Задание по курсу "ВвЧМ 24/25": Приближение функций

Павел Васильев, 213 группа

Декабрь 2024

1 Постановка задачи

Интерполяция - это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Интерполяция использует значения некоторой функции, заданные в ряде точек, чтобы предсказать значения функции между ними. Перечисленные ниже методы предназначены для создания ряда с более высокой частотой наблюдений на основе ряда с низкой частотой. Например, вычислить ряд с квартальной динамикой на основе ряда годовых данных.

Многие задачи машинного обучения можно сформулировать через интерполяцию "неизвестной" функции [1, 2]

Различные методы численного приближения и их теоретические обоснования можно найти в [3]

2 Используемые численные методы

В решении были использованы методы приближения многочленами Лагранжа и кубическими сплайнами.

Приближение многочленами Лагранжа. В [3] представлено теоретическое обоснование данного метода, в частности, доказана теорема о приближении (n+1)-раз дифференцируемой функции.

Теорема 1 *Пусть функция n+1 раз дифференцируема, тогда*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,\omega(x), \quad \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k), \tag{1}$$

где

$$\min\{x, x_0, \dots, x_n\} < \xi(x) < \max\{x, x_0, \dots, x_n\}. \tag{2}$$

Как будет видно, требование дифференцируемости здесь существенно, потому что иначе функция может и вовсе не приближаться полиномом.

Приближение кубическими сплайнами. В [3] также представлен метод приближение сплайнами. Сплайн представляет собой кусочно заданный полином.

Определение 2.1 (Естественный сплайн) *Кубический сплайн, обладающий следующим свойством*

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0, \tag{3}$$

называется естественным сплайном.

Теорема 2 *Естественный сплайн существует и единственен.*

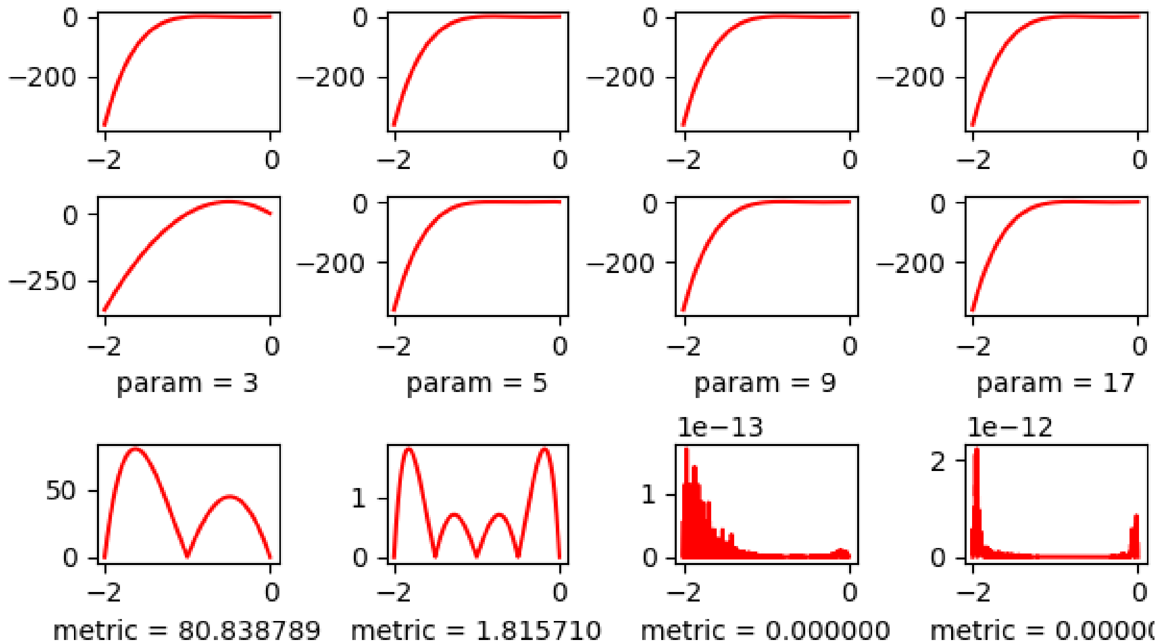
Теорема 3 *Пусть* $1 <= j <= 4$ *и* $f \in C^j[a, b]$. *Тогда*

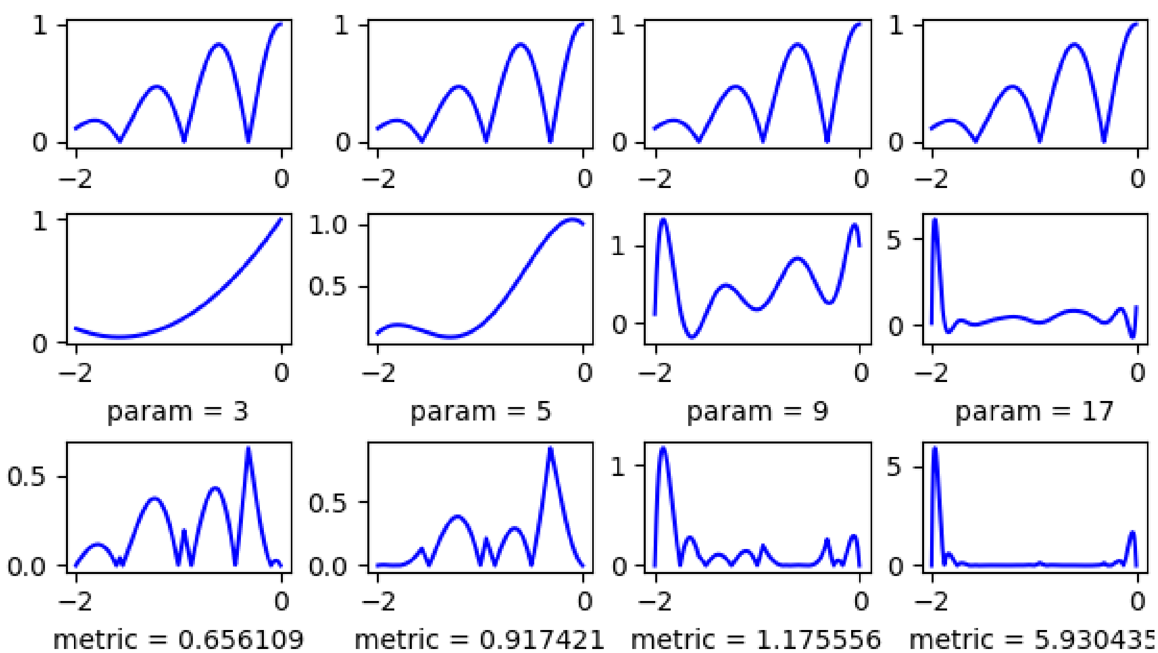
$$\|f - S_n\|_{C[a,b]} = O(h^j), \quad h \equiv \max_k h_k. \tag{4}$$

Таким образом, мы можем приближать функцию сплайнами, тогда нам становится проще бороться с негладкими функциями, если мы выберем точки разбиения там, где производная не существует.

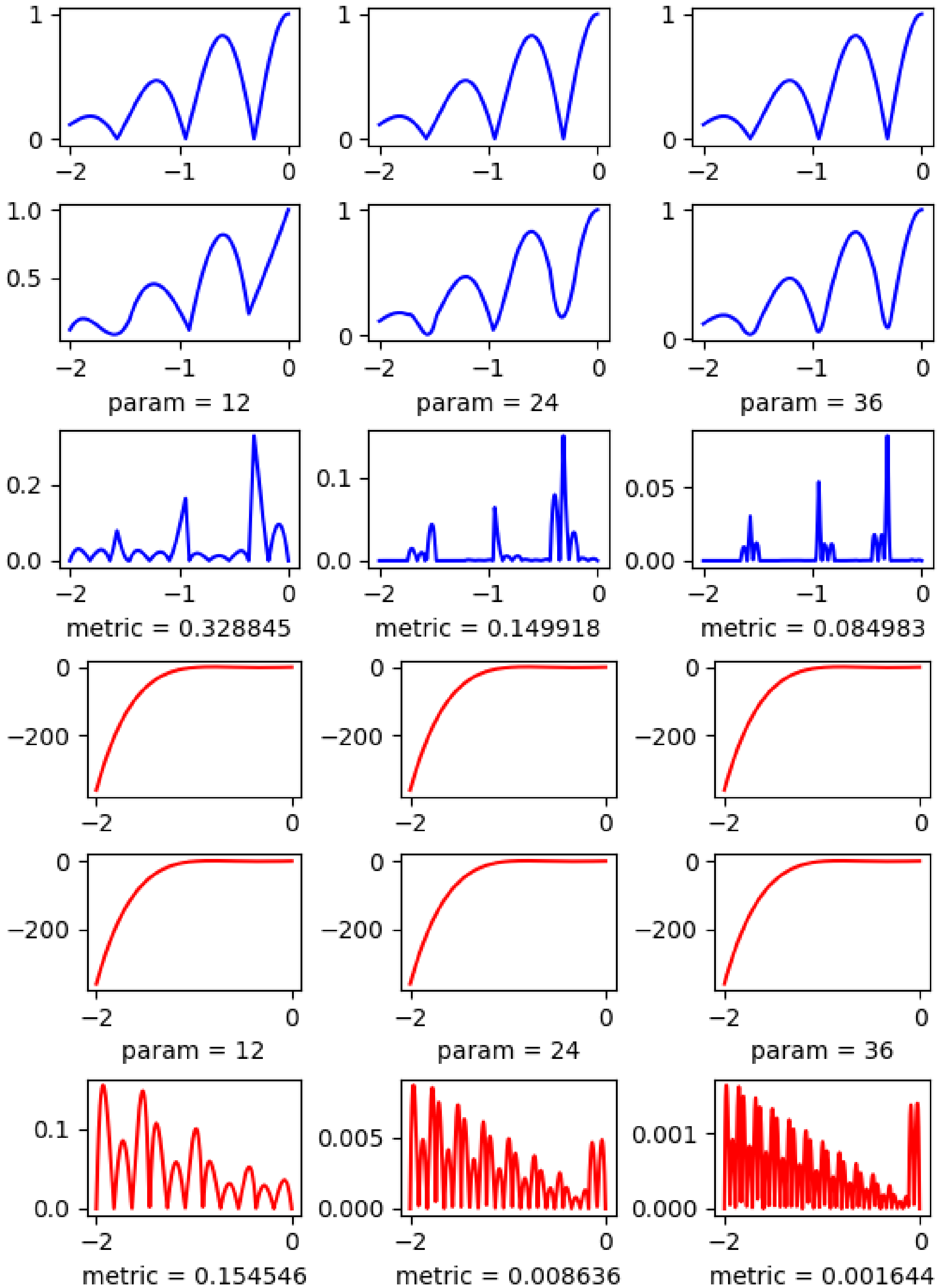
3 Результаты

3.1 Приближение многочленами Лагранжа





3.2 Прближение сплайнами



4 Библиография

1. Хайкин С. "Нейронные сети. Полный курс", стр.82
2. (url: https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/mashinnoye-obucheniye)
3. Тыртышников Е.Е. "Методы численного анализа", гл.12,13,14