nt} y χ^{nt} debidas a causas no tensionales. Las deformaciones totales vendrán dadas por:

$$\boldsymbol{\Lambda}^t = \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Lambda}^{nt} \quad (11.1)$$

siendo

$$\boldsymbol{\Lambda}^t = [\epsilon_1^t, \gamma^t, \chi^t]^T \quad (11.2a)$$

las deformaciones generalizadas totales en la dovela,

$$\boldsymbol{\Lambda} = [\epsilon_1, \gamma, \chi]^T \quad (11.2b)$$

las deformaciones generalizadas debidas a los esfuerzos, y

$$\boldsymbol{\Lambda}^{nt} = [\epsilon_1^{nt}, \gamma^{nt}, \chi^{nt}]^T \quad (11.2c)$$

las deformaciones generalizadas debidas a causas no tensionales.

Debido a las anteriores deformaciones, los movimientos relativos del punto B respecto al punto C valdrán (Fig. 11.11)

$$(d\mathbf{u})_{AB} = \begin{bmatrix} (du_1)_{AB} \\ (du_2)_{AB} \end{bmatrix} = [\epsilon_1^t \mathbf{e}_1 + \gamma^t \mathbf{e}_2 + \chi^t \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})] ds \quad (11.3a)$$

$$d\varphi_{AB} = \chi^t ds \quad (11.3b)$$

y substituyendo en las anteriores expresiones los valores dados por 11.2 y 7.96 se obtiene:

$$(d\mathbf{u})_{AB} = \left[\left(\frac{N}{EA} + \epsilon_1^{nt} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{Q}{kGA} + \gamma^{nt} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z}) \right] ds \quad (11.4a)$$

$$d\varphi_{AB} = \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) ds \quad (11.4b)$$

Llamando α al ángulo que forma el vector unitario \mathbf{e}_1 con el eje z_1 , e integrando entre A y B , las anteriores expresiones pueden escribirse

$$\begin{aligned} (u_1)_{AB} &= \int_A^B \left(\frac{N}{EA} + \epsilon_1^{nt} \right) \cos \alpha ds - \int_A^B \left(\frac{Q}{kGA} + \gamma^{nt} \right) \sin \alpha ds \\ &\quad - \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) (z_{2B} - z_2) ds \end{aligned} \quad (11.5a)$$

$$\begin{aligned} (u_2)_{AB} &= \int_A^B \left(\frac{N}{EA} + \epsilon_1^{nt} \right) \sin \alpha ds + \int_A^B \left(\frac{Q}{kGA} + \gamma^{nt} \right) \cos \alpha ds \\ &\quad + \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) (z_{1B} - z_1) ds \end{aligned} \quad (11.5b)$$

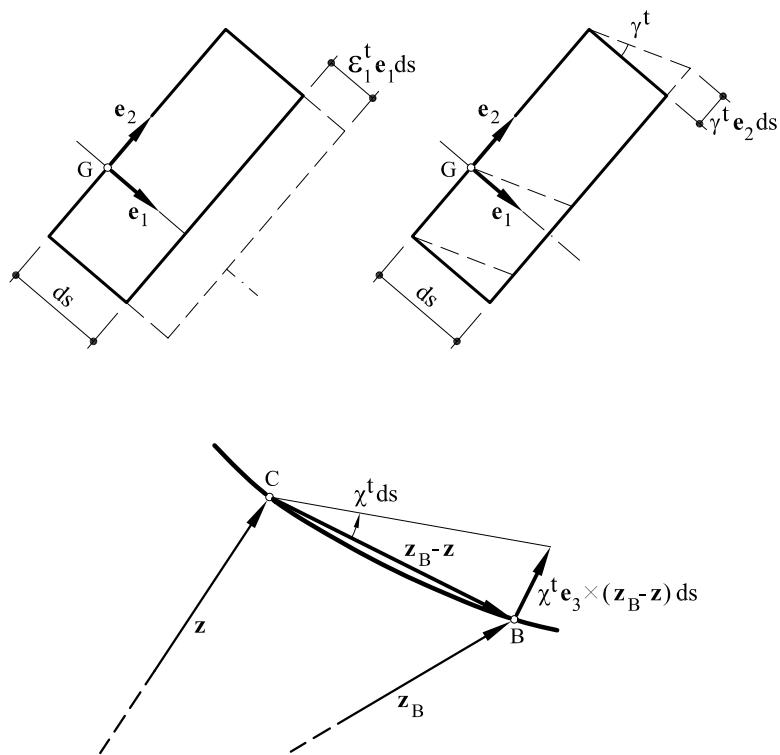


Fig. 11.11 Movimientos de la dovela C y del punto B

$$\varphi_{AB} = \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) ds \quad (11.5c)$$

Las anteriores expresiones permiten obtener los movimientos relativos del punto *B* respecto del punto *A*. Para obtener los movimientos totales del punto *B* es preciso realizar algunas correcciones a las expresiones anteriores, al igual que cuando se estudiaban los teoremas de Mohr.

Asimismo, en 11.5a y 11.5b y prescindiendo de las deformaciones no tensionales, la primera integral representa la contribución del esfuerzo axil al movimiento, mientras que la segunda da la contribución del esfuerzo cortante. Tal como se ha indicado en repetidas ocasiones, en general dichas contribuciones son menores que la debida al momento flector (tercera integral). En el Capítulo 9, correspondiente a vigas simples, se analizó la influencia del esfuerzo cortante, llegándose a la conclusión de que su importancia es significativa únicamente en piezas cortas (relación luz/canto pequeña). Dichas conclusiones siguen siendo válidas en el caso de piezas de forma cualquiera. Por lo que respecta al esfuerzo axil, su contribución puede ser importante en piezas alargadas y sometidas a esfuerzos axiles importantes, como por ejemplo las pilas de puente de luz elevada y altura también grande. Hay que tener presente, sin embargo,

que en tales casos pueden aparecer efectos de inestabilidad (pandeo) que será preciso considerar.

Las anteriores expresiones pueden completarse para aquellos casos que la directriz Γ' no coincide con la línea de centros de gravedad de las secciones rectas. Para tales casos, el punto de partida lo constituirá la expresión 7.101. Asimismo, y al objeto de no repetir la demostración previamente realizada, se utilizará una formulación compacta basada en la notación matricial.

La expresión 11.1 se reescribirá

$$(\boldsymbol{\Lambda}')^t = \boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Lambda}'^{nt} \quad (11.6)$$

Substituyendo $\boldsymbol{\Lambda}'$ por su valor dado por 7.101 y 7.102

$$(\boldsymbol{\Lambda}')^t = \mathbf{D}'\mathbf{R}' + \boldsymbol{\Lambda}'^{nt} \quad (11.7)$$

El diferencial de desplazamiento entre B y A vendrá dado por

$$(d\mathbf{u}')_{AB} = [\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}'_B - \mathbf{z}')] (\boldsymbol{\Lambda}')^t ds' \quad (11.8)$$

y llamando $\mathbf{e}_{23} = [\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}'_B - \mathbf{z}')] e$ introduciendo 11.7 en 11.8 se obtiene:

$$(d\mathbf{u}')_{AB} = \mathbf{e}_{23} (\mathbf{D}'\mathbf{R}' + \boldsymbol{\Lambda}'^{nt}) ds' \quad (11.9)$$

e integrando entre A y B

$$(\mathbf{u}')_{AB} = \int_A^B \mathbf{e}_{23} (\mathbf{D}'\mathbf{R}' + \boldsymbol{\Lambda}'^{nt}) ds' \quad (11.10a)$$

La matriz \mathbf{e}_{23} es una matriz de 2×3 . Las filas corresponden a las componentes de \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y $\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}'_B - \mathbf{z}')$ según los vectores unitarios globales \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 .

Análogamente para el giro

$$\varphi'_{AB} = \int_A^B \left[\frac{e(s)}{EA} N' + \frac{M'_f}{EI} + \chi'^{nt} \right] ds' \quad (11.10b)$$

Las expresiones 11.10 puede ponerse de forma explícita escribiendo:

$$(u'_1)_{AB} = \int_A^B g_1 \cos \alpha ds' - \int_A^B g_2 \sin \alpha ds' - \int_A^B g_3 (z'_{2B} - z'_2) ds' \quad (11.11a)$$

$$(u'_2)_{AB} = \int_A^B g_1 \sin \alpha ds' + \int_A^B g_2 \cos \alpha ds' + \int_A^B g_3 (z'_{1B} - z'_1) ds' \quad (11.11b)$$

$$\varphi'_{AB} = \int_A^B g_3 ds' \quad (11.11c)$$

siendo

$$g_1 = \left(\frac{1}{EA} + \frac{e^2(s)}{EI} \right) N' + \frac{e(s)}{EI} M'_f + \epsilon_1'^{nt} \quad (11.12a)$$

$$g_2 = \frac{Q'}{kGA} + \gamma'^{nt} \quad (11.12b)$$

$$g_3 = \frac{e(s)}{EA} N' + \frac{M'_f}{EI} + \chi'^{nt} \quad (11.12c)$$

Las expresiones 11.11 son las equivalentes a las 11.5 para el caso en que la directriz no coincide con la línea de centros de gravedad.

♣ **Problema resuelto P11.1** Determinar los movimientos relativos del punto B respecto al punto A (al ser nulos los movimientos de A, los movimientos de B obtenidos serán los totales) en la estructura que se representa en la figura P11.1.1. La directriz es un cuarto de círculo de radio R.

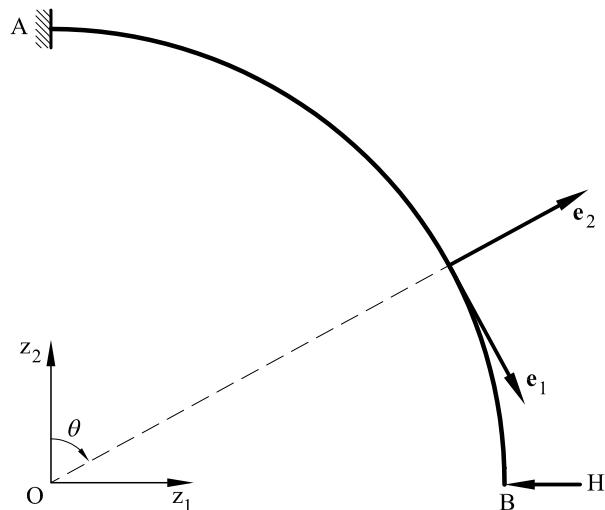


Fig. P11.1.1

Solución

Al no existir deformaciones, debido a causas no tensionales, las deformaciones generalizadas Λ^{nt} serán idénticamente nulas.

Por otro lado, las leyes de esfuerzos valdrán

$$N = -H \cos \theta$$

$$Q = -H \sin \theta$$

$$M_f = -HR \cos \theta$$

Para determinar los movimientos del punto B, se puede partir alternativamente de las expresiones 11.3, 11.4 o bien 11.5. En este caso se partirá de la primera de ellas.

Los vectores base \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 se escriben:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= \sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2\end{aligned}$$

Asimismo, las deformaciones generalizadas se escriben:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{N}{EA} = -\frac{H}{EA} \cos \theta \\ \gamma &= \frac{Q}{kGA} = -\frac{H}{kGA} \sin \theta \\ \chi &= \frac{M_f}{EI} = -\frac{HR}{EI} \cos \theta\end{aligned}$$

Por lo cual, dado que de acuerdo con 11.3

$$d\mathbf{u}_{AB} = [\epsilon_1 \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \chi \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})] ds$$

Sustituyendo (y dado que en este caso $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{i}_3$)

$$\begin{aligned}d\mathbf{u}_{AB} &= -\frac{H}{EA} \cos \theta (\cos \theta \mathbf{i}_1 - \sin \theta \mathbf{i}_2) \\ &\quad -\frac{H}{kGA} \sin \theta (\sin \theta \mathbf{i}_1 + \cos \theta \mathbf{i}_2) \\ &\quad -\frac{HR}{EI} \cos \theta \mathbf{i}_3 \times [R \mathbf{i}_1 - (R \sin \theta \mathbf{i}_1 + R \cos \theta \mathbf{i}_2)] R d\theta\end{aligned}$$

Integrando y reorganizando términos

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{AB} &= \int_0^{\pi/2} d\mathbf{u}_{AB} = -0,7854 RH \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{kGA} + \frac{R^2}{EI} \right) \mathbf{i}_1 \\ &\quad + 0,5 RH \left(\frac{1}{EA} - \frac{1}{kGA} - \frac{R^2}{EI} \right) \mathbf{i}_2\end{aligned}$$

lo cual proporciona el desplazamiento horizontal y vertical de B.

Por lo que respecta al giro,

$$\varphi_{AB} = \int_0^{\pi/2} \chi R d\theta = -\frac{R^2}{EI} \int_0^{\pi/2} H \cos \theta d\theta = -\frac{HR^2}{EI}$$

Como puede comprobarse, los valores anteriores con los obtenidos en el problema resuelto P9.7

11.4.2 Movimientos totales de un punto

Los movimientos totales de un punto cualquiera B pueden obtenerse a partir de 11.5 (o bien de 11.11) siempre que se conozcan los movimientos del punto A , por lo que si \mathbf{u}_A y φ_A representan respectivamente los desplazamientos y giro de A , el movimiento de B se escribe:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \varphi_A \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A) + \mathbf{u}_{AB} \quad (11.13a)$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} \quad (11.13b)$$

expresiones que desarrolladas:

$$\begin{aligned} u_{1B} &= u_{1A} - \varphi_A(z_{2B} - z_{2A}) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} + \epsilon_1^{nt} \right) \cos \alpha \, ds \\ &\quad - \int_A^B \left(\frac{Q}{kGA} + \gamma^{nt} \right) \sin \alpha \, ds - \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) (z_{2B} - z_2) \, ds \end{aligned} \quad (11.14a)$$

$$\begin{aligned} u_{2B} &= u_{2A} + \varphi_A(z_{1B} - z_{1A}) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} + \epsilon_1^{nt} \right) \sin \alpha \, ds \\ &\quad + \int_A^B \left(\frac{Q}{kGA} + \gamma^{nt} \right) \cos \alpha \, ds + \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) (z_{1B} - z_1) \, ds \end{aligned} \quad (11.14b)$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_A^B \left(\frac{M_f}{EI} + \chi^{nt} \right) \, ds \quad (11.14c)$$

Las expresiones anteriores son conocidas con el nombre de *fórmulas de Navier-Bresse* y permiten obtener los movimientos de todos los puntos de la estructura. Pueden presentarse dos casos:

a) Existe un punto en el que todos los movimientos son conocidos (en general un empotramiento). En tal caso, los movimientos totales de cualquier punto son iguales a los relativos de dicho punto respecto al punto fijo, por lo que los mencionados movimientos se determinan sin problema a partir de 11.5.

b) No existe ningún punto en que todos los movimientos sean conocidos. Bajo esta circunstancia, si B es el punto en el que se desean obtener los movimientos, las ecuaciones a aplicar serán las 11.14, siendo A en principio cualquier otro punto, aunque en la práctica suele elegirse un apoyo acerca del cual se conocen algunos movimientos (usualmente u_{1A} y u_{2A}). Los movimientos desconocidos de A que intervienen en 11.14 se determinan a partir de condiciones cinemáticas de algún otro punto D (que puede coincidir con el B). Así, por ejemplo, si en la estructura de la figura 11.12, se quieren determinar los movimientos de B , las ecuaciones a aplicar serán:

$$u_{1B} = u_{1A} - \varphi_A(z_{2B} - z_{2A}) + (u_1)_{AB} \quad (11.15a)$$

$$u_{2B} = u_{2A} + \varphi_A(z_{1B} - z_{1A}) + (u_2)_{AB} \quad (11.15b)$$

en donde $(u_1)_{AB}$ y $(u_2)_{AB}$ se determinan a partir de 11.5, y además $u_{1A} = u_{1B} = 0$. Sin embargo, el giro en A es desconocido. Para obtenerlo basta imponer la condición de que el desplazamiento vertical de D es cero:

$$u_{2D} = 0 = \varphi_A(z_{1D} - z_{1A}) + (u_2)_{AD} \quad (11.16)$$

en donde nuevamente $(u_2)_{AD}$ se obtiene a partir de 11.5. A partir de la ecuación anterior, es posible despejar φ_A , que al ser sustituido en 11.15 proporcionará el valor del desplazamiento horizontal y vertical en B tal como se buscaba. Es decir:

$$u_{1B} = (u_2)_{AD} \frac{z_{2B} - z_{2A}}{z_{1D} - z_{1A}} + (u_1)_{AB} \quad (11.17a)$$

$$u_{2B} = -(u_2)_{AD} \frac{z_{1B} - z_{1A}}{z_{1D} - z_{1A}} + (u_2)_{AB} \quad (11.17b)$$

Las fórmulas de Navier-Bresse proporcionan como consecuencia una alternativa muy útil e intuitiva en la determinación de movimientos.

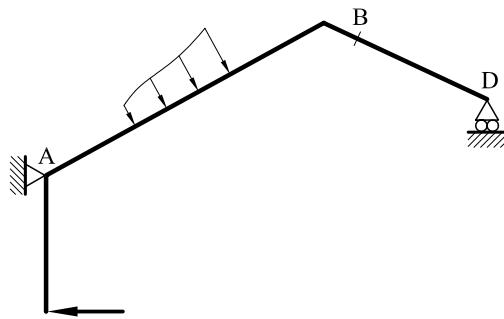


Fig. 11.12 Estructura en la que se determina los movimientos del punto B

♣ **Problema resuelto P11.2** Mediante la utilización de las fórmulas de Navier-Bresse, determinar el movimiento horizontal del punto B en el pórtico de la figura P11.2.1. A fin de simplificar los cálculos, se considera únicamente la deformación debida al momento flector. Todas las barras tienen igual producto EI .

Solución

De acuerdo con los sentidos marcados en la figura P11.2.2, las leyes de momentos flectores valdrán

$$M_f|_B^C = \frac{pa}{2}(a - s)$$

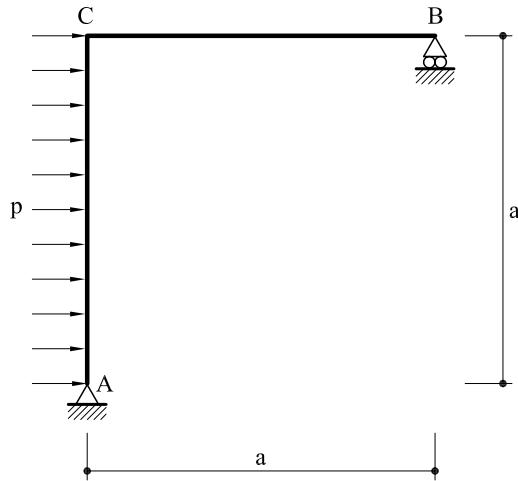


Fig. P11.2.1 Estructura isostática

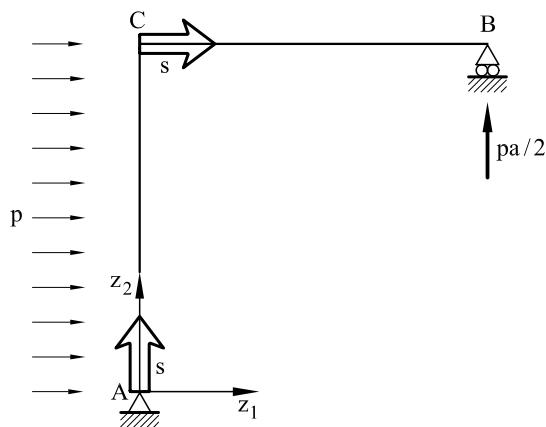


Fig. P11.2.2 Reacciones y ejes

$$M_f|_C^A = \frac{pa^2}{2} - \frac{p}{2}(a-s)^2$$

a) Movimientos relativos del punto *B* respecto a *A*.

De acuerdo con las expresiones 11.5:

$$(u_1)_{AB} = - \int_C^B \frac{M_f}{EI} (a-s) ds - \int_A^C \frac{M_f}{EI} (a-s) ds = -\frac{pa^4}{8EI}$$

$$(u_2)_{AB} = \int_C^B \frac{M_f}{EI} (a - s) ds + \int_A^C \frac{M_f}{EI} ads = \frac{pa^4}{2EI}$$

b) Giro del punto A

Dado que el movimiento vertical del punto B debe ser nulo,

$$u_{2B} = 0 = u_{2A} + \varphi_A a + (u_2)_{AB}$$

de donde, dado que $u_{2A} = 0$, despejando φ_A :

$$\varphi_A = -\frac{pa^3}{2EI}$$

por lo cual, y dado que

$$u_{1B} = u_{1A} - \varphi_A a + (u_1)_{AB}$$

sustituyendo

$$u_{1B} = -\left(-\frac{pa^3}{2EI}\right)a - \frac{pa^4}{8EI} = \frac{3}{8EI}pa^4$$

expresión que proporciona el valor del desplazamiento horizontal del punto B .

11.5 El método de compatibilidad

11.5.1 Planteamiento

Considérese una estructura h veces hiperestática, tal como la representada en la figura 11.13. Se trata en dicha estructura de determinar las reacciones en los apoyos, así como las leyes de esfuerzos en todas las barras. Para ello, el primer paso es convertir la estructura isostática, dándole el número suficiente de cortes y colocando en los mismos unos esfuerzos o reacciones incógnita. A la nueva estructura así obtenida con todas las cargas que en ella actúan (externas e hiperestáticas) se la denomina *isostática base*.

En función de las cargas y de las incógnitas hiperestáticas, es posible determinar (utilizando cualquiera de los métodos estudiados: Navier-Bresse, Castigliano y fuerza unidad) el movimiento relativo entre ambos labios del corte para los cortes tipo 2 (Fig. 11.13) o los absolutos para los cortes tipo 1 correspondientes a los apoyos. De la anulación de cada uno de los anteriores movimientos se obtiene una ecuación. En total se podrán formular tantas ecuaciones como incógnitas hiperestáticas aparecen en la solución del problema.

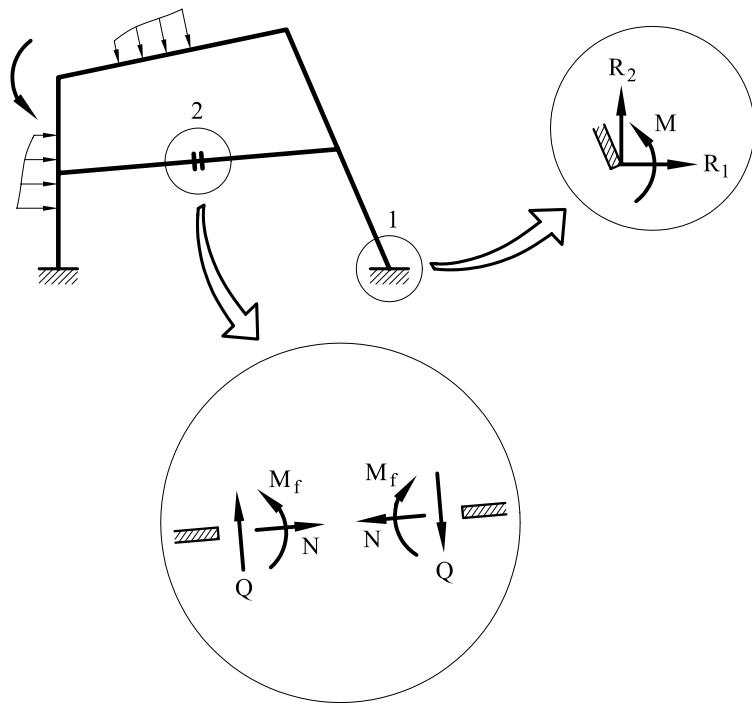


Fig. 11.13 Isostática base de una estructura hiperestática

Una serie de ejemplos ilustrarán el método de compatibilidad. En todos ellos y a efectos de simplicidad, se considerará en las barras que trabajan a flexión únicamente la energía de deformación correspondiente al momento flector.

♣ **Problema resuelto P11.3** Determinar, utilizando las fórmulas de Navier-Bresse, las leyes de esfuerzos en la estructura hiperestática representada en la figura P11.3.1.

Solución

Se tomará como incógnita hiperestática la reacción horizontal del punto *B*. Interesa por lo tanto hallar el movimiento horizontal de este punto para igualarlo a cero (Fig. P11.3.2).

De acuerdo con 11.14 y 11.5:

$$u_{1B} = -5,5\varphi_A - \int_A^B \frac{M_f}{EI} (5,5 - z_2) ds \quad (a)$$

y para determinar φ_A será preciso imponer la condición de que el desplazamiento vertical

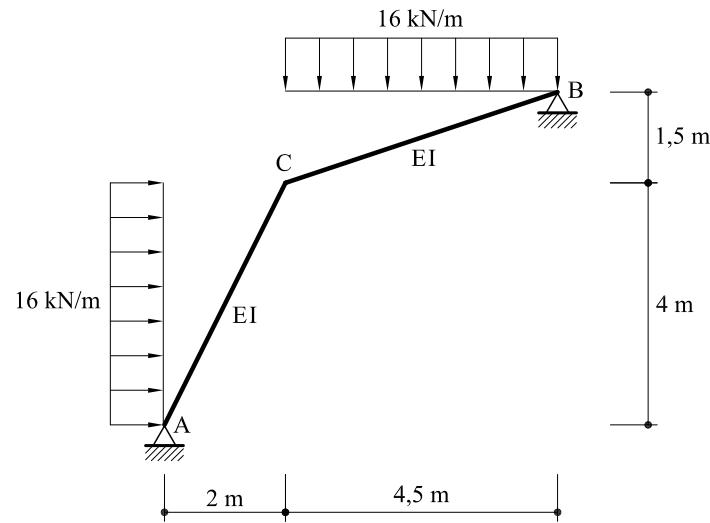
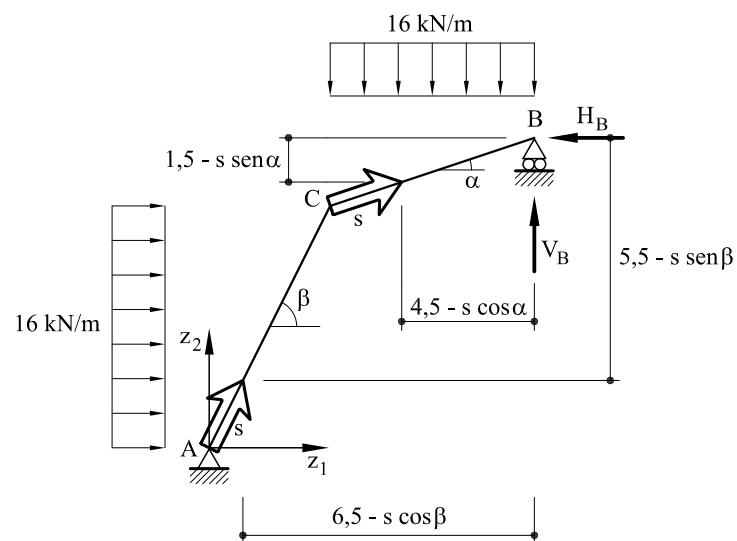


Fig. P11.3.1 Estructura correspondiente al problema resuelto P11.3

Fig. P11.3.2 Incógnita hiperestática H_B para el problema resuelto P11.3

del punto B sea nulo, es decir

$$u_{2B} = 0 = 6,5\varphi_A + \int_A^B \frac{M_f}{EI}(6,5 - z_1)ds \quad (b)$$

Las leyes de momentos flectores serán

$$M_f|_B^C = V_B(4, 5 - s \cos \alpha) + H_B(1, 5 - s \sin \alpha) - 16(4, 5 - s \cos \alpha)^2 \frac{1}{2} \quad (c1)$$

$$\begin{aligned} M_f|_C^A = & V_B(6, 5 - s \cos \beta) + H_B(5, 5 - s \sin \beta) - 16 \times 4, 5 \left(\frac{4, 5}{2} + 2 - s \cos \beta \right) \\ & - 16(4 - s \sin \beta)^2 \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (c2)$$

siendo por equilibrio global $V_B = -0,8462H_B + 66,77$.

Introduciendo las anteriores expresiones en b se obtiene:

$$0 = 6,5\varphi_A + \frac{1}{EI}(-78723,6 + 1688V_B + 997,6H_B)$$

es decir:

$$EI\varphi_A = -5228,33 + 66,28H_B \quad (d)$$

y substituyendo en la expresión a

$$u_{1B} = 0 = \frac{5,5}{EI}(5228,33 - 66,28H_B) + (50241,2 - 997,6V_B - 643,2H_B)\frac{1}{EI}$$

es decir, resolviendo en H_B

$$H_B = 75,73 \text{ kN}$$

y por lo tanto, $V_B = 2,69 \text{ kN}$

Conocidos los anteriores valores, es posible determinar las leyes de esfuerzos, las otras reacciones así como las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles. En base al equilibrio global de la estructura se puede escribir:

- Reacción horizontal en A : $H_A = 11,73 \text{ kN}$ (fuerza dirigida hacia la derecha).
- Reacción vertical en A : $V_A = 69,31 \text{ kN}$ (fuerza dirigida hacia arriba)

Sustituyendo en $c1$ y $c2$ los valores de H_B y V_B obtenidos previamente se obtienen las leyes de momentos flectores en toda la estructura.

Asimismo, puede determinarse la expresión analítica de las leyes de esfuerzos cortantes y esfuerzos axiles.

En la figura P11.3.3 se hallan representadas las leyes de esfuerzos así como las reacciones.

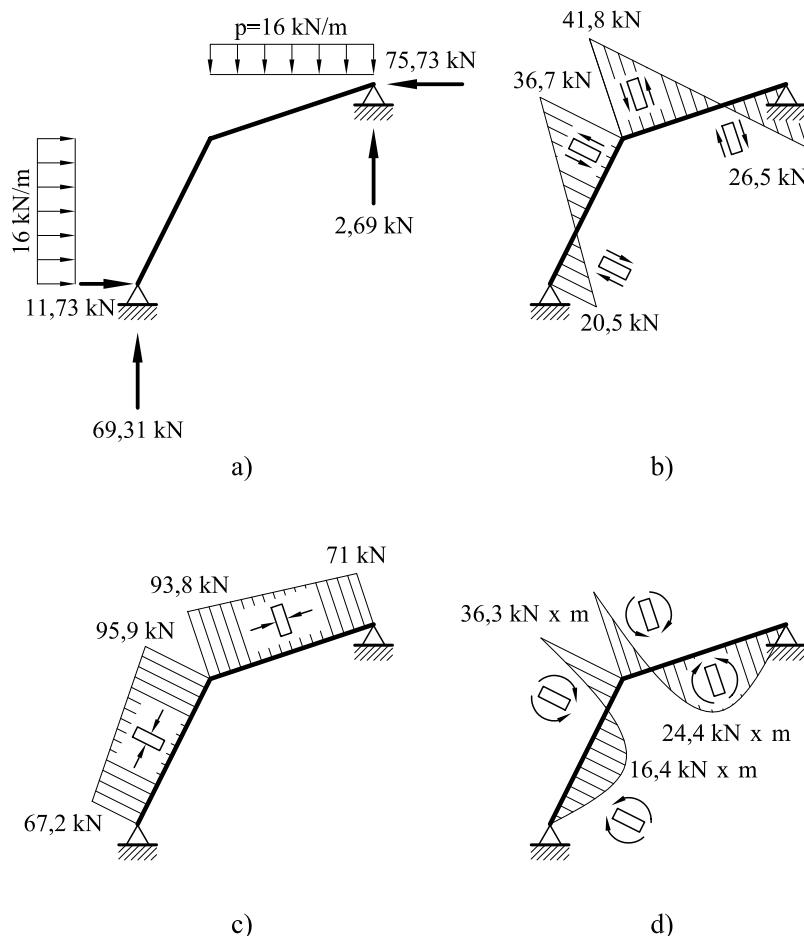


Fig. P11.3.3 Reacciones y leyes de esfuerzos para el problema resuelto P11.3.a Reacciones, b) Leyes de esfuerzos cortantes, c) Ley de esfuerzos axiles, d) Ley de momentos flectores.

♣ **Problema resuelto P11.4** Utilizando el teorema de Castigiano, determinar las leyes de esfuerzos del pórtico de la figura P11.4.1.

Solución

La estructura es una vez hiperestática. Lo más directo en este caso sería tomar como incógnita hiperestática bien el momento reacción en C , bien la reacción vertical en A . Sin embargo, y a fin de ilustrar un camino diferente, se tomará como incógnita hiperestática el momento flector en B , M_{fB} (Fig. P11.4.2).

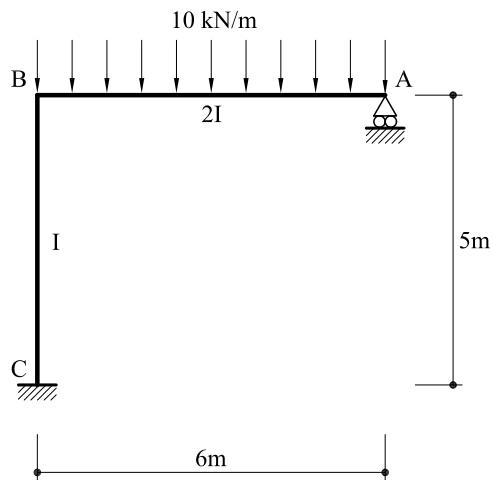
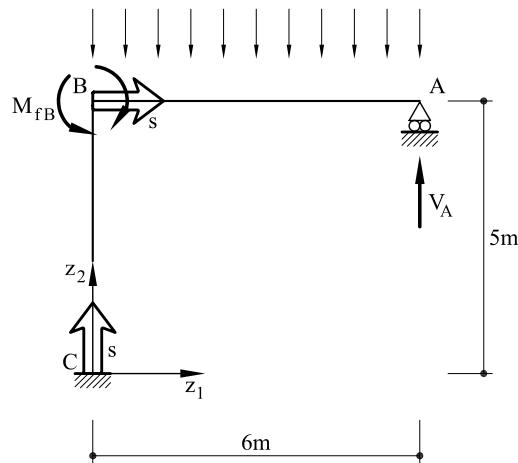


Fig. P11.4.1 Pórtico del problema resuelto P11.4

Fig. P11.4.2 Incógnita hiperestática M_{fB} para el problema resuelto P11.4

En función de M_{fB} la reacción V_A vale

$$V_A = -\frac{M_{fB}}{6} + 30 \quad (a)$$

Las leyes de momentos flectores valdrán:

$$M_f|_A^B = V_A(6-s) - p \frac{(6-s)^2}{2} = \left(-\frac{M_{fB}}{6} + 30\right)(6-s) - \frac{10(6-s)^2}{2} \quad (b1)$$

$$M_f|_B^C = 6V_A - p \frac{6^2}{2} = \left(-\frac{M_{fB}}{6} + 30\right) \times 6 - 180 \quad (b2)$$

y las derivadas respecto a M_{fB}

$$\frac{\partial M_f|_A^B}{\partial M_{fB}} = -\frac{6-s}{6} \quad ; \quad \frac{\partial M_f|_B^C}{\partial M_{fB}} = -1 \quad (c)$$

El giro relativo entre ambos labios del corte dado en B debe ser nulo, por lo que

$$0 = \int_0^6 M_f|_A^B \frac{\partial M_f|_A^B}{\partial M_{fB}} \frac{ds}{2EI} + \int_0^5 M_f|_B^C \frac{\partial M_f|_B^C}{\partial M_{fB}} \frac{ds}{EI} \quad (d)$$

Introduciendo en d las expresiones b y c se obtiene el valor del momento flector en B: $M_{fB} = 7,50 \text{ kN} \times m$. Conocido el valor de la incógnita hiperestática, se dibujan las reacciones y leyes de esfuerzos (Fig. P11.4.3).

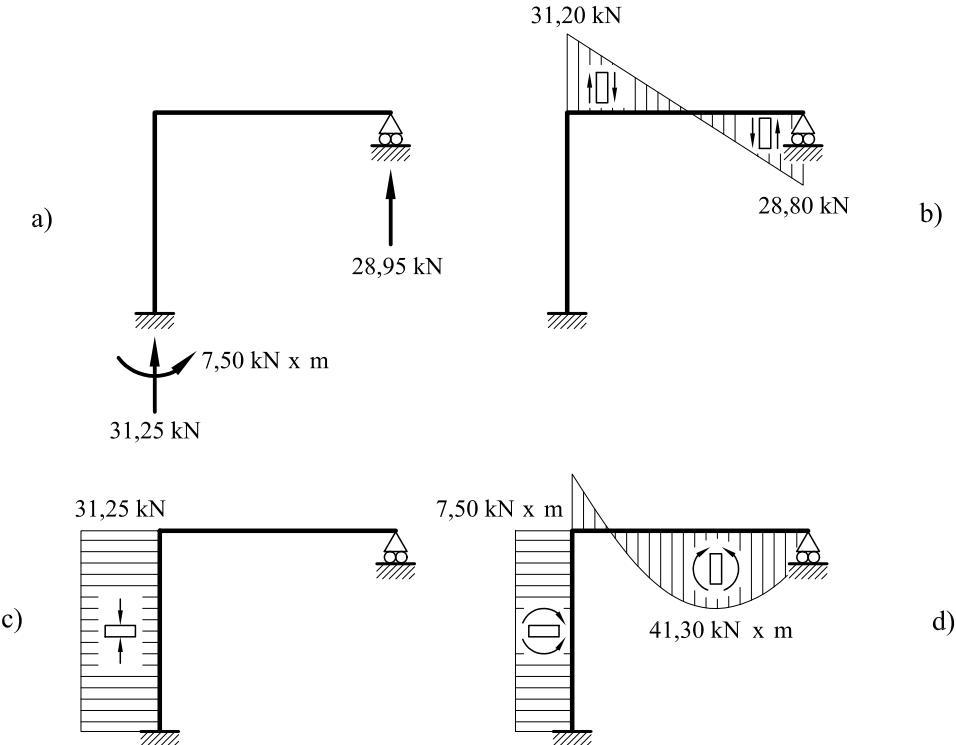


Fig. P11.4.3 Reacciones y leyes de esfuerzos para el problema resuelto P11.4.a
Reacciones, b) leyes de esfuerzos cortantes, c) ley de esfuerzos axiles,
d) ley de momentos flectores.

♣ **Problema resuelto P11.5** Aplicando las fórmulas de Navier-Bresse y teniendo en cuenta la simetría de la estructura, determinar las leyes de esfuerzos en el pórtico representado en la figura P11.5.1.

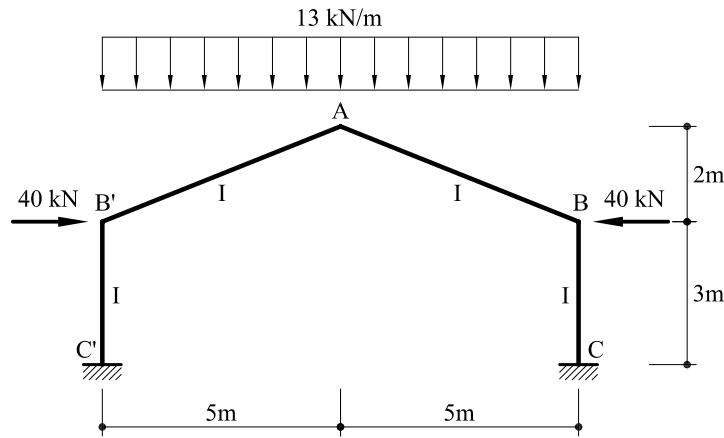


Fig. P11.5.1 Estructura correspondiente al problema resuelto P11.5

Solución

La estructura propuesta es tres veces hiperestática, aunque debido a la simetría dicho grado de hiperestatismo se reduce a dos, al ser las reacciones verticales conocidas: $V_C = V_{C'} = 13 \times 5 = 65 \text{ kN}$. Se tomarán como incógnitas hiperestáticas la reacción horizontal y el momento en C . Al mismo tiempo, el punto A no gira debido a la simetría, por lo que puede considerarse únicamente la mitad de la estructura, tal como indica la figura P11.5.2. Nótese que en la estructura original el punto A puede desplazarse verticalmente, aunque no el C . Por lo tanto, en la estructura modificada el desplazamiento vertical de C será igual y de sentido contrario al desplazamiento vertical de A en la estructura real. Las leyes de momentos flectores valdrán:

$$M_f|_C^B = M_C - H_C(3 - s) \quad (a.1)$$

$$M_f|_A^B = M_C - H_C(5 - s \sin \alpha) + 65(5 - s \cos \alpha) - 40(2 - s \sin \alpha) - 13 \frac{(5 - s \cos \alpha)^2}{2} \quad (a.2)$$

Las condiciones cinemáticas a imponer serán de giro nulo en C y desplazamiento horizontal de C también nulo.

Al ser $\varphi_A = 0$, las expresiones 11.14a y 11.14c se escriben:

$$u_{1C} = 0 = - \int_0^3 M_f|_B^C [0 - (3 - s)] \frac{ds}{EI} - \int_0^{5,3852} M_f|_A^B [0 - (5 - s \sin \alpha)] \frac{ds}{EI} \quad (b)$$

$$\varphi_C = 0 = \int_0^3 M_f|_B^C \frac{ds}{EI} + \int_0^{5,3852} M_f|_A^B \frac{ds}{EI} \quad (c)$$

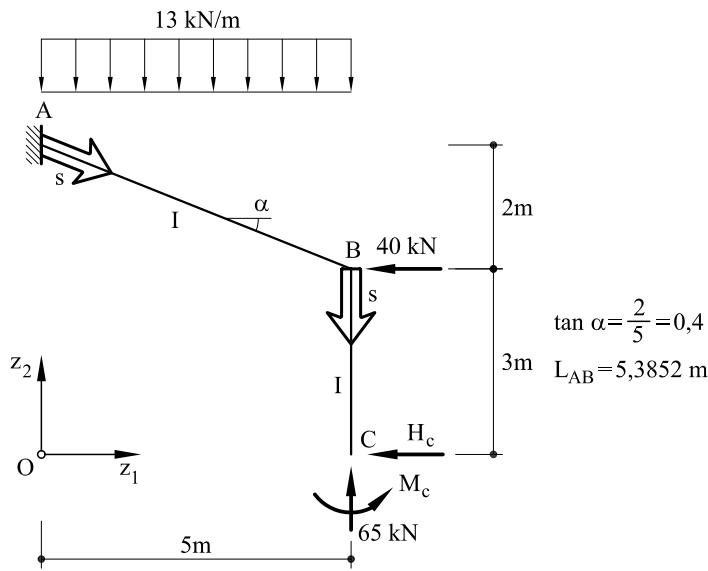


Fig. P11.5.2 Incógnitas hiperestáticas correspondientes al problema resuelto P11.5.2

Introduciendo las expresiones a en b y c queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en M_c y H_c . Resolviendo dicho sistema:

$$M_c = 33,9 \text{ kN} \times m \quad ; \quad H_c = 25,1 \text{ kN}$$

En la figura P11.5.3 pueden verse representadas las reacciones y las leyes de esfuerzos.

♣ **Problema resuelto P11.6** Determinar las leyes de momentos flectores en el anillo de radio R de la figura P11.6.1.

Solución

La estructura tiene tres ejes de simetría: OC , OA y OB . Por lo tanto, los giros y los esfuerzos cortantes son conocidos en los puntos de corte de dichos ejes con el anillo (Fig. P11.6.2a). Es decir,

$$\varphi_A = \varphi_{A'} = \varphi_B = \varphi_{B'} = \varphi_C = \varphi_{C'} = 0$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = F/2$$

$$Q_{A'} = Q_{B'} = Q_{C'} = 0$$

La estructura puede por tanto separarse en tres partes, tal como indica la figura P11.6.2b, en donde N puede determinarse por equilibrio y M es la incógnita hiperestática.

$$N = \frac{F}{2 \sin 60} = 0,5774F \quad (a)$$

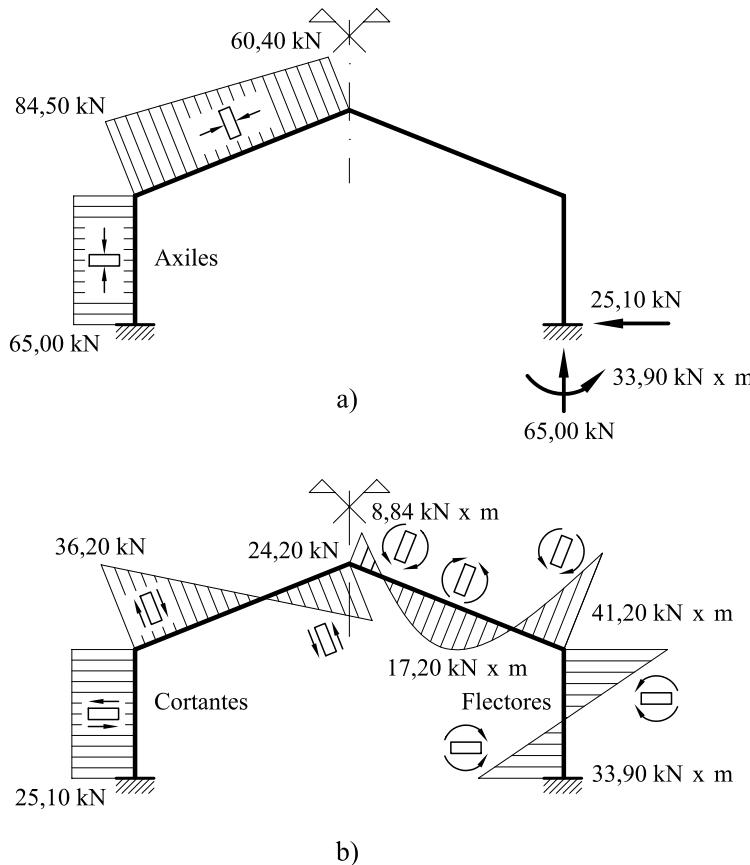


Fig. P11.5.3 Leyes de esfuerzos y reacciones de la estructura del problema resuelto P11.5

El momento M se determinará imponiendo la condición de que el giro en el punto C' sea nulo (Fig. P11.6.2c). Las leyes de momentos flectores y su derivada respecto a M valdrán

$$\begin{aligned} M_f &= M - NR[1 - \cos(60 - \theta)] \\ \frac{\partial M_f}{\partial M} &= 1 \end{aligned} \quad (b)$$

por lo que

$$\varphi_{C'} = 0 = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/3} M_f R d\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/3} \{M - 0,5774FR[1 - \cos(60 - \theta)]\} R d\theta = 0 \quad (c)$$

de donde integrando y despejando $M = 0,09989FR$.

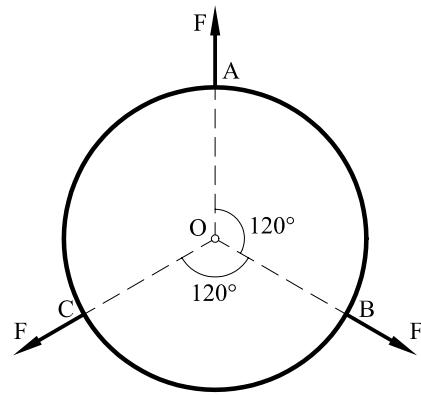


Fig. P11.6.1 Anillo correspondiente al problema resuelto P11.6.

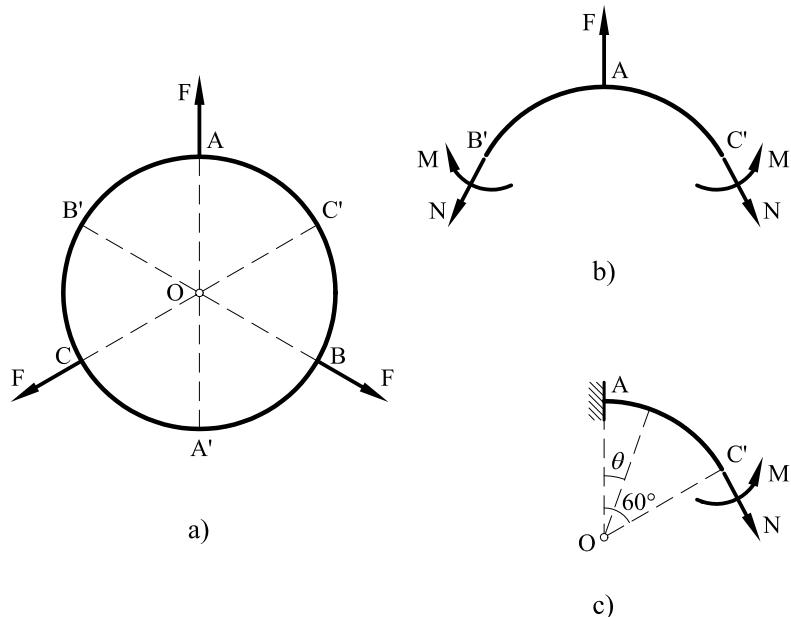


Fig. P11.6.2 a) Ejes de simetría, b) separación de un tercio de la estructura, c) esquema de cálculo.

Una vez conocido el valor del momento M , a partir de b la expresión de la ley de momentos flectores vale

$$M_f = FR[-0,4775 + 0,5774 \cos(60 - \theta)]$$

11.5.2 Estructuras antifuniculares

Se dice que una estructura es antifuncular de unas determinadas cargas si, debido a ellas, la línea de presiones en todos los puntos de la estructura coincide con el centro de gravedad de la sección recta y además el esfuerzo es de compresión.

La idea de que una determinada estructura (en general un arco) sea antifuncular es muy atractiva para el diseñador o el proyectista, ya que permite optimizar el material de la misma. Al mismo tiempo, en la historia de la construcción el concepto de arco va unido de forma natural a una estructura antifuncular más o menos perfecta¹ lo que ha permitido tradicionalmente, y hasta la aparición del hormigón armado y pretensado, salvar luces no sólo moderadas sino incluso grandes.

Intuitivamente, se puede llegar al concepto de la estructura antifuncular a través del siguiente proceso: supóngase un hilo totalmente flexible y en el que por tanto los únicos esfuerzos que actúan en él mismo son esfuerzos axiles (en lo sucesivo no se tomará en consideración su deformación por axial). Dicho hilo tiene una longitud L y está fijo en dos puntos A y B (Fig. 11.14). Sobre él actúan una serie de cargas \mathbf{p} (entre ellas quizás el peso propio) variables punto a punto. Bajo las anteriores cargas el hilo tomará una determinada forma $z_2 = g(z_1)$, denominada *curva funicular* de las cargas dadas. Los esfuerzos en el hilo serán únicamente axiles y de tracción. Si idealmente se rigidiza el hilo convirtiéndolo por tanto en una estructura rígida y se invierte el signo de las cargas externas, la pieza sigue únicamente con esfuerzos axiles, pero ahora de compresión. En este caso se está hablando de *estructura antifuncular* de las cargas dadas.

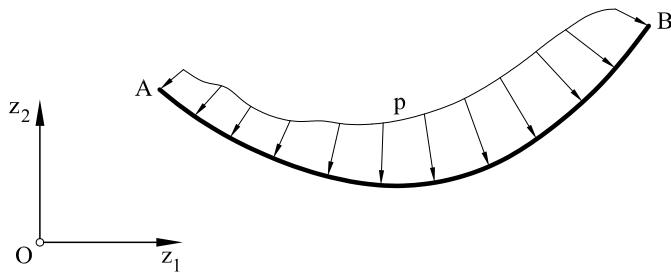


Fig. 11.14 Hilo funicular de unas cargas dadas.

Una de las curvas funiculares más conocidas es la catenaria. Su expresión analítica y su obtención puede consultarse en los textos de mecánica elemental. Dicha catenaria es la forma que toma un hilo de longitud L situado entre dos puntos A y B y sometido a su propio peso.

Otra curva funicular muy conocida es el anillo flexible sometido a presión interior. Únicamente existen esfuerzos axiles de tracción de valor (Fig. 11.15)

$$T = pR$$

¹J. Heymann. *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*. Ministerio de Obras Públicas.

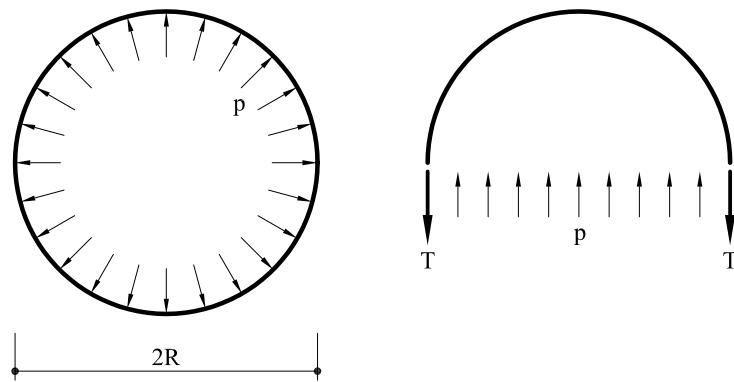


Fig. 11.15 Anillo sometido a presión interior

siendo p la presión interior.

Una estructura antifunicular de cierto interés consiste en el arco parabólico sometido a una carga repartida, vertical descendente, constante por unidad de proyección horizontal p (Fig. 11.16). Debe notarse que si el arco no es muy peraltado, dentro de p puede incluirse de forma aproximada el peso propio del arco (carga por unidad de longitud). La ecuación de dicho arco es

$$z_2 = f \left[1 - \left(\frac{z_1}{a} \right)^2 \right] \quad (11.18)$$

Puesto que es simétrico y con carga simétrica, como esquema de cálculo puede tomarse el representado en la figura 11.16b. El valor de la incógnita hiperestática H se obtendrá como consecuencia de anular el desplazamiento horizontal del punto A . La ley de momentos flectores se escribe,

$$M_f = pa(a - z_1) - Hz_2 - p \frac{(a - z_1)^2}{2} \quad (11.19)$$

Por lo que de acuerdo con el segundo teorema de Castigliano, o bien, mediante las fórmulas de Navier-Bresse:

$$u_{1A} = \int_0^a M_f z_2 \frac{dz_1}{EI_0} = \int_0^a [pa(a - z_1) - Hz_2 - p \frac{(a - z_1)^2}{2}] z_2 \frac{dz_1}{EI_0} = 0 \quad (11.20)$$

en donde se ha aproximado ds por dz_1 . A partir de la expresión anterior se obtiene

$$H = \frac{pa^2}{2f} \quad (11.21)$$

Si este valor de H se introduce en 11.19, se obtiene un valor nulo del momento flector para todos los puntos del arco. Es decir, el arco bajo las cargas consideradas es antifunicular.

Nótese que el arco no pierde su carácter antifunicular si se empotra en A y/o A' e

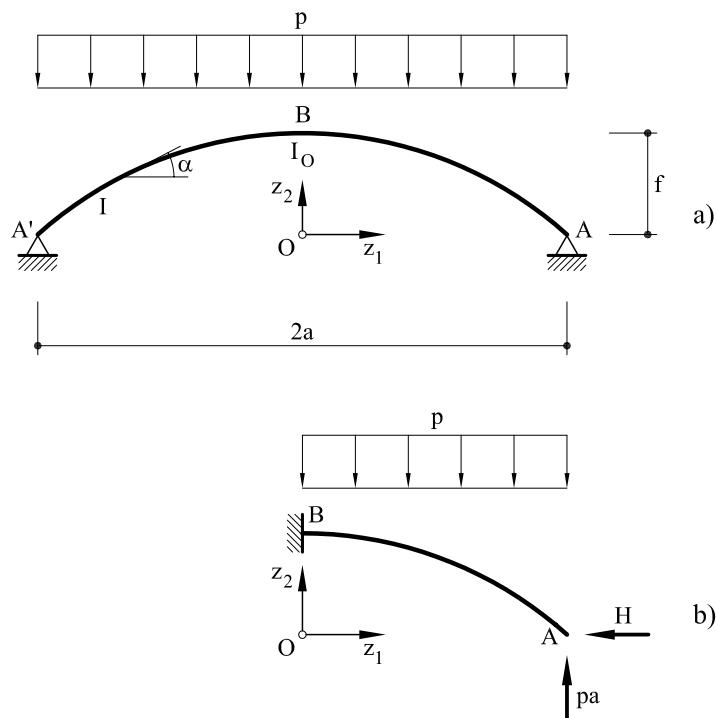


Fig. 11.16 Arco parabólico

incluso si se introduce alguna rótula en el interior del mismo. Por el contrario, pierde dicho carácter si se producen movimientos de apoyo que afecten al valor de H (es decir, movimientos horizontales).

11.5.3 Algunas simplificaciones

Tradicionalmente, dentro del cálculo de estructuras se ha venido distinguiendo entre estructuras traslacionales e intraslacionales. Tal distinción tiene únicamente sentido cuando se está hablando de estructuras en las cuales se desprecia la influencia del esfuerzo axial en la deformación, puesto que en caso contrario la práctica totalidad de las estructuras son traslacionales. Modernamente, el uso de ordenadores electrónicos ha rebajado la importancia de tal diferenciación y, por ende, de los métodos de análisis que de una u otra forma la contemplaban. Sin embargo, por su valor conceptual puede ser útil su conocimiento.

Se dice que una estructura es intrasacional cuando (despreciando la contribución a la deformación producida por el axial) ninguno de sus nudos sufre traslación alguna. En caso contrario la estructura será traslacional. En este último caso cabe hablar de *grado de traslacionalidad*. Puede definirse como el número de apoyos *simples* que hay que colocar en la estructura para convertir a la estructura en intrasacional. Otra definición equivalente a la anterior es afirmar que el grado de traslacionalidad es el número de

desplazamientos independientes que tiene la estructura. En la figura 11.17 pueden verse varios ejemplos.

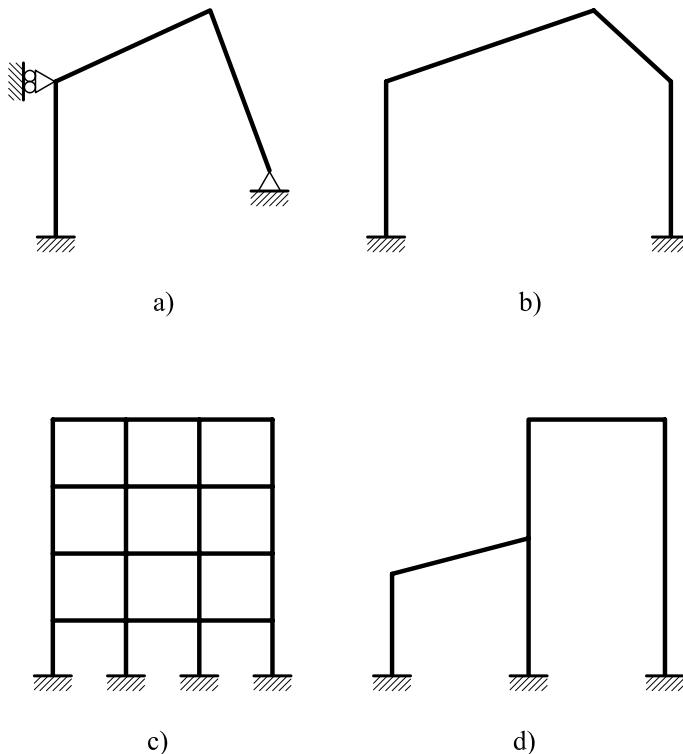


Fig. 11.17 a) Estructura intraslacional, b) estructura dos veces traslacional, c) estructura cuatro veces traslacional, d) estructura dos veces traslacional.

Para el caso en que la estructura sea intraslacional, ésta se puede, a efectos de cálculo, descomponer en vigas simples, al igual que se hizo con las vigas continuas. A través de la igualdad de giros se obtendrán los esfuerzos de extremo de barra. Un ejemplo aclarará lo anterior.

♣ Problema resuelto P11.7 Descomponer en vigas simples la estructura representada en la figura P11.7.1 y determinar las leyes de esfuerzos, así como las reacciones. Todas las barras tienen la misma inercia.

Solución

La estructura propuesta es intraslacional. En la figura P11.7.2 puede verse descompuesta en vigas simples la estructura anterior. Las incógnitas a determinar son los momentos de extremo de barra.

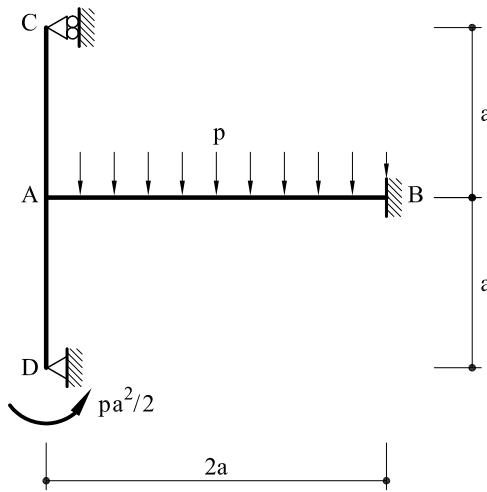


Fig. P11.7.1 Estructura intraslacional.

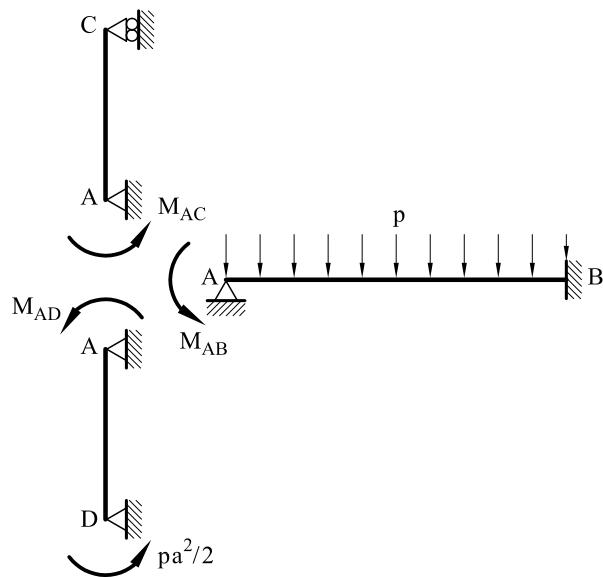


Fig. P11.7.2 Descomposición en vigas simples de la estructura del problema resuelto P11.7.

Los momentos se obtendrán de la igualdad de giros:

$$\varphi_A = \frac{M_{AB} \cdot 2a}{4EI} - \frac{p(2a)^3}{48EI}$$

$$\varphi_A = \frac{M_{AD} \cdot a}{3EI} - \frac{\frac{pa^2}{2} \cdot a}{6EI}$$

$$\varphi_A = \frac{M_{AC} \cdot a}{3EI}$$

Igualando los anteriores giros juntamente con la condición $M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} = 0$ se obtiene

$$M_{AB} = 0,1875 \text{ pa}^2$$

$$M_{AC} = -0,2187 \text{ pa}^2$$

$$M_{AD} = 0,0313 \text{ pa}^2$$

En la figura P11.7.3 pueden verse representadas las leyes de esfuerzos.

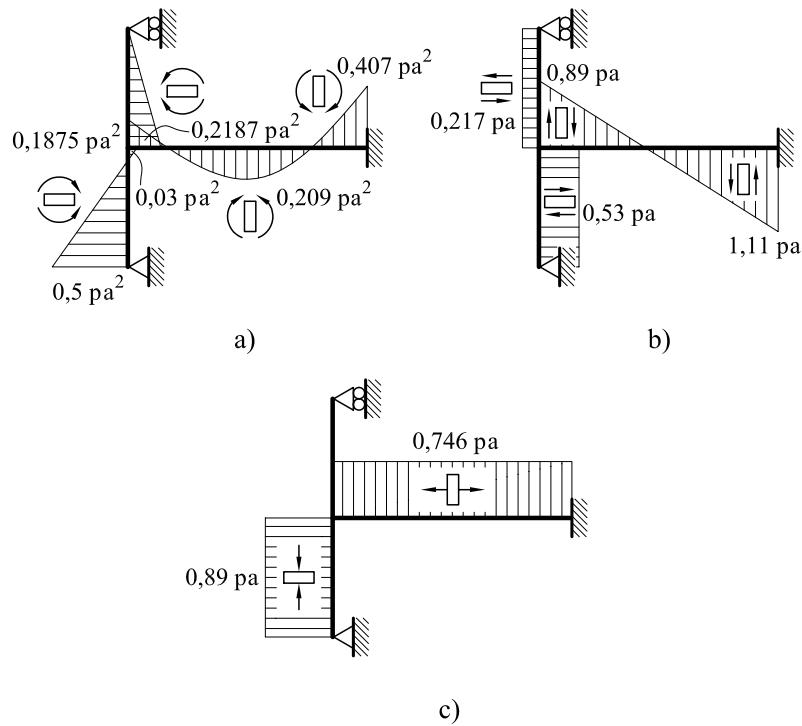


Fig. P11.7.3 Leyes de esfuerzos: a) momentos flectores, b) esfuerzos cortantes, c) esfuerzos axiles.

11.6 El método de rigidez

El método de rigidez plantea la solución del problema elástico desde un punto de vista diferente, tomando como incógnitas los movimientos de los nudos, por lo que conduce a un sistema de ecuaciones igual al número de nudos multiplicado por el número de grados de libertad por nudo.

11.6.1 Planteamiento del método de rigidez

El punto de partida del método de rigidez lo constituyen las ecuaciones elásticas desarrolladas en el Capítulo 9. Allí se obtuvieron diferentes expresiones, dependiendo de cuál fuera la fibra tomada como directriz, así como si se incluye o no la deformación por cortante. En función de todo ello, resulta válida una de las expresiones 9.108, 9.113, 9.174 ó 9.179. En cualquier caso, las ecuaciones elásticas, en coordenadas globales, se escriben para una barra cualquiera:

$$\mathbf{F}_A^g = \mathbf{K}_{AA}^g \mathbf{u}_A + \mathbf{K}_{AB}^g \mathbf{u}_B + \hat{\mathbf{F}}_A^g \quad (11.22a)$$

$$\mathbf{F}_B^g = \mathbf{K}_{BA}^g \mathbf{u}_A + \mathbf{K}_{BB}^g \mathbf{u}_B + \hat{\mathbf{F}}_B^g \quad (11.22b)$$

Considérese la estructura de la figura 11.18. Como se observa, dicha estructura es la misma que la de la figura 8.9, pero ahora con nudos rígidos. Las cargas que en ella actúan están como caso más general aplicadas en las barras y en los nudos.

Se escriben las ecuaciones elásticas 11.22 para cada una de las barras, pero sustituyendo los movimientos de extremo de barra \mathbf{u}_A y \mathbf{u}_B por las correspondientes a la numeración global de los nudos de la estructura. En una barra cualquiera de nudos i, j (numeración global) se considerará extremo A al nudo de menor numeración y extremo B al de numeración más elevada. Así por ejemplo, la barra 4 une los nudos 2 y 3. Para dicha barra, el nudo 2 será el A y el 3 el B .

Barra 1:

$$(\mathbf{F}_A^g)^1 = (\mathbf{K}_{AA}^g)^1 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{AB}^g)^1 \mathbf{u}_2 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^1 \quad (11.23a)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^1 = (\mathbf{K}_{BA}^g)^1 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{BB}^g)^1 \mathbf{u}_2 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^1 \quad (11.23b)$$

Barra 2:

$$(\mathbf{F}_A^g)^2 = (\mathbf{K}_{AA}^g)^2 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{AB}^g)^2 \mathbf{u}_3 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^2 \quad (11.24a)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^2 = (\mathbf{K}_{BA}^g)^2 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{BB}^g)^2 \mathbf{u}_3 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^2 \quad (11.24b)$$

Barra 3:

$$(\mathbf{F}_A^g)^3 = (\mathbf{K}_{AA}^g)^3 \mathbf{u}_3 + (\mathbf{K}_{AB}^g)^3 \mathbf{u}_4 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^3 \quad (11.25a)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^3 = (\mathbf{K}_{BA}^g)^3 \mathbf{u}_3 + (\mathbf{K}_{BB}^g)^3 \mathbf{u}_4 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^3 \quad (11.25b)$$

Barra 4:

$$(\mathbf{F}_A^g)^4 = (\mathbf{K}_{AA}^g)^4 \mathbf{u}_2 + (\mathbf{K}_{AB}^g)^4 \mathbf{u}_3 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^4 \quad (11.26a)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^4 = (\mathbf{K}_{BA}^g)^4 \mathbf{u}_2 + (\mathbf{K}_{BB}^g)^4 \mathbf{u}_3 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^4 \quad (11.26b)$$

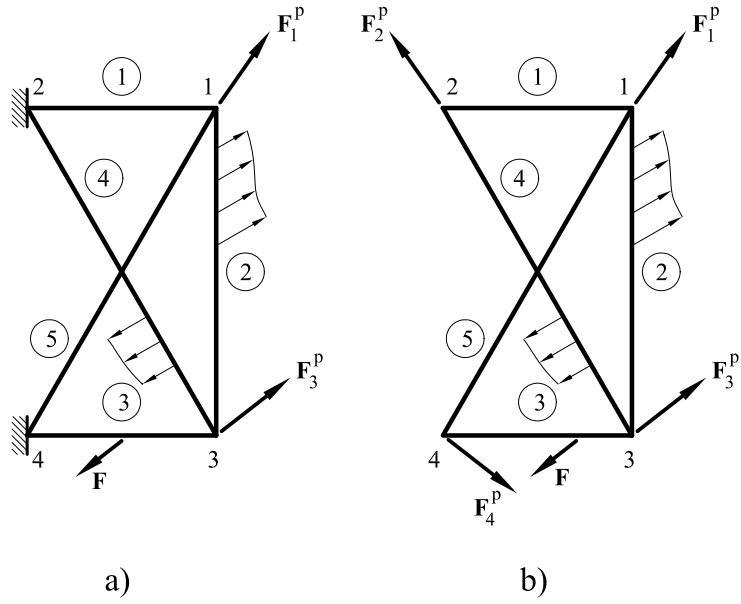


Fig. 11.18 a) Estructura de nudos rígidos. b) Estructura de nudos rígidos en la cual se han sustituido los apoyos por las correspondientes reacciones.

Barra 5:

$$(\mathbf{F}_A^g)^5 = (\mathbf{K}_{AA}^g)^5 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{AB}^g)^5 \mathbf{u}_4 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^5 \quad (11.27a)$$

$$(\mathbf{F}_B^g)^5 = (\mathbf{K}_{BA}^g)^5 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{BB}^g)^5 \mathbf{u}_4 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^5 \quad (11.27b)$$

Por otro lado, por equilibrio de cada uno de los nudos

$$\mathbf{F}_1^p = (\mathbf{F}_A^g)^1 + (\mathbf{F}_A^g)^2 + (\mathbf{F}_A^g)^5 \quad (11.28a)$$

$$\mathbf{F}_2^p = (\mathbf{F}_B^g)^1 + (\mathbf{F}_A^g)^4 \quad (11.28b)$$

$$\mathbf{F}_3^p = (\mathbf{F}_B^g)^2 + (\mathbf{F}_A^g)^3 + (\mathbf{F}_B^g)^4 \quad (11.28c)$$

$$\mathbf{F}_4^p = (\mathbf{F}_B^g)^3 + (\mathbf{F}_B^g)^5 \quad (11.28d)$$

siendo \mathbf{F}_i^p el vector de fuerzas externas (fuerzas y momentos) aplicados al nudo i .

Introduciendo las ecuaciones 11.23 a 11.27 en las 11.28 y llamando

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^1 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^2 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^5 \quad (11.29a)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^1 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^4 \quad (11.29b)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_3 = (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^2 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^3 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^5 \quad (11.29c)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_4 = (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^3 + (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^5 \quad (11.29d)$$

a la suma de las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto de todas las barras que concurren en los correspondientes nudos, se puede escribir finalmente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{AA}^g)^1 + (\mathbf{K}_{AA}^g)^2 & (\mathbf{K}_{AB}^g)^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ +(\mathbf{K}_{AA}^g)^5 & & & \\ (\mathbf{K}_{BA}^g)^1 & (\mathbf{K}_{BB}^g)^1 + (\mathbf{K}_{AA}^g)^4 & (\mathbf{K}_{AB}^g)^4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{BA}^g)^4 & (\mathbf{K}_{BB}^g)^2 + (\mathbf{K}_{AA}^g)^3 & (\mathbf{K}_{AB}^g)^3 \\ +(\mathbf{K}_{BB}^g)^4 & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{BA}^g)^3 & (\mathbf{K}_{BB}^g)^3 + (\mathbf{K}_{BB}^g)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

siendo

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1^p - \hat{\mathbf{F}}_1 \quad (11.31a)$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2^p - \hat{\mathbf{F}}_2 \quad (11.31b)$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_3^p - \hat{\mathbf{F}}_3 \quad (11.31c)$$

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_4^p - \hat{\mathbf{F}}_4 \quad (11.31d)$$

o bien, escrito en forma compacta

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (11.32)$$

El sistema anterior constituye el sistema de ecuaciones buscado. Resuelto dicho sistema y obtenidos los movimientos \mathbf{u} , los esfuerzos de extremo de barra se obtienen a partir de las ecuaciones elásticas 11.22. Por lo que respecta a la simetría de la matriz \mathbf{K} y a su estructura en banda, recuérdese lo señalado en el apartado 8.3.2. Es interesante sin embargo señalar el significado físico de un término cualquiera k_{ij} de la matriz de rigidez \mathbf{K} . Para ello, supóngase que en la estructura de la figura 11.18 se impiden todos los movimientos de todos los grados de libertad, a excepción del grado de libertad j , al que se le da el valor 1. Lógicamente, tales impedimentos se consiguen colocando unas fuerzas F_i en los correspondientes grados de libertad. El sistema de ecuaciones 11.30 se escribirá

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_j \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

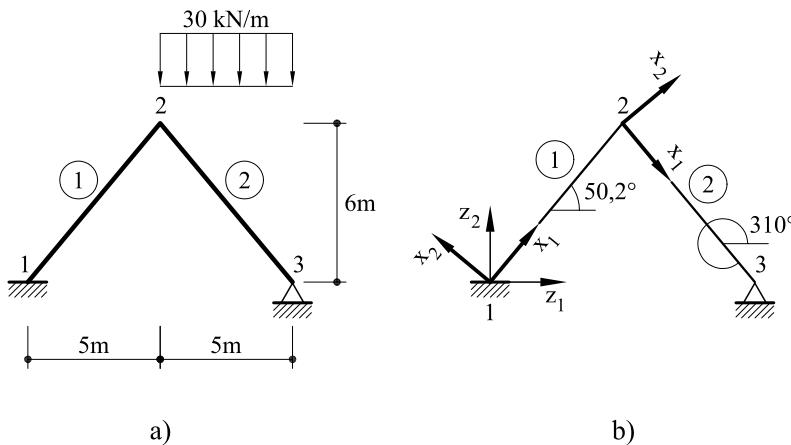
por lo que, realizando los productos, se obtiene para una fila cualquiera (fila i): $F_i = k_{ij}$.

Es decir, que el término k_{ij} de la matriz de rigidez puede ser visto como el valor de la fuerza (o momento) que aparece en el grado de libertad i cuando el grado de libertad j (y solo él) sufre un desplazamiento unidad.

Asimismo, a partir de la expresión 11.30 es posible dar una regla general para la formación de la matriz de rigidez de una estructura: El elemento (i,i) de la diagonal principal está formado por la suma de las matrices \mathbf{K}_{AA}^g o \mathbf{K}_{BB}^g de todas las barras que concurren al nudo i . Se colocará \mathbf{K}_{AA}^g si dicho nudo es el de menor numeración de la barra correspondiente y \mathbf{K}_{BB}^g en caso contrario. En el elemento (i,j) , siendo $i < j$, si existe una barra que une los nudos i y j se colocará \mathbf{K}_{AB}^g correspondiente a dicha barra, y cero en caso contrario.

Al igual que en los problemas resueltos P8.6 y P8.7, es posible obtener la matriz \mathbf{K} a partir del teorema de los trabajos virtuales o de la minimización de la energía potencial total.

♣ **Problema resuelto P11.8** Formar la matriz de rigidez, así como el vector de fuerzas del pórtico representado en la figura P11.8.1. La sección de las dos barras es rectangular de 40 cm de ancho por 60 cm de canto. El módulo de elasticidad vale $E=30 \text{ GPa}$.



a)

b)

Fig. P.11.8.1 Pórtico correspondiente al problema resuelto P11.8

Solución

En la figura P11.8.1 pueden verse los ejes locales y globales adoptados para la estructura. Para la barra 1, las matrices de rigidez en coordenadas locales se escriben

$$\mathbf{K}_{AA} = 10^3 \begin{bmatrix} 921,866 & 0 & 0 \\ 0 & 5,441 & 21,246 \\ 0 & 21,246 & 110,624 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BA}^T = 10^3 \begin{bmatrix} -921,866 & 0 & 0 \\ 0 & -5,441 & 21,246 \\ 0 & -21,246 & 55,312 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{BB} = 10^3 \begin{bmatrix} 921,866 & 0 & 0 \\ 0 & 5,441 & -21,246 \\ 0 & -21,246 & 110,624 \end{bmatrix}$$

La matriz \mathbf{T} de cambio de base se escribe

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0,64 & -0,768 & 0 \\ 0,768 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que las matrices de rigidez de la barra 1 en coordenadas globales serán:

$$(\mathbf{K}_{AA}^g)^1 = 10^3 \begin{bmatrix} 381,025 & 450,701 & -16,322 \\ 450,701 & 546,282 & 13,601 \\ -16,322 & 13,601 & 110,624 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{AB}^g)^1 = (\mathbf{K}_{AB}^{g,T})^1 = 10^3 \begin{bmatrix} -381,025 & -450,701 & -16,322 \\ -450,701 & -546,282 & 13,601 \\ 16,322 & -13,601 & 55,312 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{BB}^g)^1 = 10^3 \begin{bmatrix} 381,025 & 450,701 & 16,322 \\ 450,701 & 546,282 & -13,601 \\ 16,322 & -13,601 & 110,624 \end{bmatrix}$$

Para la barra 2 las matrices de rigidez en coordenadas locales serán lógicamente las mismas, mientras que la matriz \mathbf{T} de cambio de base se escribirá

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0,64 & 0,768 & 0 \\ -0,768 & 0,64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que las matrices de rigidez en coordenadas globales se escriben

$$(\mathbf{K}_{AA}^g)^2 = 10^3 \begin{bmatrix} 381,025 & -450,701 & 16,322 \\ -450,701 & 546,282 & 13,601 \\ 16,322 & 13,601 & 110,624 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{AB}^g)^2 = (\mathbf{K}_{BA}^{gT})^2 = 10^3 \begin{bmatrix} -381,025 & 450,701 & 16,322 \\ 450,701 & -546,282 & 13,601 \\ -16,322 & -13,601 & 55,312 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{BB}^g)^2 = 10^3 \begin{bmatrix} 381,025 & -450,701 & -16,322 \\ -450,701 & 546,282 & -13,601 \\ -16,322 & -13,601 & 110,624 \end{bmatrix}$$

En cuanto al vector de fuerzas (fuerzas y momentos de empotramiento perfecto), para cada una de las barras será nulo, para la barra 1, al no actuar cargas en dicha barra, y para la barra 2 valdrá en coordenadas locales

$$\hat{\mathbf{F}}_A = \begin{bmatrix} -57,62 \\ 48,01 \\ 62,5 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{F}}_B = \begin{bmatrix} -57,62 \\ 48,01 \\ -62,5 \end{bmatrix}$$

y en coordenadas globales

$$(\hat{\mathbf{F}}_A^g)^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \\ 62,5 \end{bmatrix} \quad (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 75 \\ -62,5 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez se escribirá

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{AA}^g)^1 & (\mathbf{K}_{AB}^g)^1 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_{BA}^{gT})^1 & (\mathbf{K}_{BB}^g)^1 + (\mathbf{K}_{AA}^g)^2 & (\mathbf{K}_{AB}^g)^2 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{BA}^{gT})^2 & (\mathbf{K}_{BB}^g)^2 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo por los valores obtenidos anteriormente

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 381,025 & 450,701 & -16,322 & -381,025 & -450,701 & -16,322 & 0 & 0 & 0 \\ 450,701 & 546,282 & 13,601 & -450,701 & -546,282 & 13,601 & 0 & 0 & 0 \\ -16,322 & 13,601 & 110,624 & 16,322 & -13,601 & 55,312 & 0 & 0 & 0 \\ -381,025 & -450,701 & 16,322 & 762,049 & 0 & 32,643 & -381,025 & 450,701 & 16,322 \\ -450,701 & -546,282 & -13,601 & 0 & 1092,56 & 0 & 450,701 & -546,282 & 13,601 \\ -16,322 & 13,601 & 55,312 & 32,643 & 0 & 221,248 & -16,322 & -13,601 & 55,312 \\ 0 & 0 & 0 & -381,025 & 450,701 & -16,322 & 381,025 & -450,701 & -16,322 \\ 0 & 0 & 0 & 450,701 & -546,282 & -13,601 & -450,701 & 546,282 & -13,601 \\ 0 & 0 & 0 & 16,322 & 13,601 & 55,312 & -16,322 & -13,601 & 110,624 \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas externas ensambladas valdrá:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^p - (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^1 \\ \mathbf{F}_2^p - [(\hat{\mathbf{F}}_B^g)^1 + (\hat{\mathbf{F}}_A^g)^2] \\ \mathbf{F}_3^p - (\hat{\mathbf{F}}_B^g)^2 \end{bmatrix}$$

Es importante señalar que \mathbf{F}_1^p no es conocido puesto que es el vector de reacciones del punto 1. El vector \mathbf{F}_2^p es el vector de fuerzas y momentos externos aplicados al nudo 2 y por tanto nulo en este caso. Por lo que respecta a \mathbf{F}_3^p , sus dos primeras componentes son la reacción horizontal y vertical del nudo 3 y por lo tanto desconocidas. Su tercera componente es el valor del momento puntual externo aplicado en 3 (nulo en este caso). Por lo tanto, las fuerzas anteriores se escribirán

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (R_1)_1 \\ (R_2)_1 \\ M_1 \\ 0 \\ -75 \\ -62,5 \\ (R_1)_3 \\ (R_2)_3 - 75 \\ 62,5 \end{bmatrix}$$

Nótese que para solucionar la estructura planteada se dispone de un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas: cuatro movimientos y cinco reacciones.

11.6.2 Condiciones de vinculación

La matriz de rigidez \mathbf{K} obtenida en el apartado anterior constituye el elemento clave del método de rigidez. De la resolución del sistema 11.32 se obtienen los desplazamientos y reacciones buscados. Es importante advertir, sin embargo, que tal como se ha puesto de manifiesto en el problema resuelto P11.8, no todos los desplazamientos son incógnita ni todas las fuerzas externas son conocidas. En los apoyos algunos movimientos son dados (bien son nulos, bien son conocidos como asientos de apoyo) y algunas fuerzas en los nudos son desconocidas (reacciones). Este hecho debe tenerse presente en la resolución del sistema 11.32. Para el caso en que todos los apoyos sean fijos, el sistema 11.32 puede resolverse en dos pasos: en el primero se eliminan las filas y columnas correspondientes a los grados de libertad fijados, con lo cual queda un sistema de tantas ecuaciones e incógnitas como grados de libertad no coartados. En dicho sistema se determinan los desplazamientos. Conocidos ya todos los movimientos, en el segundo paso y a partir de las filas eliminadas se obtienen las reacciones.

Puede darse el caso de que algún apoyo sea elástico. Concretamente, si la reacción correspondiente al grado de libertad j es proporcional al movimiento del grado de libertad j se tendrá:

$$R_j = -ku_j \quad (11.34)$$

por lo que, yendo al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} F_1^p - \hat{F}_1 \\ F_2^p - \hat{F}_2 \\ \dots \\ R_j - \hat{F}_j \\ \dots \\ F_n^p - \hat{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_j \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (11.35)$$

Sustituyendo 11.34 en 11.35 y pasando ku_j al segundo miembro:

$$\begin{bmatrix} F_1^p - \hat{F}_1 \\ F_2^p - \hat{F}_2 \\ \dots \\ -\hat{F}_j \\ \dots \\ F_n^p - \hat{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} + k & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_j \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

Es decir, la matriz de rigidez se modifica en el sentido de añadir el valor de la constante k del apoyo al correspondiente elemento k_{jj} de la diagonal principal.

♣ **Problema resuelto P11.9** Determinar las reacciones, desplazamientos y leyes de esfuerzos de la estructura correspondientes al problema resuelto P11.8.

Solución

Dado que los movimientos en los grados de libertad coaccionados son nulos, el sistema puede resolverse considerando en primer lugar los grados de libertad activos (es decir, aquellos no coaccionados). Para ello se eliminan las filas y columnas números 1, 2, 3, 7 y 8, quedando

$$10^3 \begin{bmatrix} 762,049 & 0 & 32,643 & 16,322 \\ 0 & 1092,56 & 0 & 13,601 \\ 32,643 & 0 & 221,248 & 55,312 \\ 16,322 & 13,601 & 55,312 & 110,624 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -75 \\ -62,5 \\ 62,5 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el anterior sistema

$$\begin{aligned} u_4 &= 0,0034 \times 10^{-3}m & ; & \quad u_5 = -0,0788 \times 10^{-3}m \\ u_6 &= -0,4878 \times 10^{-3}rdn & ; & \quad u_9 = 0,8182 \times 10^{-3}rdn \end{aligned}$$

Las reacciones se obtienen a partir de las filas eliminadas (filas 1, 2, 3, 7 y 8) del sistema de ecuaciones global. Así para la reacción horizontal en el apoyo 1:

$$(R_1)_1 = (-381,025u_4 - 450,701u_5 - 16,322u_6) \cdot 10^3 = 42,18 kN$$

y para las demás reacciones

$$\begin{aligned} (R_2)_1 &= (-450,701u_4 - 546,282u_5 + 13,601u_6) \cdot 10^3 = 34,9 kN \\ M_1 &= (16,322u_4 - 13,601u_5 + 55,312u_6) \cdot 10^3 = -25,8 kNm \\ (R_1)_3 &= (-381,025u_4 + 450,701u_5 - 16,322u_6 - 16,322u_9) \cdot 10^3 = -42,18 kN \\ (R_2)_3 &= (450,701u_4 - 546,282u_5 - 13,601u_6 - 13,601u_9) \cdot 10^3 + 75 = 115,1 kN \end{aligned}$$

Los esfuerzos de extremo de barra se obtienen a partir de las ecuaciones elásticas. Así para el extremo A (nudo 1) de la barra 1

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_A^g)^1 &= (\mathbf{K}_{AA}^g)^1 \mathbf{u}_1 + (\mathbf{K}_{AB}^g)^1 \mathbf{u}_2 + (\widehat{\mathbf{F}}_A^g)^1 = \\ &= 10^3 \begin{bmatrix} -381,025 & -450,701 & -16,322 \\ -450,701 & -546,282 & 13,601 \\ 16,322 & -13,601 & 55,312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42,18 \\ 34,9 \\ -25,8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

valores que pasados a coordenadas locales (ver Fig. P11.9.1), permiten obtener las fuerzas y momentos de extremo de barra

$$[58,8 kN; -10,1 kN; -25,8 kNm]^T$$

Asimismo en la figura P11.9.1 pueden verse los restantes esfuerzos de extremo de barra. En la figura P11.9.2 se dibujan las reacciones, así como las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y flectores.

11.6.3 Nudos de tamaño finito

Aunque en muchos casos se puede prescindir del tamaño de los nudos de la estructura, existen otros casos en que el orden de dicho tamaño puede afectar a los resultados del análisis estructural. Tal sería el caso, por ejemplo, de varias barras que concurren en un nudo y sus directrices no se cortan en un punto. Conviene, por tanto, disponer de una formulación que permita considerar las dimensiones del nudo y tenerla en cuenta en el cálculo. En la exposición que sigue se modificarán las matrices de rigidez para tener en cuenta este hecho, si bien se supondrá que el nudo es rígido.

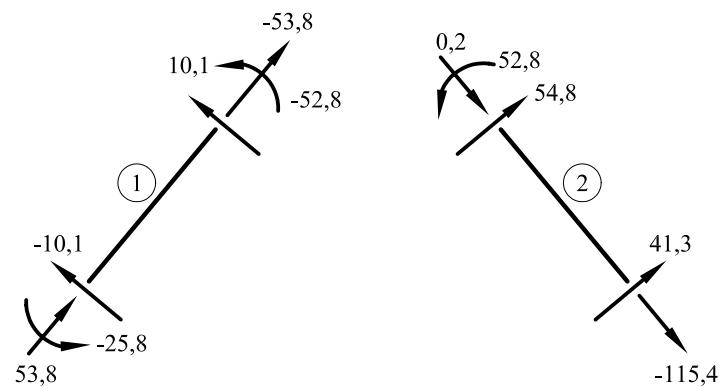


Fig. P11.9.1 Esfuerzos de extremo de barra.

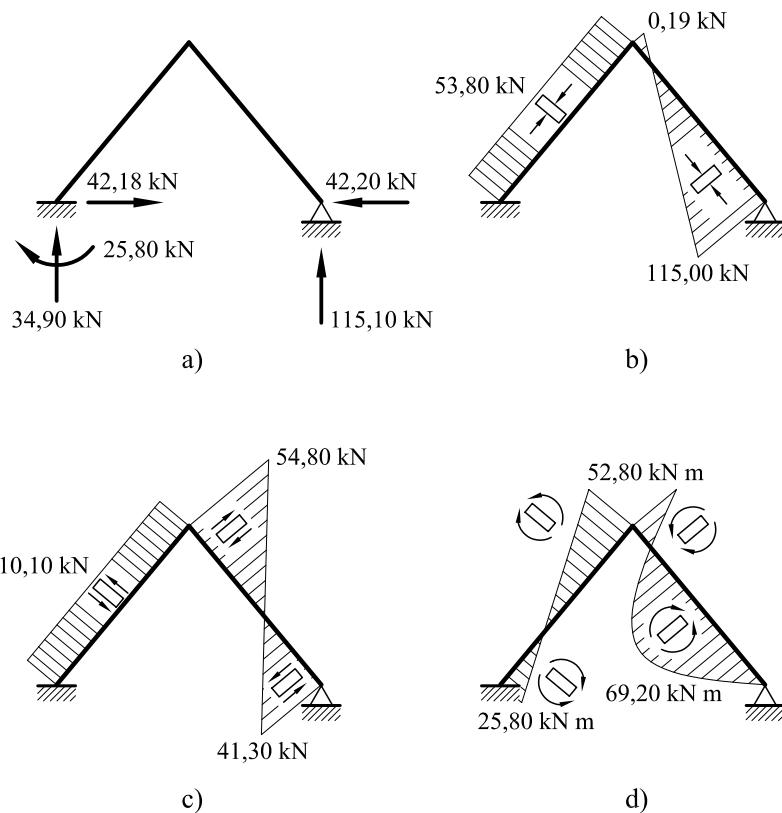


Fig. P11.9.2 Reacciones y leyes de esfuerzos: a) Reacciones, b) Ley de axiles, c) Ley de cortantes, d) Ley de momentos flectores.

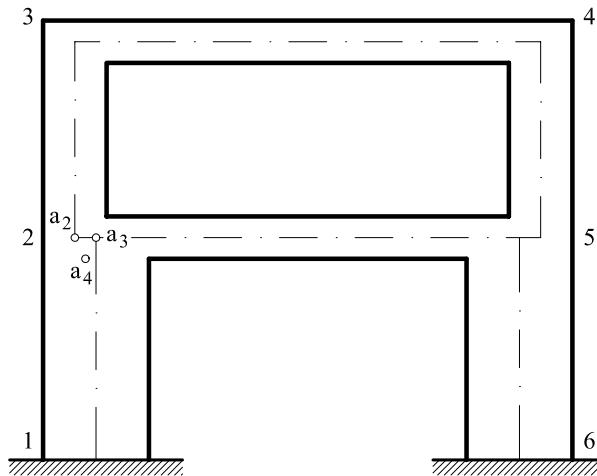


Fig. 11.19 Estructura con nudos de tamaño finito

Supóngase la estructura de la figura 11.19. En ella se han dibujado las directrices de las distintas piezas. Asimismo, las directrices de todas las barras que concurren en un nudo pueden cortarse en un punto o no (aunque con lo estudiado hasta ahora se disponen de herramientas para que así sea, por ejemplo no haciendo coincidir en todas o en algunas barras la directriz con la línea de centros de gravedad). En el nudo 2 concurren las barras 1-2, 2-3 y 2-5 y las directrices de las mismas no se cortan en un único punto. Como punto representativo del nudo se puede, en principio, tomar uno cualquiera. Supóngase, por ejemplo, que para el mencionado nudo 2 se toma como punto representativo el a_4 . Respecto a dicho punto se definirán los movimientos del nudo 2, así como los esfuerzos de extremo de barra que en dicho nudo concurren.

En la figura 11.20a se representa una viga en cuyos extremos existen nudos rígidos de tamaño finito. Sean A y B los extremos de la pieza, y C y D los puntos representativos del nudo. Las rectas AC y BD representan bielas rígidas que unen los extremos de la pieza AB con los nudos C y D . Se trata de plantear las ecuaciones elásticas respecto a los nudos C y D .

Si (c_1, c_2) y (d_1, d_2) son las coordenadas de los puntos C y D respecto a los ejes locales de la barra x_1, x_2 , de acuerdo con la figura 11.20c se puede escribir

$$\begin{bmatrix} F_{C1} \\ F_{C2} \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_2 & -c_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{A1} \\ F_{A2} \\ M_A \end{bmatrix} \quad (11.37a)$$

$$\begin{bmatrix} F_{D1} \\ F_{D2} \\ M_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_2 & -(d_1 - L) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{B1} \\ F_{B2} \\ M_B \end{bmatrix} \quad (11.37b)$$

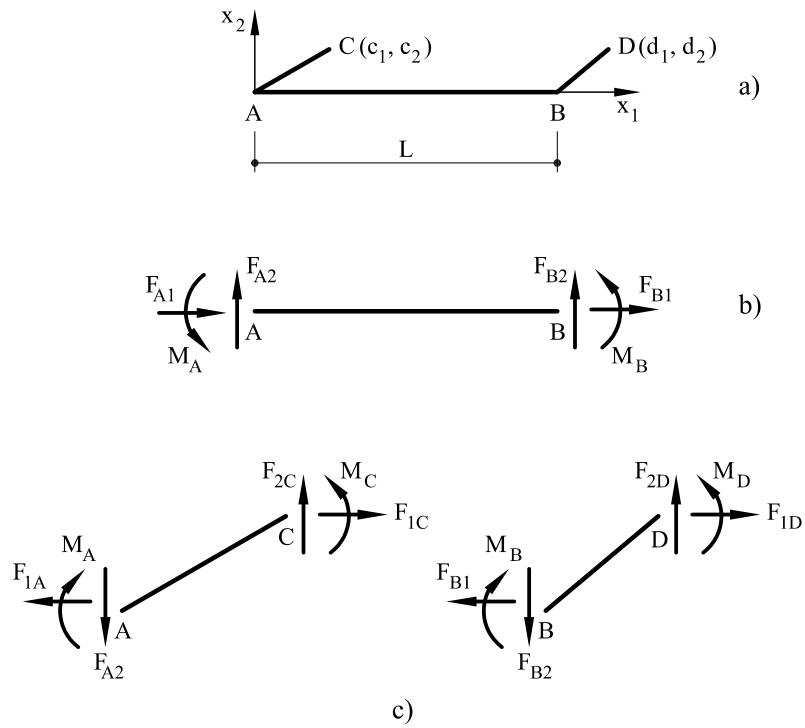


Fig. 11.20 a) Pieza con nudos finitos b) Barra flexible c) Equilibrio en los nudos

o escrito en forma compacta

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{H}_C \mathbf{F}_A \quad (11.38a)$$

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{H}_D \mathbf{F}_B \quad (11.38b)$$

en donde la simbología es evidente.

Por lo que respecta a los movimientos, se puede escribir (Fig. 11.21)

$$\begin{bmatrix} v_{A1} \\ v_{A2} \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ \varphi_C \end{bmatrix} \quad (11.39a)$$

$$\begin{bmatrix} v_{B1} \\ v_{B2} \\ \varphi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & -(d_1 - L) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{D1} \\ v_{D2} \\ \varphi_D \end{bmatrix} \quad (11.39b)$$

y también

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{H}_C^T \mathbf{v}_C \quad (11.40a)$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{H}_D^T \mathbf{v}_D \quad (11.40b)$$

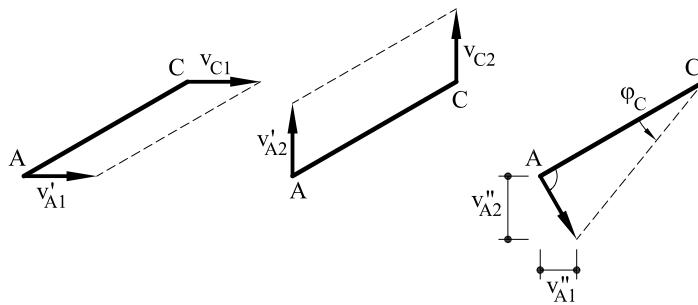


Fig. 11.21 Movimientos del punto A conocidos los de C.

y sustituyendo 11.38 y 11.40 en cualquiera de las expresiones 9.104, 9.113, 9.172 ó 9.176 de las ecuaciones elásticas en coordenadas locales, se tendrá

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{H}_C \mathbf{K}_{AA} \mathbf{H}_C^T \mathbf{v}_C + \mathbf{H}_C \mathbf{K}_{AB} \mathbf{H}_D^T \mathbf{v}_D + \mathbf{H}_C \hat{\mathbf{F}}_A \quad (11.41a)$$

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{H}_D \mathbf{K}_{BA} \mathbf{H}_C^T \mathbf{v}_C + \mathbf{H}_D \mathbf{K}_{BB} \mathbf{H}_D^T \mathbf{v}_D + \mathbf{H}_D \hat{\mathbf{F}}_B \quad (11.41b)$$

que constituyen la expresión de las ecuaciones elásticas en coordenadas locales para el caso de nudos rígidos de tamaño finito. Lógicamente, el paso a coordenadas globales sigue los mismos pasos que los ya señalados para el resto de las ecuaciones elásticas.

11.6.4 Ecuaciones elásticas reducidas

Supóngase una estructura formada por piezas rectas de nudos rígidos en la que se desprecia la deformación por esfuerzo axil y por esfuerzo cortante. Además, la directriz de las piezas está formada por la línea de centros de gravedad de las respectivas secciones rectas. En tales circunstancias, las ecuaciones elásticas 9.104 pueden escribirse en coordenadas locales en forma reducida

$$M_A = \frac{4EI}{L} \varphi_A + \frac{2EI}{L} \varphi_B + \frac{6EI}{L^2} \delta + \widehat{M}_A \quad (11.42a)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} \varphi_A + \frac{4EI}{L} \varphi_B + \frac{6EI}{L^2} \delta + \widehat{M}_B \quad (11.42b)$$

siendo $\delta = v_A - v_B$ el desplazamiento relativo en dirección perpendicular a la barra de los dos extremos de la pieza.

Las expresiones 11.42 son las ecuaciones elásticas reducidas y juegan un papel de importancia en los métodos manuales de cálculo de estructuras basados en el método de rigidez. El proceso de cálculo de una estructura según dichas expresiones sigue la metodología general ya expuesta del método de rigidez. Sin embargo, es importante establecer varias precisiones:

- El equilibrio en cada nudo sólo se realiza en momentos. Con ello se obtiene un sistema de tantas ecuaciones como nudos. Dicho sistema, en general, es insuficiente

para resolver todas las incógnitas, por lo que es necesario aumentar el número de ecuaciones.

- Los desplazamientos δ de las distintas barras no son independientes entre sí. Existe un número de desplazamientos independientes igual al grado de traslacionalidad de la estructura (ver apartado 11.5.3), por lo que los mencionados desplazamientos δ de cada barra deben ponerse en función de los desplazamientos independientes.
- El sistema de ecuaciones se completa escribiendo la ecuación de equilibrio de cortantes para cada grado de traslacionalidad.
- Los esfuerzos cortantes y axiles se obtienen por equilibrio una vez conocido el valor de los momentos flectores.

11.7 Ejercicios propuestos

En todos los ejercicios se siguen se supone que, salvo en los tirantes, se desprecia la deformación por esfuerzo axil y por esfuerzo cortante.

- ♣ **Ejercicio propuesto EP11.1** Hallar las leyes de esfuerzos en la estructura de la figura, cuando en una de las celdas existe una presión interior de valor $p = 20 \text{ kN/m}$. La longitud de cada uno de los lados del hexágono es de 4 metros.

Valor de control: El esfuerzo axil en la barra inferior vale 12 kN (tracción).

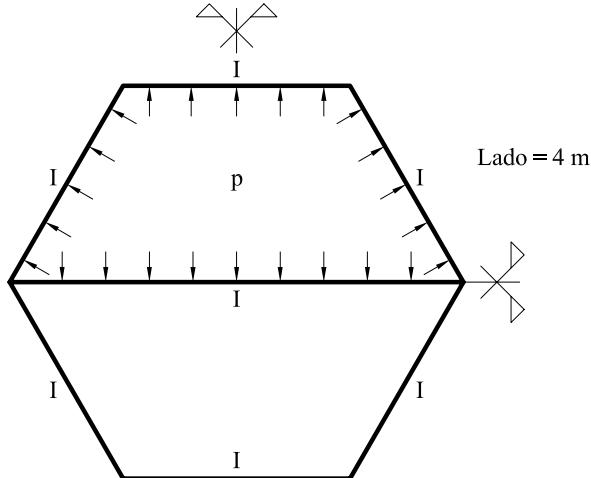


Fig. EP11.1

- ♣ **Ejercicio propuesto EP11.2** La estructura de la figura está cargada con una carga uniformemente repartida en las barras AB y $A'B'$ de valor $p = 2 \times 10^4 \text{ N/m}$. La pieza AA' es un tirante de 15 cm^2 de sección y módulo de elasticidad $E = 200 \text{ GPa}$. En todas las barras $EI = 40\,000 \text{ kN} \times \text{m}^2$. El tirante está sometido a un decrecimiento de temperatura de valor $\Delta t = -30^\circ\text{C}^{-1}$ ($\alpha = 5 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}$).

Hallar las leyes de momentos flectores, cortantes y axiles.

Valor de control: El esfuerzo axial en el tirante vale $75,9 \text{ kN}$.

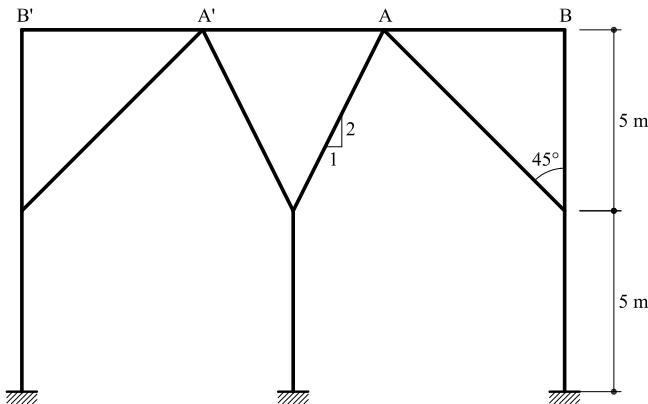


Fig. EP11.2

- ♣ **Ejercicio propuesto EP11.3** Dada la estructura que se detalla en la figura, hallar las leyes de esfuerzos cuando actúan dos cargas F de valor $F = 10 \text{ kN}$.

Valor de control: El movimiento horizontal del nudo A vale $0,00295 \text{ m}$.

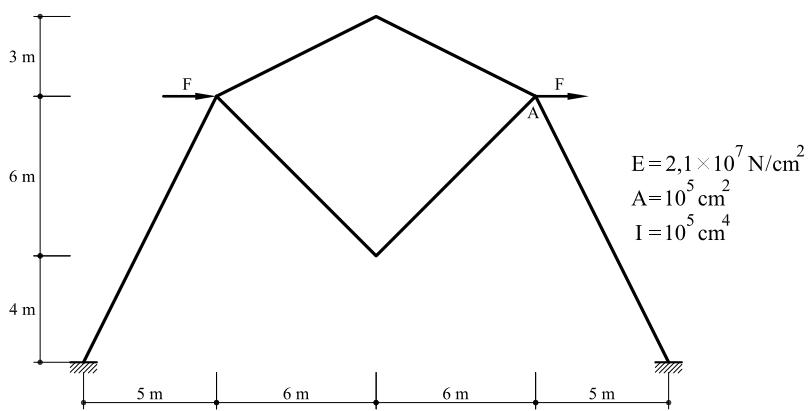


Fig. EP11.3

♣ **Ejercicio propuesto EP11.4** Dada la estructura de la figura, determinar las leyes de esfuerzos, así como el giro del punto A. El producto EI vale: $2,1 \times 10^5 \text{ kN m}^2$.

Valor de control: El giro del punto A vale $2,18 \times 10^{-5} \text{ radn}$.

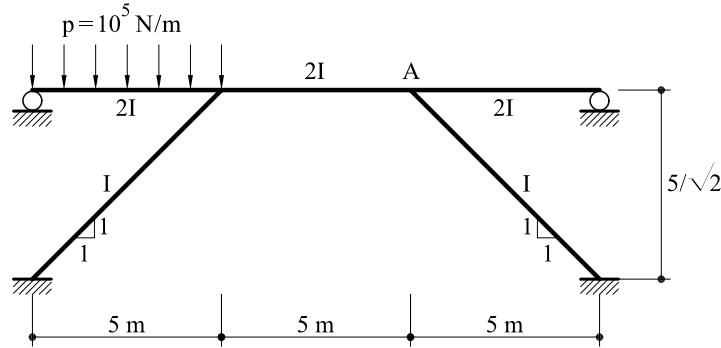


Fig. 11.4

♣ **Ejercicio propuesto EP11.5** En la estructura de la figura, la pieza curva es una parábola de segundo grado de eje vertical. En ella se verifica que $I = I_0 / \cos \theta$, siendo I_0 la inercia en la clave y θ el ángulo que forma la tangente a la curva en cualquier punto con la horizontal. La pieza vertical se supone inextensible. Determinar las leyes de esfuerzos y el giro en C.

Valor de control: El giro en C vale $11,17 p/EI$.

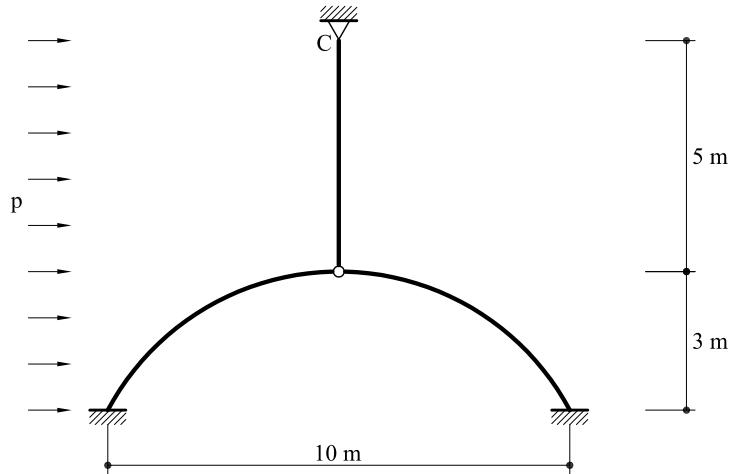


Fig. 11.5

- ♣ **Ejercicio propuesto EP11.6** En la estructura de la figura, el arco es circular de radio $R = 3\text{ m}$. Todas las piezas tienen el mismo momento de inercia y el mismo módulo de elasticidad. Determinar las leyes de esfuerzos, las reacciones y el movimiento de B.

Valor de control: El movimiento de B vale $11,64 p/EI$.

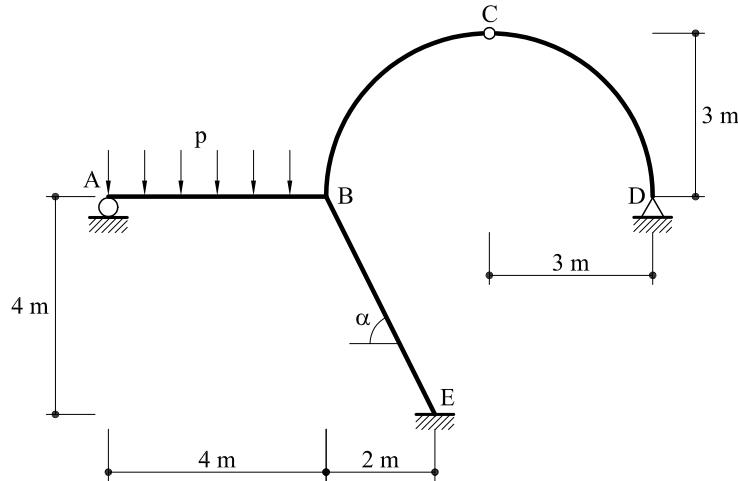


Fig. EP11.6

- ♣ **Ejercicio propuesto EP11.7** En la estructura de la figura, la pieza curva es una parábola de cuarto grado de eje vertical de expresión $y = 8[1 - (x/8)^4]$. Su inercia vale $I(s) = I/\cos\theta$, siendo θ el ángulo que forma la tangente a la curva en cada punto con la horizontal. La pieza AB es un tirante de sección A. Los pilares AD y BC tienen una inercia de valor I. En los puntos A y B existe una articulación. Determinar las leyes de esfuerzos en todas las piezas (para la pieza curva los esfuerzos se dibujarán sobre su proyección horizontal).

Valor de control: El esfuerzo en el tirante vale $44,9\text{ kN}$.

- ♣ **Ejercicio propuesto EP11.8** En la estructura que se representa en la figura, la pieza curva $B'C'B$ es un semicírculo de radio 5m. Todas las piezas tienen la misma inercia. Bajo las cargas que se indican, determinar:

- Reacciones y leyes de esfuerzos en todas las piezas rectas.
- Valor del Momento Flector en A y del esfuerzo cortante en la pieza AB.

Notas:

- No se considerará la deformación por esfuerzo axil ni por esfuerzo cortante.
- En los puntos B y B' las piezas están articuladas entre sí.

Valor de control: El momento flector en A vale $137,5\text{ kN}$.

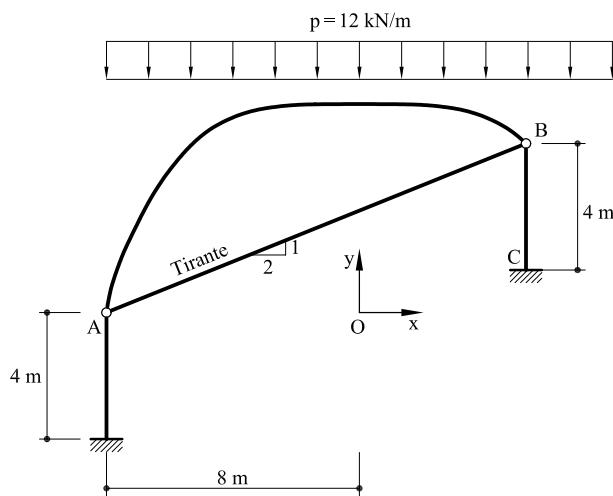


Fig. EP11.7

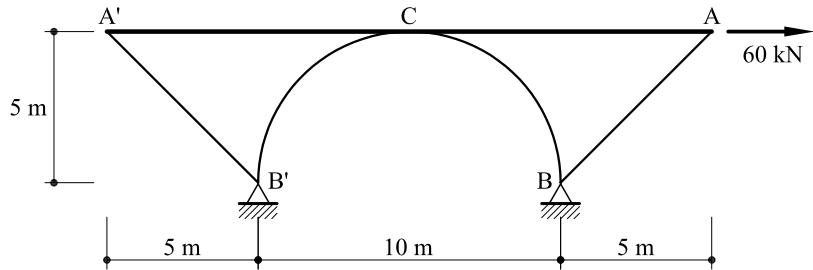


Fig. EP11.8

♣ **Ejercicio propuesto EP11.9** En el pórtico de la figura, en A y B todas las piezas están articuladas entre sí. Por otra parte, la pieza AB representa un tirante de sección w . Determinar la relación entre p y F para que el tirante no trabaje.

Valor de control: La relación vale $p = 22,6 F/a$.

♣ **Ejercicio propuesto EP11.10** El arco de la estructura de la figura es parabólico de eje vertical. La inercia en la clave es I_0 , mientras que en un punto cualquiera vale $I(s) = I_0/\cos\theta$, siendo θ el ángulo que forma la directriz del arco con la horizontal. La inercia del resto de las barras vale I_0 . En los puntos A y D todas las piezas están articuladas entre sí. Determinar el desplazamiento vertical de los puntos B y D.

Valor de control: El desplazamiento vertical de B vale $19 pL^4/EI$.

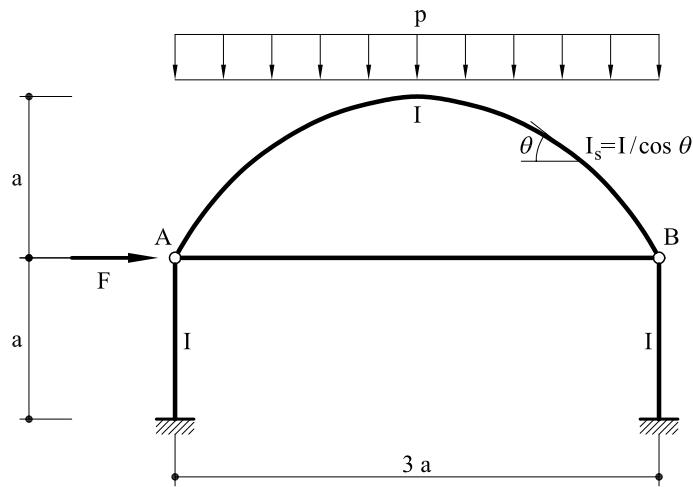


Fig. EP11.9

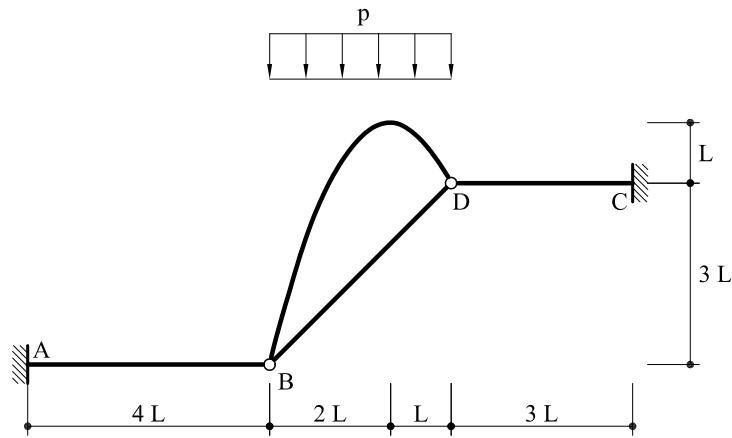


Fig. EP11.10

♣ **Ejercicio propuesto EP11.11** En la estructura que se representa en la figura, todas las barras (rectas o curvas) tienen la misma inercia. Las piezas curvas son circulares de radio $a = 5$ metros, y con tangente horizontal en C y vertical en B y B' .

Hallar:

- Leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes en todas las piezas.
- Valor de las reacciones.
- Valor del esfuerzo axil en las barras BC y $B'C'$

Valor de control: El esfuerzo axil en la barra BC vale $25,5\text{ kN}$.

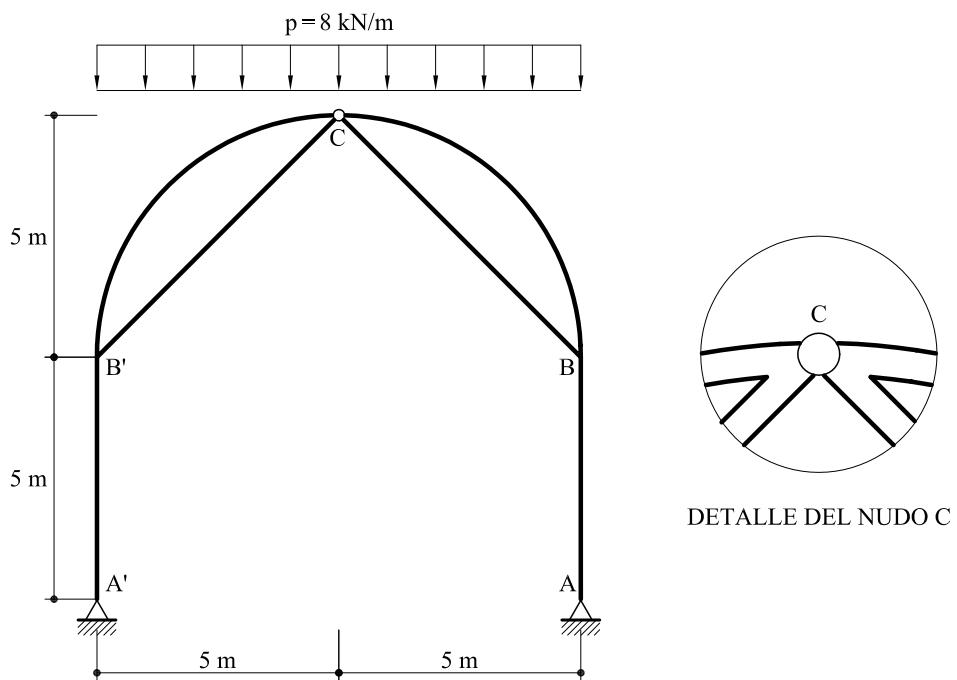


Fig. EP11.11

♣ **Ejercicio propuesto EP11.12** La estructura de la figura está compuesta por dos arcos los cuales están rigidamente unidos entre sí. Ambos arcos son paráboles de segundo grado de eje vertical. Su inercia es tal que $I(s) = I / \cos \theta$, siendo θ el ángulo que forma la tangente al arco en cada punto con la horizontal. Determinar las leyes de esfuerzos en toda la estructura.

Valor de control: La reacción horizontal en el apoyo derecho vale $15,025 p$.

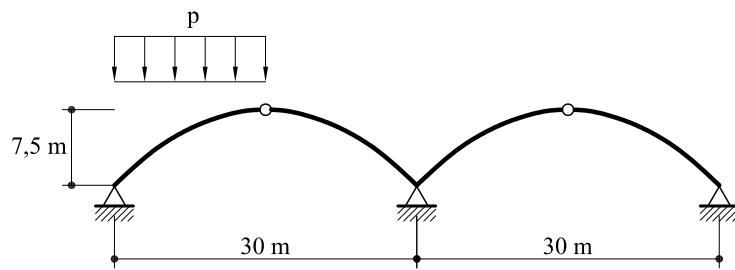


Fig. EP11.12

12 Formulación en 3D

12.1 Introducción

En los capítulos 3 a 6 se ha estudiado el comportamiento de una sección cualquiera sometida a esfuerzo axil, flector, cortante y torsor. Según los resultados obtenidos, los capítulos 7 a 11 se han dedicado al análisis en 2D de las estructuras formadas por piezas lineales. El objetivo del presente capítulo es generalizar a 3D la metodología allí expuesta, así como los principales resultados obtenidos.

En el cálculo de estructuras en tres dimensiones, las expresiones utilizadas son más complejas que en el caso bidimensional. Por ello, los cálculos manuales resultan tediosos y sujetos a errores, razón por la cual se enfocará el estudio teniendo en mente su resolución numérica. Se utilizará desde el principio notación matricial, razón por la cual se supone al lector una cierta soltura en el manejo y manipulación de matrices.

En la mayor parte del capítulo se supone que la torsión obedece a la teoría de la torsión según Saint–Venant, dedicándose el final de la exposición al caso en que se tenga en cuenta la influencia del alabeo.

12.2 Relaciones fundamentales

12.2.1 Relación esfuerzos-deformaciones generalizadas

Supóngase la sección recta de una pieza (recta o curva) tridimensional (Fig. 12.1) en la cual la directriz coincide con la línea de los centros de gravedad. En dicha sección actuarán unos esfuerzos \mathbf{F} y \mathbf{M} (Fig. 12.1 a) y b)) dados por:

$$\mathbf{F} = N\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}\mathbf{F}_l \quad (12.1a)$$

$$\mathbf{M} = T\mathbf{e}_1 + M_{f_2}\mathbf{e}_2 + M_{f_3}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}\mathbf{M}_l \quad (12.1b)$$

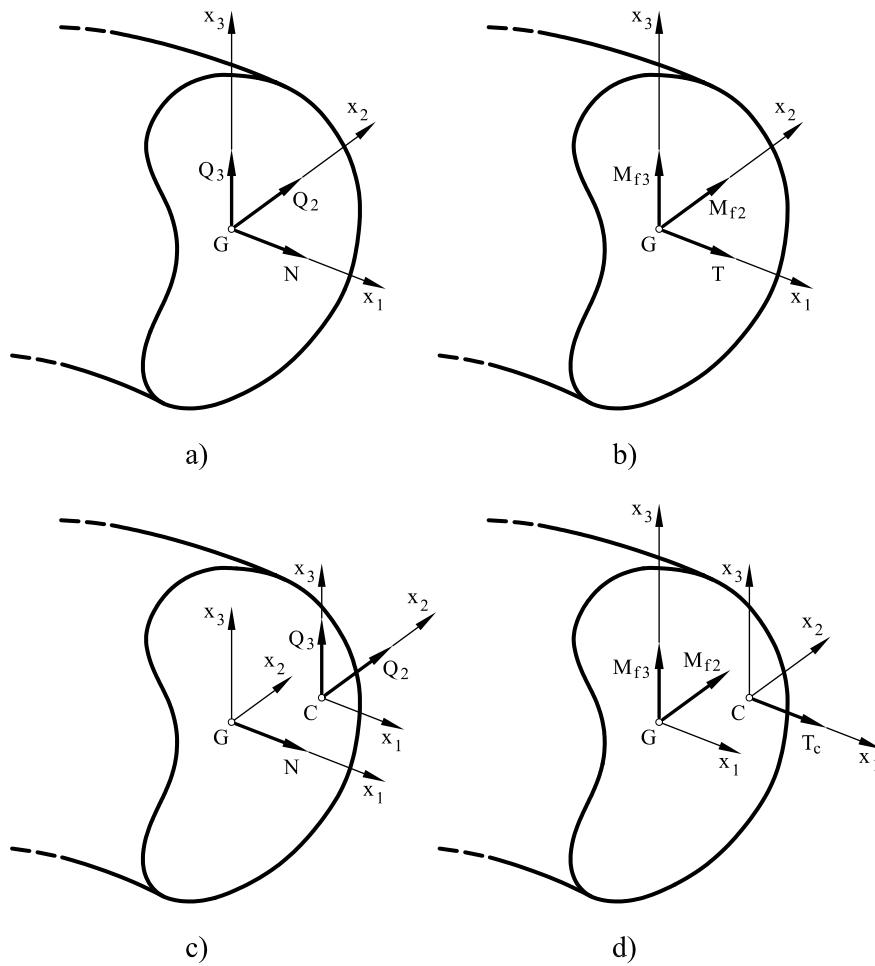


Fig. 12.1 Esfuerzos en una sección: a) Cortantes y axil aplicados en el centro de gravedad, b) Flectores y torsor aplicados en el centro de gravedad, c) Cortantes aplicados en el centro de esfuerzos cortantes y axil en el centro de gravedad, d) Momentos flectores aplicados en el centro de gravedad y torsor aplicado en el centro de esfuerzos cortantes.

De acuerdo con lo estudiado en el Capítulo 3, debido a N se producirá una deformación ϵ_1 de valor

$$\epsilon_1 = \frac{N}{EA} \quad (12.2)$$

Asimismo (ver capítulo 4) la relación entre los momentos flectores M_{f2} , M_{f3} y las curvaturas χ_2 , χ_3 se escribe

$$\chi_2 = \frac{I_3}{E(I_2 I_3 - I_{23}^2)} M_{f2} + \frac{I_{23}}{E(I_2 I_3 - I_{23}^2)} M_{f3} \quad (12.3)$$

$$\chi_3 = \frac{I_{23}}{E(I_2 I_3 - I_{23}^2)} M_{f2} + \frac{I_2}{E(I_2 I_3 - I_{23}^2)} M_{f3} \quad (12.4)$$

Por lo que respecta a los esfuerzos cortantes y al momento torsor actuando en G , el sistema es equivalente a situar los esfuerzos cortantes en el centro de esfuerzos cortantes C , colocando en dicho punto un momento torsor de valor (Fig. 12.1 c) y d))

$$T_c = T + x_{3c} Q_2 - x_{2c} Q_3 \quad (12.5)$$

siendo x_{2c} y x_{3c} las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes respecto a los ejes x_2 , x_3 que pasan por el centro de gravedad G (ver capítulo 5).

La relación entre la curvatura de torsión χ_1 (en el capítulo 6 se la denominó *ángulo específico de torsión*) y T_c viene dada por

$$\chi_1 = \frac{T_c}{GJ} \quad (12.6)$$

es decir:

$$\chi_1 = \frac{1}{GJ} (T + x_{3c} Q_2 - x_{2c} Q_3) \quad (12.7)$$

Volviendo a los esfuerzos cortantes Q_2 y Q_3 , en el capítulo 5 se estableció que si \hat{Q}_2 y \hat{Q}_3 son los esfuerzos cortantes que actúan según los ejes principales \hat{x}_2 y \hat{x}_3 , la deformación por cortante $\hat{\gamma}_2^q$ y $\hat{\gamma}_3^q$ según dichos ejes principales viene dada por

$$\hat{\gamma}_2^q = \frac{1}{GAk_2} \hat{Q}_2 \quad (12.8a)$$

$$\hat{\gamma}_3^q = \frac{1}{GAk_3} \hat{Q}_3 \quad (12.8b)$$

siendo Ak_2 y Ak_3 las secciones reducidas según los ejes \hat{x}_2 y \hat{x}_3 .

Si α es el ángulo que forma el eje principal \hat{x}_2 con x_2 (ver Fig. 12.2) se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

siendo \mathbf{T}_2 la matriz de cambio

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

Análogamente para las deformaciones

$$\begin{bmatrix} \gamma_2^q \\ \gamma_3^q \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^T \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_2^q \\ \hat{\gamma}_3^q \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

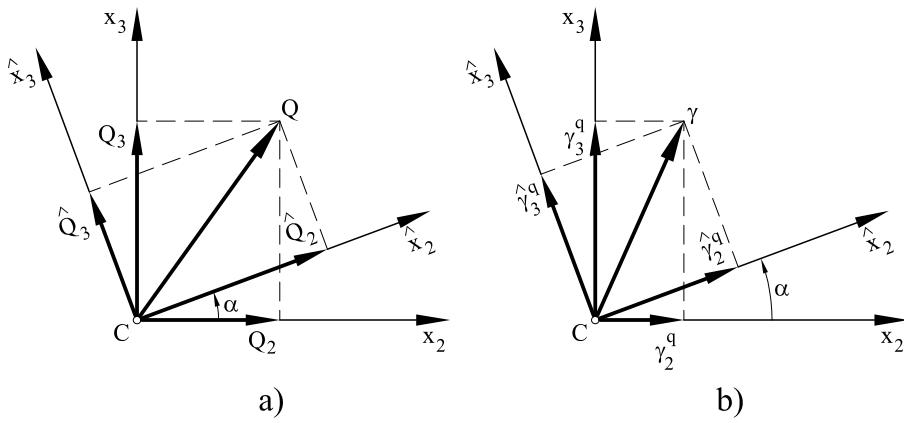


Fig. 12.2 Descomposición del cortante y de las deformaciones por cortante según los ejes principales.

Sustituyendo 12.9 en 12.8 y ésta a su vez en 12.11,

$$\begin{bmatrix} \gamma_2^q \\ \gamma_3^q \end{bmatrix} = \frac{1}{GA} \mathbf{T}_2^T \begin{bmatrix} \frac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (12.12)$$

y llamando

$$d_{22} = \frac{\cos^2 \alpha}{k_2} + \frac{\sin^2 \alpha}{k_3} \quad (12.13a)$$

$$d_{23} = d_{32} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_2} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{k_3} \quad (12.13b)$$

$$d_{33} = \frac{\sin^2 \alpha}{k_2} + \frac{\cos^2 \alpha}{k_3} \quad (12.13c)$$

la expresión 12.12 se escribe

$$\begin{bmatrix} \gamma_2^q \\ \gamma_3^q \end{bmatrix} = \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (12.14)$$

Las deformaciones totales γ_2 y γ_3 se obtendrán añadiendo a γ_2^q y γ_3^q dadas por 12.14 las procedentes del momento torsor T_c , es decir

$$\gamma_2 = \gamma_2^q + x_{3c} \frac{T_c}{GJ} = \gamma_2^q + \frac{x_{3c}}{GJ} (T + x_{3c} Q_2 - x_{2c} Q_3) \quad (12.15a)$$

$$\gamma_3 = \gamma_3^q - x_{2c} \frac{T_c}{GJ} = \gamma_3^q - \frac{x_{2c}}{GJ} (T + x_{3c} Q_2 - x_{2c} Q_3) \quad (12.15b)$$

o sea

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_{22}}{GA} + \frac{x_{3c}^2}{GJ} & \frac{d_{23}}{GA} - \frac{x_{2c}x_{3c}}{GJ} & \frac{x_{3c}}{GJ} \\ \frac{d_{23}}{GA} - \frac{x_{2c}x_{3c}}{GJ} & \frac{d_{33}}{GA} + \frac{x_{2c}^2}{GJ} & -\frac{x_{2c}}{GJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ T \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

Las expresiones 12.2, 12.3, 12.4, 12.7 y 12.16 se pueden agrupar, resultando:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{22}}{GA} + \frac{x_{3c}^2}{GJ} & \frac{d_{23}}{GA} - \frac{x_{2c}x_{3c}}{GJ} & \frac{x_{3c}}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{23}}{GA} - \frac{x_{2c}x_{3c}}{GJ} & \frac{d_{33}}{GA} + \frac{x_{2c}^2}{GJ} & -\frac{x_{2c}}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_{3c}}{GJ} & -\frac{x_{2c}}{GJ} & \frac{1}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3}{EI^2} & \frac{I_{23}}{EI^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{23}}{EI^2} & \frac{I_2}{EI^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q_2 \\ Q_3 \\ T \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

siendo $I^2 = I_2I_3 - I_{23}^2$.

La expresión anterior se puede escribir de forma compacta

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{DR} \quad (12.18)$$

con

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_F \\ \mathbf{\Lambda}_M \end{bmatrix} \quad (12.19a)$$

$$\mathbf{\Lambda}_F = [\epsilon_1, \gamma_2, \gamma_3]^T \quad (12.19b)$$

$$\mathbf{\Lambda}_M = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]^T \quad (12.19c)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \quad (12.19d)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{FF} & \mathbf{D}_{FM} \\ \mathbf{D}_{MF} & \mathbf{D}_{MM} \end{bmatrix} \quad (12.19e)$$

siendo \mathbf{D}_{FF} , \mathbf{D}_{FM} , \mathbf{D}_{MF} y \mathbf{D}_{MM} submatrices de 3×3 , cuyo significado es evidente a partir de 12.17. La matriz \mathbf{D} de las expresiones 12.17 ó 12.18 pueden también escribirse

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}\mathbf{D}^0\mathbf{G}^T \quad (12.20)$$

siendo \mathbf{G} una matriz tal que

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_2 \\ Q_3 \\ T_c \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} N \\ Q_2 \\ Q_3 \\ T \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{bmatrix}$$

es decir

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_{3c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_{2c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

y además

$$\mathbf{D}^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{22}}{GA} & \frac{d_{23}}{GA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{23}}{GA} & \frac{d_{33}}{GA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3}{EI^2} & \frac{I_{23}}{EI^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{23}}{EI^2} & \frac{I_2}{EI^2} \end{bmatrix} \quad (12.22a)$$

siendo su inversa

$$(\mathbf{D}^0)^{-1} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA\tilde{d}_{33} & -GA\tilde{d}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -GA\tilde{d}_{23} & GA\tilde{d}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & -EI_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_{23} & EI_3 \end{bmatrix} \quad (12.22b)$$

con

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}$$

La expresión 12.20 presenta ventajas que se harán evidentes más adelante. Nótese que \mathbf{D}^0 es la matriz que relaciona las tensiones generalizadas con las deformaciones generalizadas para el caso en que el centro de gravedad y el centro de esfuerzos cortantes coincidan.

Las expresiones 12.17 ó 12.18 relacionan las deformaciones generalizadas en una sección con los esfuerzos que actúan en dicha sección. Como puede observarse, la matriz \mathbf{D} es simétrica.

Es posible asimismo escribir 12.19b y 12.19c en la forma vectorial

$$\boldsymbol{\Lambda}_F^a = \epsilon_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \boldsymbol{\Lambda}_F \quad (12.23a)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_M^a = \chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2 + \chi_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \boldsymbol{\Lambda}_M \quad (12.23b)$$

Si se toma como directriz una linea no coincidente con el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones rectas, y se supone (Fig. 12.3) que G' es la intersección de dicha directriz con la sección, se puede escribir:

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \mathbf{B} \boldsymbol{\Lambda} \quad (12.24a)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}^T \mathbf{R}' \quad (12.24b)$$

siendo \mathbf{R}' y $\boldsymbol{\Lambda}'$ los esfuerzos y deformaciones referidos a G' y \mathbf{B} una matriz obtenida

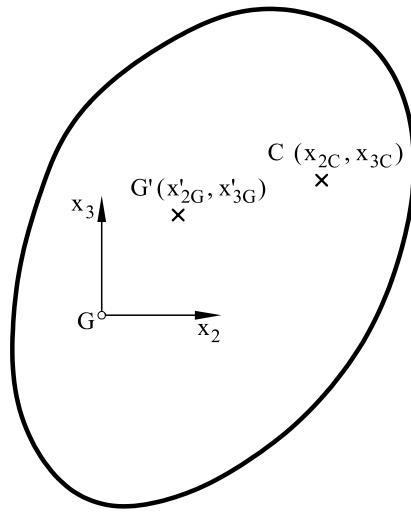


Fig. 12.3 Puntos G, G' y C de una sección.

por consideraciones cinemáticas y de equilibrio. Su valor es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x'_{3G} & -x'_{2G} \\ 0 & 1 & 0 & -x'_{3G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x'_{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

en donde x'_{2G} y x'_{3G} son las coordenadas de G' respecto a G .

Es posible, por lo tanto, escribir la nueva relación entre \mathbf{A}' y \mathbf{R}' de la forma

$$\mathbf{A}' = \mathbf{D}'\mathbf{R}' \quad (12.26)$$

siendo

$$\mathbf{D}' = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^T \quad (12.27)$$

Aunque en los desarrollos sucesivos se hará mención, por simplicidad, de la matriz \mathbf{D} , la exposición es completamente general, pudiéndose sustituír por \mathbf{D}' .

12.2.2 Relaciones deformaciones generalizadas - movimientos

En este apartado se desarrollarán las expresiones que relacionan las deformaciones generalizadas Λ_F^a y Λ_M^a con los movimientos. Para ello, sea \mathbf{U} el vector de desplazamientos, el cual puede expresarse bien en función de sus componentes globales o locales, es decir

$$\mathbf{U} = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 + u_3 \mathbf{i}_3 = \mathbf{i} \mathbf{u} \quad (12.28a)$$

$$\mathbf{U} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \mathbf{v} \quad (12.28b)$$

Sea asimismo Ψ el vector giro en cada punto, el cual se expresa en función de sus componentes locales

$$\Psi = \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \varphi_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e} \boldsymbol{\varphi} \quad (12.28c)$$

El camino para obtener las relaciones buscadas seguirá las pautas desarrolladas para 2D (apartado 7.2.1.2).

Si \mathbf{z} son las coordenadas de un punto cualquiera de la directriz de la pieza antes de la deformación y \mathbf{z}' es la coordenada del mismo punto después de la deformación, los desplazamientos se escribirán

$$\mathbf{U} = \mathbf{z}' - \mathbf{z} \quad (12.29)$$

y también

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \frac{d\mathbf{z}'}{ds} - \frac{d\mathbf{z}}{ds} = \mathbf{t} - \mathbf{e}_1 \quad (12.30)$$

siendo \mathbf{t} el vector tangente a la directriz después de la deformación (ver Fig. 7.3).

Asimismo, de acuerdo también con la figura 7.3, el vector \mathbf{e}'_1 es igual al vector \mathbf{e}_1 girado un ángulo Ψ y tal que

$$\|\mathbf{e}'_1\| = \|\mathbf{e}_1\|(1 + \epsilon_1) = (1 + \epsilon_1) \quad (12.31)$$

es decir

$$\mathbf{e}'_1 \frac{1}{1 + \epsilon_1} = \mathbf{e}_1 + \Psi \times \mathbf{e}_1 \quad (12.32)$$

Como además

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}'_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \Psi \times \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 \quad (12.33)$$

y sustituyendo en 12.30

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{ds} &= \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \Psi \times \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 = \\ &= \epsilon_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 + \Psi \times \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) = \\ &= \Lambda_F^a + \Psi \times \mathbf{e}_1(1 + \epsilon_1) \end{aligned} \quad (12.34)$$

y dado que el producto $\Psi \times \mathbf{e}_1 \epsilon_1$ es despreciable, se puede finalmente escribir

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \mathbf{\Lambda}_F^a + \Psi \times \mathbf{e}_1 \quad (12.35)$$

o también

$$\mathbf{\Lambda}_F^a = \frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \Psi \quad (12.36)$$

Por lo que respecta a las deformaciones $\mathbf{\Lambda}_M^a$, se puede escribir directamente

$$\mathbf{\Lambda}_M^a = \frac{d\Psi}{ds} \quad (12.37)$$

Las anteriores expresiones 12.36 y 12.37 pueden escribirse también en función de las componentes según los ejes locales:

$$\mathbf{\Lambda}_F^a = \mathbf{e}\mathbf{\Lambda}_F \quad (12.38a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_F^a &= \frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \Psi = \frac{d(\mathbf{e}\mathbf{v})}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \Psi = \\ &= \mathbf{e} \left(\frac{d\mathbf{v}}{ds} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}_3 \boldsymbol{\varphi} \right) \end{aligned} \quad (12.38b)$$

Igualando ambas expresiones

$$\mathbf{\Lambda}_F = \frac{d\mathbf{v}}{ds} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}_3 \boldsymbol{\varphi} \quad (12.39)$$

en donde $\boldsymbol{\eta}_3$ es la matriz de 3×3 dada por

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.40)$$

Análogamente, para los giros, a partir de 12.37

$$\mathbf{e}\mathbf{\Lambda}_M = \mathbf{e} \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\varphi} \right) \quad (12.41)$$

es decir

$$\mathbf{\Lambda}_M = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\varphi} \quad (12.42)$$

Las expresiones 12.39 y 12.42 son las expresiones buscadas. Proporcionan en componentes locales las relaciones entre deformaciones generalizadas y los movimientos.

12.3 Teoremas de trabajos virtuales

Los teoremas de trabajos virtuales fueron introducidos en el capítulo 7 para estructuras en dos dimensiones. Tal como allá se dijo, tanto dichos teoremas, como, en general, todos los que allá se dedujeron, son también válidos para piezas tridimensionales. En la presente sección se desarrollarán de forma sucinta las expresiones 3D del teorema de los trabajos virtuales, así como del teorema de los trabajos virtuales complementarios.

A partir de las ecuaciones de equilibrio interno 2.10 se puede escribir:

$$\int_o^{s_o} \bar{\mathbf{U}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} \right) ds + \int_o^{s_o} \bar{\Psi} \cdot \left(\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{m} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{F} \right) ds = 0 \quad (12.43)$$

en donde $\bar{\mathbf{U}}$ y $\bar{\Psi}$ son respectivamente desplazamientos y giros virtuales.

Las anteriores expresiones pueden integrarse por partes, por lo que, teniendo en cuenta por una parte que $\bar{\Psi} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}) = -(\mathbf{e}_1 \times \bar{\Psi}) \cdot \mathbf{F}$ y, por otra, las expresiones 12.36 y 12.37

$$\begin{aligned} \int_o^{s_o} \bar{\Lambda}_F^a \cdot \mathbf{F} ds + \int_o^{s_o} \bar{\Lambda}_M^a \cdot \mathbf{M} ds &= \int_o^{s_o} \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{p} ds + \\ &+ \int_o^{s_o} \bar{\Psi} \cdot \mathbf{m} ds + \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{F}|_o^{s_o} + \bar{\Psi} \cdot \mathbf{M}|_o^{s_o} \end{aligned} \quad (12.44)$$

y escribiendo la expresión anterior en las componentes locales:

$$\int_o^{s_o} \bar{\Lambda}^T \mathbf{R} ds = \int_o^{s_o} (\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{p} + \bar{\varphi}^T \mathbf{m}) ds + \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{F}_l|_o^{s_o} + \bar{\varphi}^T \mathbf{M}_l|_o^{s_o} \quad (12.45)$$

Las dos igualdades anteriores constituyen la expresión del teorema de los trabajos virtuales. Análogamente, el teorema de los trabajos virtuales complementarios se escribirá

$$\int_o^{s_o} \Lambda^T \bar{\mathbf{R}} ds = \int_o^{s_o} (\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{p}} + \varphi^T \bar{\mathbf{m}}) ds + \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{F}}_l|_o^{s_o} + \varphi^T \bar{\mathbf{M}}_l|_o^{s_o} \quad (12.46)$$

cuya demostración sigue los mismos pasos que la anterior.

12.4 Determinación de movimientos

En los capítulos 7 y 11 se han demostrado los dos teoremas de Castigliano, así como las fórmulas de Navier-Bresse para la obtención de movimientos. En el presente apartado se darán las correspondientes expresiones para piezas 3D.

Para ello, la energía elástica se escribe

$$W = \frac{1}{2} \int_o^{s_o} (\Lambda_F^a \cdot \mathbf{F} + \Lambda_M^a \cdot \mathbf{M}) ds \quad (12.47)$$

que también puede escribirse

$$W = \frac{1}{2} \int_o^{s_o} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{R} ds = \frac{1}{2} \int_o^{s_o} \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} ds \quad (12.48)$$

Por lo que, de acuerdo con las expresiones (7.56) y (7.63), el primer y segundo teorema de Castigiano se escribirán respectivamente:

$$F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i^*} \quad (12.49a)$$

$$u_i^* = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (12.49b)$$

con los significados dados en los apartados 7.6 y 7.7.

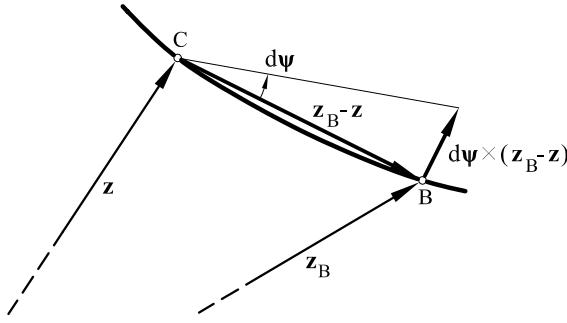


Fig. 12.4 Movimientos debidos a giros

Por lo que respecta a las fórmulas de Navier-Bresse, se seguirá la metodología desarrollada en 11.4. El desplazamiento de un punto B de una pieza debido a la flexibilidad de una dovela situada en C vale (ver Fig. 12.4) $\mathbf{\Lambda}_F^a ds + d\Psi \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})$, por lo que el movimiento relativo del punto B respecto al punto A valdrá

$$\mathbf{u}_{AB} = \int_A^B [\mathbf{\Lambda}_F^a + \mathbf{\Lambda}_M^a \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})] ds \quad (12.50)$$

y teniendo en cuenta 12.18 y 12.23

$$\mathbf{u}_{AB} = \int_A^B [\mathbf{e}(\mathbf{D}_{FF}\mathbf{F}_l + \mathbf{D}_{FM}\mathbf{M}_l) + \mathbf{e}(\mathbf{D}_{MF}\mathbf{F}_l + \mathbf{D}_{MM}\mathbf{M}_l) \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})] ds \quad (12.51)$$

Por lo que el desplazamiento del punto B valdrá

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \Psi_A \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A) + \mathbf{u}_{AB} \quad (12.52)$$

Asimismo el giro del punto B valdrá

$$\Psi_B = \Psi_A + \int_A^B \frac{d\Psi}{ds} ds = \Psi_A + \int_A^B \Lambda_M^a ds = \Psi_A + \int_A^B \mathbf{e}(\mathbf{D}_{MF}\mathbf{F}_l + \mathbf{D}_{MM}\mathbf{M}_l)ds \quad (12.53)$$

Las igualdades 12.51 y 12.53 constituyen la expresión de las fórmulas Navier-Bresse.

Las fórmulas de Navier-Bresse pueden obtenerse también a partir de la integración entre los puntos A y B de las expresiones 12.35 y 12.37

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{U}_A + \int_A^B (\Lambda_F^a + \Psi \times \mathbf{e}_1) ds \quad (12.54)$$

Teniendo en cuenta que

$$\Psi \times \mathbf{e}_1 = \Psi \times \frac{d\mathbf{z}}{ds}$$

integrando por partes el último sumando de 12.54,

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{U}_A + \Psi \times \mathbf{z}|_A^B + \int_A^B (\Lambda_F^a - \frac{d\Psi}{ds} \times \mathbf{z}) ds$$

y después de algunas manipulaciones matemáticas se obtiene

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{U}_A + \Psi_A \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z}_A) + \int_A^B [\Lambda_F^a + \Lambda_M^a \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})] ds$$

expresión idéntica a la 12.52.

♣ Problema resuelto P12.1 La ménsula de la figura P12.1.1 tiene directriz circular. Su sección recta es tal que todos los ejes son principales de inercia. Sus características mecánicas son:

- Área: A
- Áreas reducidas: $k_2 A = k_3 A = kA$
- Rigidez de flexión: $EI_2 = EI_3 = EI$
- Rigidez a torsión: $GJ = 0,5EI$
- El centro de gravedad coincide con el centro de esfuerzos cortantes

En el punto B actúa una fuerza concentrada de valor P cuya dirección coincide con el eje z_3 y cuyo sentido coincide también con el eje z_3 positivo.

Se desea obtener el desplazamiento y giro de B utilizando el segundo teorema de Castigliano, así como las fórmulas de Navier-Bresse.

Solución

a) Utilizando el segundo teorema de Castigliano

Las leyes de esfuerzos se escriben:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}\mathbf{F}_l = P\mathbf{e}_3 \quad (a)$$

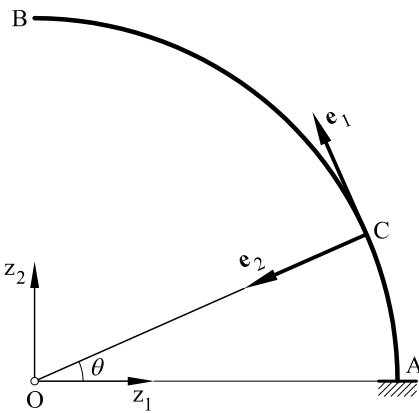


Fig. P12.1.1 Ménsula plana sometida a flexión y torsión.

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}\mathbf{M}_l = \overrightarrow{CB} \times P\mathbf{e}_3 = PR(1 - \sin \theta) \mathbf{e}_1 - PR \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad (b)$$

es decir

$$\mathbf{F}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_l = \begin{bmatrix} PR(1 - \sin \theta) \\ -PR \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

La matriz \mathbf{D} es en este caso diagonal y se escribe

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/EA & & & & \\ & 1/kGA & & \mathbf{0} & \\ & & 1/kGA & & \\ \mathbf{0} & & & 2/EI & \\ & & & & 1/EI \\ & & & & & 1/EI \end{bmatrix} \quad (d)$$

La energía elástica vale:

$$W = \frac{P^2}{2} \int_A^B [0, 0, 1] \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 1/kGA & 0 \\ 0 & 0 & 1/kGA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds + \\ + \frac{P^2}{2} \int_A^B [R(1 - \sin \theta), -R \cos \theta, 0] \begin{bmatrix} 2/EI & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(1 - \sin \theta) \\ -R \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} ds \quad (e)$$

Aplicando el segundo teorema de Castigliano:

$$u_{3B} = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\pi R}{2kGA} P + \left(\frac{7\pi}{4} - 4\right) \frac{R^3}{EI} P \quad (f)$$

b) *Aplicando las fórmulas de Navier-Bresse*

Se partirá de la expresión 12.51, dado que, en este caso, el movimiento relativo del punto B respecto a A es igual al movimiento total del punto A . Al ser la matriz \mathbf{D} , en el presente ejercicio, una matriz diagonal, $\mathbf{D}_{FM} = \mathbf{D}_{FM} = \mathbf{0}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_B &= \int_A^B [\mathbf{e} \mathbf{D}_{FF} \mathbf{F}_l + (\mathbf{e} \mathbf{D}_{MM} \mathbf{M}_l) \times (\mathbf{z}_B - \mathbf{z})] ds = \\ &= \int_B^{\pi/2} \left\{ \mathbf{e} \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 1/kGA & 0 \\ 0 & 0 & 1/kGA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e} \begin{bmatrix} 2/EI & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(1 - \sin \theta) \\ -R \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \times [R \cos \theta \mathbf{e}_1 + R(1 - \sin \theta) \mathbf{e}_2] \right\} R d\theta = \\ &= \left[\frac{\pi R}{2kGA} + \left(\frac{7\pi}{4} - 4\right) \frac{R^3}{EI} \right] P \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (g)$$

Resultado idéntico al obtenido previamente utilizando el segundo teorema de Castigliano.

12.5 Estudio de las piezas rectas. Matrices de rigidez: ecuaciones elásticas

12.5.1 Caso general

En el capítulo 9 se dedujeron las matrices de rigidez \mathbf{K}_{AA} , \mathbf{K}_{AB} , \mathbf{K}_{BA} y \mathbf{K}_{BB} de una pieza recta situada en el plano. Asimismo, en los capítulos 10 y 11 se ha estudiado el método de rigidez para la resolución de cualquier tipo de estructuras. Dicho método es el más ampliamente utilizado en la práctica, ya que permite ser fácilmente programado para su uso en ordenadores. Recuérdese que las citadas matrices \mathbf{K}_{AA} , \mathbf{K}_{AB} , \mathbf{K}_{BA} y \mathbf{K}_{BB} constituyen el fundamento del mencionado método. El objetivo del presente apartado es la deducción de las anteriores matrices de rigidez para una pieza recta tridimensional.

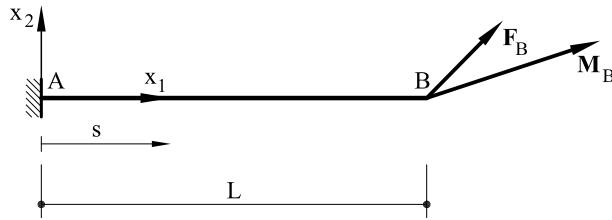


Fig. 12.5 Ménsula tridimensional sometida a fuerzas y momentos en uno de sus extremos.

Para ello, supóngase la ménsula de la figura 12.5 en cuyo extremo B actúan unas fuerzas \mathbf{eF}_B y unos momentos \mathbf{eM}_B .

Las leyes de esfuerzos se escribirán

$$\mathcal{F} = \mathbf{eF}_l = \mathbf{eF}_B \quad (12.55a)$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{eM}_l = \mathbf{eM}_B + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}_B(L - s) = \mathbf{eM}_B + \mathbf{e}\boldsymbol{\eta}_3 \mathbf{F}_B(L - s) \quad (12.55b)$$

viniendo la matriz $\boldsymbol{\eta}_3$ dada por 12.40.

Las expresiones anteriores pueden escribirse en componentes:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{M}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\eta}_3(L - s) & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}_B \end{bmatrix} = \mathbf{A}_6 \mathbf{R}_B \quad (12.56)$$

en donde el significado de \mathbf{A}_6 y \mathbf{R}_B resulta evidente.

La energía elástica se escribe

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A}^T \mathbf{R} ds = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{R}_B^T \mathbf{A}_6^T \mathbf{D} \mathbf{A}_6 \mathbf{R}_B ds = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{R}_B^T \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{D} \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{R}_B \end{aligned} \quad (12.57)$$

y derivando respecto a las fuerzas y momentos \mathbf{R}_B se obtendrán los movimientos del extremo B

$$\boldsymbol{\delta}_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \boldsymbol{\varphi}_B \end{bmatrix} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{R}_B} = \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{D} \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{R}_B \quad (12.58)$$

En la expresión anterior se puede sustituir la matriz \mathbf{D} por el producto de matrices dado por 12.20

$$\boldsymbol{\delta}_{AB} = \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{G} \mathbf{D}^0 \mathbf{G}^T \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{R}_B \quad (12.59)$$

y dado que, tal como puede comprobarse, $\mathbf{A}_6^T \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{A}_6^T$, resulta

$$\boldsymbol{\delta}_{AB} = \left(\int_0^L \mathbf{G} \mathbf{A}_6^T \mathbf{D}^0 \mathbf{A}_6 \mathbf{G}^T ds \right) \mathbf{R}_B = \mathbf{G} \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{D}^0 \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{G}^T \mathbf{R}_B = \mathbf{G} \mathbf{Y}^0 \mathbf{G}^T \mathbf{R}_B \quad (12.60)$$

siendo \mathbf{Y}^0 una matriz de flexibilidad dada por

$$\mathbf{Y}^0 = \int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{D}^0 \mathbf{A}_6 ds \quad (12.61)$$

En el cuadro 12.1 pueden verse los valores explícitos de la matriz \mathbf{Y}^0 . Nótese que dicha matriz \mathbf{Y}^0 al ser una matriz de flexibilidad, su inversa $(\mathbf{Y}^0)^{-1} = \mathbf{K}_{BB}^0$ será una matriz de rigidez. En los cuadros 12.2 a 12.5 se tabulan:

- Cuadro 12.2: Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 para el caso general (con influencia del esfuerzo cortante en la deformación y en ejes cualesquiera).
- Cuadro 12.3: Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 sin considerar la influencia del esfuerzo cortante en la deformación y en ejes cualesquiera.
- Cuadro 12.4: Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 considerando la influencia del esfuerzo cortante en la deformación y en ejes principales.
- Cuadro 12.5: Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 sin considerar la influencia del esfuerzo cortante en la deformación y en ejes principales.

Nótese que la matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 corresponde al caso particular de que el centro de esfuerzos cortantes coincide con el centro de gravedad de la sección.

Cuadro 12.1 Matriz de flexibilidad \mathbf{Y}^0

$\frac{L}{EA}$	0	0	0	0	0
0	$(1 + \alpha_{22}) \frac{I_2 L_3}{3EI^2}$	$-(1 - \alpha_{23}) \frac{I_{23} L^3}{3EI^2}$	0	$\frac{I_{23} L^2}{2EI^2}$	$\frac{I_2 L^2}{2EI^2}$
0	$-(1 - \alpha_{23}) \frac{I_{23} L^3}{3EI^2}$	$(1 + \alpha_{33}) \frac{I_3 L^3}{3EI^2}$	0	$-\frac{I_3 L^2}{2EI^2}$	$-\frac{I_{23} L^2}{2EI^2}$
0	0	0	$\frac{L}{GJ}$	0	0
0	$\frac{I_{23} L^2}{2EI^2}$	$-\frac{I_3 L^2}{3EI^2}$	0	$\frac{I_3 L}{EI^2}$	$\frac{I_{23} L}{EI^2}$
0	$\frac{I_2 L^2}{2EI^2}$	$-\frac{I_{23} L^2}{3EI^2}$	0	$\frac{I_{23} L}{EI^2}$	$\frac{I_2 L}{EI^2}$

siendo $\alpha_{ij} = \frac{3}{L^2} \frac{EI^2}{GA} \frac{d_{ij}}{I_{ij}}$ ($I_{22} = I_2$ $I_{33} = I_3$).

Cuadro 12.2 Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 : Caso general

$\frac{L}{EA}$	0	0	0	0	0
0	$12\frac{EI_3}{L^3}g_{22}$	$12\frac{EI_{23}}{L^3}g_{23}$	0	$6\frac{EI_{23}}{L^2}g_{25}$	$-\frac{6EI_3}{L^2}g_{26}$
0	$12\frac{EI_{23}}{L^3}g_{32}$	$12\frac{EI_2}{L^3}g_{33}$	0	$6\frac{EI_2}{L^2}g_{35}$	$-\frac{6EI_{23}}{L^2}g_{36}$
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0
0	$\frac{6EI_{23}}{L^2}g_{52}$	$\frac{6EI_2}{L^2}g_{53}$	0	$4\frac{EI_2}{L}g_{55}$	$-\frac{4EI_{23}}{L}g_{56}$
0	$-\frac{6EI_3}{L^2}g_{62}$	$-\frac{6EI_{23}}{L^2}g_{63}$	0	$-4\frac{EI_{23}}{L}g_{65}$	$\frac{4EI_3}{L}g_{66}$

siendo:

$$g_{22} = g_{26} = g_{62} = (1 + 4\alpha_{33})I^2/d\eta$$

$$g_{23} = g_{32} = g_{25} = g_{52} = g_{36} = g_{63} = (1 - 4\alpha_{23})I^2/d\eta$$

$$g_{33} = g_{35} = g_{53} = (1 + 4\alpha_{22})I^2/d\eta$$

$$g_{55} = \frac{(1 + 4\alpha_{22})(1 + \alpha_{33})I_2I_3 - (1 + 3\alpha_{22} - 2\alpha_{23} + 4\alpha_{23}^2)I_{23}^2}{d\eta}$$

$$g_{56} = g_{65} = \frac{(1 + \alpha_{22} - 3\alpha_{23} + \alpha_{33} + 4\alpha_{22}\alpha_{33})I_2I_3 - (1 - 5\alpha_{23} + 4\alpha_{23}^2)I_{23}^2}{d\eta}$$

$$g_{66} = \frac{(1 + \alpha_{22})(1 + 4\alpha_{33})I_2I_3 - (1 + 3\alpha_{33} - 2\alpha_{23} + 4\alpha_{23}^2)I_{23}^2}{d\eta}$$

$$d\eta = (1 + 4\alpha_{22})(1 + 4\alpha_{33})I_2I_3 - (1 - 4\alpha_{23})^2I_{23}^2$$

Cuadro 12.3 Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 : No se considera la influencia del cortante en la deformación. Los ejes de la sección son cualesquiera.

$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
0	$12\frac{EI_3}{L^3}$	$12\frac{EI_{23}}{L^3}$	0	$6\frac{EI_{23}}{L^2}$	$-\frac{6EI_3}{L^2}$
0	$12\frac{EI_{23}}{L^3}$	$12\frac{EI_2}{L^3}$	0	$6\frac{EI_2}{L^2}$	$-\frac{6EI_{23}}{L^2}$
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0
0	$\frac{6EI_{23}}{L^2}$	$\frac{6EI_2}{L^2}$	0	$4\frac{EI_2}{L}$	$-\frac{4EI_{23}}{L}$
0	$-\frac{6EI_3}{L^2}$	$-\frac{6EI_{23}}{L^2}$	0	$-4\frac{EI_{23}}{L}$	$\frac{4EI_3}{L}$

Cuadro 12.4 Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 : Se considera la influencia del cortante en la deformación. Los ejes de la sección son principales de inercia.

$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
0	$12\frac{EI_3}{L^3}g'_{22}$	0	0	0	$-\frac{6EI_3}{L^2}g'_{26}$
0	0	$12\frac{EI_2}{L^3}g'_{33}$	0	$6\frac{EI_2}{L^2}g'_{35}$	0
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0
0	0	$\frac{6EI_2}{L^2}g'_{53}$	0	$4\frac{EI_2}{L}g'_{55}$	0
0	$-\frac{6EI_3}{L^2}g'_{62}$	0	0	0	$\frac{4EI_3}{L}g'_{66}$

Siendo

$$g'_{22} = g'_{26} = g'_{62} = \frac{1}{1 + 4\alpha_{22}}$$

$$g'_{33} = g'_{35} = g'_{53} = \frac{1}{1 + 4\alpha_{33}}$$

$$g'_{55} = \frac{1 + \alpha_{33}}{1 + 4\alpha_{33}}$$

$$g'_{66} = \frac{1 + \alpha_{22}}{1 + 4\alpha_{22}}$$

Cuadro 12.5 Matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 : No se considera la deformación debida al esfuerzo cortante. Los ejes de la sección son principales de inercia.

$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
0	$12\frac{EI_3}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_3}{L^2}$
0	0	$12\frac{EI_2}{L^3}$	0	$6\frac{EI_2}{L^2}$	0
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0
0	0	$\frac{6EI_2}{L^2}$	0	$4\frac{EI_2}{L}$	0
0	$-\frac{6EI_3}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_3}{L}$

Por otra parte, invirtiendo la relación 12.60, se obtiene la expresión de la matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB} en las coordenadas locales de la barra:

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{K}_{BB} \boldsymbol{\delta}_{AB} \quad (12.62)$$

siendo

$$\mathbf{K}_{BB} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{K}_{BB}^0 \mathbf{G}^{-1} \quad (12.63)$$

en donde, como queda dicho, la matriz \mathbf{K}_{BB}^0 puede verse en los cuadros 12.2 a 12.5 y

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_{3c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_{2c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.64)$$

Las otras tres matrices de rigidez \mathbf{K}_{AA} , \mathbf{K}_{AB} y \mathbf{K}_{BA} pueden obtenerse a partir de \mathbf{K}_{BB} y de consideraciones de equilibrio. Considérese para ello una barra recta cualquiera (Fig. 12.6). Dicha barra tendrá unas fuerzas y momentos de extremo de barra \mathbf{R}_A y \mathbf{R}_B en sus extremos A y B . Asimismo, tendrá unos movimientos $\boldsymbol{\delta}_A$ y $\boldsymbol{\delta}_B$ también en dichos extremos A y B . Se trata de buscar las ecuaciones que ligan las fuerzas y momentos \mathbf{R} con los movimientos $\boldsymbol{\delta}$ (ecuaciones elásticas).

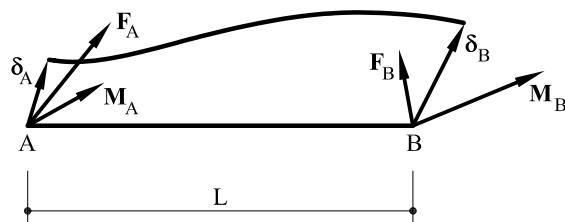


Fig. 12.6 Pieza recta antes y después de la deformación.

Por equilibrio de la barra

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{H}\mathbf{R}_B = 0 \quad (12.65)$$

siendo \mathbf{H} la matriz de equilibrio en coordenadas de la barra. Su expresión es:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\eta}_3 L & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (12.66)$$

Conocida por tanto \mathbf{H} la expresión 12.65 proporciona una relación entre las fuerzas y momentos de extremo de barra.

Supóngase seguidamente la misma barra sometida a unas fuerzas y momentos de extremo de barra arbitrarios \mathbf{R}'_A y \mathbf{R}'_B , y a la cual se la somete a un movimiento de sólido rígido. Sean $\boldsymbol{\delta}_A^*$ y $\boldsymbol{\delta}_B^*$ los movimientos de A y B debidos al mencionado movimiento de sólido rígido. Lógicamente, al estar la barra en equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas y momentos \mathbf{R}'_A y \mathbf{R}'_B será nulo, es decir:

$$(\mathbf{R}'_A)^T \boldsymbol{\delta}_A^* + (\mathbf{R}'_B)^T \boldsymbol{\delta}_B^* = 0 \quad (12.66)$$

y teniendo en cuenta 12.65,

$$(\mathbf{R}'_B)^T \mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta}_A^* = (\mathbf{R}'_B)^T \boldsymbol{\delta}_B^* \quad (12.67)$$

y puesto que \mathbf{R}'_A y \mathbf{R}'_B son arbitrarios, se obtiene finalmente

$$\mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta}_A^* = \boldsymbol{\delta}_B^* \quad (12.68)$$

expresión que proporciona una importante relación entre los movimientos de sólido rígido de los dos extremos de una pieza recta.

Volviendo a la barra recta de la figura 12.6, está claro que el movimiento $\boldsymbol{\delta}_B$ se puede descomponer en el movimiento relativo del punto B respecto al punto A más un movimiento de B debido a un movimiento de sólido rígido de la barra. Dicho movimiento de sólido rígido valdrá en A , $\boldsymbol{\delta}_A^* = \boldsymbol{\delta}_A$, y en B , $\boldsymbol{\delta}_B^*$, por lo que

$$\boldsymbol{\delta}_A = \boldsymbol{\delta}_A^* \quad (12.69a)$$

$$\boldsymbol{\delta}_B = \boldsymbol{\delta}_B^* + \boldsymbol{\delta}_{AB} \quad (12.69b)$$

y dado que $\boldsymbol{\delta}_B^* = \mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta}_A^*$ se tendrá

$$\boldsymbol{\delta}_{AB} = \boldsymbol{\delta}_B - \mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta}_A \quad (12.70)$$

Sustituyendo la anterior expresión 12.70 en 12.62,

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{K}_{BB} \boldsymbol{\delta}_B - \mathbf{K}_{BB} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta}_A \quad (12.71a)$$

y sustituyendo la anterior expresión en 12.65,

$$\mathbf{R}_A = -\mathbf{H} \mathbf{K}_{BB} \boldsymbol{\delta}_B + \mathbf{H} \mathbf{K}_{BB} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\delta}_A \quad (12.71b)$$

Las anteriores expresiones 12.71 pueden escribirse de forma compacta

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{K}_{AA} \boldsymbol{\delta}_A + \mathbf{K}_{AB} \boldsymbol{\delta}_B \quad (12.72a)$$

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{K}_{BA} \boldsymbol{\delta}_A + \mathbf{K}_{BB} \boldsymbol{\delta}_B \quad (12.72b)$$

siendo

$$\mathbf{K}_{AA} = \mathbf{H} \mathbf{K}_{BB} \mathbf{H}^T \quad \mathbf{K}_{AB} = -\mathbf{H} \mathbf{K}_{BB} \quad \mathbf{K}_{BA} = -\mathbf{K}_{BB} \mathbf{H}^T \quad (12.73)$$

Las expresiones 12.72 constituyen las ecuaciones elásticas de una barra recta en sus coordenadas locales.

Nótese que las anteriores matrices de rigidez pueden ser obtenidas, a partir de \mathbf{K}_{BB}^0 , hallando previamente la matriz \mathbf{K}^0 dada por

$$\mathbf{K}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^0 & \mathbf{K}_{AB}^0 \\ \mathbf{K}_{BA}^0 & \mathbf{K}_{BB}^0 \end{bmatrix}$$

Para ello, desarrollando 12.73:

$$\mathbf{K}_{AA} = \mathbf{H}(\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{K}_{BB}^0 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^T = (\mathbf{G}^T)^{-1} \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{K}_{BB}^0 \mathbf{H}^T}_{\mathbf{K}_{AA}^0} \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{K}_{AA}^0 \mathbf{G}^{-1} \quad (12.74a)$$

$$\mathbf{K}_{AB} = -\mathbf{H}(\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{K}_{BB}^0 \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \underbrace{(-\mathbf{H} \mathbf{K}_{BB}^0)}_{\mathbf{K}_{AB}^0} \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{K}_{AB}^0 \mathbf{G}^{-1} \quad (12.74b)$$

y lo mismo para $\mathbf{K}_{BA} = \mathbf{K}_{AB}^T$, dado que $\mathbf{H}(\mathbf{G}^T)^{-1} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{H}$.

De esta forma se obtiene la matriz de rigidez \mathbf{K} de la forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \quad (12.75)$$

Por otro lado, las ecuaciones elásticas 12.72 pueden ser escritas en coordenadas globales a partir de la matriz \mathbf{E} definida en 2.1. Para ello, se define la matriz \mathbf{E}_6 de la forma

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las componentes en los ejes globales de los vectores \mathbf{R} y $\boldsymbol{\delta}$ se expresan en función de las componentes en los ejes locales mediante

$$\mathbf{R}^g = \mathbf{E}_6^T \mathbf{R} \quad \boldsymbol{\delta}^g = \mathbf{E}_6^T \boldsymbol{\delta} \quad (12.76)$$

las ecuaciones elásticas 12.72 se transforman en

$$\mathbf{R}_A^g = \mathbf{K}_{AA}^g \boldsymbol{\delta}_A^g + \mathbf{K}_{AB}^g \boldsymbol{\delta}_B^g \quad (12.77a)$$

$$\mathbf{R}_B^g = \mathbf{K}_{BA}^g \boldsymbol{\delta}_A^g + \mathbf{K}_{BB}^g \boldsymbol{\delta}_B^g \quad (12.77b)$$

siendo:

$$\mathbf{K}_{AA}^g = \mathbf{E}_6^T \mathbf{K}_{AA} \mathbf{E}_6 \quad \mathbf{K}_{AB}^g = (\mathbf{K}_{AB}^g)^T = \mathbf{E}_6^T \mathbf{K}_{AB} \mathbf{E}_6 \quad \mathbf{K}_{BB}^g = \mathbf{E}_6^T \mathbf{K}_{BB} \mathbf{E}_6 \quad (12.78)$$

las correspondientes matrices de rigidez en coordenadas globales.

Queda finalmente considerar el caso en que la directriz de la pieza no coincida con el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones rectas. En este caso la expresión 12.58 quedará

$$\boldsymbol{\delta}'_{AB} = \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{D}' \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{R}'_B \quad (12.79)$$

viniendo \mathbf{D}' dada por 12.27. Sustituyendo:

$$\boldsymbol{\delta}'_{AB} = \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{R}'_B = \left(\int_0^L \mathbf{A}_6^T \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{D}^0 \mathbf{G}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}_6 ds \right) \mathbf{R}'_B \quad (12.80)$$

y dado que también se verifica que $\mathbf{A}_6^T \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}_6^T$, la anterior expresión queda:

$$\boldsymbol{\delta}'_{AB} = \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{Y}^0 \mathbf{G}^T \mathbf{B}^T \mathbf{R}'_B \quad (12.81)$$

con lo cual la matriz de rigidez \mathbf{K}'_{BB} se escribe

$$\mathbf{K}'_{BB} = (\mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{K}_{BB}^0 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (12.82)$$

con

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_{3G} & x'_{2G} \\ 0 & 1 & 0 & x'_{3G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x'_{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.83)$$

El resto de las matrices \mathbf{K}'_{AA} , \mathbf{K}'_{AB} y \mathbf{K}'_{BA} se obtienen sin más que sustituir \mathbf{K}_{BB} por \mathbf{K}'_{BB} en la expresión 12.73, o bien, teniendo en cuenta que $\mathbf{H}(\mathbf{B}^T)^{-1} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{H}$

$$\mathbf{K}'_{ij} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{B}^{-1}$$

variando los índices i y j de A a B .

12.5.2 Un caso particular: el emparrillado plano

Un tipo de estructura bastante utilizado en la práctica de la ingeniería es el emparrillado plano (Fig. 12.7). En ella, la directriz de todas las piezas está situada en el plano $z_3 = \text{constante}$ (el eje global z_3 y el local x_3 son paralelos). Todas las secciones rectas de las diferentes piezas tienen un eje principal de inercia paralelo al plano del emparrillado, y las fuerzas externas que actúan son tales que $N = 0$, $M_{f3} = 0$, $Q_2 = 0$.

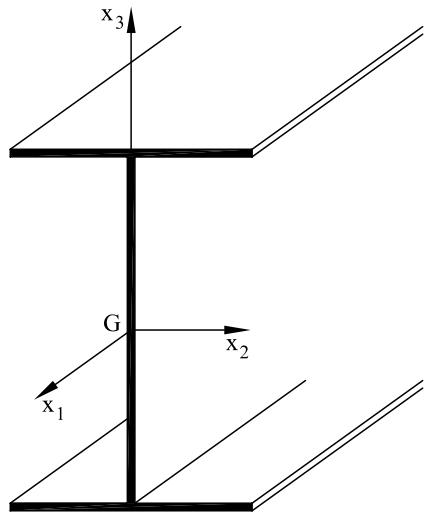


Fig. 12.7 Pieza de emparrillado plano

Las matrices \mathbf{D}^0 , \mathbf{A}_6 (que ahora se denomina \mathbf{A}_3), \mathbf{Y}^0 , \mathbf{G} y \mathbf{B} se escriben ahora

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^0 &= \begin{bmatrix} \frac{d_{33}}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GJ} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} \end{bmatrix} & \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}^0 &= \begin{bmatrix} (1+\alpha)\frac{L^3}{3EI_2} & 0 & -\frac{L^2}{2EI_2} \\ 0 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI_2} & 0 & \frac{L}{EI_2} \end{bmatrix} & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 1 & -x_{2c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & x'_{2G} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.84)$$

con

$$\alpha = \frac{3}{L^2} \frac{EI_2}{kGA}$$

por lo que la matriz \mathbf{K}_{BB}^0 quedará

$$\mathbf{K}_{BB}^0 = \begin{bmatrix} \frac{12EI_2}{L^3} \frac{1}{1+4\alpha} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} \frac{1}{1+4\alpha} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_2}{L^2} \frac{1}{1+4\alpha} & 0 & \frac{4EI_2}{L} \frac{1+\alpha}{1+4\alpha} \end{bmatrix} \quad (12.85a)$$

Conocidas las anteriores matrices, la obtención de \mathbf{K}_{AA} , \mathbf{K}_{AB} y \mathbf{K}_{BA} es obvia:

$$\mathbf{K}_{AA} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_2}{L^3} \frac{1}{1+4\alpha} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} \frac{1}{1+4\alpha} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_2}{L^2} \frac{1}{1+4\alpha} & 0 & \frac{4EI_2}{L} \frac{1+\alpha}{1+4\alpha} \end{bmatrix} \quad (12.85b)$$

$$\mathbf{K}_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{-12EI_2}{L^3} \frac{1}{1+4\alpha} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} \frac{1}{1+4\alpha} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_2}{L^2} \frac{1}{1+4\alpha} & 0 & \frac{2EI_2}{L} \frac{1-2\alpha}{1+4\alpha} \end{bmatrix} \quad (12.85c)$$

12.6 Inclusión de la deformación por alabeo

En el caso de que, debido a las características de la sección, los alabeos por torsión fueran importantes, es necesario introducir algunas modificaciones en la matriz de rigidez para tener en cuenta este hecho.

En el apartado 12.5 se ha visto que la matriz de rigidez de una estructura puede obtenerse a partir de la matriz de rigidez \mathbf{K}_{BB}^0 (expresiones 12.74), la cual viene dada por los cuadros 12.2 a 12.5. El objetivo del presente apartado es estudiar cómo se modifica la matriz \mathbf{K}^0 cuando en la torsión se tiene en cuenta el efecto de los alabeos, ya que, como queda dicho, una vez obtenida ésta, es inmediata la evaluación del resto de matrices de rigidez estudiadas.

Supóngase una pieza recta AB de longitud L sometida a torsión constante en x_1 y en cuyo extremo A el giro φ_1 vale φ_{1A} , siendo en su extremo B φ_{1B} . Asimismo, y dado que la derivada de dicho giro φ_1 no es constante, en A dicha derivada valdrá φ'_{1A} y en B φ'_{1B} . De acuerdo con la expresión 6.93 la ley de giros φ_1 valdrá:

$$\varphi_1 = c'_1 + c'_2 x_1 + c'_3 Ch \frac{x_1}{\beta} + c'_4 Sh \frac{x_1}{\beta} \quad (6.93)$$

y también

$$\frac{d\varphi_1}{dx_1} = c'_2 + c'_3 \frac{1}{\beta} Sh \frac{x_1}{\beta} + c'_4 \frac{1}{\beta} Ch \frac{x_1}{\beta} \quad (12.86a)$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2} = \frac{1}{\beta^2} (c'_3 Ch \frac{x_1}{\beta} + c'_4 Sh \frac{x_1}{\beta}) \quad (12.86b)$$

$$\frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3} = \frac{1}{\beta^3} (c'_3 Sh \frac{x_1}{\beta} + c'_4 Ch \frac{x_1}{\beta}) \quad (12.86c)$$

Si se imponen las condiciones de contorno

$$\varphi_1|_{x_1=0} = \varphi_{1A} \quad \varphi_1|_{x_1=L} = \varphi_{1B} \quad \frac{d\varphi_1}{dx_1}|_{x_1=0} = \varphi'_A \quad \frac{d\varphi_1}{dx_1}|_{x_1=L} = \varphi'_B$$

se obtendrán las cuatro constantes de integración c'_1 , c'_2 , c'_3 y c'_4 .

Además, en los extremos A y B actuarán unos momentos torsores externos de valor T_A y T_B , así como unos bimomentos B_A y B_B de forma que en B :

$$M_{tB} = GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1}|_{x_1=L} \quad M_{\omega B} = -EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3}|_{x_1=L}$$

Sumando:

$$T_B = M_{tB} + M_{\omega B} = GJ \frac{d\varphi_1}{dx_1}|_{x_1=L} - EI_{\Omega\Omega} \frac{d^3\varphi_1}{dx_1^3}|_{x_1=L} = c'_2 GJ \quad (12.87)$$

Por otro lado,

$$B_A = -B_\Omega|_{x_1=0} = -EI_{\Omega\Omega} \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}|_{x_1=0}$$

$$B_B = B_\Omega|_{x_1=L} = EI_{\Omega\Omega} \frac{d^2\varphi_1}{dx_1^2}|_{x_1=L}$$

Sustituyendo:

$$c'_3 = -\frac{B_A}{GJ} \quad c'_4 = \frac{B_B}{GJ} \frac{1}{Sh(L/\beta)} + \frac{B_A}{GJ} \frac{Ch(L/\beta)}{Sh(L/\beta)} \quad (12.88)$$

Introduciendo 12.87 y 12.88 en 12.86 y teniendo además en cuenta las condiciones de contorno se obtiene:

$$\frac{1}{GJ} \begin{bmatrix} L & 1 & 1 \\ 1 & \frac{Ch(L/\beta)}{\beta Sh(L/\beta)} & \frac{1}{\beta Sh(L/\beta)} \\ 1 & \frac{1}{\beta Sh(L/\beta)} & \frac{Ch(L/\beta)}{\beta Sh(L/\beta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_B \\ B_A \\ B_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1B} - \varphi_{1A} \\ \varphi'_A \\ \varphi'_B \end{bmatrix} \quad (12.89)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones y teniendo en cuenta que $T_A + T_B = 0$

$$\begin{bmatrix} T_A \\ B_A \\ T_B \\ B_B \end{bmatrix} = \frac{GJ}{c_d} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} Sh \frac{L}{\beta} & -1 + Ch \frac{L}{\beta} & -\frac{1}{\beta} Sh \frac{L}{\beta} & -1 + Ch \frac{L}{\beta} \\ -1 + Ch \frac{L}{\beta} & -\beta Sh \frac{L}{\beta} + LCh \frac{L}{\beta} & 1 - Ch \frac{L}{\beta} & \beta Sh \frac{L}{\beta} - L \\ -\frac{1}{\beta} Sh \frac{L}{\beta} & 1 - Ch \frac{L}{\beta} & \frac{1}{\beta} Sh \frac{L}{\beta} & 1 - Ch \frac{L}{\beta} \\ -1 + Ch \frac{L}{\beta} & \beta Sh \frac{L}{\beta} - L & 1 - Ch \frac{L}{\beta} & -\beta Sh \frac{L}{\beta} + LCh \frac{L}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi'_A \\ \varphi_B \\ \varphi'_B \end{bmatrix} \quad (12.90)$$

siendo

$$c_d = \frac{1}{\beta} (LSh \frac{L}{\beta} + 2\beta Ch \frac{L}{\beta})$$

La expresión anterior también puede escribirse

$$\begin{bmatrix} T_A \\ B_A \\ T_B \\ B_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1}^b & \mathbf{K}_{1,2}^b \\ \mathbf{K}_{2,1}^b & \mathbf{K}_{2,2}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi'_A \\ \varphi_B \\ \varphi'_B \end{bmatrix} \quad (12.91)$$

en donde las submatrices $\mathbf{K}_{i,j}^b$ son de 2×2 .

De acuerdo con lo anterior, la matriz de rigidez \mathbf{K}^0 obtenida para torsión uniforme se modifica de la siguiente forma: Las filas y columnas 4 y 10 de la matriz \mathbf{K}^0 son las que reflejan la incidencia del momento torsor. Como puede observarse a partir de los cuadros 12.2 a 12.6, todos los términos de las filas y columnas 4 y 10 son nulos a excepción de los siguientes:

$$K_{4,4}^0 = K_{10,10}^0 = \frac{GJ}{L} \quad K_{4,10}^0 = K_{10,4}^0 = \frac{GJ}{L}$$

Al tomar en consideración los efectos del alabeo por torsión, las anteriores filas y columnas 4 y 10 se desdoblán cada una en dos a fin de dar cabida a los bimomentos y a las derivadas de los giros en A y B . De esta forma el elemento $K_{4,4}^0$ se sustituye por la submatriz $\mathbf{K}_{1,1}^b$, el elemento $K_{10,10}^0$ por $\mathbf{K}_{2,2}^b$, el elemento $K_{4,10}^0$ por $\mathbf{K}_{1,2}^b$ y el $K_{10,4}^0$ por $\mathbf{K}_{2,1}^b$. La matriz \mathbf{K}^{0b} aumentada será por tanto ahora de 14×14 .

Una vez obtenida la matriz \mathbf{K}^{0b} , para la obtención de las correspondientes matrices \mathbf{K} o \mathbf{K}' se sigue el mismo procedimiento descrito anteriormente.

Anejo 1. Momentos de inercia de figuras planas

A.1 Definiciones

Se considera un área plana A (ver Fig. A.1) delimitada por un contorno Γ . Se denomina *momento de inercia geométrico*, o simplemente *momento de inercia* del área A , respecto al eje $e - e'$ a la integral

$$I_e = \int_A r^2 dA \quad (A.1)$$

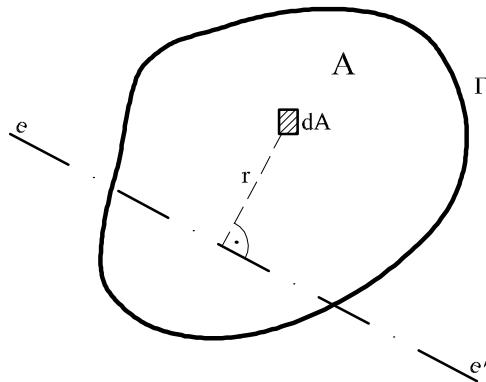


Fig. A.1 Área plana.

Si se toman dos ejes cualesquiera (ver Fig. A.2), que se supondrán ortogonales, se define el momento de inercia respecto al eje y_2 a la integral

$$I_2^y = \int_A y_3^2 dA \quad (A.2)$$

y lo mismo respecto al eje y_3

$$I_3^y = \int_A y_2^2 dA \quad (A.3)$$

Asimismo, se define como *producto de inercia* del área A respecto a los ejes y_2 y_3 a la integral

$$I_{23}^y = \int_A y_2 y_3 dA \quad (A.4)$$

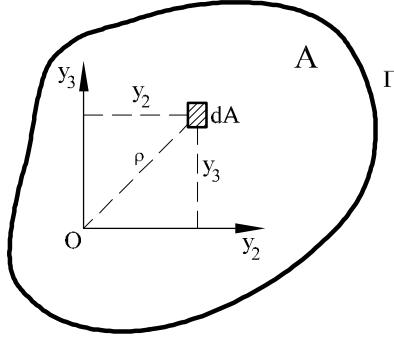


Fig. A.2 Área plana con los ejes ortogonales y_2 y_3 .

También se define como *momento de inercia polar* del área A respecto al punto 0 a la integral

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA \quad (A.5)$$

Dado que $\rho^2 = y_2^2 + y_3^2$, sustituyendo en (A.5)

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y_2^2 + y_3^2) dA = I_2^y + I_3^y \quad (A.6)$$

♣ **Ejemplo E1.1.** *Momento de inercia de un rectángulo.*

Supóngase una figura rectangular (Fig E1.1) en la que se desea hallar el momento de inercia respecto a un eje x_2 que pasa por el centro de gravedad.

Por definición

$$I_2^x = \int_A x_3^2 dA$$

y como (ver Fig 1.1.b)) $dA = b dx_3$

$$dI_2^x = x_3^2 b dx_3 = b x_3^2 dx_3$$

e integrando:

$$I_2^x = b \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = \frac{1}{12} b h^3$$

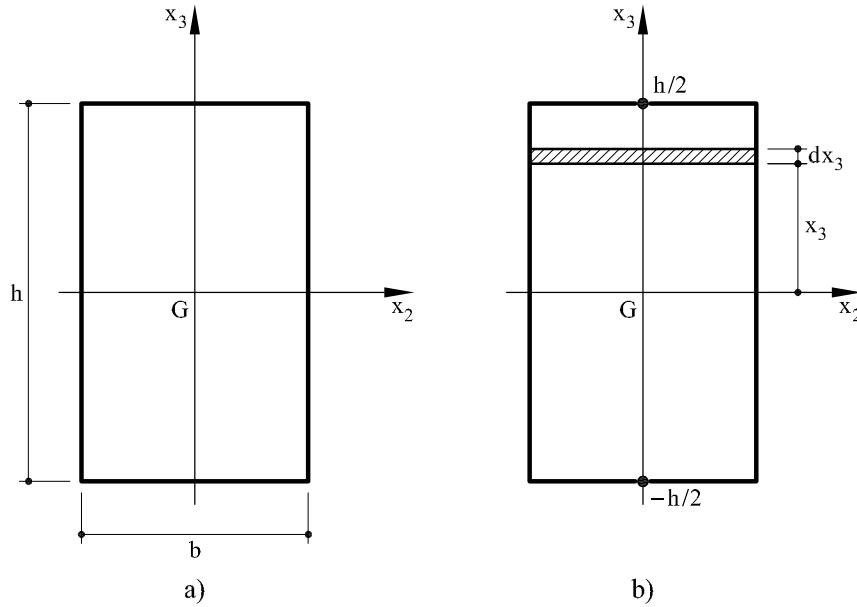


Fig.E1.1 Sección rectangular.

♣ **Ejemplo E2.1.** *Momento de inercia de un triángulo respecto a un eje que pasa por uno de sus tres lados.*

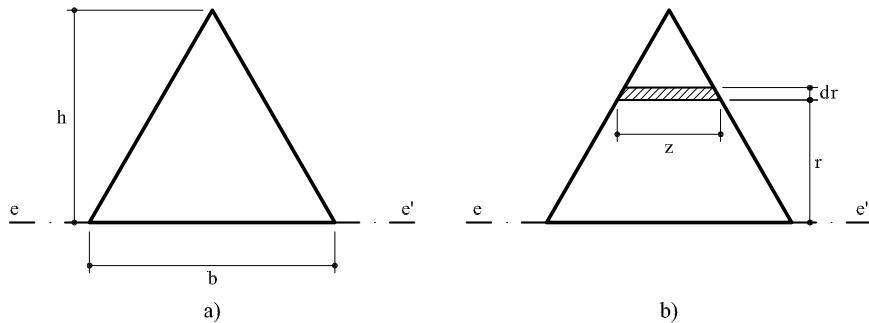


Fig.E2.1 Sección triangular.

A partir de la Fig E2.1b es claro que $r = -\frac{h}{b} z + h$ por lo que el diferencial de área valdrá

$$dA = z dr = b \left(1 - \frac{r}{h}\right) dr$$

con lo cual el momento de inercia respecto a $e - e'$ valdrá

$$I_e = \int_A r^2 dA = b \int_0^h r^2 \left(1 - \frac{r}{h}\right) dr = \frac{1}{12} b h^3$$

♣ **Ejemplo E3.1.** *Momento de inercia de un círculo respecto a un eje que pasa por el centro.*

Se calculará previamente el momento de inercia polar.

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA$$

A partir de la Fig. E3.1 es claro que

$$dA = 2\pi \rho d\rho$$

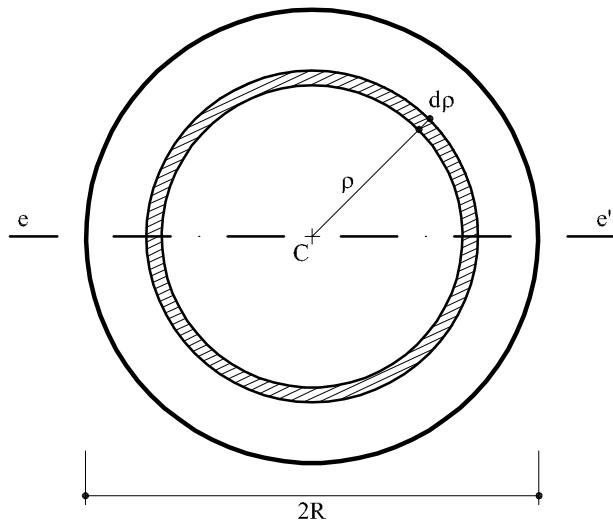


Fig. E3.1 Círculo.

Es decir:

$$I_0 = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} R^4$$

Y por tanto, como $I_e = I_0/2$

$$I_e = \frac{\pi}{4} R^4$$

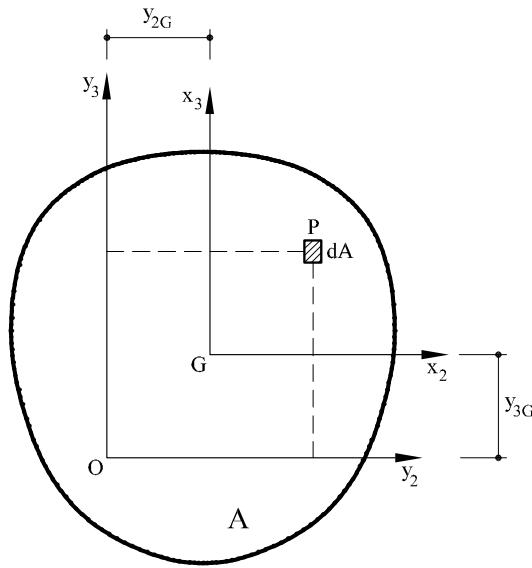


Fig. A.3 Traslación de ejes.

A.2 Traslación de ejes. Teorema de Steiner

Supóngase una superficie plana A y dos sistemas de ejes de referencia, paralelos entre sí, y de tal forma que uno de ellos, el formado por los ejes (Gx_2 , Gx_3), pase por el centro de gravedad G (Fig A.3).

A partir de la Fig. A.3, es evidente que la relación entre las coordenadas de un mismo punto P , referidas a los sistemas Oy y Gx se escribe

$$y_2 = x_2 + y_{2G}$$

$$y_3 = x_3 + y_{3G}$$

Por lo que:

$$I_2^y = \int_A y_3^2 dA = \int_A (x_3 + y_{3G})^2 dA = \int_A x_3^2 dA + y_{3G}^2 \int_A dA + 2y_{3G} \int_A x_3 dA = I_2^x + y_{3G}^2 A \quad (A7.a)$$

Es evidente que la integral $\int_A x_3 dA$ se anula ya que el eje x_3 pasa por el centro de gravedad.

Análogamente

$$I_3^y = I_3^x + y_{2G}^2 A \quad (A7.b)$$

$$I_{23}^y = I_{23}^x + y_{2G} y_{3G} A \quad (A7.c)$$

Las expresiones (A.7) constituyen el teorema de Steiner, que establece que el momento de inercia de una figura plana respecto a un eje cualquiera y es igual al momento de inercia respecto a otro eje x paralelo al primero y que pasa por el centro de gravedad, más el producto del área por la distancia entre los dos ejes elevada al cuadrado.

♣ **Ejemplo E4.1.** Momento de inercia de una sección en T respecto a un eje horizontal que pasa por su centro de gravedad (Fig. E4.1).

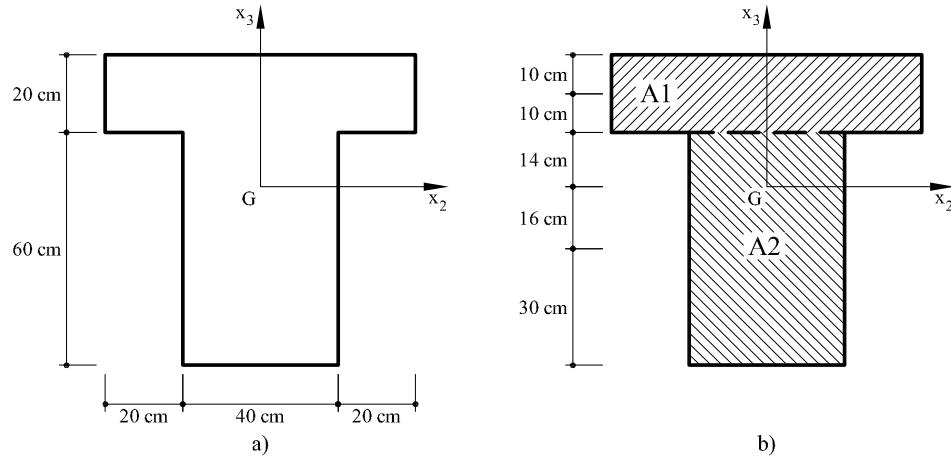


Fig.E4.1 Sección en T. a) Dimensiones. b) Posición del centro de gravedad G y de los centros de gravedad de los rectángulos A1 y A2

Para determinar el momento de inercia respecto al eje x_2 se divide la superficie A en dos rectángulos A_1 y A_2 . En la Fig. E4.1b puede verse la posición del centro de gravedad de toda el área, así como la de cada uno de los rectángulos A_1 y A_2 . El momento de inercia, respecto a x_2 , de cada uno de dichos rectángulos se obtendrá aplicando el teorema de Steiner. Es decir,

$$(I_2^x)_{A_1} = \frac{1}{12} \times (20 + 40 + 20) \times 20^3 + 20 \times (20 + 40 + 20) \times (10 + 14)^2 = 974\,933 \text{ cm}^4$$

$$(I_2^x)_{A_2} = \frac{1}{12} \times 40 \times 60^3 + 40 \times 60 \times 16^2 = 1\,334\,400 \text{ cm}^4$$

$$I_2^x = (I_2^x)_{A_1} + (I_2^x)_{A_2} = 2\,309\,933 \text{ cm}^4$$

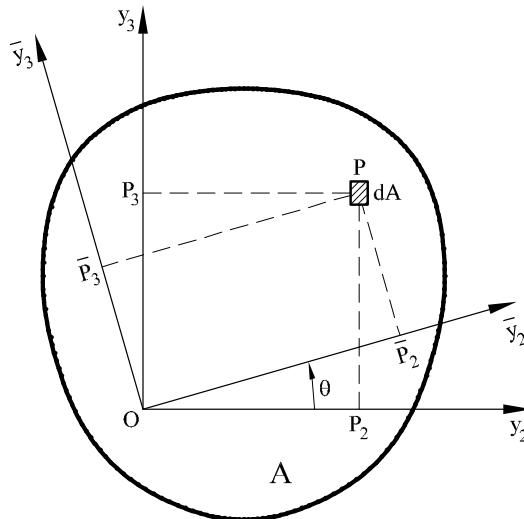


Fig. A.4 Giro de ejes.

A.3 Giro de ejes. Ejes principales

Se estudiará en este apartado la relación entre los momentos de inercia respecto a dos sistemas de ejes con el mismo origen O y girado uno respecto al otro un ángulo θ (Fig. A.4).

La posición del punto P puede expresarse con relación al sistema de ejes Oy o bien con relación al sistema $O\bar{y}$. A partir de la Fig. A.4:

$$\begin{aligned}\bar{y}_2 &= P \bar{P}_2 = O P_2 \cos \theta + O P_3 \sin \theta = y_2 \cos \theta + y_3 \sin \theta \\ \bar{y}_3 &= P \bar{P}_3 = -O P_2 \sin \theta + O P_3 \cos \theta = -y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta\end{aligned}$$

O también

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

en donde

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

es la matriz ortonormal de giro de ejes.

La expresión (A.8) puede escribirse

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

y también, invirtiendo la anterior relación

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

Por otro lado, el momento de inercia del área A respecto al eje \bar{y}_2 se escribe

$$\begin{aligned}\bar{I}_2^y &= \int_A \bar{y}_3^2 dA = \int_A (-y_2 \sin \theta + y_3 \cos \theta)^2 dA = \\ &= \cos^2 \theta \int_A y_3^2 dA + \sin^2 \theta \int_A y_2^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int_A y_2 y_3 dA = \\ &= I_2^y \cos^2 \theta + I_3^y \sin^2 \theta - I_{23}^y \sin 2\theta\end{aligned}\quad (A.11a)$$

Y análogamente

$$\bar{I}_3^y = I_2^y \sin^2 \theta + I_3^y \cos^2 \theta + I_{23}^y \sin 2\theta \quad (A.11b)$$

$$\bar{I}_{23}^y = \frac{I_2^y - I_3^y}{2} \sin 2\theta + I_{23}^y \cos 2\theta \quad (A.11c)$$

Las expresiones (A.11) proporcionan los valores de los momentos de inercia respecto a unos ejes $O\bar{y}$ girados un ángulo θ respecto al sistema primitivo Oy .

Se denominan ejes principales de inercia $O\hat{y}$ a aquel sistema de ejes respecto a los cuales el producto de inercia \hat{I}_{23}^y es nulo. Para obtenerlos, a partir de un sistema de ejes cualesquiera Oy basta con anular \bar{I}_{23}^y en la expresión (A.11c). Es decir:

$$\begin{aligned}O &= \frac{I_2^y - I_3^y}{2} \sin 2\hat{\theta} + I_{23}^y \cos 2\hat{\theta} \\ \tan 2\hat{\theta} &= \frac{2 I_{23}^y}{I_3^y - I_2^y}\end{aligned}\quad (A.12)$$

Los valores de los momentos de inercia principales \hat{I}_2^y , \hat{I}_3^y , se obtendrán utilizando las expresiones (A.11a) y (A.11b) con el ángulo $\hat{\theta}$ obtenido en (A.12).

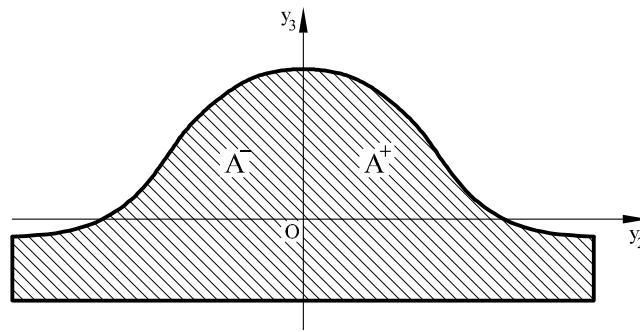
Por último, es de interés observar que si una figura plana tiene un eje de simetría, cualquier par de ejes ortogonales, de los cuales uno de ellos coincide con dicho eje de simetría, son ejes principales de inercia. Considérese, para ello, la Fig. 5. Se trata de un área plana en la que el eje Oy_3 es de simetría. Para que Oy_2 , Oy_3 sean ejes principales de inercia, debe cumplirse:

$$I_{23}^y = \int_A y_2 y_3 dA = 0 \quad (A.13)$$

Sea A^+ el área de la figura en la cual la coordenada y_2 es positiva, y A^- el área correspondiente a la coordenada y_2 negativa. La expresión (A.13) puede escribirse

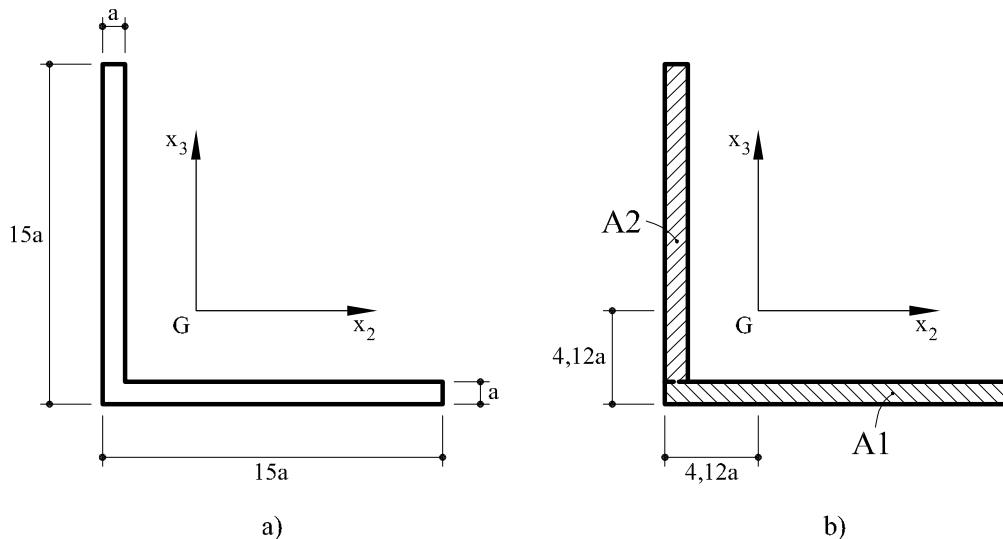
$$I_{23}^y = \int_A y_2 y_3 dA = \int_{A^+} y_2 y_3 dA + \int_{A^-} y_2 y_3 dA \quad (A.14)$$

Debido a la simetría respecto al eje y_3 ambas integrales son iguales y de sentido contrario, por lo que su suma es nula, y por tanto $I_{23}^y = 0$.

Fig. A.5 Sección simétrica respecto al eje y_3 .

♣ **Ejemplo E5.1.** En el área plana que se representa en la Fig. E5.1, se desea hallar:

- Momentos de inercia respecto a los ejes Gx_2 y Gx_3 siendo G el centro de gravedad.
- Ejes principales de inercia $G\hat{x}_2$, $G\hat{x}_3$
- Momentos principales de inercia

Fig. E5.1 a) Área plana y ejes. b) División en dos áreas A_1 y A_2 y posición del centro de gravedad.

En la Fig. E5.1b se sitúa el centro de gravedad G y se divide el área en A_1 y A_2 . Asimismo, en la Fig. E5.2 se acotan algunos puntos de interés.

Las áreas A_1 y A_2 valen:

$$A_1 = 15a^2 \quad , \quad A_2 = 14a^2$$

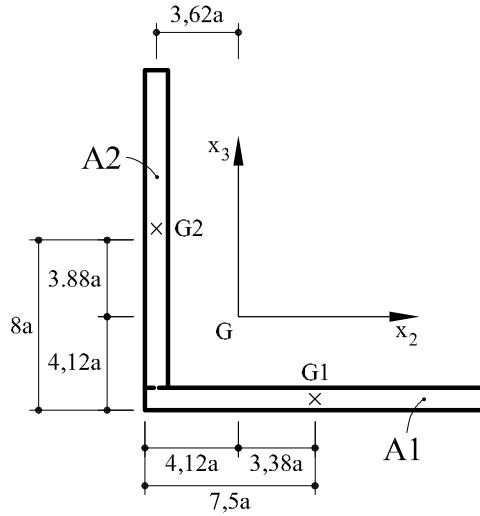


Fig. E5.2 Cotas de interés.

El momento de inercia respecto al eje x_2 valdrá

$$I_2^x = \int_A x_3^2 dA = (I_2^x)_{A1} + (I_2^x)_{A2}$$

$$(I_2^x)_{A1} = \frac{1}{12} \times 15a \times a^3 + 15a^2 \times (3,62a)^2 = 197,82a^4$$

$$(I_2^x)_{A2} = \frac{1}{12} a \times (14a)^3 + 14a^2 \times (3,88a)^2 = 439,43a^4$$

y sumando

$$I_2^x = 197,82a^4 + 439,43a^4 = 637,25a^4$$

Obviamente,

$$I_3^x = I_2^x = 637,25a^4$$

En cuanto al producto de inercia I_{23}^x ,

$$I_{23}^x = (I_{23}^x)_{A1} + (I_{23}^x)_{A2}$$

$$(I_{23}^x)_{A1} = 0 + 15a^2 \times 3,38a \times (-3,65a) = -185,06a^4$$

$$(I_{23}^x)_{A2} = 0 + 14a^2 \times 3,88a \times (-3,62a) = -196,6a^4$$

Y sumando

$$I_{23}^x = -185,06a^4 - 196,6a^4 = -381,66a^4$$

Los ejes principales se obtendrán

$$\tan 2\hat{\theta} = \frac{2I_{23}^x}{I_3^x - I_2^x} = \infty$$

con lo cual, $\hat{\theta} = \pi/4$

Y a partir de las expresiones (A.11)

$$\begin{aligned}\hat{I}_2^x &= I_2^x \cos^2 \hat{\theta} + I_3^x \sin^2 \hat{\theta} - I_{23}^x \sin 2\hat{\theta} = 637, 25a^4 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 637, 25a^4 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 381, 66a^4 \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 1019a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_3^x &= I_2^x \sin^2 \theta + I_3^x \cos^2 \theta + I_{23}^x \sin 2\theta = 637, 25a^4 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 637, 25a^4 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 381, 66a^4 \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 255, 59a^4\end{aligned}$$

y lógicamente $\hat{I}_{23}^x = 0$

A.4 Momentos de inercia mecánicos

Supóngase que en el área plana de la Fig. A.2, a cada punto de coordenadas (y_2, y_3) se le asigna una determinada propiedad mecánica (por ejemplo, la deformabilidad) de valor $E(y_2, y_3)$, en general variable punto a punto. Se definen los momentos de inercia y el producto de inercia mecánicos a las expresiones

$$(I_2^y)^* = \int_A E y_3^2 dA \quad (A.15.a)$$

$$(I_3^y)^* = \int_A E y_2^2 dA \quad (A.15.b)$$

$$(I_{23}^y)^* = \int_A E y_2 y_3 dA \quad (A.15.c)$$

En ocasiones, estos momentos de inercia mecánicos se definen de una manera ligeramente diferente: Supóngase que se toma un valor de E de referencia, al que se denominará E_{ref} . Si

$$n(y_2, y_3) = \frac{E(y_2, y_3)}{E_{ref}} \quad (A.16a)$$

las integrales (A.15) pueden escribirse

$$\int_A E y_3^2 dA = E_{ref} \int_A n(y_2, y_3) y_3^2 dA \quad (A.16b)$$

$$\int_A E y_2^2 dA = E_{ref} \int_A n(y_2, y_3) y_2^2 dA \quad (A.16c)$$

$$\int_A E y_2 y_3 dA = E_{ref} \int_A n(y_2, y_3) y_2 y_3 dA \quad (A.16d)$$

Por lo que, alternativamente, se definen los momentos de inercia mecánicos como

$$(I_2^y)^* = \int_A n(y_2, y_3) y_3^2 dA \quad (A.17a)$$

$$(I_3^y)^* = \int_A n(y_2, y_3) y_2^2 dA \quad (A.17b)$$

$$(I_{23}^y)^* = \int_A n(y_2, y_3) y_2 y_3 dA \quad (A.17c)$$

Los momentos de inercia mecánicos, tanto en sus expresiones (A.15) como (A.17) gozan de las mismas propiedades que los momentos de inercia vistos más arriba. Concretamente, se verifica el teorema de Steiner, sin más que sustituir el área A por el área mecánica A^* dada por

$$A^* = \int_A E(y_2, y_3) dA \quad (A.18)$$

o bien

$$A^* = \int_A n(y_2, y_3) dA \quad (A.19)$$

y referir los ejes Gx_2 , Gx_3 al centro de gravedad mecánico G^* .

Las expresiones para el giro de ejes son las mismas que las vistas anteriormente.

♣ **Ejemplo E6.1.** Determinar el momento de inercia mecánico respecto al eje G^*x_2 , horizontal, que pasa por el centro de gravedad mecánico G^* , de la figura plana en T representada en la Fig. E6.1.

- Para el ala horizontal, E vale $E_1 = 2$
- Para el ala vertical, E vale $E_2 = 3$

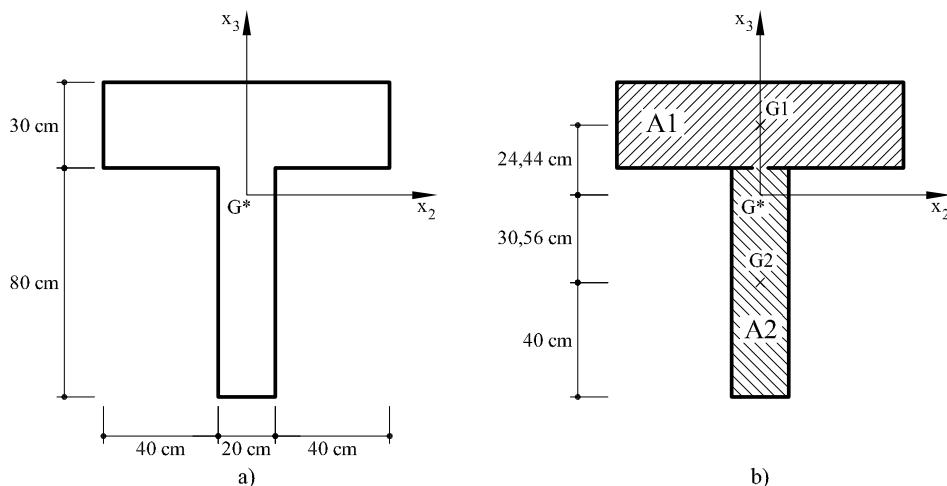


Fig. E6.1 Sección en T. a) Dimensiones b) Algunas cotas de interés.

En la Fig. E6.1b puede verse la posición del centro de gravedad mecánico G^* . Si se toma $E_{ref} = E_1 = 2$, se tendrá

$$n_1 = 1 \quad , \quad n_2 = \frac{E_2}{E_{ref}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

por tanto,

$$(I_2^x)^* = (I_2^x)_{A1} \times n_1 + (I_2^x)_{A2} \times n_2$$

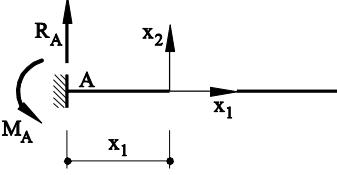
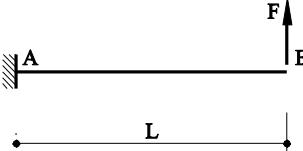
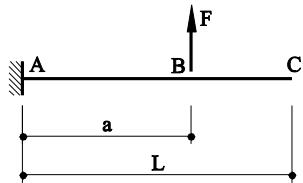
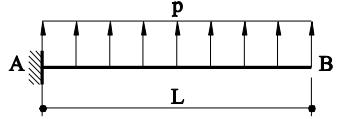
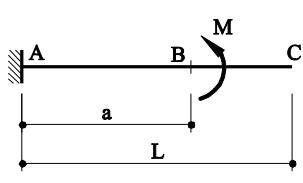
$$(I_2^x)_{A1}^* = \frac{1}{12} \times 100 \times 30^3 + 100 \times 30 \times 24,44^2 = 2\,016\,940,8 \text{ cm}^4$$

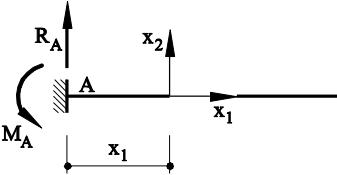
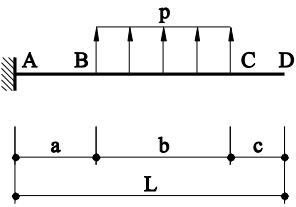
$$(I_2^x)_{A2}^* = \frac{1}{12} \times 20 \times 80^3 + 20 \times 80 \times 30,56^2 = 2\,347\,595,1 \text{ cm}^4$$

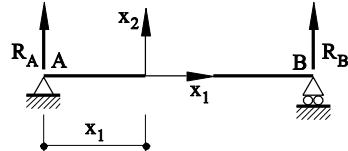
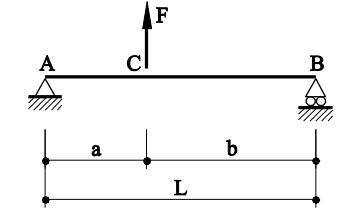
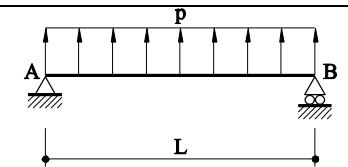
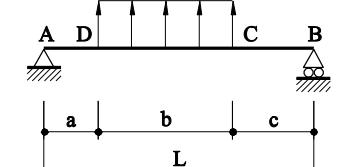
Con lo cual,

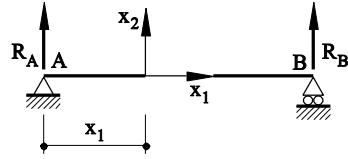
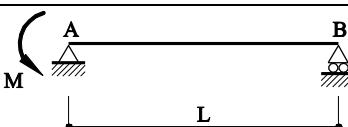
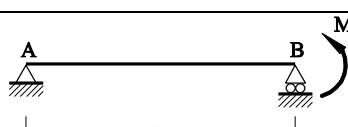
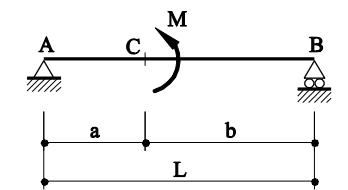
$$(I_2^x)^* = 2\,016\,940,8 + 2\,347\,595,1 \times 1,5 = 5\,538\,333,4 \text{ cm}^4$$

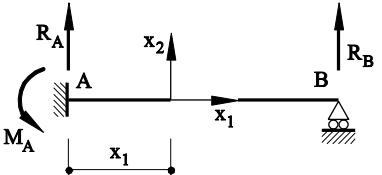
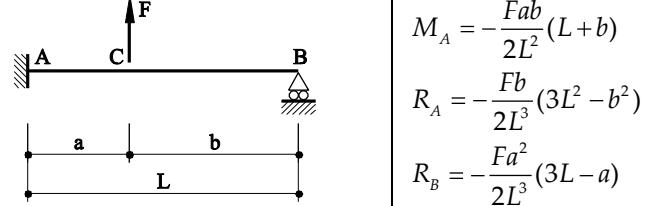
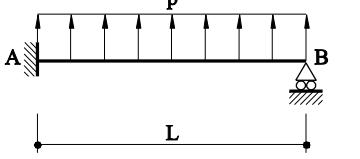
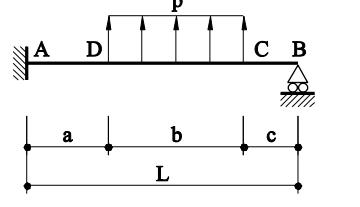
Anejo 2. Tablas de flechas y giros de vigas simples

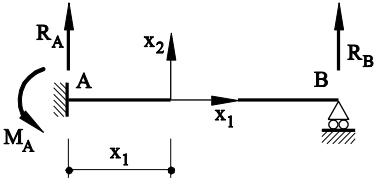
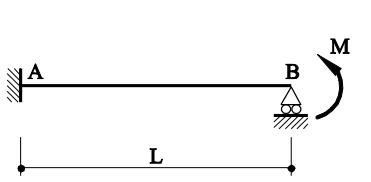
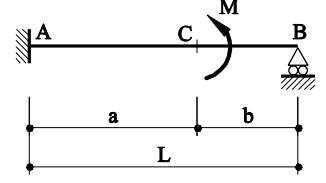
	REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
	$R_A = -F$ $M_A = -FL$	$\varphi_B = \frac{FL^2}{2EI}$	$v_2 = \frac{Fx_1^2}{6EI}(3L - x_1)$ $v_{2B} = \frac{FL^3}{3EI}$
	$R_A = -F$ $M_A = -Fa$	$\varphi_B = \varphi_C = \frac{Fa^2}{2EI}$	$v_2 _A^B = \frac{Fx_1^2}{6EI}(3a - x_1)$ $v_2 _B^C = \frac{Fa^2}{6EI}(3x_1 - a)$ $v_{2B} = \frac{Fa^3}{3EI}$ $v_{2C} = \frac{Fa^2}{6EI}(3L - a)$
	$R_A = -pL$ $M_A = -\frac{pL^2}{2}$	$\varphi_B = \frac{pL^3}{6EI}$	$v_2 = \frac{px_1^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx_1 + x_1^2)$ $v_{2B} = \frac{pL^4}{8EI}$
	$R_A = 0$ $M_A = M$	$\varphi_B = \varphi_C = \frac{Ma}{EI}$	$v_2 _A^B = \frac{Mx_1^2}{2EI}$ $v_2 _B^C = \frac{Ma}{2EI}(2x_1 - a)$ $v_{2B} = \frac{Ma^2}{2EI}$ $v_{2C} = \frac{Ma(2L - a)}{2EI}$

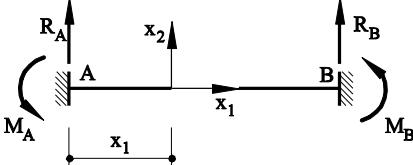
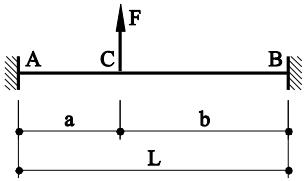
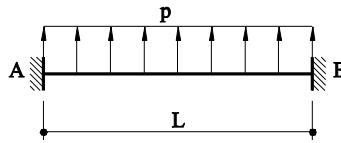
	REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
 $R_A = -pb$ $M_A = -pb(a + b/2)$	$\varphi_B = \frac{pab}{2EI}(a+b)$ $\varphi_C = \frac{pb}{2EI} \left[a(a+b) + \frac{b^2}{3} \right]$ $\varphi_D = \varphi_C$	$v_2 _A^B = \frac{pbx_1^2}{6EI} \left(L + 2a + \frac{b}{c} - c - x_1 \right)$ $v_2 _B^C = \frac{p}{24EI} \left[(L - c - x_1)^4 + 2b(2c + b - 2L + 2x_1)(3a^2 + 3ab + b^2) + (2a + b)^3 b \right]$ $v_2 _C^D = \frac{pb}{6EI} \left\{ 2 \left(a + \frac{b}{2} \right)^3 + \left(c + \frac{b}{2} - L + x_1 \right) \left[3 \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{b^2}{4} \right] \right\}$ $v_{2B} = \frac{pba^2}{12EI} (4a + 3b)$ $v_{2C} = \frac{pb}{12EI} \left[\frac{b^3}{2} + (L - c)^2 (4a + b) \right]$ $v_{2D} = \frac{pb}{12EI} \left\{ 4 \left(a + \frac{b}{2} \right)^3 + 2 \left(c + \frac{b}{2} \right) \left[3 \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{b^2}{4} \right] \right\}$	

REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
		
 <p> $R_A = -\frac{Fb}{L}$ $R_B = -\frac{Fa}{L}$ </p>	$\varphi_A = \frac{Fab}{6EI}(L+b)$ $\varphi_B = -\frac{Fab}{6EI}(L+a)$ Si $a = b = L/2$ $\varphi_A^* = \frac{FL^2}{16EI}$ $\varphi_B^* = -\frac{FL^2}{16EI}$	$v_2 _A^C = \frac{FLbx_1}{6EI} \left(1 - \frac{b^2}{L^2} - \frac{x_1^2}{L^2}\right)$ $v_2 _B^C = \frac{FLa(L-x_1)}{6EI} \left[1 - \frac{a^2}{L^2} - \left(\frac{L-x_1}{L}\right)^2\right]$ $v_{2C} = \frac{FLab}{6EI} \left(1 - \frac{a^2}{L^2} - \frac{b^2}{L^2}\right)$ Si $a = b = L/2$ $v_2 _A^* = \frac{Fx_1}{48EI} (3L^2 - 4x_1^2)$ $v_2 _B^* = \frac{F(L-x_1)}{48EI} [3L^2 - 4(L-x_1)^2]$ $v_{2C}^* = \frac{FL^3}{48EI}$
 <p> $R_A = R_B = \frac{pL}{2}$ </p>	$\varphi_A = \frac{pL^3}{24EI}$ $\varphi_B = -\frac{pL^3}{24EI}$	$v_2 = \frac{px_1}{24EI} (x_1^3 - 2Lx_1^2 + L^3)$ para $x_1 = L/2$ $v_2(x_1 = L/2) = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI}$
 <p> $R_A = -\frac{pb}{L} \left(c + \frac{b}{2}\right)$ $R_B = -\frac{pb}{L} \left(a + \frac{b}{2}\right)$ </p>	$\varphi_A = \frac{pb \left(\frac{b}{2} + c\right) (2a+b)(L+c) + ab}{12EIL}$ $\varphi_B = -\frac{pb \left(\frac{b}{2} + a\right) (2c+b)(L+a) + bc}{12EIL}$	$v_2 _A^D = \frac{pb \left(\frac{b}{2} + c\right)}{6EIL} x_1 \left[-x_1^2 + \frac{(2a+b)(L+c) + ab}{2}\right]$ $v_2 _B^C = \frac{p}{24EIL} \left\{ L(x_1 - a)^4 - 4b \left(\frac{b}{2} + c\right) x_1^3 + 2b \left(\frac{b}{2} + c\right) (2a+b)(L+c) + ab x_1 \right\}$ $v_2 _C^B = \frac{p \left(a + \frac{b}{2}\right) b}{12EIL} (L - x_1) \left[-2(L - x_1)^2 + (b + 2c)(L + a) + bc\right]$

REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
		
	$R_A = \frac{M}{L}$ $R_B = -\frac{M}{L}$	$\varphi_A = \frac{ML}{3EI}$ $\varphi_B = -\frac{ML}{6EI}$ $v_2 = \frac{ML}{6EI} (L - x_1) \left[1 - \left(\frac{L - x_1}{L} \right)^2 \right]$
	$R_A = \frac{M}{L}$ $R_B = -\frac{M}{L}$	$\varphi_A = -\frac{ML}{6EI}$ $\varphi_B = \frac{ML}{3EI}$ $v_2 = -\frac{ML}{6EI} x_1 \left(1 - \frac{x_1^2}{L^2} \right)$
	$R_A = \frac{M}{L}$ $R_B = -\frac{M}{L}$	$\varphi_A = \frac{ML}{6EI} \left(3 \frac{b^2}{L^2} - 1 \right)$ $\varphi_C = \frac{ML}{3EI L^2} a^3 + b^3$ $\varphi_B = \frac{ML}{6EI} \left(3 \frac{a^2}{L^2} - 1 \right)$ $v_2 _A^C = -\frac{MLx_1}{6EI} \left[1 - 3 \left(\frac{b}{L} \right)^2 - \left(\frac{x_1}{L} \right)^2 \right]$ $v_2 _B^C = \frac{ML(L - x_1)}{6EI} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \left(\frac{L - x_1}{L} \right)^2 \right]$ $v_{2C} = \frac{Mab}{3EI} (b - a)$

	REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
			
	$M_A = -\frac{Fab}{2L^2}(L+b)$ $R_A = -\frac{Fb}{2L^3}(3L^2-b^2)$ $R_B = -\frac{Fa^2}{2L^3}(3L-a)$	$\varphi_B = -\frac{Fa^2b}{4EIL}$ $\varphi_C = -\frac{Fa^2b}{4EIL^3}(L^2-2bL-b^2)$	$v_2 _A^C = \frac{Fbx_1^2}{12EIL^3} [3(L^2-b^2)L-(3L^2-b^2)x_1]$ $v_2 _B^C = \frac{Fa^2(L-x_1)}{12EIL^3} [3bL^2-(L-x_1)^2(2L+b)]$
	$M_A = -\frac{pL^2}{8}$ $R_A = -\frac{5}{8}pL$ $R_B = -\frac{3}{8}pL$	$\varphi_B = -\frac{pL^3}{48EI}$	$v_2 = \frac{px_1^2}{48EI} (L-x_1)(3L-2x_1)$
	$M_A = -\frac{p(b+2c)b}{8L^2} \times [2(L+c)(2a+b)+2ab]$ $R_A = \frac{M_A}{L} - \frac{pb}{L} \left(\frac{b}{2} + c \right)$ $R_B = -\frac{M_A}{L} - \frac{pb}{L} \left(a + \frac{b}{2} \right)$	$\varphi_B = \frac{-pb \left(a + \frac{b}{2} \right) (2c+b)(L+a) + bc}{12EIL} - \frac{M_A L}{6EI}$	$v_2 _A^D = \frac{pb \left(\frac{b}{2} + c \right)}{6EIL} x_1 \left[-x_1^2 + \frac{(2a+b)(L+c) + ab}{2} \right] + \frac{M_A L}{6EI} (L-x_1) \left[1 - \left(\frac{L-x_1}{L} \right)^2 \right]$ $v_2 _D^C = \frac{p}{24EIL} \left\{ L(x_1-a)^4 - 4b \left(\frac{b}{2} + c \right) x_1^3 + 2b \left(\frac{b}{2} + c \right) (2a+b)(L+c) + ab x_1 + \frac{M_A L}{6EI} (L-x_1) \left[1 - \left(\frac{L-x_1}{L} \right)^2 \right] \right\}$ $v_2 _C^B = \frac{p \left(a + \frac{b}{2} \right) b}{12EIL} (L-x_1) \left[-2(L-x_1)^2 + (b+2c)(L+a) + bc \right] + \frac{M_A L}{6EI} (L-x_1) \left[1 - \left(\frac{L-x_1}{L} \right)^2 \right]$

	REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
	$M_A = \frac{M}{2}$ $R_A = \frac{3M}{2L}$ $R_B = -\frac{3M}{2L}$	$\varphi_B = \frac{ML}{4EI}$	$v_2 = -\frac{Mx_1^2}{4EI} (L - x_1)$
	$M_A = \frac{M}{2L^2} (L^2 - 3b^2)$ $R_A = \frac{3M}{2L^3} (L^2 - b^2)$ $R_B = -\frac{3M}{2L^3} (L^2 - b^2)$	$\varphi_B = \frac{Ma}{4EI} (L - 3b)$ $\varphi_C = \frac{Ma}{4EI} \left[4 - \frac{3a}{L} \left(1 + \frac{b}{L} \right)^2 \right]$	$v_2 _A^C = \frac{Mx_1^2}{4EI L^3} [2Lb^2 - (L - x_1)(L^2 - b^2)]$ $v_2 _B^C = \frac{Ma(L - x_1)}{4EI L^3} 4L^3 + [2L(L + x_1) - x_1^2](L + b)$

	REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
	$M_A = -\frac{Fab^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Fa^2b}{L^2}$ $R_A = -\frac{Fb^2}{L^3}(2a+b)$ $R_B = -\frac{Fa^2}{L^3}(2b+L)$	$\varphi_C = \frac{Fa^2b^2}{2EI L^2} \left(1 - \frac{2a}{L}\right)$	$v_2 _A^C = \frac{Fb^2}{6EI L^2} x_1^2 \left[3a - x_1 \left(1 + \frac{2a}{L}\right)\right]$ $v_2 _B^C = \frac{Fa^2}{6EI L^2} (L-x_1)^2 \left[3b - (L-x_1) \left(1 + \frac{2b}{L}\right)\right]$ $v_{2C} = \frac{Fa^3b^3}{3EI L^3}$ <p>Si $a = b = L/2$</p> $v_2 _A^* = \frac{F}{24EI} x_1^2 \left(\frac{3L}{2} - 2x_1\right)$ $v_2 _B^* = \frac{F}{24EI} (L-x_1)^2 \left[\frac{3L}{2} - 2(L-x_1)\right]$ $v_{2C}^* = \frac{FL^3}{192EI}$
	$M_A = -\frac{pL^2}{12}$ $M_B = \frac{pL^2}{12}$ $R_A = -\frac{pL}{2}$ $R_B = \frac{pL}{2}$		$v_2 = \frac{px_1^2}{24EI} L - x_1^2$ <p>para $x_1 = L/2$</p> $v_{2,\max} = \frac{pL^4}{384EI}$

	REACCIONES	GIROS	DESPLAZAMIENTOS
	$M_A = -\frac{pb^3}{12L^2} \left\{ L - 3 \left(c + \frac{b}{2} \right) \right. \\ \left. \left[1 - \frac{4(a+b/2)(c+b/2)}{b^2} \right] \right\}$ $M_B = \frac{pb^3}{12L^2} \left\{ L - 3 \left(a + \frac{b}{2} \right) \right. \\ \left. \left[1 - \frac{4(a+b/2)(c+b/2)}{b^2} \right] \right\}$ $R_A = -\frac{pb}{L} \left(c + \frac{b}{2} \right) + \frac{M_A + M_B}{L}$ $R_B = -\frac{pb}{L} \left(a + \frac{b}{2} \right) - \frac{M_A + M_B}{L}$		$v_2 _A^D = \frac{x_1^2}{6EI} (R_A x_1 - 3M_A)$ $v_2 _D^C = \frac{1}{24EI L} [4R_A x_1^3 - 12M_A x_1^2 + p(x_1 - a)^4]$ $v_2 _C^B = \frac{(L-x_1)^2}{6EI L} 3M_B + R_B(L-x_1)$
	$M_A = \frac{Mb}{L} \left(2 - \frac{3b}{L} \right)$ $M_B = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right)$ $R_A = \frac{6M}{L^3} ab$ $R_B = -\frac{6M}{L^3} ab$	$\varphi_c = \frac{Mab}{EIL} \left(\frac{3a^2}{L^2} + \frac{3b}{L} - 2 \right)$	$v_2 _A^C = \frac{Mb x_1^2}{EIL} \left(\frac{a}{L^2} x_1 + \frac{3b}{2L} - 1 \right)$ $v_2 _B^C = \frac{Ma(L-x_1)^2}{EIL} \left[-\frac{b(L-x_1)}{L^2} - \frac{3a}{2L} + 1 \right]$

Índice Temático

- Acciones 1, 3, 12, 29-31
- Alabeos 201, 202, 226
- Analogía de la membrana 210
- Angulo específico de torsión 212, 220
- Apoyo
 - deslizante 38
 - fijo 38
 - elástico 27, 30, 405
- Arco parabólico 448
- Area mecánica 78
- Bimomento 231
- Catenaria 448
- Centro
 - de esfuerzos cortantes 189-192
 - de gravedad 37, 71, 94
 - de gravedad mecánico 78, 114
 - de presiones 124, 131, 142
 - de torsión 202, 233
- Círculo de Mohr 105
- Coeficiente de balasto 334
- Compatibilidad de movimientos 12, 55
- Coordenada
 - sectorial 229
 - sectorial normalizada 229
- Cuerpo deformable – ver sólido deformable
- Curva funicular 448
- Curvatura 94, 101
 - térmica 331, 348, 356
 - virtual 249
- de torsión - ver ángulo específico de torsión
- Deformación 1
 - longitudinal 15, 17, 18
 - tangencial 15, 17, 18
- Deformaciones 13-19
 - generalizadas 258, 278
- impuestas 30, 117
- no mecánicas 76
- Delta de Dirac 325
- Directriz 35, 37, 49, 72, 280
- Dovela 44, 93
- Ecuación de la elástica 317, 370, 391
- Ecuaciones
 - constitutivas 19
- Ecuaciones – de compatibilidad 19
 - de compatibilidad de Beltrami 28, 29
 - de equilibrio interno 7-10, 44-54, 2471
 - de Lamé 25, 28
 - de Navier 27, 28
 - elásticas 304, 358, 384, 487
 - elásticas reducidas 466
- Efectos térmicos 293, 303, 330, 348
- Eje
 - de torsión 202
 - neutro (ver fibra neutra)
- Ejes principales de inercia 49, 97, 98, 99-101, 130
- Elasticidad lineal 20
- Elementos finitos 205, 211
- Emparrillado plano 495
- Empotramiento 37
- Energía
 - de deformación 31, 32, 83-84, 122-124, 196, 261
 - elástica (minimización) 277, 483
 - potencial de las fuerzas externas 261
 - potencial total 260
- Esfuerzo
 - axil 42, 63-69, 71-90, 124, 285
 - cortante 42, 63-69

- cortante esviado 169-172
- Esfuerzos 39-44
- Estructuras
 - antifuniculares 447
 - antimétricas 421
 - articuladas 285
 - hiperestáticas 55, 424
 - intraslacionales 450
 - isostáticas 55, 424
 - reticuladas 419
 - simétricas 420
 - translacionales 450
- Excentricidad 124
- Fibra neutra 93-94, 95, 98, 100, 104-105, 125, 159
- Flexión
 - compuesta 91, 124-140
 - esviada 98-114
 - pura 91
 - simple 91
- Flujo de tensiones tangenciales 163, 165, 183-184, 219
- Flujos correctores 184
- Formulación
 - de Euler-Bernouilli 317
 - de Timoshenko 370
- Fórmulas de Navier-Bresse 428-435, 483
- Función
 - de alabeo de Saint-Venant 202, 203, 205
 - de Heaviside 322
 - de Prandtl 204, 205, 212
- Grado de libertad 298, 426
- Grado de traslacionalidad 450
- Hiperestatismo 55-56, 180
- Hipótesis
 - de Navier 72, 77, 91, 93, 117
 - de Winkler 30
- hormigón
 - armado 4
 - pretensado 4
- Incógnitas hiperestáticas 277, 298
- Inestabilidad 261
- Isostática base 298, 424
- Isostatismo 55-56
- Lecho elástico 334
- Ley de Hooke 19-26, 32, 93
- Leyes de esfuerzos 54-61, 63-69
- Matriz
 - de conexión 286
 - de equilibrio 492
 - de rigidez 306, 363
- Mecánica del Medio Continuo 6, 16
- Ménsula 42
- Método
 - de compatibilidad 286, 298, 400, 424
 - de la fuerza unidad 256
 - de rigidez 286, 303, 410, 424, 454
- Módulo
 - de alabeo 231
 - de elasticidad 20-26
 - de elasticidad transversal 22-26
 - de Poisson 21-26
 - de torsión 220
 - de Young
 - resistente 95-96
- Momento
 - de alabeo 191
 - de inercia 95, 99-106, 212
 - de inercia mecánico 115
 - estático 154, 196
 - estático sectorial 230
 - flector 42, 63-69, 91-151, 154-156, 170
 - torsor 42, 63-69
- Movimiento
 - de sólido rígido 493
 - eficaz 263
 - relativo 271
- Movimientos 1, 2, 3, 12-16, 19
- Movimientos virtuales 248
- Núcleo central 140-142
- Nudos de tamaño finito 462
- Pieza elástica 35-37, 72
- Piezas

- curvas 390
- de plano medio 37, 92-98
- planas 37
- Principio de Saint-Venant 61
- Problema elástico 27, 32
- Producto sectorial de inercia 191
- Puntos angulosos 219, 222
- Radio
 - de curvatura 94, 101
 - de giro 125, 130
- Rendimiento geométrico 96
- Retracción 30
- Rigidez a torsión 214
- Rótula 39
- Sección reducida 197
- Secciones
 - cerradas 180-184, 219
 - de paredes delgadas 162-200, 215
 - unicelulares 167-169, 219
- Sólido deformable 6, 7, 12,
 - 19, 29, 35
- Subestructuras 30, 31
- Superposición de efectos 33, 34
- Tensión 4-12, 39
 - de compresión 4
 - de tracción 4
 - normal 4, 5, 6
 - tangencial 4, 5, 7, 153-200
- Tensiones cortantes - Ver tensiones tangenciales
- Tensor
 - de deformaciones 17
 - de tensiones 6, 7, 10
- Teorema
 - de Castigliano (primer teorema) 266, 483
 - de Castigliano (segundo teorema) 267, 483
 - de los trabajos virtuales 247, 483
 - de los trabajos virtuales complementarios 255, 483
 - de los tres momentos 403
 - de Maxwell-Betti 273
 - de reciprocidad - ver teorema de Maxwell-Betti
 - de Mohr (primer teorema) 340, 379
 - de Mohr (segundo teorema) 340, 379
- Torsión
 - con alabeo - ver torsión no uniforme
 - no uniforme 201, 226, 232
 - según Saint-Venant – Ver torsión uniforme
 - uniforme 201, 473
- Triedro
 - local 37
 - de Frenet 47, 51
- Variaciones térmicas 30
- Vigas continuas 399
- Vinculaciones 27, 37-39