

## บทที่ 1

### ตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์

กระบวนการทางวิทยาศาสตร์มีรูปแบบการค้นหาคำรู้ที่เป็นเหตุเป็นผลในทางกฎหมายก็ใช้การอ้างเหตุผลการตัดสิน พิพากษา ในเศรษฐศาสตร์และสังคมต่างก็โน้มน้าวและสร้างความน่าเชื่อถือด้วยกระบวนการที่เป็นเหตุเป็นผล จะเห็นว่าตรรกศาสตร์ซึ่งเป็นศาสตร์ที่ศึกษาเกี่ยวกับการใช้เหตุผลมีบทบาทสำคัญในการสร้างและพัฒนารากฐานให้กับศาสตร์ต่าง ๆ และด้านคอมพิวเตอร์นั้นจำเป็นต้องอาศัยตรรกศาสตร์เพื่อสั่งการทำงานของเครื่องจักร เนื้อตรรกศาสตร์หรือเป็นศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับหลักการของขบวนการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล การศึกษาตรรกศาสตร์เป็นการค้นหาเงื่อนไขที่จะใช้พิจารณาว่าจากเหตุที่ยอมรับว่าจริง จะสามารถสรุปผลตามมาว่าอย่างไร ความสมเหตุสมผลเชิงตรรกศาสตร์ของการให้เหตุผล คือความสัมพันธ์กันระหว่างเหตุและผลในลักษณะที่ ถ้าเหตุเป็นจริงแล้วผลย่อมเป็นจริง

#### 1.1 ประโยค และประพจน์

ความคิดแสดงได้ด้วยประโยค ดังนั้นภาษาที่ใช้ในการให้เหตุผลจึงต้องเกี่ยวข้องกับประโยค อย่างไรก็ตามเราคงไม่ต้องศึกษาประโยคทุกชนิดเพราะในเรื่องของความคิดจะแสดงได้ด้วยประโยคบางชนิดเท่านั้น สำหรับประพจน์คือประโยคบอกเล่าที่สามารถตัดสินได้ว่าจริง (T) หรือ เท็จ (F) อย่างไม่อย่างหนึ่ง อาจจะโดยใคร เมื่อไหร่ก็ตาม เรียกจริง (T) หรือ เท็จ (F) ดังกล่าวว่า ค่าความจริง(Truth Value) ของประพจน์

##### ตัวอย่างต่อไปนี้ประพจน์

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| 1. คนอีสานเป็นคนไทย | (ค่าความจริงเป็น T) |
| 2. ธงชาติไทยมี 3 สี | (ค่าความจริงเป็น T) |
| 3. แมวทุกตัวมี 3 ขา | (ค่าความจริงเป็น F) |
| 4. $1 + 3 = 4$      | (ค่าความจริงเป็น T) |

##### ตัวอย่างต่อไปนี้ไม่ใช่ประพจน์

1. คุณมาทำไม
2. เขาเป็นหัวหน้าห้อง
3. นายแดงและนายดำใครสูงกว่ากัน
4. ไก่กับไข่อะไรเกิดก่อนกัน

$$5. \quad x + 3 = 10$$

สำหรับในประโยค  $x + 3 = 10$  ตัวอักษร  $x$  เป็นตัวแปรหากแทน  $x$  ด้วย 7 จะได้ว่าประโยคนี้เป็นจริง หากแทน  $x$  ด้วย 5 จะได้ว่าประโยคนี้เป็นเท็จ ดังนั้นประโยคที่มีตัวแปรดังเช่นประโยค  $x + 3 = 10$  ไม่สามารถตัดสินลงไปได้ว่า ประโยคนั้นจะเป็นจริงหรือเท็จ ประโยคเช่นนี้จึงไม่ใช่ประพจน์

**หมายเหตุ :** ต่อไปนี้บทรนี้คำว่าประโยคจะหมายถึงประโยคที่เป็นประพจน์และเป็นประโยคซึ่งสามารถกลายเป็นประพจน์ได้เมื่อแทนค่าตัวแปรในกรณีทั่วไปเราอาจจะเขียนแทนประโยคด้วยตัวแปร  $a, b, c, \dots$  หรือ  $A, B, C, \dots$

### ตัวอย่าง 1.1

$A$	แทนประพจน์	นกมี 8 ขา
$B$	แทนประพจน์	ไก่อ่ายน้ำได้
$p$	แทนประพจน์	$2 + 3 = 4$
$q$	แทนประพจน์	$3 - 3 = 0$

### 1.2 ประโยคเชิงประกอบ

ประโยคที่ได้กล่าวถึงในตอนต้น เป็นประโยคเชิงเดี่ยว แต่ในกระบวนการของเหตุผลจะเป็นการนำประโยคหลาย ๆ ประโยคเชื่อมต่อกันดังนั้นในเรื่องของการผูกประโยคเป็นประโยคใหม่โดยการเชื่อมด้วย **ตัวเชื่อม (Connectives)** จะได้ประโยคใหม่ในรูปแบบต่าง ๆ เรียกว่า **ประโยคเชิงประกอบ (Compound Sentences)** มีดังต่อไปนี้

**1) ประโยครวม(Conjunction)** ตัวเชื่อมที่ทำหน้าที่นี้คือตัวเชื่อม **และ (and)** ใช้สัญลักษณ์  $\wedge$  แทน คำว่า และ

### ตัวอย่าง 1.2

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์  
ประพจน์ “  $p$  และ  $q$  ” เขียนแทนด้วย  $p \wedge q$

การเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” จะได้ประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงเป็นจริง (T) ก็ต่อเมื่อเป็นจริง (T) ทั้งคู่ เขียนตารางค่าความจริง ของประพจน์ที่เชื่อมด้วย “และ” ได้ดังนี้

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

### ตัวอย่าง 1.3

1. ให้  $p$  แทน แดงไปเที่ยว

$q$  แทน ดำไปเที่ยว

การเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$p \wedge q$  แทน แดงไปเที่ยวและดำไปเที่ยว

2. ให้  $R$  แทน ขณะนี้ฝนตก

$S$  แทน ขณะนี้แดดออก

การเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$R \wedge S$  แทน ขณะนี้ฝนตกและขณะนี้แดดออก

3. ให้  $v$  แทน  $2 + 3 = 5$

$u$  แทน 5 เป็นจำนวนคี่

การเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$u \wedge v$  แทน  $2 + 3 = 5$  และ 5 เป็นจำนวนคี่

2) **ประโยคเลือก(Disjunction)** ตัวเชื่อมที่ทำหน้าที่นี้คือตัวเชื่อม **หรือ (or)** ใช้สัญลักษณ์  $\vee$  แทน คำว่า หรือ

### ตัวอย่าง 1.4

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์

ประพจน์ “ $p$  หรือ  $q$ ” เขียนแทนด้วย  $p \vee q$

การเชื่อมประพจน์ 2 ประพจน์ ด้วย “หรือ” จะได้ประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) ก็ต่อเมื่อเป็นเท็จ (F) ทั้งคู่ เขียนตารางค่าความจริง ของประพจน์ที่เชื่อมด้วย “หรือ” ได้ดังนี้

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

### ตัวอย่าง 1.5 การเชื่อมประโยคเลือก

1. ให้  $p$  แทน แดงไปเที่ยว

$q$  แทน ดำไปเที่ยว

การเชื่อมประพจน์ด้วย “หรือ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$p \vee q$  แทน แดงไปเที่ยวหรือดำไปเที่ยว

2. ให้  $R$  แทน ขณะนี้ฝนตก

$S$  แทน ขณะนี้แดดออก

การเชื่อมประพจน์ด้วย “หรือ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$R \vee S$  แทน ขณะนี้ฝนตกหรือขณะนี้แดดออก

3. ให้  $v$  แทน  $2 + 3 = 5$

$u$  แทน 5 เป็นจำนวนคี่

การเชื่อมประพจน์ด้วย “หรือ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$u \vee v$  แทน  $2 + 3 = 5$  หรือ 5 เป็นจำนวนคี่

3) ประโยคเงื่อนไข (Condition) ตัวเชื่อมที่ทำหน้าที่นี้คือ ตัวเชื่อม ถ้า...แล้ว...

(if...then...) ใช้สัญลักษณ์  $\rightarrow$  แทนคำว่า ถ้า...แล้ว...

### ตัวอย่าง 1.6

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์

ประพจน์ “ถ้า  $p$  แล้ว  $q$ ” เขียนแทนด้วย  $p \rightarrow q$

การเชื่อมประพจน์ 2 ประพจน์ ด้วย “ถ้า...แล้ว...” จะได้ประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ(F) ก็ต่อเมื่อประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันนั้นประพจน์ที่เป็นเหตุมีค่าความจริงเป็นจริง (T) และ

ประพจน์ที่เป็นผล มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เขียนตารางค่าความจริง ของประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ ถ้า ...แล้ว...” ได้ดังนี้

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

**ตัวอย่าง 1.7** การเชื่อมประโยคเงื่อนไข

1. ให้  $p$  แทน แดงไปเที่ยว

$q$  แทน ดำไปเที่ยว

การเชื่อมประพจน์ด้วย “ถ้า...แล้ว...” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$p \rightarrow q$  แทน ถ้าแดงไปเที่ยวแล้วดำไปเที่ยว

2. ให้  $R$  แทน ขณะนี้ฝนตก

$S$  แทน ขณะนี้แดดออก

การเชื่อมประพจน์ด้วย “ถ้า...แล้ว...” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$R \rightarrow S$  แทน ถ้าขณะนี้ฝนตกแล้วขณะนี้แดดออก

3. ให้  $v$  แทน  $2 + 3 = 5$

$u$  แทน 5 เป็นจำนวนคี่

การเชื่อมประพจน์ด้วย “ถ้า...แล้ว...” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$u \rightarrow v$  แทน ถ้า  $2 + 3 = 5$  แล้ว 5 เป็นจำนวนคี่

**4) ประโยคเงื่อนไขสองทาง (Bicondition)** ตัวเชื่อมที่ทำหน้าที่นี้คือ ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ (if and only if ) ใช้สัญลักษณ์  $\leftrightarrow$  แทนคำว่าก็ต่อเมื่อ

**ตัวอย่าง 1.8**

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์

ประพจน์ “  $p$  ก็ต่อเมื่อ  $q$  ” เขียนแทนด้วย  $p \leftrightarrow q$

การเชื่อมประพจน์ 2 ประพจน์ ด้วย “ ก็ต่อเมื่อ ” จะได้ประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงเป็นจริง (T) ก็ต่อเมื่อประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง (T) ทั้งคู่ หรือมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) ทั้งคู่ เขียนตารางค่าความจริง ของประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ ก็ต่อเมื่อ ” ได้ดังนี้

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

### ตัวอย่าง 1.9 การเชื่อมประโยคเงื่อนไขสองทาง

1. ให้  $p$  แทน แดงไปเที่ยว

$q$  แทน ดำไปเที่ยว

การเชื่อมประพจน์ด้วย “ ก็ต่อเมื่อ ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$p \leftrightarrow q$  แทน แดงไปเที่ยวก็ต่อเมื่อดำไปเที่ยว

2. ให้  $R$  แทน ขณะนี้ฝนตก

$S$  แทน ขณะนี้แดดออก

การเชื่อมประพจน์ด้วย “ ก็ต่อเมื่อ ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$R \leftrightarrow S$  แทน ขณะนี้ฝนตกก็ต่อเมื่อขณะนี้แดดออก

3. ให้  $v$  แทน  $2 + 3 = 5$

$u$  แทน 5 เป็นจำนวนคี่

การเชื่อมประพจน์ด้วย “ ก็ต่อเมื่อ ” จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$u \leftrightarrow v$  แทน  $2 + 3 = 5$  ก็ต่อเมื่อ 5 เป็นจำนวนคี่

5) **ประโยคนิเสธ (Negation)** หรือปฏิเสธคือประโยคที่แสดงค่าความจริงตรงกันข้ามกับประโยคเดิม ใช้สัญลักษณ์  $\sim$

ให้  $p$  เป็นประพจน์ นิเสธของประพจน์  $p$  คือประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับค่าความจริงของประพจน์  $p$  แทนด้วย  $\sim p$  เขียนตารางค่าความจริงได้ดังนี้

$P$	$\sim P$
T	F
F	T

ตัวอย่าง 1.10 การเชื่อมประโยคนิเสธ

- ให้  $p$  แทน นกบินได้  
 $\sim p$  แทน นกบินไม่ได้
- ให้  $T$  แทน  $2 + 3 = 5$   
 $\sim T$  แทน  $2 + 3 \neq 5$

ในกระบวนการของเหตุผลจะเป็นการนำประโยคหลาย ๆ ประโยคเชื่อมต่อกัน ด้วยตัวเชื่อมทั้งหมดที่ได้กล่าวมาข้างต้นสรุปได้เป็นตารางดังต่อไปนี้

		และ	หรือ	ถ้า...แล้ว...	ก็ต่อเมื่อ
$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

สรุปเป็นข้อความได้ดังต่อไปนี้

- T และ T ได้ T นอกนั้นเป็น F
- F หรือ F ได้ F นอกนั้นเป็น T
- ถ้า T แล้ว F ได้ F นอกนั้นเป็น T
- ก็ต่อเมื่อ ต่างกันได้ F เหมือนกันได้ T

ตัวอย่าง 1.11 กำหนดให้

$P$  : ปลา มี 3 ขา

$Q$  : นก มีปีก

$R$  : ไก่ มีปีก

$S$  : หมู มี 6 ขา

จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้

1.  $P \wedge Q$

$P \wedge R$

$R \wedge S$

$S \wedge P$

2.  $P \vee R$

$R \vee S$

$S \vee Q$

$S \vee P$

3.  $R \rightarrow P$

$P \rightarrow R$

$S \rightarrow Q$

$S \rightarrow P$

4.  $P \leftrightarrow Q$

$Q \leftrightarrow P$

$R \leftrightarrow S$

$S \leftrightarrow P$

5.  $\sim P \vee R$

$\sim (R \wedge S)$

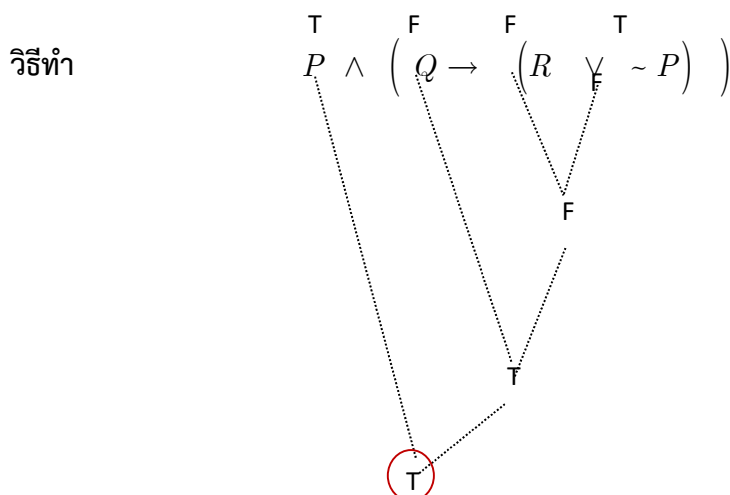
$S \vee \sim Q$

$\sim S \vee P$

### 1.3 ประโยคเชิงประกอบที่ซับซ้อน

ประโยคเชิงประกอบอาจจะมีหลาย ๆ ประโยคย่อย และมีหลายตัวเชื่อม เราสามารถหาค่าความจริงของประโยคทั้งหมดได้โดยการหาค่าความจริงตามลักษณะตัวเชื่อมที่ละส่วนของประโยคจนครบทั้งประโยค

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่าความจริงของประโยค  $P \wedge (Q \rightarrow (R \vee \sim P))$  เมื่อกำหนดว่า  $P$  มีค่าความจริงเป็นจริง (T)  $Q$  และ  $R$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)



ดังนั้น ประโยค  $P \wedge (Q \rightarrow (R \vee \sim P))$  มีค่าความจริงเป็นจริง (T)



**ตัวอย่าง 1.13** กำหนดให้

$A$  : มีค่าความจริงเป็นจริง (T)

$B$  : มีค่าความจริงเป็นจริง (T)

$C$  : มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

$D$  : มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

$E$  : มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

จงหาค่าความจริงของประโยคที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$(A \wedge B) \leftrightarrow (\sim C \rightarrow D)$	$(\sim A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim (C \wedge D)$
$\sim (A \leftrightarrow B) \wedge (E \vee \sim D)$	$\sim (E \rightarrow B) \rightarrow (\sim E \vee \sim D)$
$[(A \wedge B) \rightarrow \sim D] \leftrightarrow (E \vee C)$	$[(E \leftrightarrow B) \wedge \sim D] \leftrightarrow (A \wedge \sim C)$
$[(A \wedge B) \rightarrow \sim D] \leftrightarrow (E \vee C)$	$[\sim (E \wedge B) \leftrightarrow C] \wedge (A \leftrightarrow E)$

### 1.4 การวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง

บางกรณีถ้าเราไม่ทราบค่าประพจน์เดี่ยวที่กำหนดมาให้มันมีค่าความจริงเป็น จริง(T) หรือ เท็จ(F) ดังนั้นจึงต้องอาศัยการพิจารณาจากประพจน์ทั้งหมดโดย ถ้ามีประพจน์เพียงประพจน์เดียวค่าความจริงเกิดได้เพียง 2 กรณี คือ จริง(T) กับเท็จ (F) เท่านั้น ดังนั้นถ้ามีประพจน์  $n$  ประพจน์ จะเกิดค่าความจริงทั้งหมด  $2^n$  กรณีซึ่งวิธีการง่ายและสะดวกที่สุดสำหรับการพิจารณาคือการวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.14** จงหาค่าความจริง  $P \rightarrow (Q \vee P)$  โดยการวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง

**วิธีทำ** เนื่องจาก  $P \rightarrow (Q \vee P)$  มีทั้งหมด 2 ประพจน์ เกิดค่าความจริงได้  $2^2 = 4$  กรณี

$P$	$Q$	$Q \vee P$	$P \rightarrow (Q \vee P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

**ตัวอย่างที่ 1.15** จงหาค่าความจริงของ  $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$  โดยการวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง

**วิธีทำ** เนื่องจาก  $(P \wedge Q) \leftrightarrow R$  มีทั้งหมด 3 ประพจน์ เกิดค่าความจริงได้  $2^3 = 8$  กรณี

$P$	$Q$	$R$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \leftrightarrow R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F
F	F	F	F	T

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่าความจริงของ  $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow B$  โดยการวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง

วิธีทำ เนื่องจาก  $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow B$  มีทั้งหมด.....ประพจน์

เกิดค่าความจริงได้  $2^{\dots} = \dots\dots\dots$  กรณี

$A$	$B$				

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่าความจริงของประโยค

$$(\sim x \leftrightarrow y) \wedge (z \rightarrow x)$$

ด้วยการวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง

วิธีทำ เนื่องจาก  $(\sim x \leftrightarrow y) \wedge (z \rightarrow x)$  มีทั้งหมด.....ประพจน์

เกิดค่าความจริงได้  $2^{\dots} = \dots\dots\dots$  กรณี


## 1.5 ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกันคือประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณีสามารถใช้แทนกันได้ และ  
ใช้สัญลักษณ์  $\equiv$  แทนประพจน์ที่สมมูลกัน และ  $\not\equiv$  แทนประพจน์ที่ไม่สมมูลกัน

ตัวอย่าง 1.18 จงแสดงว่า  $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$\sim P$	$\sim P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ตัวอย่าง 1.19 จงแสดงว่า  $A \rightarrow B \not\equiv B \rightarrow A$

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

ตัวอย่าง 1.20 จงตรวจสอบว่า  $A \wedge B \equiv \sim B \rightarrow A$  หรือไม่


การทดสอบการสมมูลกันของประพจน์นอกจากใช้ตารางตรวจสอบแล้วยังสามารถสมบัติการสมมูลกันของประพจน์ได้ดังต่อไปนี้

1. การสลับที่

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

2. การจัดหมู่

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

3. การกระจาย

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

4. การปฏิเสธประพจน์รวมและประพจน์เลือก

$$\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$$

$$\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

5. การกลับและผกผันเงื่อนไข

$$P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$$

6. การปฏิเสธซ้อน

$$\sim (\sim P) \equiv P$$

7. การเปลี่ยนเงื่อนไขกับเลือก

$$P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

8. การกระจายเงื่อนไขไปกลับ

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

**ตัวอย่าง 1.21** จงแสดงว่า  $\sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$  สมมูลกัน

**วิธีทำ**  $\sim (P \rightarrow Q) \equiv \sim (\sim P \vee Q)$  (กฎข้อที่ 7)

$$\equiv P \wedge \sim Q \quad (\text{กฎข้อที่ 4})$$

ดังนั้น  $\sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$  สมมูลกัน

**ตัวอย่าง 1.22** จงแสดงว่า  $\sim [R \wedge (P \rightarrow Q)] \equiv (R \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow \sim Q)$  สมมูลกัน

**วิธีทำ**  $\sim [R \wedge (P \rightarrow Q)] \equiv \sim [R \wedge (\sim P \vee Q)]$  (กฎข้อที่ 7)

$$\equiv \sim R \vee \sim (\sim P \vee Q) \quad (\text{กฎข้อที่ 4})$$

$$\equiv \sim R \vee (P \wedge \sim Q) \quad (\text{กฎข้อที่ 4})$$

$$\equiv (\sim R \vee P) \wedge (\sim R \vee \sim Q) \quad (\text{กฎข้อที่ 3})$$

$$\equiv (R \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow \sim Q) \quad (\text{กฎข้อที่ 7})$$

$$\text{ดังนั้น } \sim [R \wedge (P \rightarrow Q)] \equiv (R \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow \sim Q)$$

**ตัวอย่าง 1.23** จงแสดงว่า  $p \vee (q \rightarrow r) \equiv (q \wedge \sim p) \rightarrow r$  สมมูลกัน

$$\text{วิธีทำ } p \vee (q \rightarrow r) \equiv p \vee (\sim q \vee r) \quad (\text{กฎข้อที่ 7})$$

$$\equiv (p \vee \sim q) \vee r \quad (\text{กฎข้อที่ 2})$$

$$\equiv (\sim q \vee p) \vee r \quad (\text{กฎข้อที่ 1})$$

$$\equiv \sim (q \wedge \sim p) \vee r \quad (\text{กฎข้อที่ 4})$$

$$\equiv (q \wedge \sim p) \rightarrow r \quad (\text{กฎข้อที่ 7})$$

$$\text{ดังนั้น } p \vee (q \rightarrow r) \equiv (q \wedge \sim p) \rightarrow r$$

**ตัวอย่าง 1.23** จงแสดงว่า  $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$  สมมูลกัน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 1.6 สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์คือประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง(T) เสมอ ไม่ว่าประพจน์ย่อยจะมีค่าความจริงเป็นจริง(T) หรือเท็จ(F) ก็ตามสำหรับวิธีการตรวจสอบว่าประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่นั้นในวิชานี้ได้นำเสนอการตรวจสอบสัจนิรันดร์ทั้งหมด 2 วิธีคือ การใช้ตารางวิเคราะห์ค่าความจริง และวิธีการหาข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 1.24 จงตรวจสอบว่าประโยค  $P \rightarrow (Q \vee P)$  เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$P$	$Q$	$Q \vee P$	$P \rightarrow (Q \vee P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ดังนั้น  $P \rightarrow (Q \vee P)$  เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตัวอย่าง 1.25  $(P \rightarrow \sim Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge R$

$P$	$Q$	$R$	$\sim P$	$\sim Q$	$P \rightarrow \sim Q$	$R \rightarrow Q$	$(P \rightarrow \sim Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	F	F	F	T	F
T	T	F	F	F	F	T	F
T	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	F

ดังนั้น  $(P \rightarrow \sim Q) \wedge (R \rightarrow Q) \wedge R$  ไม่เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตัวอย่าง 1.26 จงตรวจสอบว่าประโยค  $\sim P \leftrightarrow (\sim Q \wedge P)$  เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$P$	$Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim Q \wedge P$	$\sim P \leftrightarrow (\sim Q \wedge P)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

ดังนั้น  $\sim P \leftrightarrow (\sim Q \wedge P)$  ไม่เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตัวอย่าง 1.27 จงตรวจสอบว่าประโยค  $\sim A \rightarrow (B \vee A)$  เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่


จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าการตรวจสอบสัจนิรันดร์โดยการสร้างตารางทำให้เสียเวลาในการตรวจสอบค่อนข้างมากดังนั้นจึงมีอีกวิธีที่ช่วยให้ตรวจสอบได้ง่ายขึ้นคือวิธีการหาข้อขัดแย้งโดยเริ่มต้นจากกำหนดให้ประโยคที่ให้มาเป็นเท็จแล้วดำเนินการหาข้อขัดแย้งนั้นคือถ้ามีข้อขัดแย้งแสดงว่าประพจน์ที่ให้มาเป็นสัจนิรันดร์ แต่ถ้าไม่มีข้อขัดแย้งแสดงว่าประโยคที่ให้มาไม่เป็นสัจนิรันดร์ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.28 จงตรวจสอบประโยค  $P \rightarrow (Q \vee P)$  ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมติให้ประโยค  $P \rightarrow (Q \vee P)$  เป็นเท็จ

แสดงว่า  $P$  เป็นจริง

$Q \vee P$  เป็นเท็จ

จาก  $Q \vee P$  เป็นเท็จแสดงว่า  $Q$  เป็นเท็จ  $P$  เป็นเท็จ

จะเห็นว่าประพจน์  $P$  มีค่าความจริงทั้งจริงและเท็จจึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ประโยค  $P \rightarrow (Q \vee P)$  เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 1.29 จงตรวจสอบประโยค  $[(\sim P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow \sim Q$  ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมติให้ประโยค  $[(\sim P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow \sim Q$  เป็นเท็จ

แสดงว่า  $(\sim P \rightarrow Q) \wedge P$  เป็นจริง

$\sim Q$  เป็นเท็จ

จาก  $\sim Q$  เป็นเท็จแสดงว่า  $Q$  เป็นจริง

จาก  $(\sim P \rightarrow Q) \wedge P$  เป็นจริง แสดงว่า

$\sim P \rightarrow Q$  เป็นจริง

$P$  เป็นจริง

ทำให้  $\sim P \rightarrow Q$  เป็นจริง ไม่เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ประโยค  $[(\sim P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow \sim Q$  ไม่เป็นสัจนิรันดร์



**ตัวอย่างที่ 1.30** จงตรวจสอบประโยค  $[(\sim A \vee B) \wedge A] \rightarrow \sim B$  ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

[illegible]



## แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

### 1. กำหนดให้

$P$  : ปลา มี 3 ขา       $Q$  : นก มีปีก       $R$  : ไก่ มีปีก       $S$  : หมู มี 6 ขา

จงหาค่าความจริงของประโยคต่อไปนี้

- |                     |                     |                       |                           |
|---------------------|---------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1.1 $P \wedge Q$    | 1.2 $P \vee R$      | 1.3 $R \rightarrow P$ | 1.4 $P \leftrightarrow Q$ |
| $P \wedge R$        | $R \vee S$          | $P \rightarrow R$     | $Q \leftrightarrow P$     |
| $R \wedge S$        | $S \vee Q$          | $S \rightarrow Q$     | $R \leftrightarrow S$     |
| $S \wedge P$        | $S \vee P$          | $S \rightarrow P$     | $S \leftrightarrow P$     |
| 1.5 $\sim P \vee R$ | $\sim (R \wedge S)$ | $S \vee \sim Q$       | $\sim S \vee P$           |

### 2. กำหนดให้

$A$  : มีค่าความจริงเป็นจริง (T)       $B$  : มีค่าความจริงเป็นจริง (T)  
 $C$  : มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)       $D$  : มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)  
 $E$  : มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

จงหาค่าความจริงของประโยคที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- 2.1  $(A \wedge B) \leftrightarrow (\sim C \rightarrow D)$
- 2.2  $(\sim A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim (C \wedge D)$
- 2.3  $\sim (A \leftrightarrow B) \wedge (E \vee \sim D)$
- 2.4  $\sim (E \rightarrow B) \rightarrow (\sim E \vee \sim D)$
- 2.5  $[(A \wedge B) \rightarrow \sim D] \leftrightarrow (E \vee C)$
- 2.6  $[(E \leftrightarrow B) \wedge \sim D] \leftrightarrow (A \wedge \sim C)$
- 2.7  $[(A \wedge B) \rightarrow \sim D] \leftrightarrow (E \vee C)$
- 2.8  $[\sim (E \wedge B) \leftrightarrow C] \wedge (A \leftrightarrow E)$

### 3. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ด้วยการวิเคราะห์ด้วยตารางค่าความจริง

- |  |  |
|--|--|
| 3.1 $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow B$                                | 3.2 $(\sim A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim (A \wedge B)$ |
| 3.3 $\sim (A \rightarrow B) \leftrightarrow B$                           | 3.4 $(\sim A \leftrightarrow C) \rightarrow \sim (C \wedge D)$ |
| 3.5 $[\sim (E \wedge B) \leftrightarrow C] \wedge (C \leftrightarrow E)$ | 3.6 $\sim (A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee \sim D)$        |

4. จงตรวจสอบว่าประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ด้วยวิธีการสร้างตารางตรวจสอบ

$$4.1 \quad A \wedge B \equiv \sim B \rightarrow A$$

$$4.2 \quad A \rightarrow B \equiv \sim B \rightarrow A$$

$$4.3 \quad A \wedge B \equiv \sim (B \rightarrow A)$$

$$4.4 \quad A \wedge B \equiv \sim (A \vee B)$$

5. จงตรวจสอบว่าประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่โดยใช้สมบัติการสมมูลกันของประพจน์

$$4.1 \quad \sim (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$$

$$4.2 \quad \sim [R \wedge (P \rightarrow Q)] \equiv (R \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow \sim Q)$$

$$4.3 \quad A \vee (B \rightarrow C) \equiv (B \wedge \sim A) \rightarrow C$$

$$4.4 \quad p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

$$4.5 \quad p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$4.6 \quad (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

6. จงสร้างตารางเพื่อตรวจสอบประโยคต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$6.1 \quad \sim (A \wedge B) \leftrightarrow B$$

$$6.2 \quad (\sim A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim (A \wedge B)$$

$$6.3 \quad \sim (A \rightarrow B) \leftrightarrow B$$

$$6.4 \quad (\sim A \leftrightarrow C) \rightarrow \sim (C \wedge D)$$

$$6.5 \quad [\sim (E \wedge B) \leftrightarrow C] \wedge (C \leftrightarrow E)$$

$$6.6 \quad \sim (A \leftrightarrow B) \wedge (A \vee \sim D)$$

7. จงตรวจสอบประโยคต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

$$7.1 \quad \sim (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$7.2 \quad (\sim A \wedge B) \rightarrow \sim (A \wedge B)$$

$$7.3 \quad (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$7.4 \quad (\sim A \wedge C) \rightarrow \sim A$$

$$7.5 \quad [\sim (A \rightarrow B) \wedge (B \vee C) \wedge \sim C] \rightarrow A$$