Итерационный метод Чебышёва

Васильев Павел Петрович
Группа 303

30 ноября 2025 г.

1 Постановка задачи

Необходимо решить СЛАУ явными одношаговым и двушаговым итерационным методом Чебышёва с оптимальными параметрами.

$$x + \mathbf{A}x = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})x = \mathbf{b}$$

где $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ – симметричная строго определённая матрица.

2 Методы Чебышёва

2.1 Одношаговый итерационный алгоритм

Рассмотрим следующую итерационную схему

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = b,\ y_0 \in \mathbf{H}$$
$$y_{k+1} = y_k + \tau_{k+1}(b - Ay_k)$$

где $\{\tau_k\}$ – итерационные параметры.

Для решения этой задачи нам нужно задать набор итерационных параметров, что сводится к нахождению полинома $P_n(t)$ такого вида, чтобы $\max |P_n(t)|$ на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$ было минимальным.

Этот полином известен (Чебышёва) и имеет следующий вид:

$$P_n(t) = q_n T_n\left(\frac{1 - \tau_0 t}{\rho_0}\right),\quad q_n = \frac{1}{T_n(1/\rho_0)}$$

где:

$$T_n(t) = \begin{cases} \cos(n \arccos(t)), & |t| \le 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Arch}(t)), & |t| \ge 1 \end{cases}$$

$$q_n = \frac{2p_1^n}{1+p_1^{2n}},\ \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2},\ \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\ \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

При этом $\max_{\{\gamma_1 \le t \le \gamma_2\}} |P_n(t)| = q_n$

Пусть $\mathcal{M}_n$ – множество корней полинома Чебышёва. А корни многочлена $P_n(t)$ равны $\frac{1}{\tau_k}$, тогда можно получить следующую формулу на итерационные параметры:

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0\mu_k},\ \mu_k \in \mathcal{M}_n$$

2.1.1 Поиск оптимальных параметров

Алгоритм может сходиться по-разному в зависимости даже от порядка параметров, будем использовать следующий алгоритм для построения оптимального набора.

Пусть наше количество итераций равно степени двойки $n = 2^p$. Тогда:

1. $\Theta_1 = \{1\}$
2. Увеличиваем количество элементов в Θ_k в двое, пока $k \ne 2^p$ по правилу:
3. $\theta_{2i}^{2m} = 4m - \theta_i^m,\ \theta_{2i-1}^{2m} = \theta_i^m$, где $\theta_j^{2m} \in \Theta_{2m},\ \theta_j^m \in \Theta_m$
4. Продолжаем шаг 3, пока не выполнится условие 2

После получаем множество $\mathcal{M}_n^* = \{-\cos\frac{\pi}{2n}\theta_i,\ \theta_i \in \Theta_n\}$

Возвращаясь в предыдущей секции, это оптимальный порядок корней полинома Чебышёва и мы можем вычислять параметры τ_k

2.2 Двушаговый итерационный алгоритм

Рассмотрим следующую итерационную схему:

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}(I - \tau_k A)y_k + (1-\alpha_{k+1})y_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_k b$$

В этом случае параметры можно выбрать следующим образом:

1. $\tau_k = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$
2. $\alpha_1 = 2,\ \alpha_{k+1} = \frac{4}{4-\rho_0^2\alpha_k}$, где $\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi},\ \xi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$

В этом случае первое приближение вычисляется следующим образом:

$$y_1 = y_0 + \tau(b - Ay_0)$$

3 Оценка спектра матрицы

Параметры γ_1 и γ_2 являются константами эквивалентности для энергетических норм матрицу A и I, поскольку матрица A – симетричная, то γ_1 и γ_2 равны, соответственно, минимальному и максимальному собственному значению матрицы A.

Чтобы оценить собственные значения мы можем воспользоваться теоремой Гершгорина, которая утверждает, что все собственные значения матрицы находятся в объединении кругов Гершгорина:

$$\forall i \in \mathcal{I}_n : \; |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{k \neq i}^{n} |a_{ik}|$$

Матрица симметрична $\rightarrow$ её собственные значения находятся на вещественной прямой, найдём верхнюю границу этого объединения и нижнюю.

В данном случае для матрицы 8 у нас выполнено, что $\gamma_1 \approx 1.0$, а $\gamma_2 \approx 154.4$

4 Графики

4.1 Относительная погрешность

Относительная погрешность:

$$\epsilon_{relative} = \frac{||y_{pred} - y_{true}||}{||y_{true}||}$$

$$||x|| = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

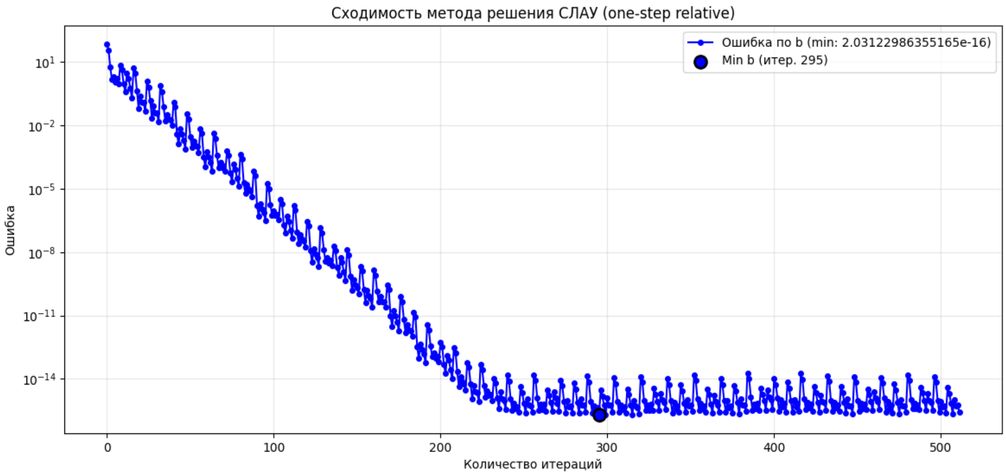

Рис. 1: График сходимости одношагового Чебышёвского метода. Ось Y имеет логарифмический масштаб. Ярко выражены осцилляции при приближении, но общий тренд имеет логарифмическую асимптотику.

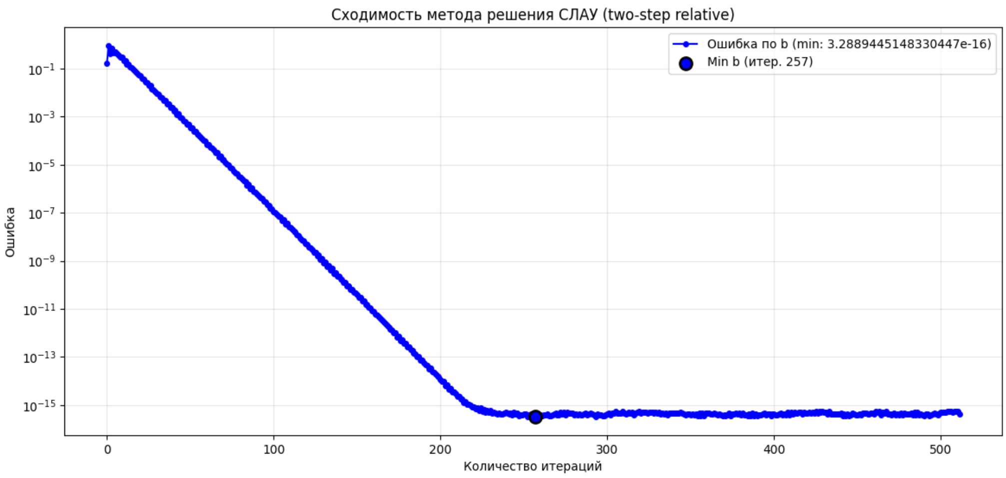

Рис. 2: График сходимости двушагового Чебышёвского метода. Ось Y имеет логарифмический масштаб. Уже нету таких больших осцилляций, общий тренд имеет логарифмическую асимптотику. Сходимость на 220 шаге.

Итераций	Одношаговый алгоритм	Двушаговый алгоритм
16	0.105	0.105
32	0.008	0.009
64	4.445e-5	4.251e-5
128	1.559e-9	1.398e-9
256	2.593e-16	4.329e-16
512	2.749e-16	3.422e-16

Таблица 1: Относительная погрешность в зависимости от итерации

4.2 Абсолютная погрешность

Абсолютная погрешность:

$$\epsilon_{absolute} = ||y_{pred} - y_{true}||$$

$$||x|| = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

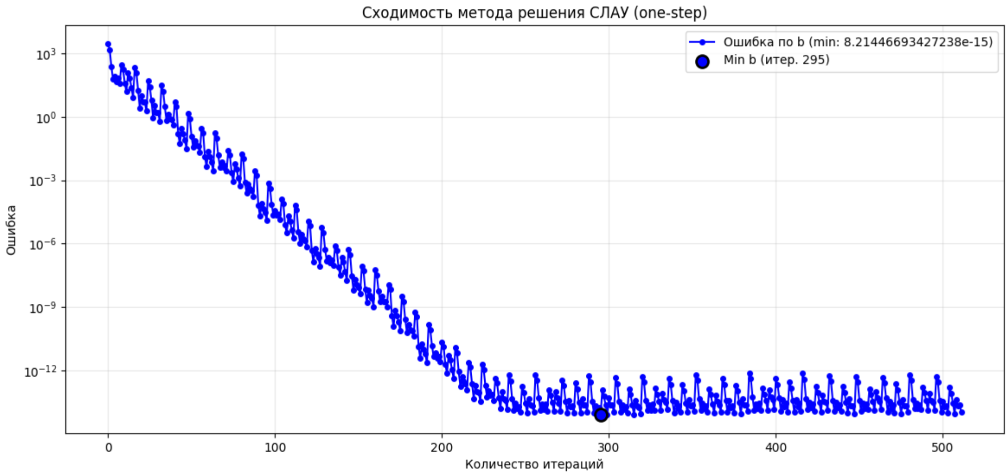

Рис. 3: График сходимости одношагового Чебышёвского метода. Ось Y имеет логарифмический масштаб. Ярко выражены осцилляции при приближении, но общий тренд имеет логарифмическую асимптотику.

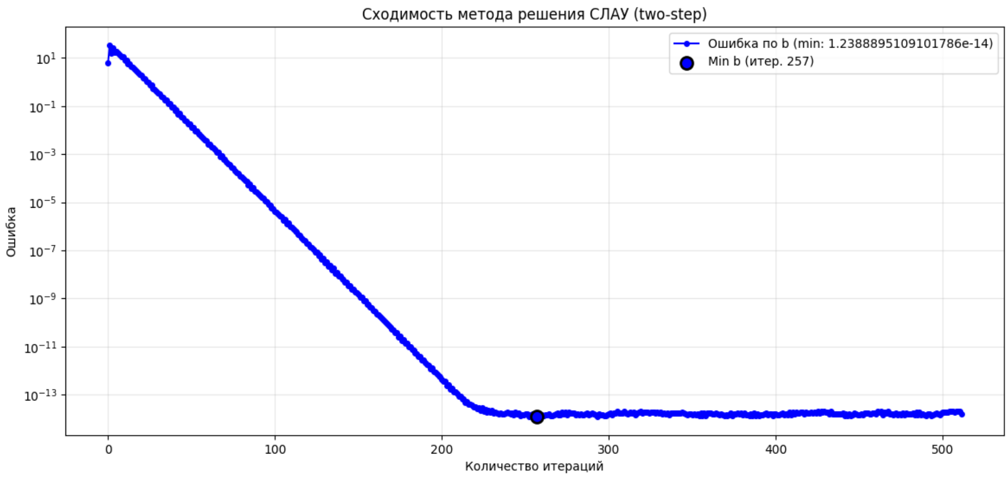

Рис. 4: График сходимости двушагового Чебышёвского метода. Ось Y имеет логарифмический масштаб. Нету таких больших осцилляций, общий тренд имеет логарифмическую асимптотику. Сходимость на 210 шаге.

Итераций	Одношаговый алгоритм	Двушаговый алгоритм
16	4.054	4.75
32	0.338	0.312
64	0.001	0.001
128	5.711e-8	5.686e-8
256	9.072e-15	1.162e-14
512	9.86e-15	1.886e-14

Таблица 2: Абсолютная погрешность в зависимости от итерации

5 Пояснения к коду

Основная логика находится в файлах: main.cpp, chebyshov.cpp, chebyshov.hpp

- chebyshov.hpp - объявляет все необходимые классы для данной задачи.
- chebyshov.cpp - реализованы алгоритмы оценки спектра и Чебышёвские итерации в классах Solver, метод fit оценивает матрицу и строит параметры, метод solve решает СЛАУ
- main.cpp - чтение матрицы и вызов функций из файлов выше
- Makefile - реализует сборку
- analyze.py - скрипт который пересобирает код и строит графики