Algorytmy optymalizacji dyskretnej
Laboratorium 2

Łukasz Machnik nr 268456

Zadanie 1

Opis modelu

1. Dane
   a. Koszty paliwa w poszczególnych firmach dla poszczególnych lotnisk:

	Firma 1	Firma 2	Firma 3
Lotnisko 1	10	7	8
Lotnisko 2	10	11	14
Lotnisko 3	9	12	4
Lotnisko 4	11	13	9

   Potraktujmy to jako funkcję dwóch zmiennych: c(l, f)
   gdzie l = numer lotniska, f = numer firmy:
   c(1, 1) = 10, c(1, 2) = 7, c(1, 3) = 8, c(2, 1) = 10, c(2, 2) = 11, …

   b. Maksymalna liczba paliwa jaką może dostarczyć dana firma [galony]:

Firma 1	Firma 2	Firma 3
275 000	550 000	660 000

   c. Liczba paliwa potrzebna na każdym z lotnisk [galony]:

Lotnisko 1	Lotnisko 2	Lotnisko 3	Lotnisko 4
110 000	220 000	330 000	440 000

2. Zmienne decyzyjne (nieujemne liczby rzeczywiste)
   a. L_1F_1 = ilość paliwa dostarczonego na lotnisko 1 przez firmę 1
   b. L_1F_2 = ilość paliwa dostarczonego na lotnisko 1 przez firmę 2
   c. L_1F_3 = ilość paliwa dostarczonego na lotnisko 1 przez firmę 3
   d. L_2F_1 = ilość paliwa dostarczonego na lotnisko 2 przez firmę 1
   e. L_2F_2 = ilość paliwa dostarczonego na lotnisko 2 przez firmę 2
   f. …
   g. L_iF_j = ilość paliwa dostarczonego na lotnisko *i* przez firmę *j*
3. Ograniczenia
   a. Wymagana ilość paliwa na każdym z lotnisk [galony]:
      i. $\sum_{i=1}^{3} L_1F_i \; = 110\,000$
      ii. $\sum_{i=1}^{3} L_2F_i \; = 220\,000$
      iii. $\sum_{i=1}^{3} L_3F_i \; = 330\,000$
      iv. $\sum_{i=1}^{3} L_4F_i \; = 440\,000$
   b. Maksymalna ilość paliwa którą może dostarczyć każda firma [galony]:
      i. $\sum_{i=1}^{4} L_iF_1 \; \leq 275\,000$
      ii. $\sum_{i=1}^{4} L_iF_2 \; \leq 550\,000$
      iii. $\sum_{i=1}^{4} L_iF_3 \; \leq 660\,000$
4. Funkcja celu
   a. $\mathbf{min} \sum_{l=1}^{3} \sum_{f=1}^{4} L_lF_f * c(l,f)$

Wyniki

Minimalny koszt dostaw paliwa na wszystkie lotniska: 8 525 000

Optymalny rozkład zmiennych decyzyjnych:

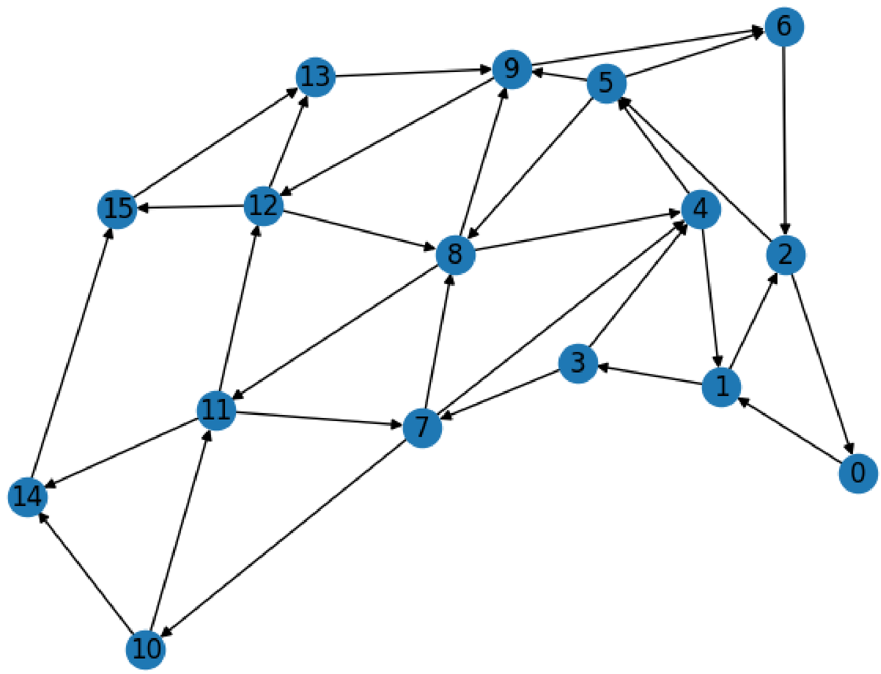
	Firma 1	Firma 2	Firma 3
Lotnisko 1	0	110 000	0
Lotnisko 2	165 000	55 000	0
Lotnisko 3	0	0	330 000
Lotnisko 4	110 000	0	330 000
SUMA	275 000	165 000	660 000

Wszystkie firmy dostarczają jakąś część paliwa. Jak widać firmy 1 i 3 osiągnęły swój limit dostaw.

Zadanie 2

Opis modelu

1. Dane
    a. Dany jest graf skierowany *G=(N, A)* o *n=16* wierzchołkach i *m=32* krawędziach:



    b. Ograniczenie górne na czas przejścia: *T=30*
    c. Dla każdej krawędzi są dane: koszt i czas przejścia – *c(i)* oraz *t(i)*:

(0, 1)	c=1	t=6
(1, 2)	c=2	t=5
(1, 3)	c=3	t=4
(2, 0)	c=4	t=3
(2, 5)	c=5	t=2
(3, 7)	c=6	t=1
(3, 4)	c=1	t=6
(4, 1)	c=2	t=5
(4, 5)	c=3	t=4
(5, 6)	c=4	t=3
(5, 8)	c=5	t=2
(5, 9)	c=6	t=1
(6, 2)	c=1	t=6
(7, 4)	c=2	t=5
(7, 8)	c=3	t=4
(7, 10)	c=4	t=3
(8, 4)	c=5	t=2
(8, 9)	c=6	t=1
(8, 11)	c=1	t=6
(9, 6)	c=2	t=5
(9, 12)	c=3	t=4
(10, 11)	c=4	t=3
(10, 14)	c=5	t=2
(11, 7)	c=6	t=1
(11, 12)	c=1	t=6
(11, 14)	c=2	t=5
(12, 8)	c=3	t=4
(12, 13)	c=4	t=3
(12, 15)	c=5	t=2
(13, 9)	c=6	t=1
(14, 15)	c=1	t=6
(15, 13)	c=2	t=5

2. Zmienne decyzyjne
    a. X_i = zmienna binarna określająca czy wybieramy daną ścieżkę
3. Ograniczenia
    a. $\sum_{i=1}^{m} X_i * t(i) \leq T$
    b. $dla\ b(i) = \sum_{j\in A: j=(i,a)} X_j - \sum_{j\in A: j=(a,i)} X_j$
    c. $(\forall\ i \in \{2, 3, \dots, n-1\})(b(i) = 0)$
    d. $b(1) = 1$
    e. $b(n) = -1$
4. Funkcja celu
    a. $\boldsymbol{min} \sum_{i=1}^{m} X_i * c(i)$

Wyniki

Dla tych danych wybrano ścieżkę 0->1->2->5->9->12->15. Osiągając koszt = 22.

W badanym przypadku nic się nie zmieniło po usunięciu ograniczenia na całkowitoliczbowość oraz ograniczenia maksymalnego czasu.

Zadanie 3

Opis modelu

1. Dane
    a. Minimalna liczba radiowozów dla każdej dzielnicy i zmiany [minR(d, z)]:

	Zmiana 1	Zmiana 2	Zmiana 3
Dzielnica 1	2	4	3
Dzielnica 2	3	6	5
Dzielnica 3	5	7	6

b. Maksymalna liczba radiowozów dla każdej dzielnicy i zmiany [maxR(d, z)]:

	Zmiana 1	Zmiana 2	Zmiana 3
Dzielnica 1	3	7	5
Dzielnica 2	5	7	10
Dzielnica 3	8	12	10

c. Minimalna łączna liczba radiowozów na każdej zmianie [z(n)]:

Zmiana 1	Zmiana 2	Zmiana 3
10	20	18

d. Minimalna łączna liczba radiowozów w każdej dzielnicy [d(n)]:

Dzielnica 1	Dzielnica 2	Dzielnica 3
10	14	13

2. Zmienne decyzyjne
    a. $X_{ij} = \mathit{Liczba\ radiowozów\ przydzielonych\ do\ dzielnicy\ i\ na\ zmianie\ j}$
3. Ograniczenia
    a. $(\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2)(minR(i, j) \leq X_{ij} \leq maxR(i, j))$
    b. $(\forall\ i \in \{1, 2, 3\})(\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \geq z(i))$
    c. $(\forall\ j \in \{1, 2, 3\})(\sum_{i=1}^{3} X_{ij} \geq d(i))$
4. Funkcja celu
    a. $\mathbf{min} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} X_{ij}$

Wyniki

Minimalna liczba radiowozów potrzebna do spełnienia wszystkich wymagań to 48:

	Zmiana 1	Zmiana 2	Zmiana 3	Suma
Dzielnica 1	2	5	3	10
Dzielnica 2	3	7	9	19
Dzielnica 3	5	8	6	19
Suma	10	20	18	

Zadanie 4

Opis modelu

1. Dane
    a. Wymiary terenu *m x n*: *m=8*, *n=8*
    b. Rozmieszczenie kontenerów: $C_{ij} = 1$ ⇔ na kwadracie (i, j) znajduje się kontener, 0 w p.p. (założyłem że jest 8 kontenerów):

0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

    c. Zasięg widzenia kamery: *k=2*

2. Zmienne decyzyjne
    a. $X_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ na kwadracie (i, j) znajduje się kamera
    b. $X_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ na kwadracie (i, j) nie znajduje się kamera
3. Ograniczenia
    a. $(\forall(i,j) \in \{1..m\} \times \{1..n\})(X_{ij} * C_{ij} = 0)$
    b. $(\forall(i,j) \in \{1..m\} \times \{1..n\} : C_{ij} = 1)(\sum_{\max(i-k,1)}^{\min(i+k,m)} X_{ij} + \sum_{\max(j-k,1)}^{\min(j+k,n)} X_{ij} \geq 1)$
4. Funkcja celu
    a. $\boldsymbol{min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n} X_{ij}$

Wyniki

Minimalna liczba kamer potrzebna do monitorowania wszystkich kontenerów wynosi 8. Poniżej 'X' oznaczono kontenery a 'C' kamery:

				C	X	X	
				X			
		X			C	X	X
X							
		C		X			
C							

Zadanie 5

Opis modelu

1. Dane
    a. Czas produkcji jednostki [kilograma] towaru na danej maszynie [w minutach] *t(i, j)*:

	Maszyna 1	Maszyna 2	Maszyna 3
Produkt 1	5	10	6
Produkt 2	3	6	4
Produkt 3	4	5	3
Produkt 4	4	2	1

    b. Maksymalny tygodniowy popyt na dany towar [kg] *p(i)*:

Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
400	100	150	500

    c. Cena sprzedaży kilograma towaru [$/kg]:

Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
9	7	6	5

    d. Koszt materiałów za kilogram danego towaru [$/kg]:

Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
4	1	1	1

    e. Z tego można wyliczyć zysk za sprzedaż kilograma towaru (nie uwzględniający kosztów obsługi maszyn) [$/kg] *e(i)*:

Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
5	6	5	4

    f. Koszt pracy maszyny [$/h] *c(i)*:

Maszyna 1	Maszyna 2	Maszyna 3

2	2	3

   g. Czas dostępności maszyn w tygodniu: $T = 60$ [h] $= 3600$ [min]

2. Zmienne decyzyjne
   a. X_i = ilość wytworzonego produktu *i* [kg]
3. Ograniczenia
   a. $(\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4\})(X_i \leq p(i))$
   b. $(\forall\, j \in \{1, 2, 3\})\left(\sum_{i=1}^{4} X_i * t(i,j) \leq T\right)$
4. Funkcja celu
   a. $\boldsymbol{max} \sum_{i=1}^{4} X_i * e(i) - \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} X_i * t(i,j) * \frac{c(j)}{60})$

Wyniki

Maksymalny możliwy do uzyskania zysk wynosi 3632,50 $. W tym celu należy produkować następujące ilości towarów:

Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
125	100	150	500

Jak widać wszystkie produkty są wytwarzane – produkty 2, 3 i 4 osiągnęły swój limit popytu.