5장 방정식의 근: 구간법

5.1 소개와 배경
5.2 그래프를 사용하는 방법
5.3 구간법과 초기 가정법
5.4 이분법

예제 5.1 (1/2)

Q. 자유낙하 4초 후의 속도를 36 m/s로 되게 하는 번지 점프 하는 사람의 질량을 그래프적인 접근법으로 구하라.

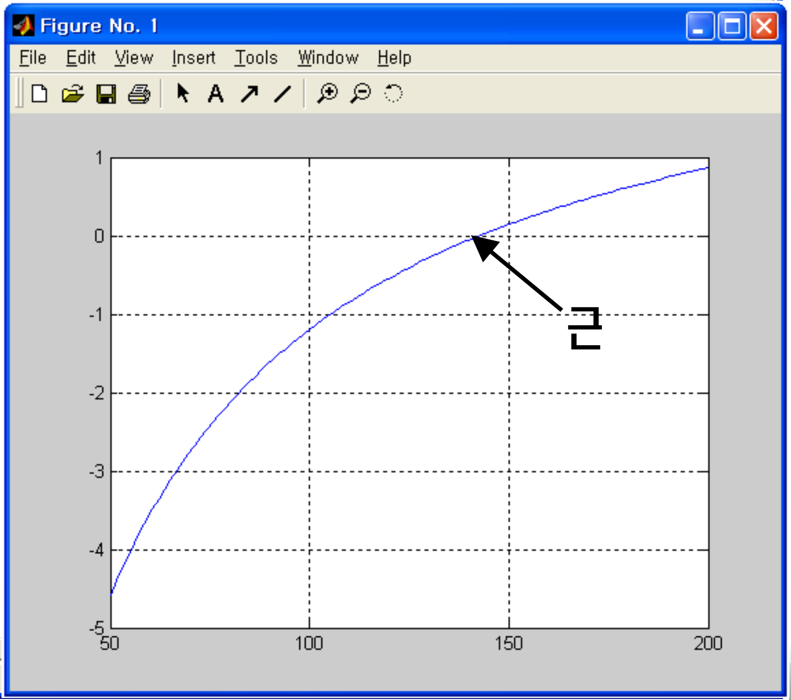
(항력계수는 0.25 kg/m이고, 중력가속도는 9.81 m/s^2이다.)

예제 5.1 (2/2)

Command Window

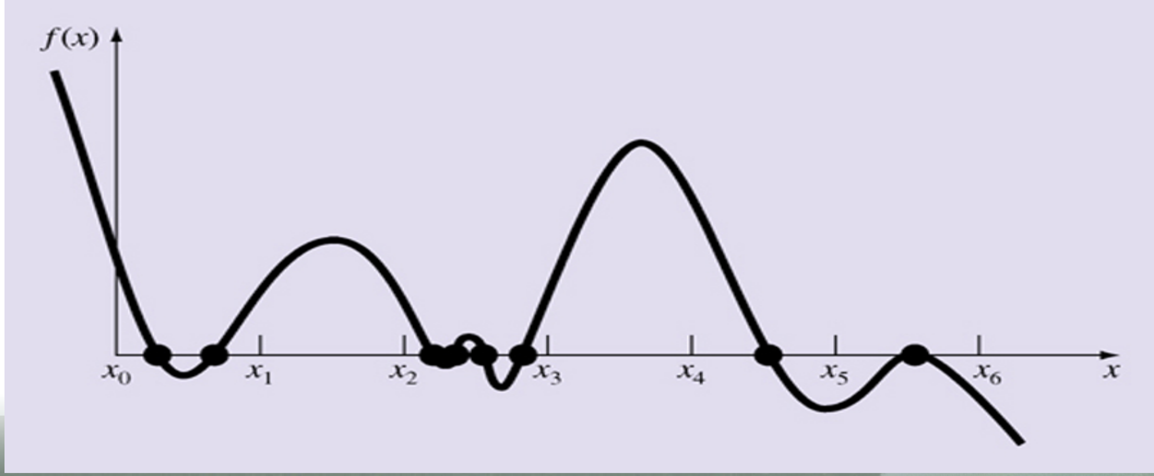
```
>> cd = 0.25; g = 9.81; v = 36; t = 4;
>> mp = linspace (50, 200);
>> fp = sqrt(g*mp/cd).*tanh(sqrt(g*cd./mp)*t) - v;
>> plot(mp,fp), grid
```

Ready



증분탐색법(Incremental search)

- 함수 f(x)=0 의 근이 존재하는 구간을 찾는다.
- $f(x_l)f(x_u) < 0$ 이면 적어도 x_l과 x_u 사이에 실근이 하나 이상 존재한다.
- 증분 구간이 너무 *작으면* 계산시간이 많이 소요
  너무 *크면* 근을 놓치게 됨
- 증분 구간의 크기에 관계없이 중근은 놓칠 위험이 많음



예제 5.2 (1/3)

Q. 증분탐색법을 구현하여 구간 [3,6] 사이에서 다음 함수의 부호가 바뀌는 구간을 찾아라.

$$f(x) = \sin(10x) + \cos(3x)$$

예제 5.2 (2/3)

풀이)

Command Window

File Edit View Web Window Help

```
>> incsearch(inline('sin(10*x)+cos(3*x)'), 3, 6)
nb =
     0
number of brackets:
     5
ans =
    3.2449    3.3061
    3.3061    3.3673
    3.7347    3.7959
    4.6531    4.7143
    5.6327    5.6939
```

Ready

소구간이 너무 넓어서 x=4.25와 5.2 사이의 근을 놓쳤다. 이를 찾기 위해서 구간의 수를 다음과 같이 늘린다.

예제 5.2 (3/3)

```
>> incsearch( inline('sin(10*x)+cos(3*x)'),3,6, 100)
nb =
    0
number of brackets:
    9
ans =
   3.2424   3.2727
   3.3636   3.3939
   3.7273   3.7576
   4.2121   4.2424
   4.2424   4.2727
   4.6970   4.7273
   5.1515   5.1818
   5.1818   5.2121
   5.6667   5.6970
```

Brute-force method

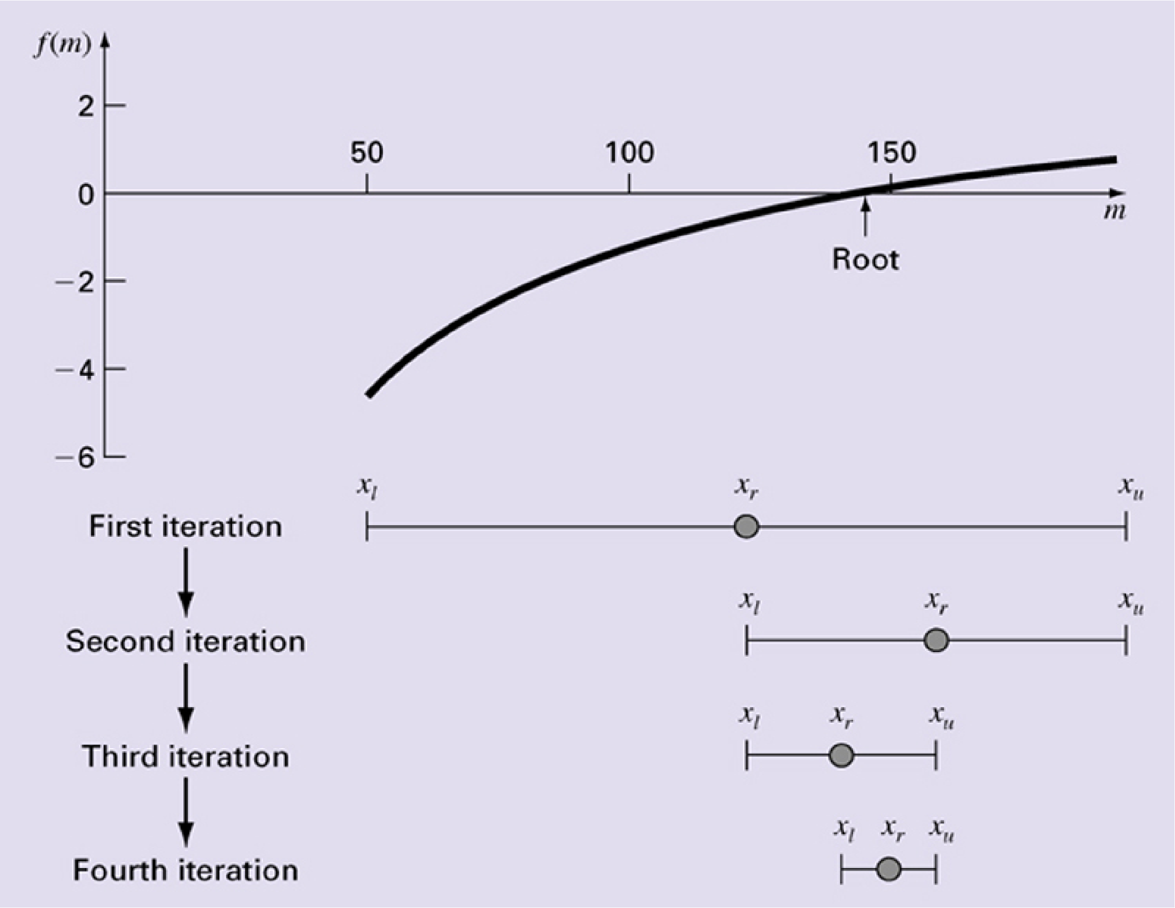
이분법(Bisection algorithm)

- 증분탐색법의 변형으로 구간 폭을 항상 반으로 나누는 방법이다.
- 함수의 부호가 구간 내에서 바뀌면 구간의 중간점에서 함수값을 계산한다.
- 나뉜 소구간 중에서 부호가 바뀌는 소구간에 위치한 근을 구한다.
- 추정된 근의 값, $$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

예제 5.3 (1/2)

Q. 예제 5.1에서 그래프를 사용하여 접근했던 문제를 이분법을 구현하여 풀어라.

예제 5.3 (2/2)



[그림] 이분법의 도식적 묘사

이 그림은 예제 5.3에서 4번 반복한 것을 나타낸다.

예제 5.4 (1/3)

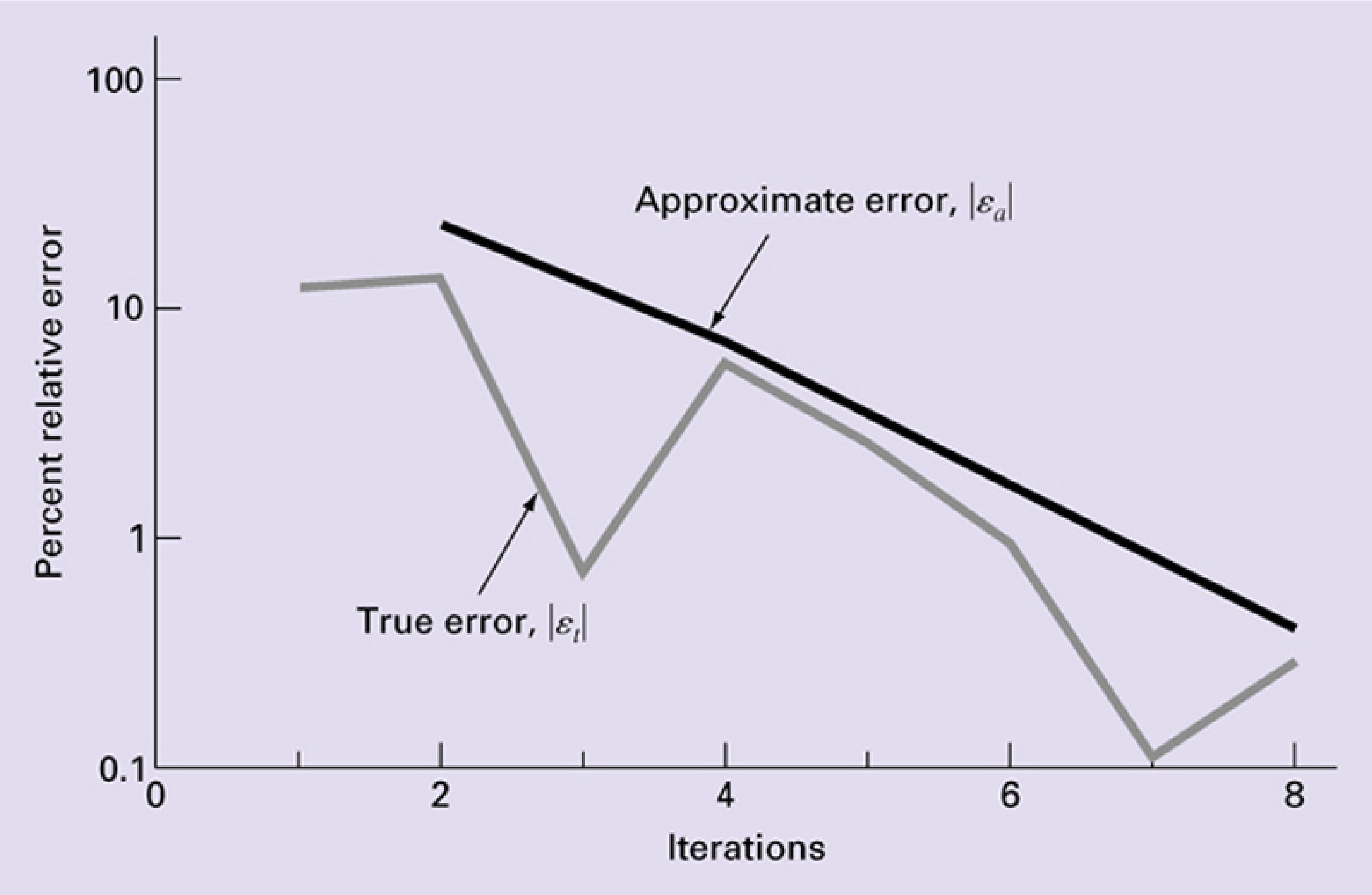
Q. 이분법을 이용하여 자유낙하 4초 후의 속도를 36 m/s로 되게 하는 번지 점프하는 사람의 질량을 구하라. 근사오차가 ε_s = 0.5%의 종료 판정기준 이하가 될 때까지 계산을 반복하라. 오차를 계산하기 위해 다음 식을 사용하라.

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100\% < \varepsilon_s$$

예제 5.4 (2/3)

반복	구간		추정 근	오차(%)		
	x_l	x_u	x_r	$\lvert\varepsilon_a\rvert$	$\lvert\varepsilon_t\rvert$	
1	50	200	$\frac{50+200}{2}=125$		$\left\lvert\frac{142.7376-125}{142.7376}\right\rvert 100\% = 12.43\%$	$f(50)f(125) = -4.579(-0.409) = 1.871$
2	125	200	$\frac{125+200}{2}=162.5$	23.08	13.85	$f(125)f(162.5) = -0.409(0.359) = -0.147$
3	125	162.5	$\frac{125+162.5}{2}=143.75$	13.04	0.71	
4	125	143.75	134.375	6.98	5.86	
5	134.375	143.75	139.0625	3.37	2.58	
6	139.0625	143.75	141.4063	1.66	0.93	
7	141.4063	143.75	142.5781	0.82	0.11	
8	142.5781	143.75	143.1641	0.41	0.30	

예제 5.4 (3/3)



[그림] 이분법에서의 오차.

반복횟수에 대해 참오차와 근사오차가 그림으로 그려져 있다.

과제 1

- 다음의 함수에서 f(3)을 계산하기 위해 x=1을 기준점으로 하여 0차부터 3차까지의 Taylor 급수 전개를 사용하라. 각 근사값에 대한 참 백분율 상대오차 ε_t를 구하라.

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

과제 2

- 과제 1에 있는 함수의 1차 도함수를 계산하기 위해 O(h)를 가지는 전향 및 후향차분 근사와 O(h^2)를 가지는 중심차분 근사를 사용하라.

- 간격 크기 h를 0.25로 놓고, x=2에서의 도함수를 구하라.

- 계산 결과를 도함수의 참값과 비교하고, Taylor 급수전개의 나머지 항을 기초로 하여 그 결과를 검토하라.

과제 3

- 과제 1에 있는 함수의 2차 도함수를 계산하기 위해 $O(h^2)$의 중심차분 근사를 사용하라.
- 간격 크기 h= 0.2와 0.1에 대해 x=2에서의 값을 구하라.
- 그 결과를 2차 도함수의 참값과 비교하고, Taylor 급수전개의 나머지 항을 기초로 하여 그 결과를 검토하라.

과제 제출 방법

- PDF 파일 포맷으로 과제만 이러닝 사이트에 제출
- 제출 형식 엄수
  - [수치해석_분반]과제번호_학번_이름
  - [수치해석_00]01_201501234_홍길동.pdf
- 결과 도출 과정 및 결과 화면을 정리하여 작성
  - 소스코드 파일은 캡쳐 해서 결과 도출 과정에 정리