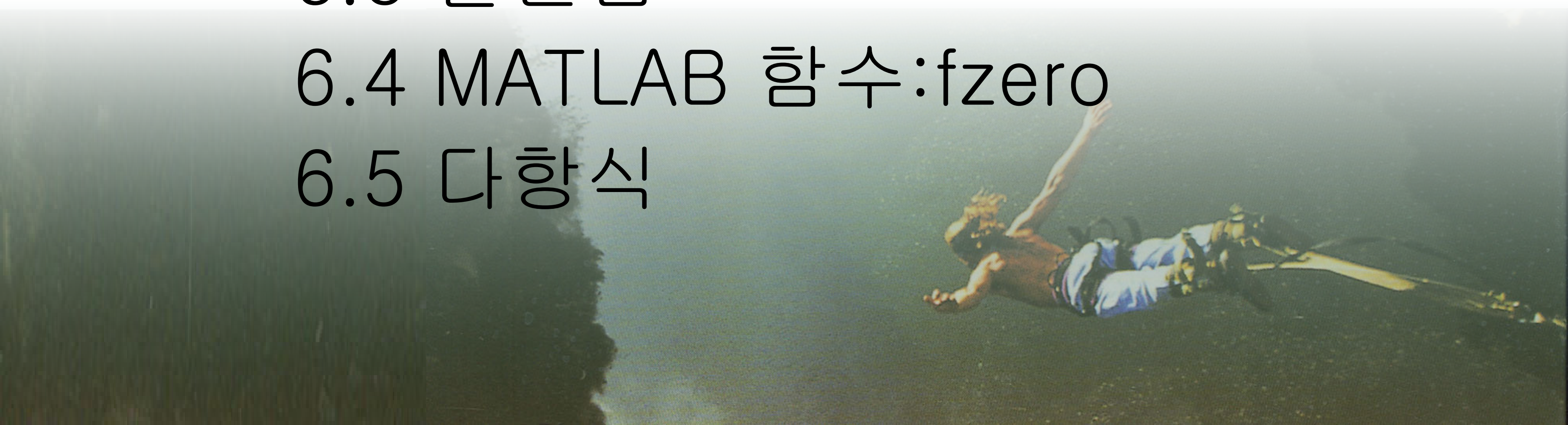
6장 방정식의 근: 개방법

6.1 단순 고정점 반복법
6.2 Newton-Raphson법
6.3 할선법
6.4 MATLAB 함수:fzero
6.5 다항식



5.5 가위치법 (1/3)

- **선형보간법이라고도 하는 구간법이다.**
  - 이분법과 매우 유사하다.
  - 구간을 반분하기보다는 $f(x_l)$과 $f(x_u)$를 연결하는 직선과 x축의 교점으로 새로운 근을 구하는 방법이다.
  - *가위치법* 공식

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

5.5 가위치법 (2/3)

가위치법 공식의 유도

닮은꼴 삼각형에서 $\dfrac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \dfrac{f(x_u)}{x_r - x_u}$

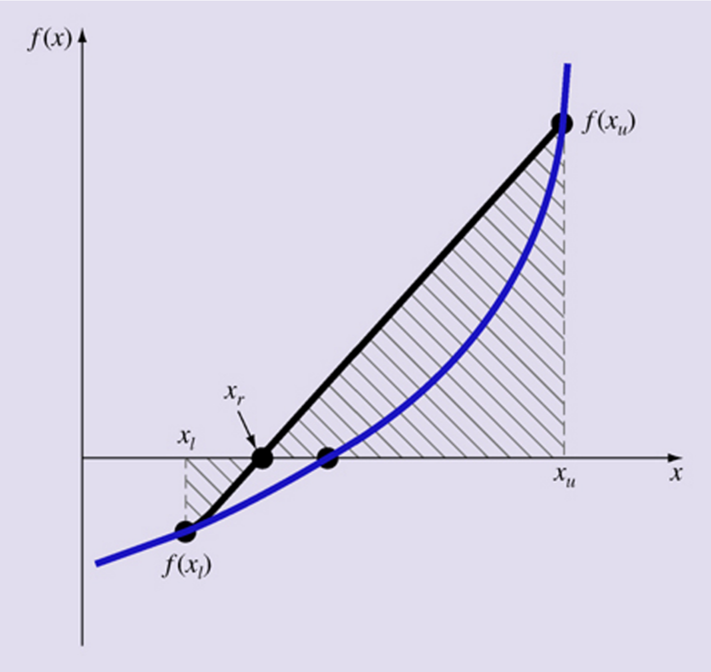
서로 곱하면 $f(x_l)(x_r - x_u) = f(x_u)(x_r - x_l)$

정리하여

$$x_r[f(x_l) - f(x_u)] = x_u f(x_l) - x_l f(x_u)$$

$f(x_l) - f(x_u)$ 로 나누면

$$x_r = \frac{x_u f(x_l)}{f(x_l) - f(x_u)} - \frac{x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



5.5 가위치법 (3/3)

가위치법 공식의 유도

x_u 를 더하고 빼면

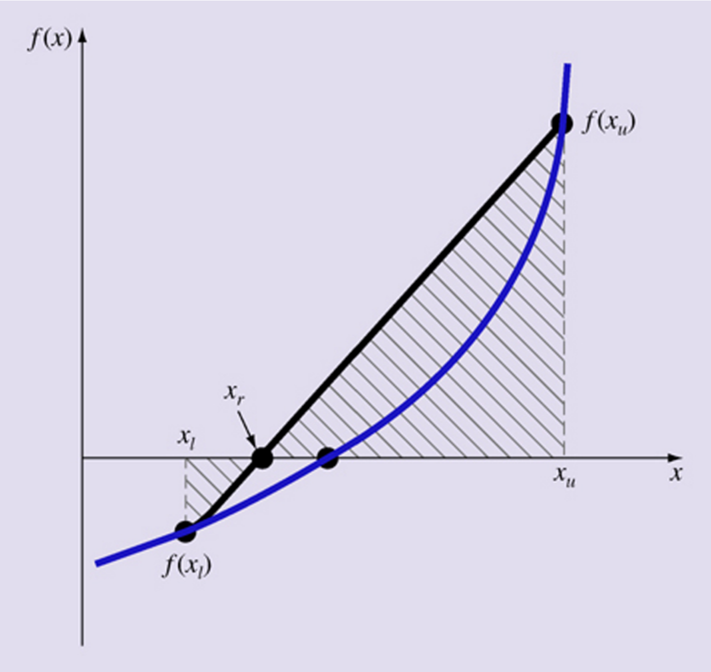
$$x_r = x_u + \frac{x_u f(x_l)}{f(x_l) - f(x_u)} - x_u - \frac{x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

항을 모으면

$$x_r = x_u + \frac{x_u f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} - \frac{x_l f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

즉

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



예제 5.5 (1/2)

Q. 가위치법을 사용하여 예제 5.1의 방정식의 근을 구하라.

Q. 자유낙하 4초 후의 속도를 36 m/s로 되게 하는 번지 점프하는 사람의 질량을 그래프적인 접근법으로 구하라.

(항력계수는 0.25 kg/m이고, 중력가속도는 9.81 m/s²이다.)

풀이)

- 첫 번째 반복에 의해

$$x_l = 50 \qquad f(x_l) = -4.579387$$

$$x_u = 200 \qquad f(x_u) = 0.860291$$

$$x_r = 200 - \frac{0.860291(50-200)}{-4.579387 - 0.860291} = 176.2773$$

$$\varepsilon_t = 23.5\%$$

예제 5.5 (2/2)

- 두 번째 반복에 의해

$$f(x_l)f(x_r) = -2.592732$$

$$x_l = 50 \qquad f(x_l) = -4.579387$$

$$x_u = 176.2773 \qquad f(x_u) = 0.860291$$

$$x_r = 176.2773 - \frac{0.566174(50 - 176.2773)}{-4.579387 - 0.566174} = 162.3828$$

$$\varepsilon_t = 13.76\%, \quad \varepsilon_a = 8.56\%$$

6장 방정식의 근: 개방법

- ## 구간법과 개방법의 비교

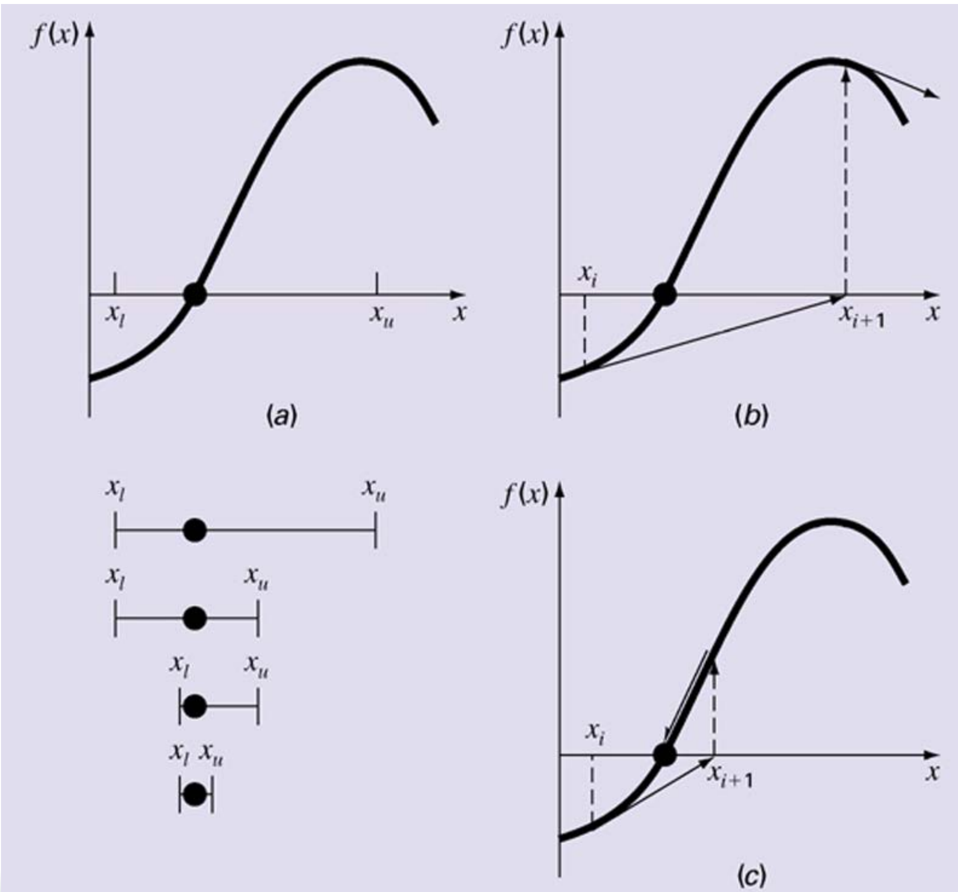


그림 6.1 도식적 비교:
(a)구간법 (b), (c) 개방법.
이분법인 (a)에서는 근이 반드시 x_l과 x_u을 포함하는 구간에 존재하나, Newton-Raphson법과 같은 개방법에서는 함수의 형태와 초기값의 설정에 따라 (b)와 같이 발산하거나 (c)와 같이 빠르게 수렴한다.

6.2 Newton-Raphson법 (1/2)

- 가장 폭넓게 사용되는 공식

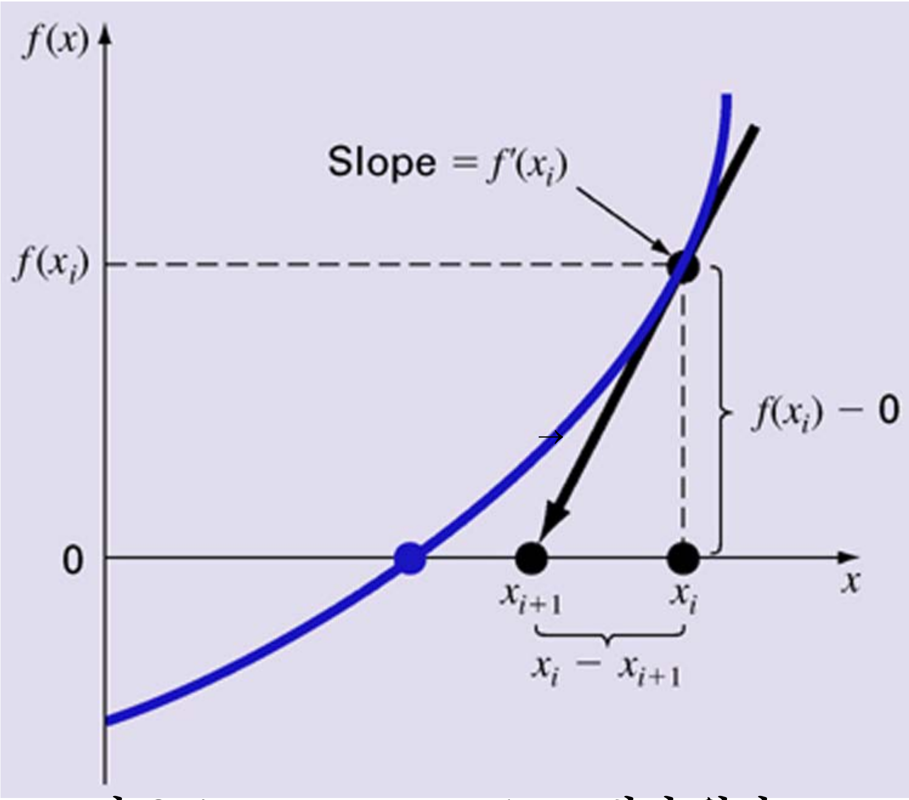


그림 6.4 Newton-Raphson법의 원리.
x_i 에서의 함수의 접선 f'(x)이 근의 근사값 x_{i+1}을 추정하기 위하여 x 축까지 연장된다.

근의 초기 가정 값 = x_i

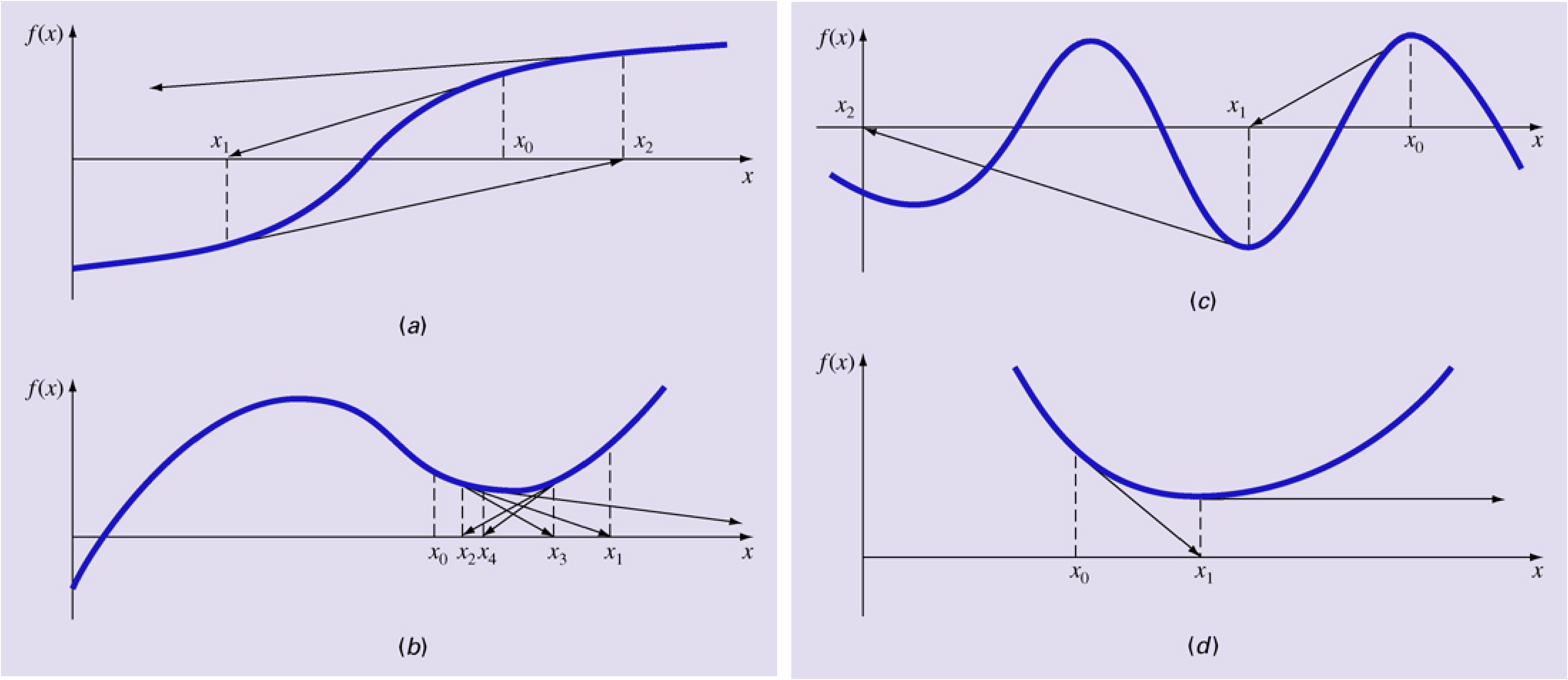
- 점 [x_i, $f(x_i)$]에서의 접선을 연장
- 보다 개선된 근으로 x축과 만나는 점을 선택
- $$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newton-Raphson 공식

6.2 Newton-Raphson법 (2/2)

- Newton-Raphson 법이 느리게 수렴되지 않는 네 가지 경우



- 기울기가 0 [$f'(x) = 0$] 이면 N-R 공식에서 0으로 나누는 경우가 발생
- N-R 법의 수렴 ~ ① 함수의 성질 ② 초기가정의 정확도

예제 6.2 (1/2)

Q. Newton-Raphson 법을 사용해서 $f(x) = e^{-x} - x$ 의 근을 추정하라. 초기 가정은 x_0 = 0이다.

풀이)

$f'(x) = -e^{-x} - 1$ 이므로 공식은

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

예제 6.2 (2/2)

i	x_i	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

- 오차는 이전 단계에서의 오차의 제곱에 비례한다.
  2차적 수렴; $E_{t,i+1} \propto E_{t,i}^2$
- 중근을 갖는 경우에는 효율이 떨어진다.

예제 6.3 (1/2)

Q. Newton-Raphson 법을 사용해서 $f(x) = x^{10} - 1$ 의 양의 근을 구하라. 단, $x_0 = 0.5$

풀이)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x^{10} - 1}{10x_i^9}$$

i	x_i	$\lvert \varepsilon_a \rvert$ (%)
0	0.5	
1	51.65	99.032
2	46.485	11.111
3	41.8365	11.111
4	37.65285	11.111
⋮		
40	1.002316	2.130
41	1.000024	0.229
42	1	0.002

예제 6.3 (2/2)

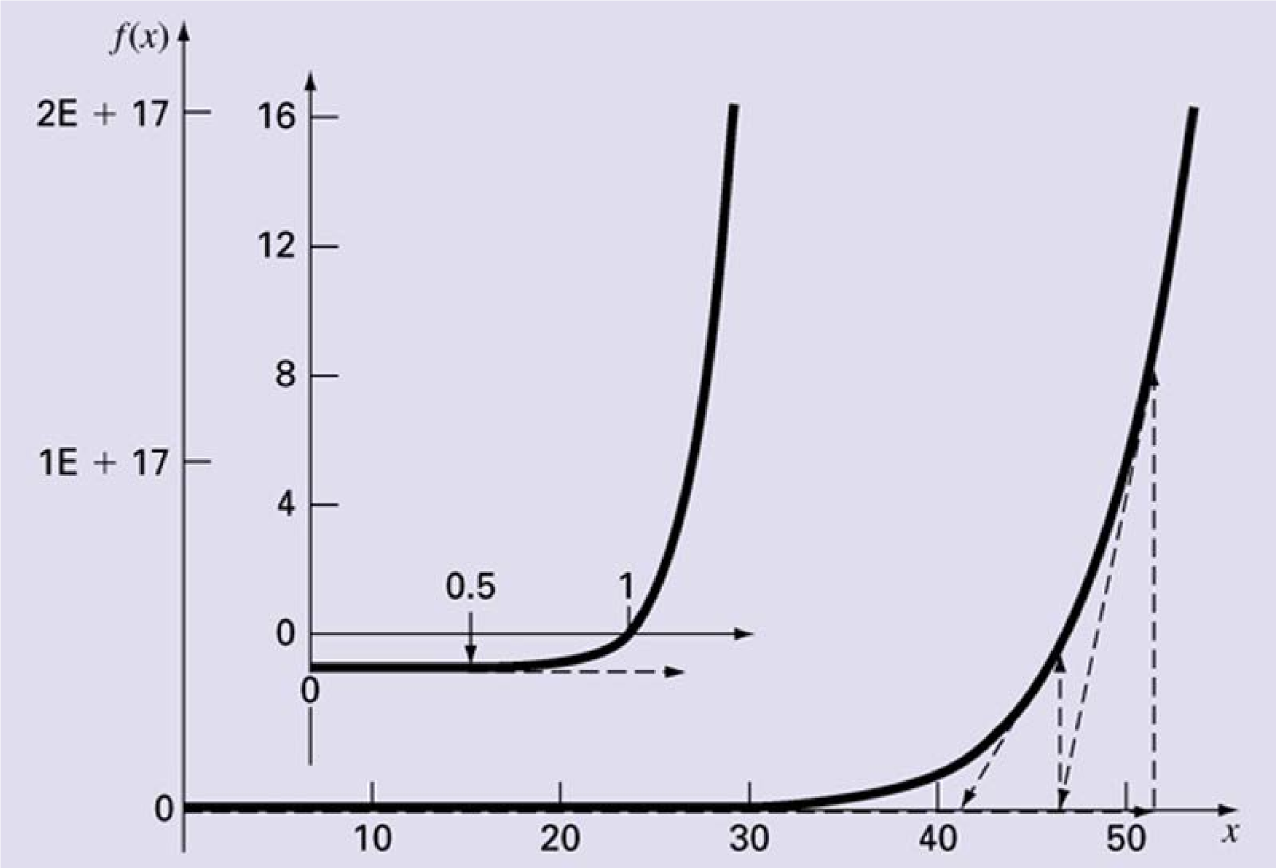


그림 6.5 느리게 수렴하는 Newton-Raphson법의 도식적 묘사.
삽입된 그림은 초기에 0에 가까운 기울기가 어떻게 해를 근으로부터
멀리 보내고 있는가를 보여준다. 그러므로 해는 매우 느리게 근에 수렴한다.

예제 6.4 (1/3)

Q. 항력계수가 0.25kg/m일 때 자유낙하 4초 후의 속도가 36m/s가 되는 번지점프하는 사람의 질량을 구하기 위해 newton-Raphson법 M-파일 함수를 사용하라. 중력가속도는 9.81m/s^2 이다.

풀이)

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

이므로 공식은

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

예제 6.4 (2/3)

[An M-file to implement the Newton-Raphson method]

```
function [root, ea, iter] = newtraph(func, dfunc, xr, es, maxit, varargin)
% [root, ea, iter] =newtraph(func, dfunc, xr, es, maxit, p1, p2, …);
%    uses Newton-Raphson method to find root of a func
% input:
%    func = name of function
%    dfunc = name of derivative of function
%    xr = initial guess
%    es = desired relative error (default = 0.0001%)
%    maxit = maximum allowable iterations (default = 50)
%    p1, p2,… = additional parameters used by function
% output:
%    root = real root
%    ea = approximate relative error (%)
```

예제 6.4 (3/3)

[An M-file to implement the Newton-Raphson method]

```
%    iter = number of iterations
if nargin<3, error('at least 3 input arguments required'), end
if nargin<4| isempty(es), es= 0.0001; end
if nargin<5| isempty (maxit), maxit =50 ; end
iter = 0;
while (1)
  xrold = xr;
  xr = xr - feval(func,xr)/feval(dfunc,xr);
  iter = iter +1;
  if xr ~= 0, ea = abs((xr - xrold)/xr) * 100; end
  if ea <= es | iter >= maxit, break, end
end
root = xr;
```

6.5 할선법 (1/2)

- N-R 법에서 도함수의 표현을 없앤 방법

N-R 법에서 나타나는 도함수를 후향제차분으로 근사시키면

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \quad \rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

- x에 대해 두 개의 초기값이 필요
- 초기값 사이에서 $f(x)$ 의 부호가 바뀔 필요는 없음

  → 개방법

6.5 할선법 (2/2)

- 또 다른 방법으로 독립변수에 약간의 변동을 주면,

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

반복계산식

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

수정된 할선법

예제 6.5 (1/2)

Q. 수정된 할선법으로 항력계수가 0.25 kg/m일 때 자유낙하 4초 후의 속도가 36 m/s가 되도록 번지점프하는 사람의 질량을 구하라.
중력가속도는 9.81 m/s2이다. 질량의 초기가정으로 50 kg으로 놓고,
변동량을 10-6으로 잡아라.

풀이)

첫 번째 반복에 대해서

$$x_0 = 50 \qquad f(x_0) = -4.57938708$$

$$x_0 + \delta x_0 = 50.00005 \qquad f(x_0 + \delta x_0) = -4.579381118$$

$$x_1 = 50 - \frac{10^{-6}(50)(-4.57938708)}{-4.579381118 - (-4.57938708)}$$

$$= 88.39931 (|\varepsilon_t| = 38.1\%; |\varepsilon_a| = 43.4\%)$$

예제 6.5 (2/2)

두 번째 반복에 대해서

$$x_1 = 88.39931 \qquad f(x_1) = -1.69220771$$

$$x_1 + \delta x_1 = 88.39940 \qquad f(x_1 + \delta x_1) = -1.692203516$$

$$x_2 = 88.39931 - \frac{10^{-6}(88.39931\ )(-1.69220771)}{-1.692203516 - (-1.69220771)}$$

$$= 124.08970(|\varepsilon_t| = 13.1\%; |\varepsilon_a| = 28.76\%)$$

i	x_i	$\lvert\varepsilon_a\rvert$ **(%)**	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ **(%)**
0	50.0000	64.971	
1	88.3993	38.069	43.438
2	124.0897	13.064	28.762
3	140.5417	1.538	11.706
4	142.7072	0.021	1.517
5	142.7376	4.1×10^{-6}	0.021
6	142.7376	3.4×10^{-12}	4.1×10^{-6}

과제 1

- 가위치법으로 다음 문제를 풀어라.
  - 80kg인 번지점프하는 사람이 자유낙하 4초 후에 속도가 36m/s가 되기 위한 항력계수를 이분법으로 구하라.
  - 중력가속도는 9.81m/s^2이다. $x_1 = 0.1, x_u = 0.2$의 초기 가정값으로 시작하여 근사 상대오차가 2% 이하로 떨어질 때까지 반복하라.

과제 2

- 할선법을 위한 M-파일을 개발하라. 두 개의 초기 가정값과 함께 함수를 인수로 전달하라. 연습문제 6.3을 풀어 이 M-파일을 시험하라.
- 연습문제 6.3
  - f(x) = $x^3 - 6x^2 + 11x - 6.1$의 가장 큰 실근을 구하라.
    - A) 그래프를 사용하여 구하라.
    - B) Newton-Raphson법을 사용하라(세 번 반복계산, $x_i = 3.5$)
    - C) 할선법을 사용하라(세 번 반복계산, $x_{i-1} = 2.5, x_i = 3.5$)
    - D) 수정된 할선법을 사용하라(세 번 반복계산, $x_i = 3.5 \quad \delta = 0.01$)
    - E) MATLAB으로 모든 근을 구하라.

과제 3

- 수정된 할선법을 위한 M-파일을 개발하라. 초기 가정값, 변동량과 함께 함수를 인수로 전달하라. 연습문제 6.3을 풀어 이 M-파일을 시험하라.
- 연습문제 6.3
  - f(x) = $x^3 - 6x^2 + 11x - 6.1$의 가장 큰 실근을 구하라.
    - A) 그래프를 사용하여 구하라.
    - B) Newton-Raphson법을 사용하라(세 번 반복계산, $x_i = 3.5$)
    - C) 할선법을 사용하라(세 번 반복계산, $x_{i-1} = 2.5, x_i = 3.5$)
    - D) 수정된 할선법을 사용하라(세 번 반복계산, $x_i = 3.5 \quad \delta = 0.01$)
    - E) MATLAB으로 모든 근을 구하라.

과제 제출 방법

- PDF 파일 포맷으로 과제만 이러닝 사이트에 제출

- 제출 형식 엄수
  - [수치해석_분반]과제번호_학번_이름
  - [수치해석_00]03_201501234_홍길동.pdf

- 결과 도출 과정 및 결과 화면을 정리하여 작성
  - 소스코드 파일은 캡쳐 해서 결과 도출 과정에 정리