파트 3 선형 시스템

3.1 개요

3.1 파트의 구성

3.1 개요 (1/3)

- **선형대수방정식이란 무엇인가?**

  – 파트 2에서는 f(x)=0을 만족시키는 근 x를 구하였다.

    – 다음과 같은 일련의 방정식을 동시에 만족하는 x_1, x_2, ⋯, x_n을 구한다.

$$f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) = 0$$

$$f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) = 0$$

  – 이러한 시스템은 선형 또는 비선형일 수 있으나,
    본 파트에서는 선형대수방정식만을 다룬다.

3.1 개요 (2/3)

– 선형대수방정식의 일반적인 형태

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

여기서 a = 상수 계수
시스템의 성질이나 특성을 나타냄

b = 상수
시스템에 작용하는 외부의 자극이나 힘

x = 미지수
시스템의 거동이나 응답

n = 방정식의 수

3.1 개요 (3/3)

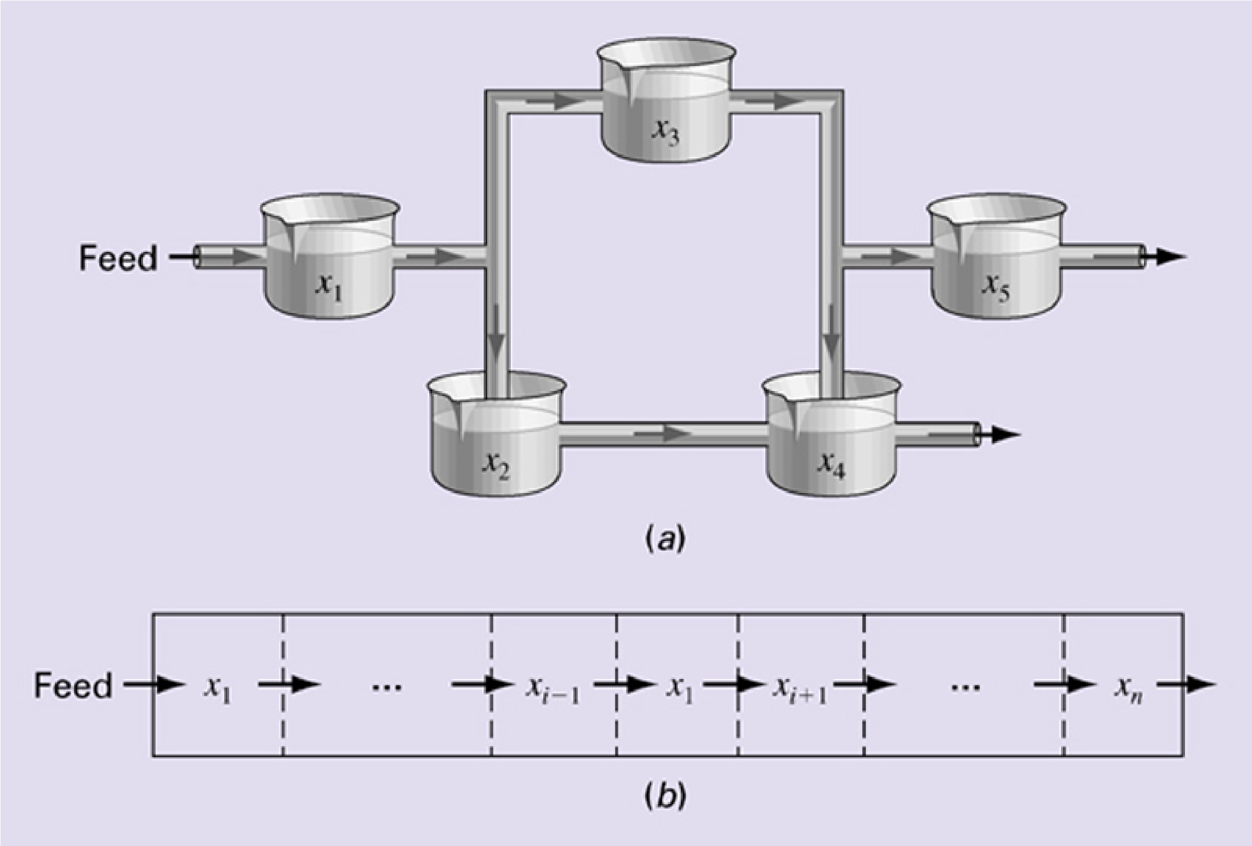


그림 PT3.1 선형대수방정식으로 수식화될 수 있는 시스템
(a) 유한 개의 요소로 구성된 집중변수 시스템 (b) 연속체로 구성된 분포변수 시스템

3.2 파트의 구성

- 8장　: 선형대수방정식과 행렬
- 9장　: Gauss 소거법
- 10장 : LU 분해법
- 11장 : 역행렬과 조건
- 12장 : 연립방정식을 풀기 위한 반복법

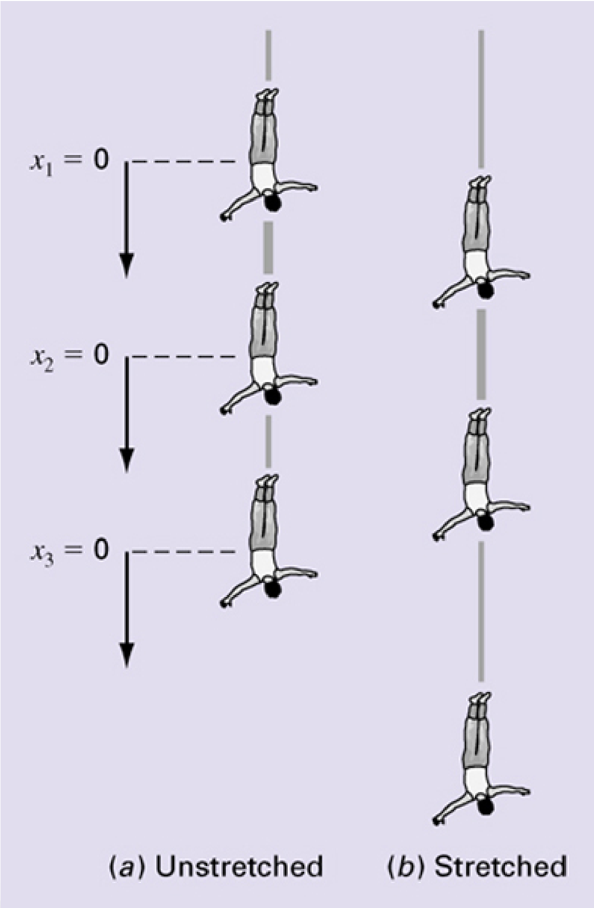
8장 선형대수방정식과 행렬

8.1 행렬 대수학의 개요

8.2 MATLAB을 이용한 선형대수방정식의 풀이

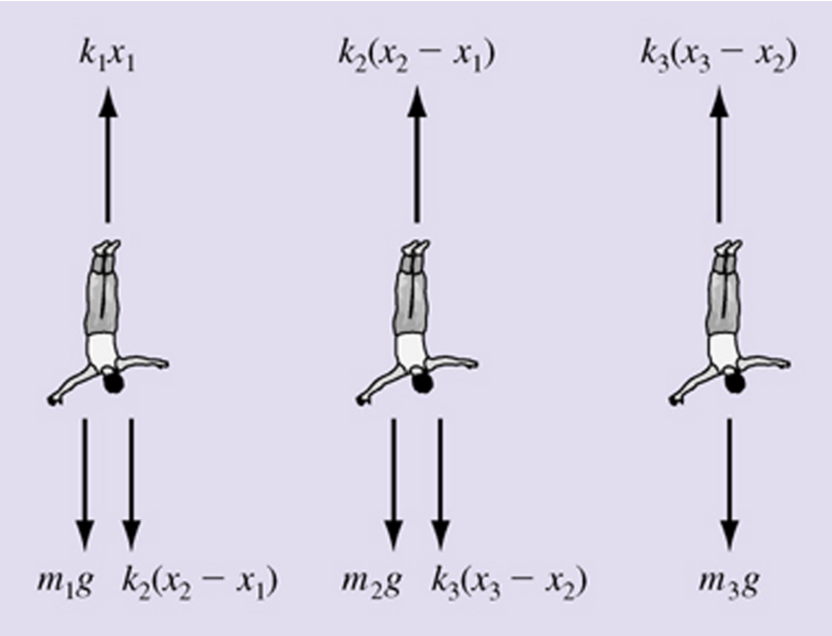
8장 선형대수방정식과 행렬 (1/2)

- 번지점프 줄에 세 사람이 매달려 있다고 가정하자.



각 사람의 변위는 얼마나 될까?

- 줄을 Hooke의 법칙을 따르는 선형스프링으로 가정
- 각 사람에 대한 자유물체도를 그린다.



8장 선형대수방정식과 행렬 (2/2)

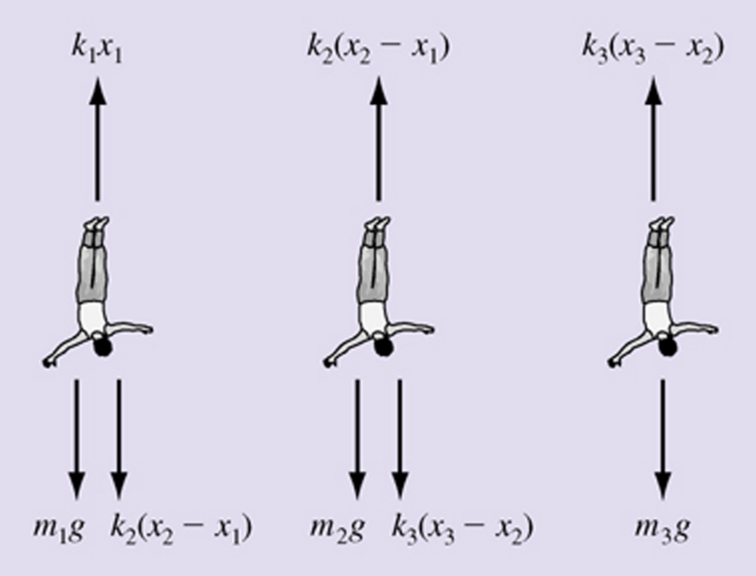
정상상태의 힘 평형식

$$m_1 g + k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 = 0$$

$$m_2 g + k_3(x_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_3 g - k_3(x_3 - x_2) = 0$$

여기서 m_i = 사람 i의 질량 (kg)
k_j = 줄 j의 스프링상수 (N/m)
x_i = 사람 i 에 대해 평형위치로부터 아래로 측정한 변위 (m)
g = 중력가속도 = 9.81 m/s²



항들을 모아서 정리하면

$$\begin{aligned}
(k_1 + k_2)x_1 \quad - k_2 x_2 \quad &= m_1 g \\
-k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 &= m_2 g \\
-k_3 x_2 + k_3 x_3 &= m_3 g
\end{aligned}$$

세 개의 미지의 변위를 구하기 위한
세 개의 연립방정식으로 바뀐다. ⇒ *선형대수방정식*

8.1 행렬 대수학의 개요 (1/9)

■ 행렬의 표시

m 개의 행과 *n* 개의 열을 갖는 행렬

= 차원은 *m* 곱하기 *n* (또는 $m \times n$)

= *m* by *n* matrix

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \text{Column 3} & & \phantom{a_{1n}} \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\
[A] = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Row 2} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

8.1 행렬 대수학의 개요 (2/9)

- 행벡터 $$[b] = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] = \lfloor b \rfloor$$
- 열벡터 $$[c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \{c\}$$
- 정방행렬 ($m = n$) $$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

  - 기본대각선 또는 주대각선: a_{11}, a_{22}, and a_{33}
  - 연립 선형방정식을 푸는데 중요함 (방정식과 미지수의 수가 같음)

    방정식의 수 $\Leftrightarrow$ 행

    미지수의 수 $\Leftrightarrow$ 열

8.1 행렬 대수학의 개요 (3/9)

- 정방행렬
  - 대칭행렬 (모든 i 와 *j* 에 대해 $a_{ij} = a_{ji}$)
    Symmetric matrix

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

  - 대각행렬
    Diagonal matrix

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

  - 단위행렬
    Identity matrix

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

성질: $[A][I] = [I][A] = [A]$

8.1 행렬 대수학의 개요 (4/9)

- 정방행렬

- 상삼각행렬 Upper triangular matrix

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

- 하삼각행렬 Lower triangular matrix

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- 띠행렬 Banded matrix

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

(띠의 폭이 3 = 삼중대각행렬) Tridiagonal matrix

8.1 행렬 대수학의 개요 (5/9)

■ 행렬 연산 법칙

- 일치 $a_{ij} = b_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad [A] = [B]$
- 덧셈 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad [C] = [A] + [B]$
- 뺄셈 $d_{ij} = e_{ij} - f_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad [D] = [E] - [F]$
- 교환법칙 $[A] + [B] = [B] + [A]$
- 결합법칙 $([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$
- 스칼라 곱

$$[D] = g[A] = \begin{bmatrix} ga_{11} & ga_{12} & ga_{13} \\ ga_{21} & ga_{22} & ga_{23} \\ ga_{31} & ga_{32} & ga_{33} \end{bmatrix}$$

8.1 행렬 대수학의 개요 (6/9)

- 곱셈 $$[C]=[A][B] \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
- 결합법칙 $$([A][B])[C]=[A]([B][C])$$
- 분배법칙 $$[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C]$$

  또는 $$([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]$$
- 교환법칙 $[A][B]\neq[B][A]$ *곱의 순서가 중요함*
- 나눗셈 *정의되어 있지 않음*

  - [*A*] 가 정방행렬이고 특이행렬이 아니면 [*A*]의 역행렬 [*A*]$^{-1}$ 가 존재:

$$[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=[I]$$

$$[A]^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

8.1 행렬 대수학의 개요 (7/9)

- 전치행렬
  Transpose

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

이면 전치행렬은 $[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

- 열벡터의 $\{c\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$ **전치는 행벡터** $\{c\}^T = \lfloor c_1 \quad c_2 \quad c_3 \rfloor$

- 확장행렬
  Augmentation

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

8.1 행렬 대수학의 개요 (8/9)

■ 선형대수방정식의 행렬형태 표현

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad [A]\{x\} = \{b\}$$

여기서 *계수* 행렬 $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

상수 열벡터 $\{b\}^T = \lfloor b_1 \quad b_2 \quad b_3 \rfloor$

미지수 열벡터 $\{x\}^T = \lfloor x_1 \quad x_2 \quad x_3 \rfloor$

8.1 행렬 대수학의 개요 (9/9)

선형대수방정식 $[A]\{x\}=\{b\}$ **를 어떻게 풀 것인가?**

$[A]^{-1}[A]\{x\}=[A]^{-1}\{b\}$ **, 따라서** $\{x\}=[A]^{-1}\{b\}$ (11장에서 다룸)

그러나 이러한 방법이 연립방정식을 푸는데 가장 효율적인 것은 아니다.

→ **Gauss 소거법, LU 분해(인수)법, 반복법**

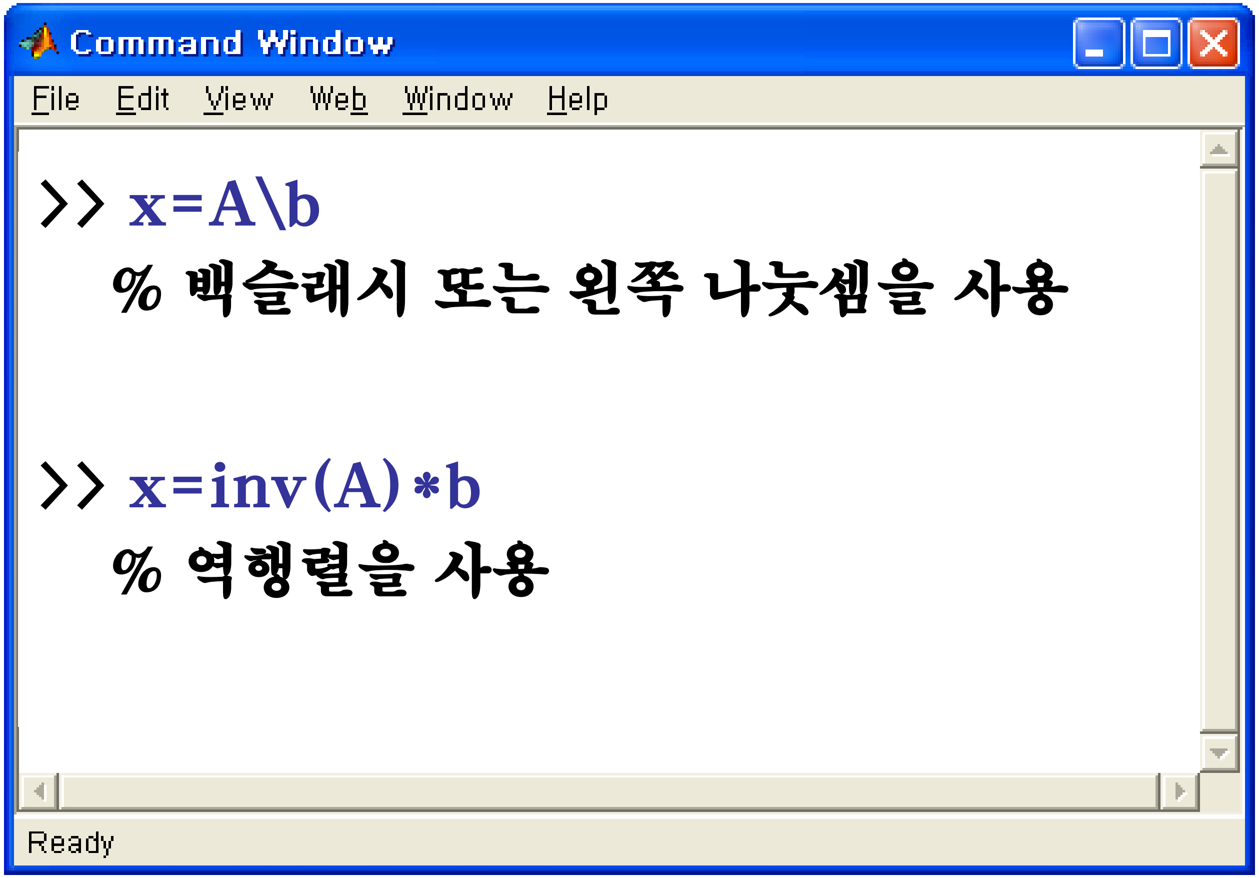
- *과결정시스템:* 방정식(행)의 수 m > 미지수(열)의 수 n

  예> 최소제곱 회귀
- *부족결정시스템:* 방정식(행)의 수 m < 미지수(열)의 수 n

  예> 수치적인 최적화

8.2 MATLAB을 이용한 선형대수방정식의 풀이

- MATLAB은 두 가지의 직접적인 방법을 제공한다.



예제 8.2 (1/4)

Q. 이 장의 처음에 기술된 번지점프 문제를 표에 주어진 매개변수 값을 이용하여 풀어라.

사람	질량 (kg)	스프링상수 (N/m)	본래 줄의 길이 (m)
위(1)	60	50	20
중간(2)	70	100	20
아래(3)	80	50	20

$$
\begin{aligned}
&m_1 g + k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 = 0 \\
&m_2 g + k_3(x_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1) = 0 \\
&m_3 g - k_3(x_3 - x_2) = 0
\end{aligned}
\qquad \text{식 } (8.1)
$$

예제 8.2 (2/4)

풀이) 연립방정식에 표의 매개변수 값을 대입하면
다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 150 & -100 & 0 \\ -100 & 150 & -50 \\ 0 & -50 & 50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 588.6 \\ 686.7 \\ 784.8 \end{Bmatrix}$$

MATLAB 을 사용하여 다음과 같이 실행한다.

예제 8.2 (3/4)

```
>> K = [150 -100 0; -100 150 -50; 0 -50 50];  % 계수행렬
>> mg = [588.6; 686.7; 784.8];             % 우변 벡터
>> x = K\mg
x =
   41.2020
   55.9170
   71.6130
>> x = inv(K)*mg
x =
   41.2020
   55.9170
   71.6130
```

예제 8.2 (4/4)

Command Window

File Edit View Web Window Help

```
>> xi=[20;40;60];  % 세 사람이 20 m의 줄에 연결되어 있음(초기 위치)
>> xf=x+xi
xf =
   61.2020
   95.9170
  131.6130
```

Ready