Obliczenia Naukowe - laboratorium 2

Łukasz Machnik

6 listopada 2023

1 Zadanie 1

Zadanie polega na powtórzeniu eksperymentu z zadania 5 z listy 1 t.j. na policzeniu iloczynu skalarnego dwóch wektorów. Przedtem należy jednak zmienić delikatnie wektory wejściowe na następujące:

$$x = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]$$
$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

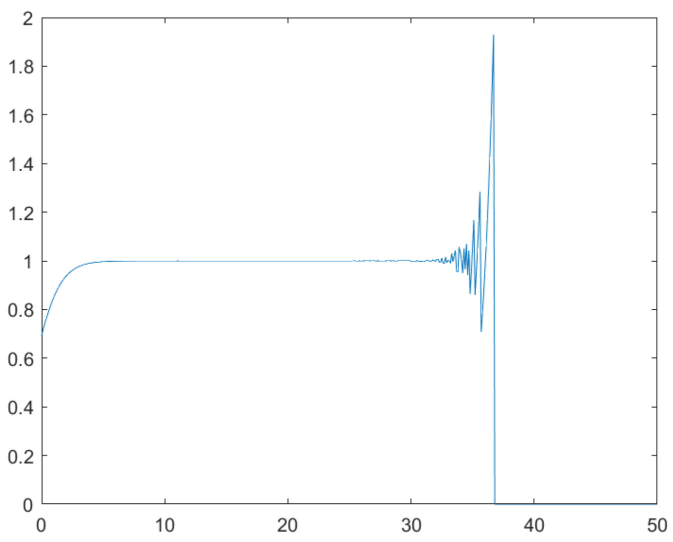
Jedyną dokonaną zmianą było usunięcie ostatniej cyfry po przecinku z x_4 i x_5 - pozornie bardzo niewielka zmiana wartości tych dwóch liczb. Obliczenia wykonywałem tylko w arytmetyce Float64 ponieważ dla Float32 dokonane zmiany wartości dokładnych wektorów nie mają żadnego wpływu na reprezentację tych wartości w arytmetyce Float32. Porównanie wyników dla wszystkich czterech algorytmów prezentuje tabela poniżej:

Algorytm	Lista 1	Lista 2	Różnica
a	$1.0251881368296672 * 10^{-10}$	-0.004296342739891585	0.004296342842410399
b	$-1.5643308870494366 * 10^{-10}$	-0.004296342998713953	0.004296342842280865
c	0.0	-0.004296342842280865	0.004296342842280865
d	0.0	-0.004296342842280865	0.004296342842280865

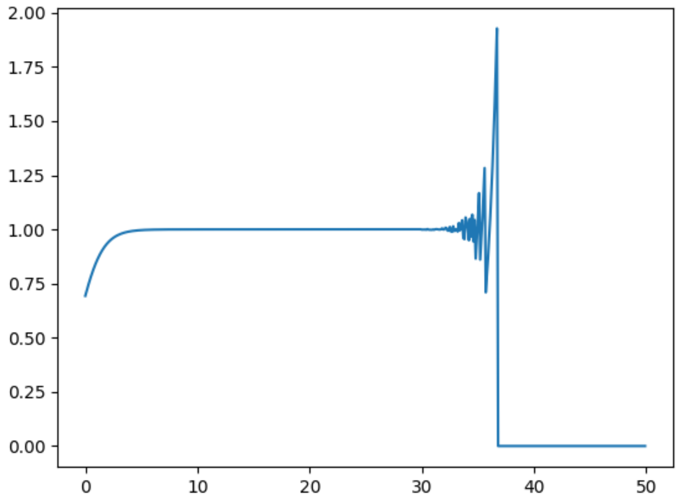
Widać że drobne zmiany wartości wejściowych dość mocno wpłynęły na wynik. Zwłaszcza dla pierwszych dwóch metod liczenia iloczynu skalarnego - zmienił się w nich nawet rząd wielkości uzyskanych wyników i to z 10^{-10} do 10^{-3}. Zatem można powiedzieć, że zadanie jest źle uwarunkowane - jest to spowodowane przede wszystkim tym że poszczególne elementy wektorów x i y są różnych znaków.

2 Zadanie 2

Zadanie polega na narysowaniu wykresu funkcji $f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$ w dwóch dowolnych programach do wizualizacji. Następnie należy porównać otrzymane wykresy z granicą tej funkcji ($lim_{x\to\infty} f(x) = 1$). Do narysowania wykresów użyłem programu MATLAB oraz biblioteki pyplot w języku Python. Poniżej wykres wygenerowany w MATLABie:



Oraz wykres wygenerowany przez program w Pythonie:



Jak widać na obu wykresach dla $x > x_0 \in (36; 37)$ funkcja jest stała i ma wartość 0. Jest to sprzeczne z oczekiwaną wartością granicy tej funkcji. Dzieje się tak dlatego, że e^{-x} bardzo szybko maleje i osiąga bardzo małe wartości. W związku z tym dla coraz większych x wewnątrz logarytmu dodajemy do liczby 1 coraz mniejsze wartości i w końcu poprzez utratę precyzji dla odpowiednio dużych x wnętrze logarytmu jest stale sumowane do wartości 1. A jako że $ln(1) = 0$ to wartość całego wyrażenia rónież wynosi 0.

3 Zadanie 3

Celem zadania jest rozwiązanie układu równań liniowych

$$Ax = b$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest daną macierzą współczynników i $b \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem prawych stron wyznaczonym ze wzoru $b = Ax$ dla $x = (1, \ldots, 1)^T$. Znamy zatem dokładne rozwiązanie tego układu i możemy porównać je z rozwiązaniami znalezionymi przez komputer. Rozwiązania są wyznaczane za pomocą dwóch różnych algorytmów: metoda eliminacji Gaussa wyznaczająca x jako $x = A \setminus b$ (nazywana dalej "Metoda 1") oraz metoda obliczająca x jako $x = A^{-1}b$ ("Metoda 2"). Poniżej przedstawię tabele błędów względnych wyznaczonych rozwiązań dla różnych macierzy wejściowych (błąd względny obliczam jako $\frac{||\tilde{x}-x||}{||x||}$)

3.1 Macierz Hilberta

Najpierw wykonałem eksperyment podstawiając pod A macierze Hilberta o rosnącym stopniu. Poniższa tabela prezentuje stopień testowanej macierzy (n), jej wskaźnik uwarunkowania (cond(A)) oraz błąd względny wyniku wyznaczonego przez Metodę 1(δ_1) oraz Metodę 2(δ_2) zaokrąglone do 4 liczb znaczących.

n	cond(A)	δ_1	δ_2
2	19.28	$5.661 \cdot 10^{-16}$	$1.404 \cdot 10^{-15}$
4	15510.0	$4.452 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$
6	$1.495 \cdot 10^{7}$	$2.619 \cdot 10^{-10}$	$1.288 \cdot 10^{-10}$
8	$1.526 \cdot 10^{10}$	$1.583 \cdot 10^{-7}$	$4.737 \cdot 10^{-7}$
10	$1.602 \cdot 10^{13}$	0.0001846	0.0004244
12	$1.734 \cdot 10^{16}$	0.1634	0.1594
14	$6.061 \cdot 10^{17}$	3.353	5.971
16	$3.499 \cdot 10^{17}$	12.56	13.43
18	$1.019 \cdot 10^{18}$	57.56	75.05
20	$2.538 \cdot 10^{18}$	81.73	103.4

Widać że wraz ze wzrostem stopnia macierzy rośnie jej wskaźnik uwarunkowania, a wraz ze wzrostem wskaźnika uwarunkowania rośnie dla obu metod błąd względny otrzymanego wyniku.

3.2 Macierz losowa

Drugim typem macierzy który podstawiłem pod A jest macierz losowa stopnia n generowana z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania c. Poniższa tabela pokazuje błędy względne dla obu metod w zależności od tych parametrów zaokrąglone do 4 liczb znaczących.

n	c	δ_1	δ_2
5	1.0	$1.79 \cdot 10^{-16}$	$1.404 \cdot 10^{-16}$
5	10.0	$1.72 \cdot 10^{-16}$	$2.979 \cdot 10^{-16}$
5	1000.0	$4.915 \cdot 10^{-15}$	$1.509 \cdot 10^{-14}$
5	$1.0 \cdot 10^{7}$	$1.49 \cdot 10^{-16}$	$1.073 \cdot 10^{-10}$
5	$1.0 \cdot 10^{12}$	$7.182 \cdot 10^{-6}$	$1.254 \cdot 10^{-5}$
5	$1.0 \cdot 10^{16}$	0.8327	0.9102
10	1.0	$3.0 \cdot 10^{-16}$	$2.697 \cdot 10^{-16}$
10	10.0	$3.16 \cdot 10^{-16}$	$2.329 \cdot 10^{-16}$
10	1000.0	$3.029 \cdot 10^{-15}$	$3.935 \cdot 10^{-15}$
10	$1.0 \cdot 10^{7}$	$2.673 \cdot 10^{-10}$	$2.645 \cdot 10^{-10}$
10	$1.0 \cdot 10^{12}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.264 \cdot 10^{-5}$
10	$1.0 \cdot 10^{16}$	0.2536	0.2086
20	1.0	$4.278 \cdot 10^{-16}$	$4.53 \cdot 10^{-16}$
20	10.0	$8.404 \cdot 10^{-16}$	$5.184 \cdot 10^{-16}$
20	1000.0	$1.669 \cdot 10^{-14}$	$1.817 \cdot 10^{-14}$
20	$1.0 \cdot 10^{7}$	$6.143 \cdot 10^{-11}$	$9.93 \cdot 10^{-11}$
20	$1.0 \cdot 10^{12}$	$8.672 \cdot 10^{-6}$	$1.192 \cdot 10^{-5}$
20	$1.0 \cdot 10^{16}$	0.5345	0.6603

Widać, że i w tym przypadku analogicznie - im większy jest wskaźnik uwarunkowania tym większy jest błąd względny uzyskanego wyniku.

4 Zadanie 4

Mamy dany wielomian P:

$$
\begin{aligned}
P(x) = \quad & x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} \\
& -1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} \\
& +11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} \\
& +1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^{9} \\
& +63030812099294896x^{8} - 311333643161390640x^{7} \\
& +1206647803780373360x^{6} - 3599979517947607200x^{5} \\
& +8037811822645051776x^{4} - 12870931245150988800x^{3} \\
& +13803759753640704000x^{2} - 8752948036761600000x + 2432902008176640000
\end{aligned}
$$

Jest to postać naturalna wielomianu $p(x) = (x-20)(x-19)\dots(x-1)$

4.1 Pierwiastki wielomianu *P(x)*

Korzystając z pakietu Polynomials obliczyłem pierwiastki wielomianu $P(x)$ i dla każdego pierwiastka z_k policzyłem wartość funkcji w punkcie $P(z_k)$, wartość funkcji $p(z_k)$ oraz błąd bezwzględny $|z_k - k|$. Wyniki tych obliczeń z zaokrągleniem do 4 cyfr znaczących przedstawia poniższa tabela:

k	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	36630.0	36350.0	$3.011 \cdot 10^{-13}$
2	181300.0	181800.0	$2.832 \cdot 10^{-11}$
3	290200.0	209400.0	$4.079 \cdot 10^{-10}$
4	$2.042 \cdot 10^{6}$	$3.107 \cdot 10^{6}$	$1.626 \cdot 10^{-8}$
5	$2.089 \cdot 10^{7}$	$2.411 \cdot 10^{7}$	$6.658 \cdot 10^{-7}$
6	$1.125 \cdot 10^{8}$	$1.202 \cdot 10^{8}$	$1.075 \cdot 10^{-5}$
7	$4.573 \cdot 10^{8}$	$4.804 \cdot 10^{8}$	0.000102
8	$1.556 \cdot 10^{9}$	$1.683 \cdot 10^{9}$	0.0006442
9	$4.688 \cdot 10^{9}$	$4.465 \cdot 10^{9}$	0.002915
10	$1.263 \cdot 10^{10}$	$1.271 \cdot 10^{10}$	0.009587
11	$3.3 \cdot 10^{10}$	$3.576 \cdot 10^{10}$	0.02502
12	$7.389 \cdot 10^{10}$	$7.217 \cdot 10^{10}$	0.04672
13	$1.848 \cdot 10^{11}$	$2.157 \cdot 10^{11}$	0.07431
14	$3.551 \cdot 10^{11}$	$3.654 \cdot 10^{11}$	0.08524
15	$8.423 \cdot 10^{11}$	$6.14 \cdot 10^{11}$	0.07549
16	$1.571 \cdot 10^{12}$	$1.555 \cdot 10^{12}$	0.05371
17	$3.317 \cdot 10^{12}$	$3.778 \cdot 10^{12}$	0.02543
18	$6.345 \cdot 10^{12}$	$7.2 \cdot 10^{12}$	0.009079
19	$1.229 \cdot 10^{13}$	$1.028 \cdot 10^{13}$	0.00191
20	$2.318 \cdot 10^{13}$	$2.746 \cdot 10^{13}$	0.0001907

Widać że zaczynamy od bardzo małego błędu, który rośnie do 14. pierwiastka, a potem znowu maleje. Jednym z powodów pojawienia się błędów jest sam fakt że jeśli przechowujemy współczynniki jako Float64 to przy samym przechowywaniu tracimy dla niektórych z nich precyzję gdyż Float 64 zapamiętuje od 15 do 17 cyfr znaczących. Jednak mimo to błąd względny otrzymanych wyników jest bardzo bliski 0, zatem otrzymane wyniki są bardzo bliskie poprawnych. Mimo to wartości funkcji dla otrzymanych "zer" mogą być bardzo duże - nawet rzędu 2^{13}.

4.2 Eksperyment Wilkinsona

W drugiej części zadania należy zamienić współczynnik przy x^{19} z -210 na $-210-2^{-23}$. Wykonując ponownie analogiczne obliczenia otrzymujemy następujące wyniki:

k	z_k	$P(z_k)$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	0.9999999999998357	20496.0	$-1.6431300764452317e-13$
2	2.0000000000550373	339570.0	$5.503730804434781e-11$
3	2.99999999660342	$2.2777455e6$	$-3.3965799062229962e-9$
4	4.000000089724362	$1.0488020625e7$	$8.972436216225788e-8$
5	4.99999857388791	$4.1239073125e7$	$-1.4261120897529622e-6$
6	6.000020476673031	$1.406328934140625e8$	$2.0476673030955794e-5$
7	6.99960207042242	$4.122812662421875e8$	-0.00039792957757978087
8	8.007772029099446	$1.0307901272578125e9$	0.007772029099445632
9	8.915816367932559	$2.1574055781816406e9$	-0.0841836320674414
10	10.095455630535774 $-0.6449328236240688im$	$9.384147605647182e9$	0.0954556305357741 $-0.6449328236240688im$
11	10.095455630535774 $+0.6449328236240688im$	$9.384147605647182e9$	-0.9045443694642259 $+0.6449328236240688im$
12	11.793890586174369 $-1.6524771364075785im$	$3.0012060598372482e10$	-0.2061094138256312 $-1.6524771364075785im$
13	11.793890586174369 $+1.6524771364075785im$	$3.0012060598372482e10$	-1.2061094138256312 $+1.6524771364075785im$
14	13.992406684487216 $-2.5188244257108443im$	$2.0030917431984006e11$	-0.00759331551278386 $-2.5188244257108443im$
15	13.992406684487216 $+2.5188244257108443im$	$2.0030917431984006e11$	-1.0075933155127839 $+2.5188244257108443im$
16	16.73074487979267 $-2.812624896721978im$	$1.1583329328642004e12$	0.7307448797926703 $-2.812624896721978im$
17	16.73074487979267 $+2.812624896721978im$	$1.1583329328642004e12$	-0.26925512020732967 $+2.812624896721978im$
18	19.5024423688181 $-1.940331978642903im$	$5.867381806750561e12$	1.5024423688181017 $-1.940331978642903im$
19	19.5024423688181 $+1.940331978642903im$	$5.867381806750561e12$	0.5024423688181017 $+1.940331978642903im$
20	20.84691021519479	$9.550552334336e12$	0.8469102151947894

Jak widać drobna zmiana jednego ze współczynników sprawiła że w wynikach zaczęły pojawiać się liczby zespolone. A także zwiększyły się błędy względne. Jest to zatem przykład zadania źle uwarunkowanego - mała zmiana warunków początkowych sprawia że wyniki wychodzą całkowicie odmienne.

5 Zadanie 5

Dane jest poniższe równanie rekurencyjne:

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ gdzie $r = 3$ i $p_0 = 0.01$. Powyższą iterację przeprowadziłem po 40 razy na trzy różne sposoby: w arytmetyce Float32, w arytmetyce Float32 zaokrąglając wartość p_{10} do 3 miejsc po przecinku, w arytmetyce Float64. Poniższy wykres prezentuje wygenerowane wartości elementów p_k:

k	Float64	Float32	Float32 z zaokrągleniem
1	0.0397	0.0397	0.0397
2	0.15407173000000002	0.15407173	0.15407173
3	0.5450726260444213	0.5450726	0.5450726
4	1.2889780011888006	1.2889781	1.2889781
5	0.17151914210917552	0.1715188	0.1715188
6	0.5978201201070994	0.5978191	0.5978191
7	1.3191137924137974	1.3191134	1.3191134
8	0.056271577646256565	0.056273222	0.056273222
9	0.21558683923263022	0.21559286	0.21559286
10	0.722914301179573	0.7229306	0.722
11	1.3238419441684408	1.3238364	1.3241479
12	0.03769529725473175	0.037716985	0.036488414
13	0.14651838271355924	0.14660022	0.14195944
14	0.521670621435246	0.521926	0.50738037
15	1.2702617739350768	1.2704837	1.2572169
16	0.24035217277824272	0.2395482	0.28708452
17	0.7881011902353041	0.7860428	0.9010855
18	1.2890943027903075	1.2905813	1.1684768
19	0.17108484670194324	0.16552472	0.577893
20	0.5965293124946907	0.5799036	1.3096911
21	1.3185755879825978	1.3107498	0.09289217
22	0.058377608259430724	0.088804245	0.34568182
23	0.22328659759944824	0.3315584	1.0242395
24	0.7435756763951792	0.9964407	0.94975823
25	1.315588346001072	1.0070806	1.0929108
26	0.07003529560277899	0.9856885	0.7882812
27	0.26542635452061003	1.0280086	1.2889631
28	0.8503519690601384	0.9416294	0.17157483
29	1.2321124623871897	1.1065198	0.59798557
30	0.37414648963928676	0.7529209	1.3191822
31	1.0766291714289444	1.3110139	0.05600393
32	0.8291255674004515	0.0877831	0.21460639
33	1.2541546500504441	0.3280148	0.7202578
34	0.29790694147232066	0.9892781	1.3247173
35	0.9253821285571046	1.021099	0.034241438
36	1.1325322626697856	0.95646656	0.13344833
37	0.6822410727153098	1.0813814	0.48036796
38	1.3326056469620293	0.81736827	1.2292118
39	0.0029091569028512065	1.2652004	0.3839622
40	0.011611238029748606	0.25860548	1.093568

Można zauważyć że początkowo wszystkie 3 wartości dla każdego k są sobie bliskie. Zauważalne różnice między Float64 a Float32 zaczynają się mniej więcej od $k = 22$ gdzie nawet pierwsze cyfry znaczące się różnią. Dla $k = 40$ różnica jest już bardzo duża w arytmetyce Float32 uzyskany wynik jest ponad 22 razy większy niż w arytmetyce Float64. Nie lepiej wygląda porównanie obliczeń we Float32 bez i z zaokrągleniem wartości p_{40}. Tutaj dla jeszcze mniejszych wartości k pierwsze cyfry znaczące przestają się pokrywać. Poprzez zaokrąglenie wartości p_{10} otrzymane p_{40} jest 4 razy większe niż bez tego zaokrąglenia. Z tego zadania można wywnioskować, że zmiana precyzji obliczeń może znacząco wpłynąć na wynik końcowy.

6 Zadanie 6

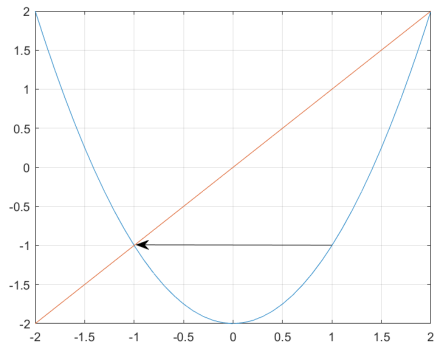
Rozważmy poniższe równanie rekurencyjne:

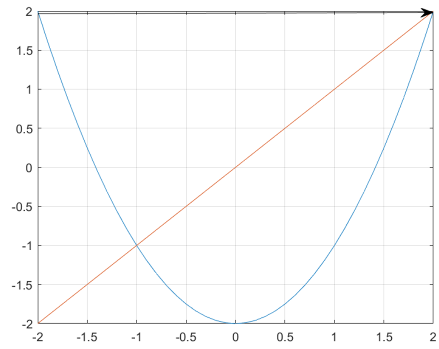
$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

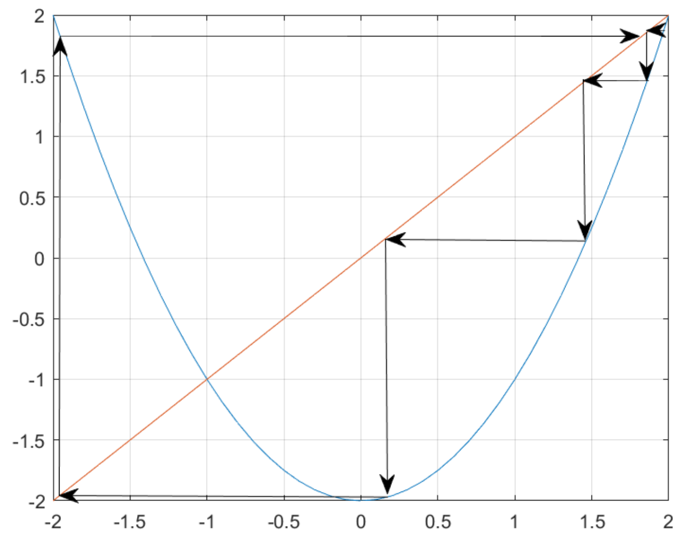
dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ gdzie c jest pewną stałą. Badam jak zachowuje się pierwszych 40 elementów ciągu $x_1, x_2, \ldots$ w zależności od c i x_0, działania wykonuję w arytmetyce Float64. Na podstawie wygenerowanych ciągów oraz przeprowadzonych iteracji graficznych odpowiem też na pytanie jakie są punkty stałe α. Punkt stały ciągu to taka wartość, że $x_{n+1} = x_n$, a zatem takie α, że od pewnego k_0 dla każdego $k > k_0$ $x_k = \alpha$, a zatem α spełnia następujące równanie: $\alpha = \alpha^2 + c$.

6.1 c = -2

Dla $c = -2$ są dwa możliwe punkty stałe: $\alpha = -1$ i $\alpha = 2$ Poniższy wykres pokazuje wykres funkcji $x^2 - 2$ a także przedstawia iteracje graficzne dla $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ i $x_0 = 1.99999999999$





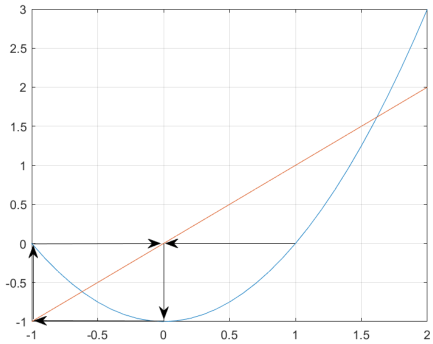


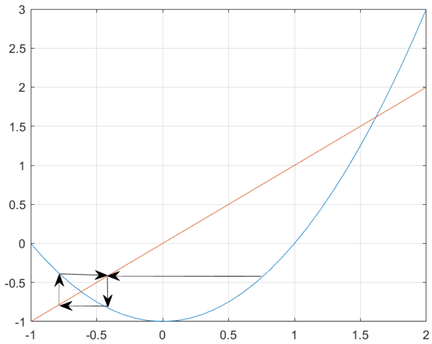
Z wykresu i iteracji graficznych można odczytać (co potwierdzają wyniki przeprowadzonych eksperymentów), że ciąg wyrażony przez rekurencyjny wzór $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ jest zbieżny tylko jeżeli $x_0 \in \{-2, -1, 1, 2\}$. A zatem punkt stały może być następujący:

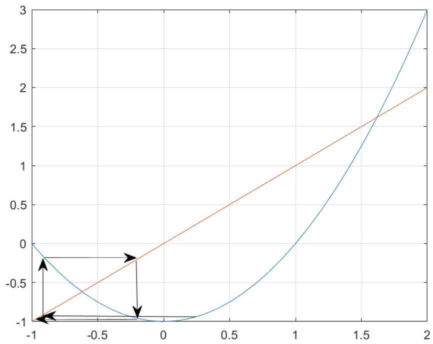
$$\alpha = \begin{cases} 2 & \text{jeśli } |x_0| = 0 \\ -1 & \text{jeśli } |x_0| = 1 \\ 2 & \text{jeśli } |x_0| = 2 \\ +\infty & \text{jeśli } |x_0| \in (2; \infty) \\ \text{rozbieżne} & \text{jeśli } |x_0| \in (0; 1) \cup (1, 2) \end{cases}$$

6.2 c=-1

Dla $c = -1$ są dwa możliwe punkty stałe: $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Poniższy wykres pokazuje wykres funkcji $x^2 - 1$ a także przedstawia iteracje graficzne dla $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 0.75$ i $x_0 = 0.25$







Tym razem ciąg wyrażony przez rekurencyjny wzór $x_{n+1} = x_n^2 - 1$ jest rozbieżny dla prawie każdego $x_0 \in (-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Punkt stały może być następujący:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \text{jeśli } |x_0| = |\frac{1-\sqrt{5}}{2}| \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{jeśli } |x_0| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ +\infty & \text{jeśli } |x_0| \in (\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty) \\ \text{rozbieżne} & \text{jeśli } |x_0| \in (0; |\frac{1-\sqrt{5}|}{2}) \cup (|\frac{1-\sqrt{5}}{2}|, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$$