Języki Formalne i Techniki Translacji
lista 2 - zadanie 5

Zofia Wiora

1 Treść zadania

Czy język $L = \{ww^R x : w, x \in \{0,1\}^*\} \wedge w, x \neq \varepsilon\}$, gdzie w^R oznacza odwrócenie kolejności liter w słowie w, jest regularny?

2 Rozwiązanie

Język ten **nie jest regularny**, co można udowodnić korzystając z lematu o pompowaniu.

2.1 Lemat o pompowaniu dla języków regularnych (LoP)

Lemat 1 *Niech L będzie językiem regularnym. Wówczas istnieje stała $\boldsymbol{n > 1}$, taka że jeśli $\boldsymbol{z}$ jest dowolnym słowem z $\boldsymbol{L}$ oraz $\boldsymbol{|z| \geqslant n}$, to $\boldsymbol{z}$ możemy przedstawić w postaci $\boldsymbol{z = uvw}$, gdzie $\boldsymbol{|uv| \leqslant n}$ i $\boldsymbol{|v| \geqslant 1}$ oraz $\boldsymbol{uv^iw}$ należy do $\boldsymbol{L}$ dla każdego $\boldsymbol{i \geqslant 0}$.*

W celu udowodnienia, że podany w zadaniu język L nie jest regularny, posłużymy się silniejszą wersją lematu o pompowaniu, w której to słowo z jest postaci $z = tuvw$, gdzie $|t| \geqslant 0$ oraz $|uv| \leqslant n$. Wówczas LoP stosowane jest do sufiksu uvw, gdzie $|uvw| \geqslant n$.

2.2 Metodologia rozwiązywania

Aby udowodnić przy użyciu LoP, że język L nie jest regularny, należy skorzystać z poniższego schematu postępowania:

1. Założenie nie wprost, że L jest regularny.
2. Pokazanie, że dla każdej stałej $n \geqslant 1$ istnieje słowo z o długości $|z| \geqslant n$, takie że dla każdego podziału $z = uvw$, takiego że $|uv| \leqslant n \wedge u \neq \varepsilon$, istnieje $i \in \mathbb{N}$, takie że $z' = uv^iw \notin L$.

Kluczem do rozwiązania zadania jest więc odpowiednie dobranie słowa z.

2.3 Dowód

Załóżmy nie wprost, że język $L = \{ww^R x : w, x \in \{0,1\}^*\} \wedge w, x \neq \varepsilon\}$ jest regularny i niech $n \geqslant 1$ będzie stałą z lematu o pompowaniu.

Niech $w = aw'$, gdzie $a \in \{0,1\}$.

Wówczas słowo z jest postaci:

$$z = ww^R x = (aw')(aw')^R x = (aw')((w')^R a)x = aw'(w')^R ax$$

Równoważnie:

$$z = aw'w^R x$$

Oznaczmy przez z_i słowo z w którym i-krotnie napompowano część a. Jest więc ono postaci:

$$z_i = a^i w' w^R x = aaa^{i-2} w' w^R x = aa^R a^{i-2} w' w^R x$$

Niech $x' = a^{i-2} w' w^R x$.

Wtedy:

$$z_i = aa^R a^{i-2} w' w^R x = aa^R x' \in L$$

Łatwo więc zauważyć, że słowo z_i należy do języka L. Dzieje się tak również w szczególności dla $i = 0$:

$$z_0 = w'(w')^R ax = w'(w')^R x'' \in L$$

Aby wykonać dowód dla tego zadania trzeba będzie skorzystać z silniejszej wersji LoP, gdzie $Z = TUVW$.

Wyznaczmy Z postaci:

$$Z = (10)^n (01)^n 1 \in L$$

gdzie $w = (10)^n$, $w^R = (01)^n$, $x = 1$ oraz $T = (10)^n$, $UVW = (01)^n 1$.

Zauważmy, że $1 \leqslant |V| \leqslant n$ oraz $|UVW| = 2n + 1 => |UW| \leqslant 2n$.

Niech $Z' = UVW$ będzie sufiksem słowa Z. Rozważmy pompowanie Z' dla $i = 0$. Wtedy:

$$Z'_0 = UV^0 W = UW$$

Wówczas dla $i = 0$, Z_0 jest postaci:

$$Z_0 = (10)^n UW$$

Zauważmy, że $|Z_0| = |(10)^n UW| = 2n + |UW| \leqslant 4n$.

Aby słowo z było postaci ww^Rx musi być spełniony warunek $|w| \geqslant 2n$. Stąd wynika, że $|w^Rx| \geqslant 2n + 1$. Więc:

$$|z| = |ww^Rx| = |w| + |w^R + x| \geqslant 2n + (2n + 1) = 4n + 1$$

Wiemy, że $|Z_0| \leqslant 4n$, tak więc Z_0 nie jest postaci ww^Rx, więc $Z_0 \notin L$, więc L nie jest językiem regularnym.

C.N.D.