

Краткий отчёт по решению

Васильев Павел Петрович
группа 303 ВМК МГУ

31 октября 2025 г.

Аннотация

В данном репозитории представлен алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений методом Холецкого на языке программирования C++. Были проведены тесты для $x \in \mathcal{R}^n : x \in \mathcal{U}_{[-1,1]}$, а также использовались вещественные числа разного порядка точности: float16, float32, float64. Для всех тестов были вычислены максимальные и средние нормы невязки, погрешности решений и времени работы. Использована норма $\| * \|_\infty$. В работе были использованы языки C++ для вычислений и Python для анализа результатов.

Ссылка на репозиторий: <https://github.com/GoodDay-lab/cholesky-decomposition>

1 Постановка задачи

Перед нами поставлена задача решить следующую систему линейных уравнений:

$$A \in \mathcal{R}^{n \times n} : A^T = A, A > 0; b \in \mathcal{R}^n \rightarrow Ax = b \quad (1)$$

2 Почему не Гаусс?

Одним из первых алгоритмов для решения подобных систем можно назвать алгоритм Гаусса, в сущности, это нахождение LU разложения для матрицы A . Данный алгоритм неустойчив при небольшом значении диагонального элемента матрицы (близком к машинному нулю), к примеру:

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-8} & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 10^{-8} & 1.0 \end{bmatrix} \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 10^{-8} & 1.0 \\ 0 & -10^{-8} \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\tilde{L}\tilde{U} - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

С другой стороны, у нас есть алгоритм Холецкого, который лишён данной проблемы, это объясняется тем, что $c_{kk} = \sqrt{a_{kk} - (\dots)}$, даже если a_{kk} близко к минимально представимому на машине типу float, деление всё равно происходит на его корень, что больше, чем изначальное число. Более подробное обоснование можно прочесть в учебнике Е.Е.Тыртышникова "Методы Численного Анализа".

3 Алгоритм Холецкого для решения СЛАУ

Вернёмся к изначальным условиям задачи (1).

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & c_{22} & c_{32} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

Попробуем вычислить коэффициенты:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \quad c_{21} = \frac{a_{21}}{c_{11}}, \quad c_{31} = \frac{a_{31}}{c_{11}} \\ c_{22} &= \sqrt{a_{22} - c_{21}^2}, \quad c_{32} = \frac{a_{32} - c_{31}c_{21}}{c_{22}} \\ c_{33} &= \sqrt{a_{33} - c_{31}^2 - c_{32}^2} \end{aligned}$$

Обобщая для любого n , получим:

$$c_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{kj}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$c_{ik} = \frac{\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij}c_{kj} \right)}{c_{kk}}, \quad \forall 1 \leq i < k \quad (3)$$

Хорошо, мы получили удобное представление $A = LL^T$ из треугольных матриц L , а для них мы можем легко решить систему уравнений строчка за строчкой со сложностью $O(n^2)$. Что ж тогда давайте пользоваться принципом разделяй-и-властвуй и решим две более простые системы линейных уравнений

$$Ax = b \implies LL^T x = b \implies \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases} \quad (4)$$

Что ж, отлично! Решение этих двух систем в разы проще, поскольку для каждого нового y_i мы можем пользоваться ранее подсчитанными y_1, \dots, y_{i-1} . Теперь мы сможем легко решить данную систему, время писать код.

4 Результаты

Полученные значения времени работы и погрешности измерений представлены на графиках ниже. К примеру, один и тот же алгоритм работает по-разному для разных типов данных, наименьшая величина достигается на f32 (6), а наибольшая, как ни странно, на f16 (3).

Так же, при увеличении типа float увеличивается и качество работы алгоритма, достаточно сравнить норму невязки на f16 (1) и f64 (7).

5 Выводы

У нас получилось реализовать устойчивый алгоритм для решения системы СЛАУ методом Холецкого на языке программирования C++. Средняя скорость алгоритма составляет 12 мс для матрицы 100×100 , в зависимости от типа вещественного числа. Код доступен по ссылке в аннотации.

6 Графики



Рис. 1: f16



Рис. 2: f16

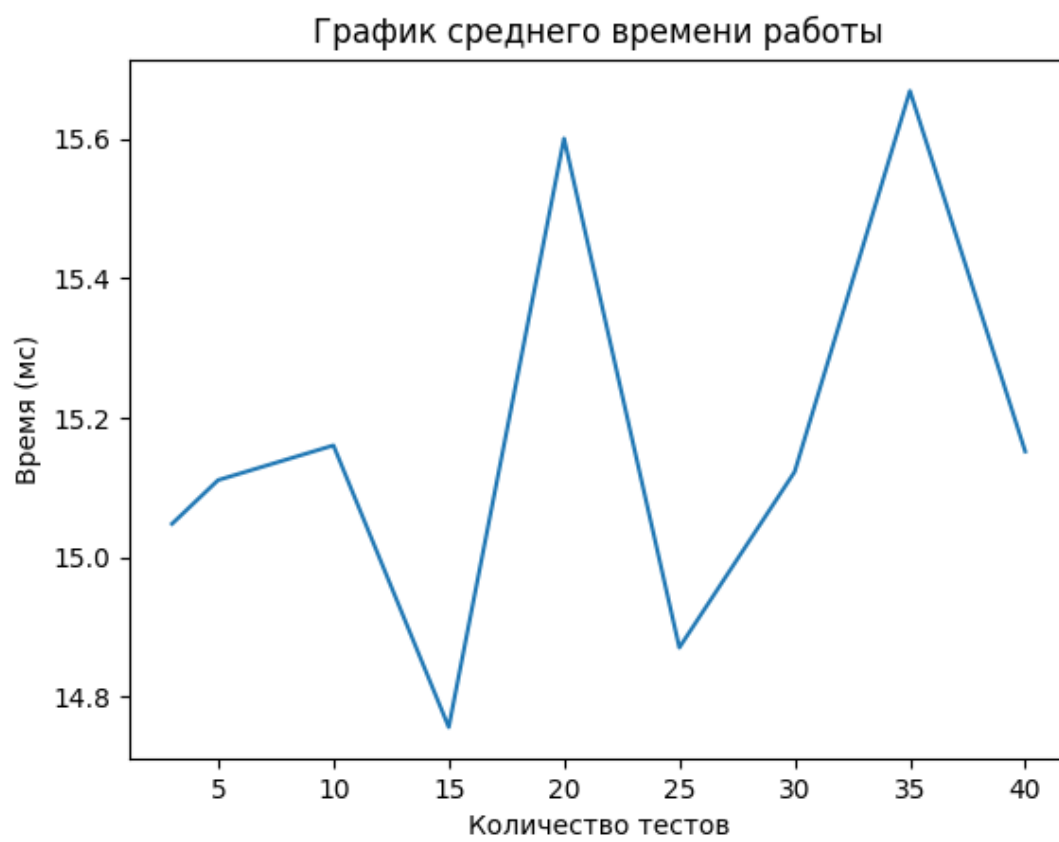


Рис. 3: f16



Рис. 4: f32

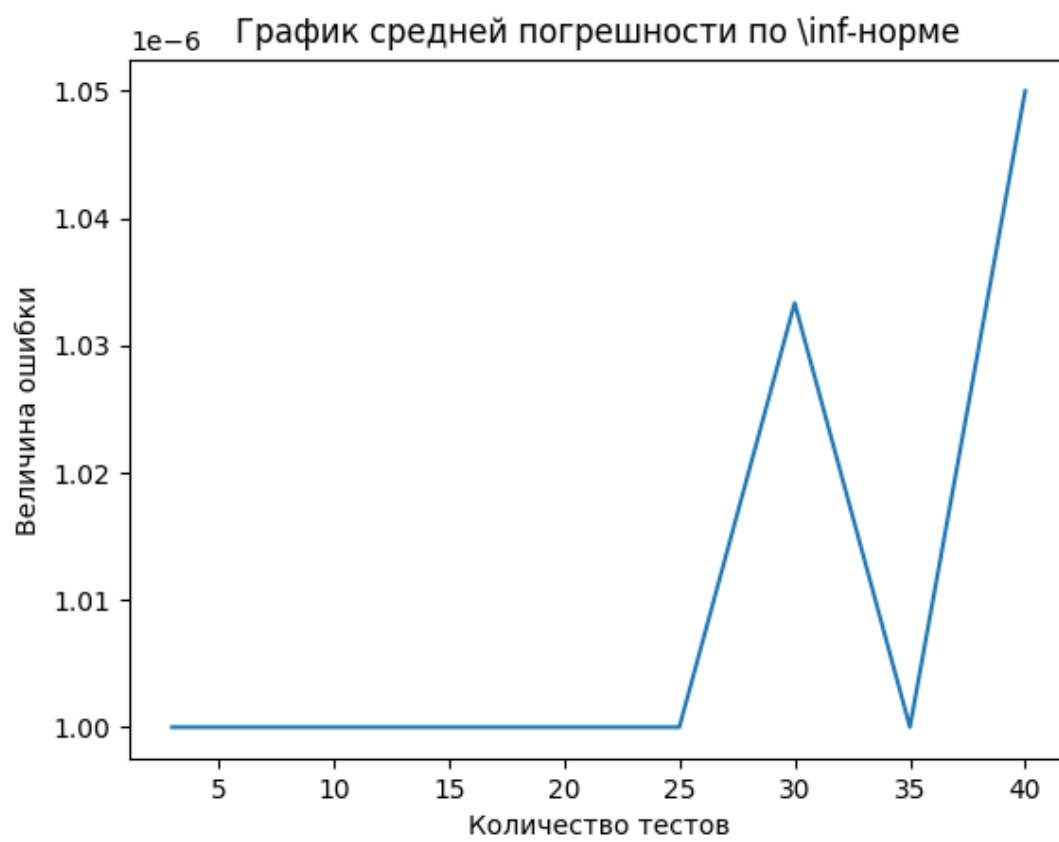


Рис. 5: f32



Рис. 6: f32

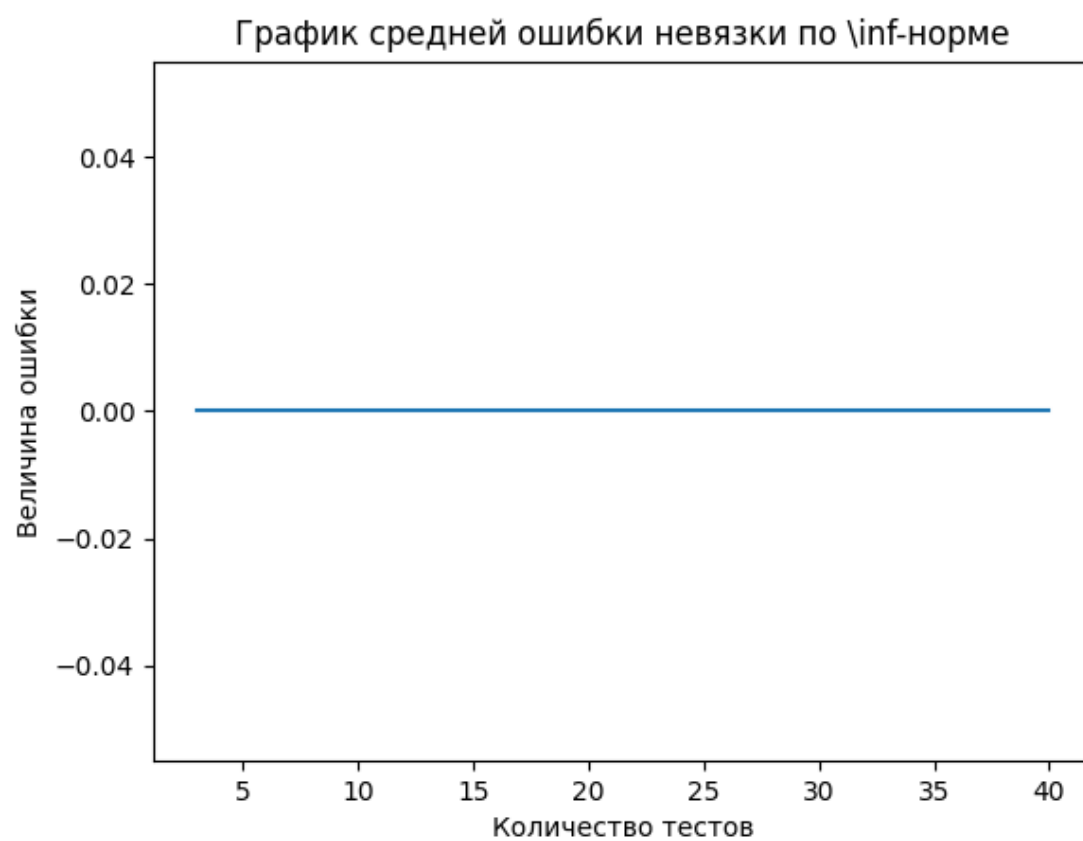


Рис. 7: f64

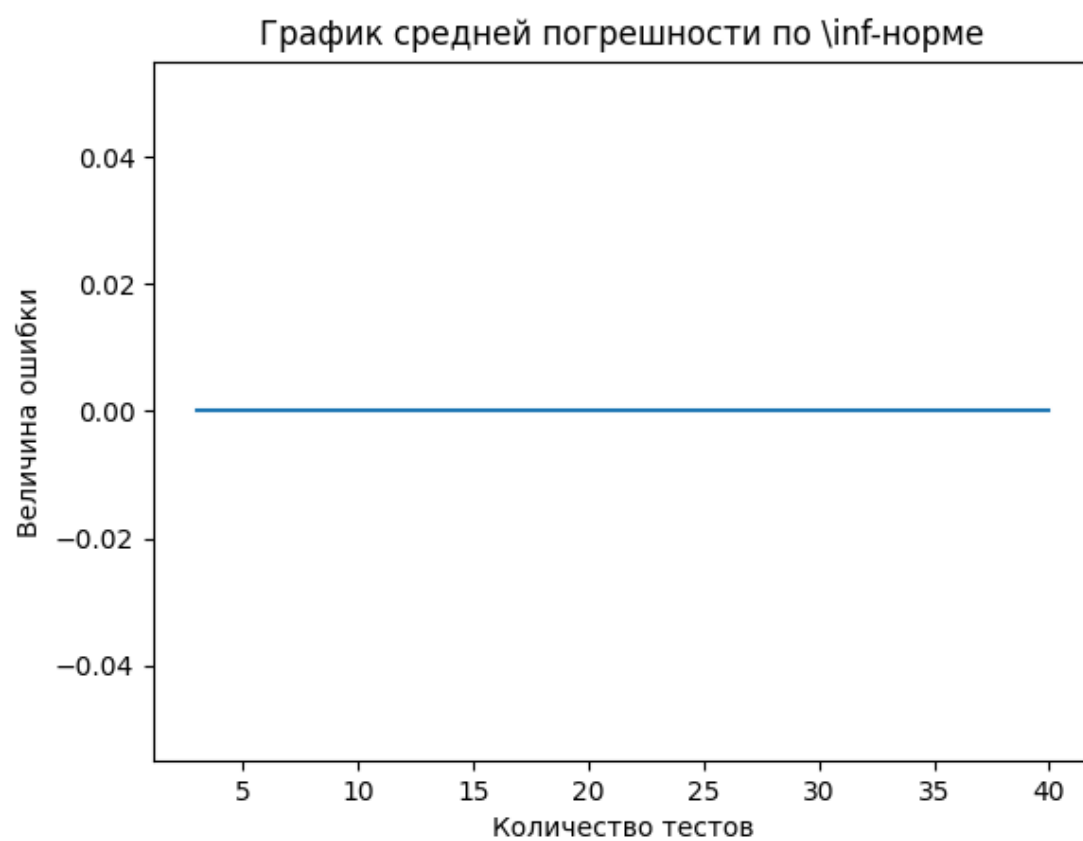


Рис. 8: f64

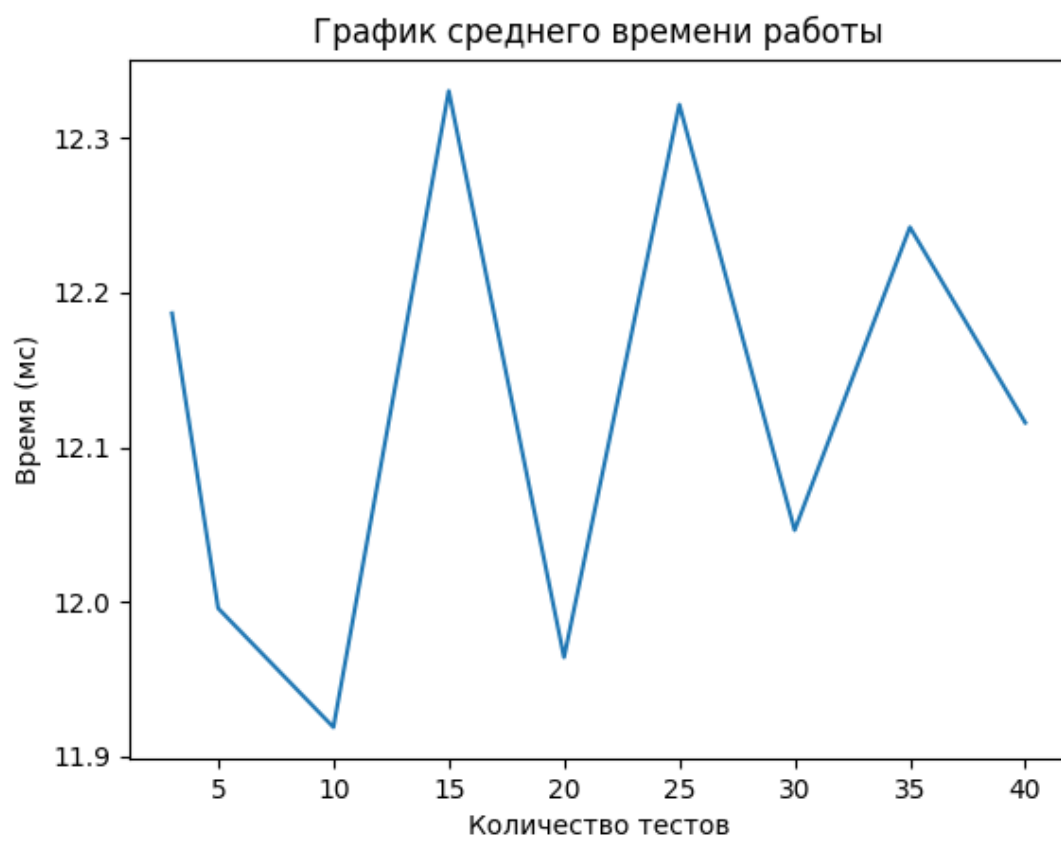


Рис. 9: f64