4장 반올림오차와 절단오차

4.1 오차
4.2 반올림오차
4.3 절단오차
4.4 전체수치오차
4.5 실책, 모델오차와 자료의
불확실성

4장 반올림오차와 절단오차

- 속도의 도함수를 제차분으로 근사

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

☹ 속도의 도함수를 근사화함

☹ 정확한 해가 아님 → **오차를 가짐!**

☹ 컴퓨터도 완벽한 도구가 아님 → **오차를 산출함!**

이러한 불확실성의 문제를 어떻게 처리할 것인가?

⇨ **오차를 식별하고, 정량화하고, 최소화함**

4.1 오차 (1/5)

- **수치오차**
  - 반올림오차 (컴퓨터의 숫자 처리 방식에 의함)
  - 절단오차 (수학적 근사에 의함)
- **실책**
  - 인간의 실수, 컴퓨터의 고장
- **모델오차**
  - 불완전한 수학적 모델

  예> Newton 제2법칙을 적용할 때 공기의 저항을 무시하는 경우
- **자료 불확실성**
  - 측정 오차

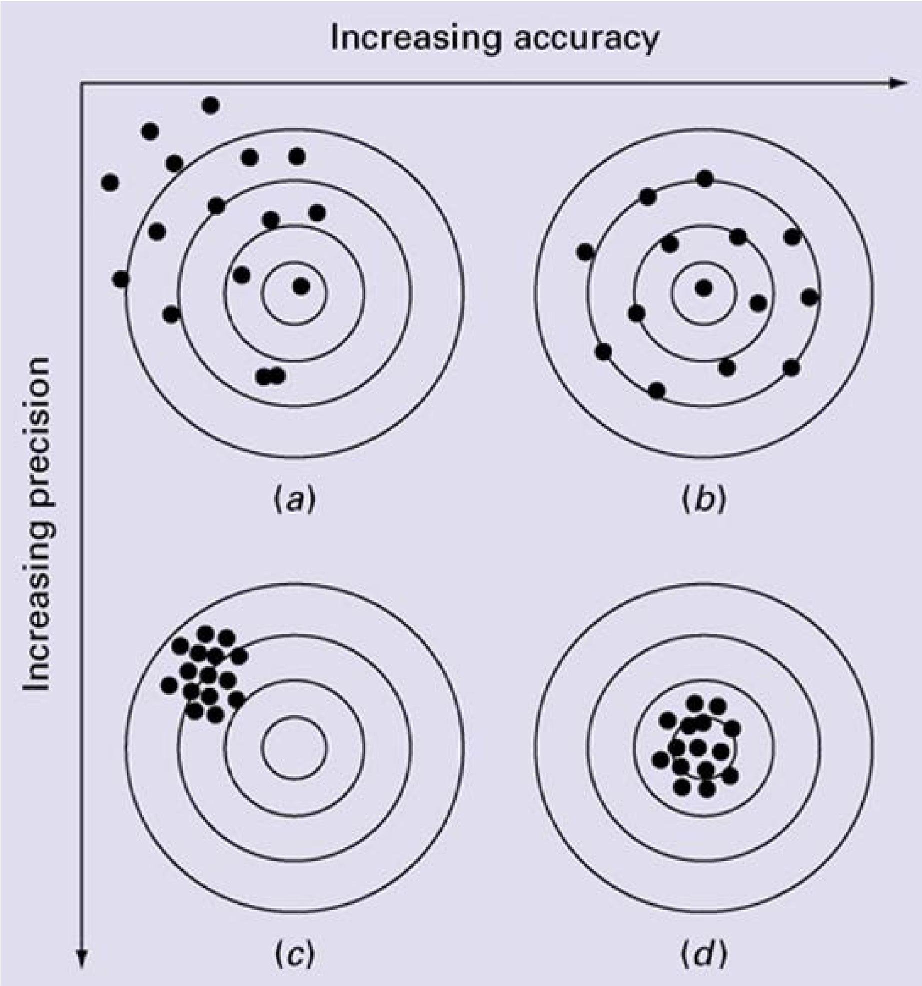
수치방법과 직접 연관은 없음

4.1 오차 (2/5)

■ 정확도와 정밀도

- 정확도(accuracy)
  - 계산하거나 측정한 값이 얼마나 참값에 가까운가 하는 정도를 나타낸다.
- 부정확성 또는 편심(inaccuracy or bias)
  - 참값으로부터 떨어져 있는 정도를 나타낸다.
- 정밀도(precision)
  - 각각의 계산이나 측정한 값이 서로 얼마나 가까운지를 나타낸다.
- 비정밀도 또는 불확실성(imprecision or uncertainty)
  - 분포의 크기를 나타낸다.

4.1 오차 (3/5)



〈그림 4.1 정확도와 정밀도의 개념을 설명하기 위한 탄착지〉

(a)부정확과 비정밀
(b)정확과 비정밀
(c)부정확과 정밀
(d)정확과 정밀

4.1 오차 (4/5)

■ 오차의 정의

[참값을 알고 있을 경우]

- 참값=근사값 + 오차

  또는 참 오차, E_t=참값−근사값

- $$참\ 상대오차 = \frac{참값 - 근사값}{참값}$$

또는 $$\varepsilon_t = \frac{참값 - 근사값}{참값} \times 100\%$$

4.1 오차 (5/5)

▪ 오차의 정의

[참값을 모르는 경우]

- $\varepsilon_a = \dfrac{\text{근사오차}}{\text{근사값}} \times 100\%$
- $\varepsilon_a = \dfrac{\text{현재 근사값-이전 근사값}}{\text{현재 근사값}} \times 100\%$ (반복법에 기초한 수치해법의 경우)
- 계산을 다음의 조건이 만족할 때까지 반복

  $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ (백분율 허용치) → "종료 판정기준“
- 백분율 허용치가 $\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\%$ 이면,

  결과는 적어도 n 개의 유효숫자 내에서 정확

예제 4.1 (1/2)

Q. Maclaurin 급수전개로 $e^{0.5}$(=1.648721...)의 값을 계산할 때, 그 결과가 3자리 유효숫자까지 정확한 것에 해당하는 ε_s보다 작은 백분율 상대오차를 가지려면 몇 개의 항을 포함시켜야 하는가?

풀이) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$ Maclaurin 급수

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

예제 4.1 (2/2)

항 수	결과	오차 ε_t (%)	근사오차 ε_a (%)
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645800000	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

잠깐 휴식 (1/2)

- Taylor 급수

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

여기서 R_n = 나머지

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \ ,$$ Lagrange 형식

$$R_n = \frac{(x - x_0)(x - \xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi),$$ Cauchy 형식

잠깐 휴식 (2/2)

- *Maclaurin* 급수는 Taylor 급수에서 $x_0 = 0$인 경우에 해당된다.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$$

4.2 반올림오차 (1/9)

- **컴퓨터에서 수를 정확하게 처리할 수 없기 때문에 발생한다.**

  1) 컴퓨터는 수를 표현하는 데 크기와 정밀도에 한계가 있다.

  2) 어떤 수치계산은 반올림오차에 매우 민감하다.

4.2 반올림오차 (2/9)

■ 컴퓨터 상에서의 수의 표현

- 비트(bit)
  - 이진수
- 바이트(byte)
  - 8 비트
- 워드(*word*)
  - 일련의 비트로 구성되어 수를 표시하는 기본 단위

  예> 16-비트 또는 2-바이트 워드

4.2 반올림오차 (3/9)

- **컴퓨터 상에서의 수의 표현**
  - 십진법

    예> $8642.9 = (8 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (2 \times 10^0) + (9 \times 10^{-1})$
  - 이진법

    예> $101.1 = (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) + (1 \times 2^{-1}) = 4 + 0 + 1 + 0.5 = 5.5$

컴퓨터에서는 $\pi, e, \sqrt{7}$ 등의 무리수를 어떻게 처리하나 ?

π = 3.141593 — 16-비트 워드를 할당하는 컴퓨터 (약 7자리까지 정확한 단정도 정밀도)

π = 3.14159265358979 — 32-비트 워드 할당하는 컴퓨터 (약 15자리까지 정확한 배정도 정밀도)

■ 정수의 표현

- 16-bit 컴퓨터

$$(10101101)_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 128 + 32 + 8 + 4 + 1$$
$$= (173)_{10}$$

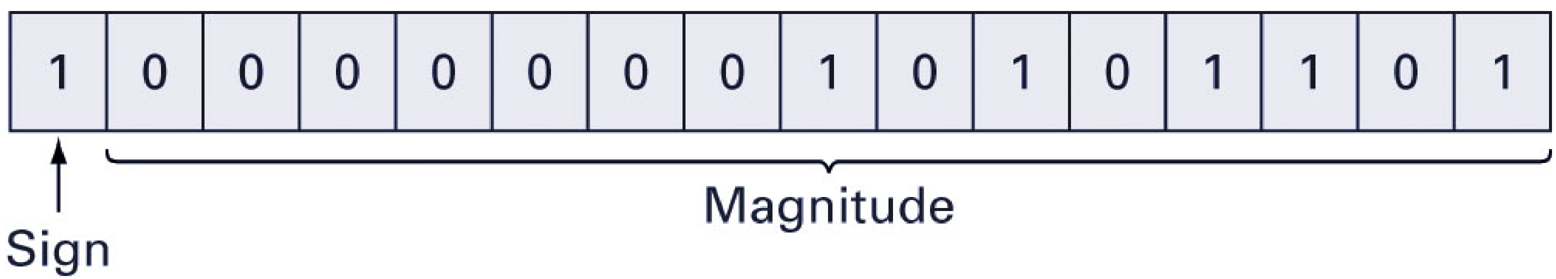


그림 4.2

4.2 반올림오차 (5/9)

■ 정수의 표현

- 최대값, 최소값 및 0

$$(0111\cdots111)_2 = 2^{14} + 2^{13} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32,767 = 2^{15} - 1$$

$$(0000\cdots000)_2 = 0$$

$$(1111\cdots111)_2 = 2^{14} + 2^{13} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = -32,767 = -(2^{15} - 1)$$

$$(1000\cdots000)_2 = -32,768$$

-32768 $<$ 정수 $<$ 32767 $(-2^{15}$ to $2^{15}-1)$

- n-bit word

-2^n $<$ 정수 $<$ 2^n-1

4.2 반올림오차 (6/9)

■ 실수 : 부동소수점 표현

- 일반적인 과학적 표기법과 유사하다.

$$\pm s \times b^{e}$$

where s= 유효숫자, b = 기저, e = 지수

- 정규화 : 0을 제거함으로써 컴퓨터 메모리의 낭비를 막는다.

Ex) $0.005678 \longrightarrow 5.678 \times 10^{-3}$

$(\mathrm{Cf}: 0.005678 \times 10^{0})$

예제 4.2

Q. 5자리수 계산을 수행하는 10진법의 가상컴퓨터

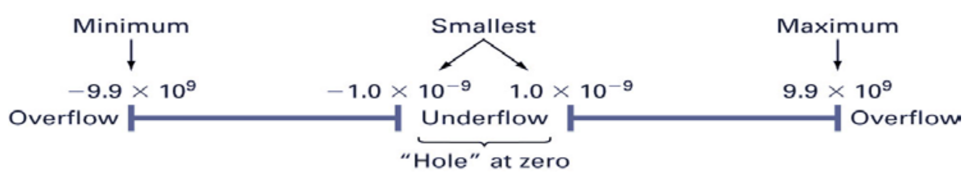
부호 : 1자리, 지수 : 2자리 (부호 : 1자리, 크기 : 1자리), 가수 : 2자리

풀이) 부동소수점 표현으로 나타낸다.

$$s_1\, d_1.d_2 \times 10^{s_0 d_0}$$

where s0, s1= 부호, d_0 = 지수의 크기, d_1과 d_2 = 유효숫자의 크기

- 최대값 : $+9.9\times10^{+9}$ if greater than this, *overflow error.*
- 양의 최소값 : $+1.0\times10^{-9}$



⇨ 제한된 지수와 유효숫자의 자리수는 숫자의 범위와 정확도에 한계 초래 → 반올림오차

4.2 반올림오차 (7/9)

- MATLAB에서 표현할 수 있는 수의 한계

```
>> format long
>> realmax
ans =
   1.797693134862316e+308
>> realmin
ans =
   2.225073858507201e-308
>> eps              (machine epsilon)
ans =
   2.220446049250313e-016
```

4.2 반올림오차 (8/9)

▪ 컴퓨터의 산술적 연산

- 뺄셈의 무효화

$$\begin{array}{r} 0.7642\times10^{3} \\ -0.7641\times10^{3} \\ \hline 0.0001\times10^{3} \end{array} \quad \rightarrow \text{ 정규화 } \rightarrow \; 0.1000\times10^{0}$$

- 대규모 계산
- 큰 수와 작은 수의 덧셈

$$\begin{array}{r} 0.4000\cdot10^{4} \\ +\;0.0000001\cdot10^{4} \\ \hline 0.4000001\cdot10^{4} \end{array} \quad \rightarrow \text{ 4-자리 가수 } \rightarrow \; 0.4000\times10^{4}$$

4.2 반올림오차 (9/9)

▪ 컴퓨터의 산술적 연산

- 오점(smearing)

  - 덧셈 과정에서 각 항들이 합산 자체보다 매우 클 때 발생

  예> 부호가 바뀌는 급수

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$ 에서 x = -10 인 경우는?

- 내적

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

4.3 절단오차 (1/11)

- 수학적 연산을 근사적으로 표현하기 때문에 발생한다.

예> 유한제차분 방정식

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

수치해법에서 함수를 어떻게 근사할 수 있는가?

4.3 절단오차 (2/11)

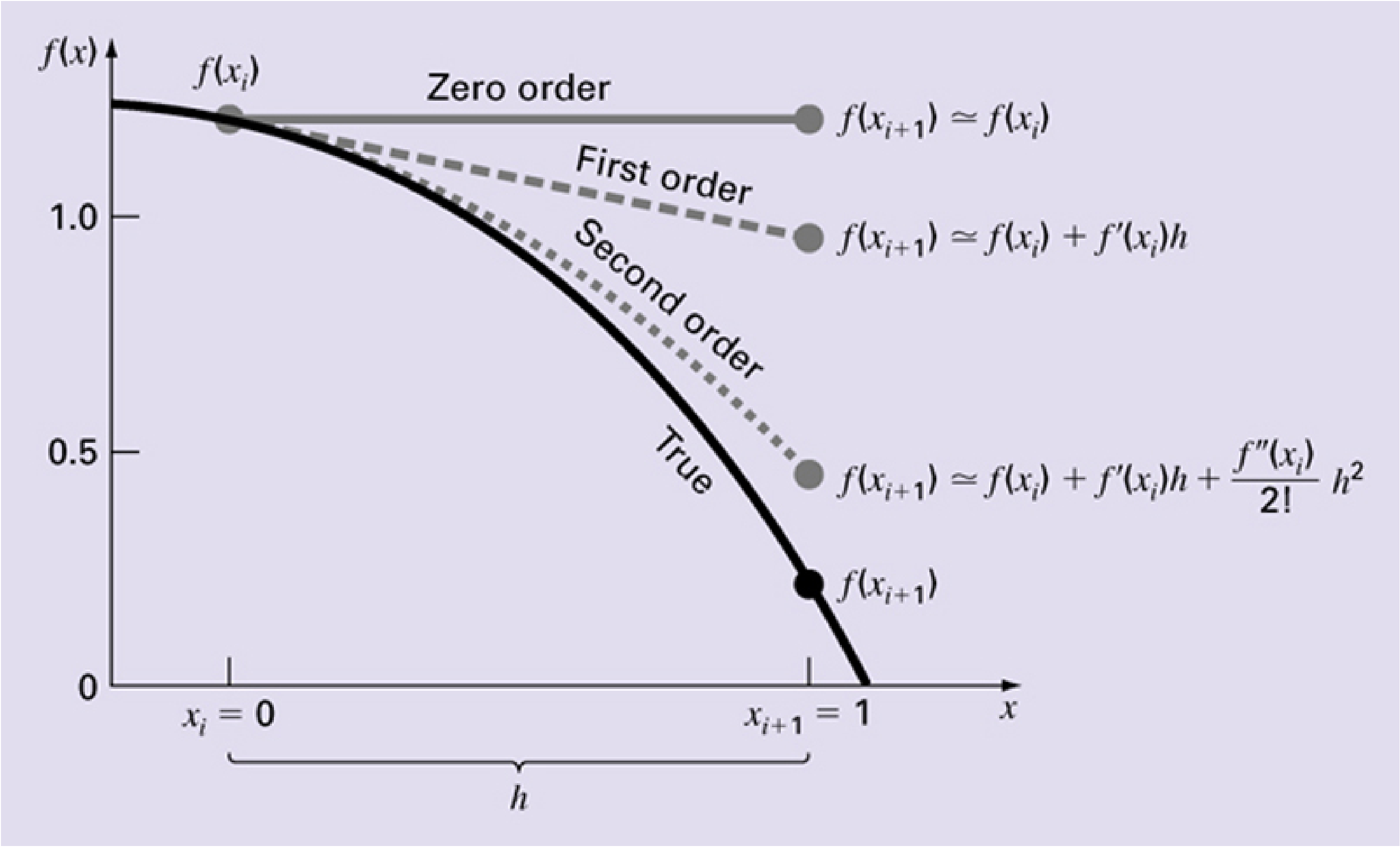
▪ Taylor 급수

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

여기서 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$, $(x_i \le \xi \le x_{i+1})$ Lagrange 형식(n–차 근사)

- 한 점에서의 함수와 도함수 값으로 다른 점에서의 함수 값을 예측하는 경우
- 0차 근사 $f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$
- 1차 근사 $f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h$
- 2차 근사 $f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$

4.3 절단오차 (3/11)



〈그림 4.2 0차, 1차, 2차 Taylor 급수전개를 이용하여 x=1에서 함수의 근사〉

4.3 절단오차 (4/11)

- Taylor 정리

  - 매끄러운 함수를 *다항식으로* 근사할 수 있다.

  예> 상수에 하첨자 i를 붙인다면 2차 근사는 다음과 같다.

$$f(h) \cong a_2 h^2 + a_1 h + a_0$$

정확한 값을 얻기 위해 실제적으로 몇 개의 항이 요구되는가?

- 대부분의 경우에 단지 몇 개의 항만을 포함시키면 됨
- 절단오차가 h^{n+1} 정도의 크기를 가짐, $R_n = O(h^{n+1})$

  - 오차는 간격 크기 h의 (n+1) 제곱에 비례함

  - 수치해법의 오차를 비교하는데 사용됨, $O(h)$ 대 $O(h^2)$

  - <u>절단오차의 크기를 추정함</u>

예제 4.3 (1/2)

Q. Taylor 급수를 이용하여 함수 $f(x)=\cos x$의 $x_i = \pi/4$ 에서의 함수와 도함수 값으로 $x_{i+1} = \pi/3$ 에서의 함수 값을 n= 0에서 6 인 경우에 대해 계산하라. 여기서 $h = \pi/3 - \pi/4 = \pi/12$이다.

풀이) 2차 근사 $$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=0.707106781} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{=0.521986659} - \frac{\cos(\pi/4)}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2}_{=0.497754491}$$

단, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$

예제 4.3 (2/2)

차수 n	$f(\pi/3)$	ε_t (%)
0	0.707106781	41.4
1	0.521986659	4.40
2	0.497754491	0.449
3	0.499869147	2.62×10^{-2}
4	0.500007551	1.51×10^{-3}
5	0.500000304	6.08×10^{-5}
6	0.499999988	2.44×10^{-6}

4.3 절단오차 (5/11)

■ 절단오차를 추정하기 위한 Taylor 급수

번지 점프의 예로 돌아가자.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

Euler 방법을 사용하면

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \frac{dv(t_i)}{dt} \Delta t = v(t_i) + \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}(t_{i+1} - t_i)$$

그리고 $v(t)$를 Taylor 급수로 전개할 수 있다.

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \cdots + R_n$$

4.3 절단오차 (6/11)

급수를 절단하면 $$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1$$

여기서 $$R_n\Big|_{n=1} = \left.\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\right|_{n=1} = \frac{f''(\xi)}{2!}h^2$$

다시 정리하면 $$v'(t_i) = \underbrace{\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{\text{First-order approximation}} - \underbrace{\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i}}_{\text{Truncation error}}$$

여기서 $$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = \frac{v''(\xi)}{2!}(t_{i+1} - t_i) = O(t_{i+1} - t_i)$$

따라서 $v'(t)$ 의 값을 계산하는데 $(t_{i+1} - t_i)$ 크기의 절단오차를 갖는다(즉 간격크기에 비례).

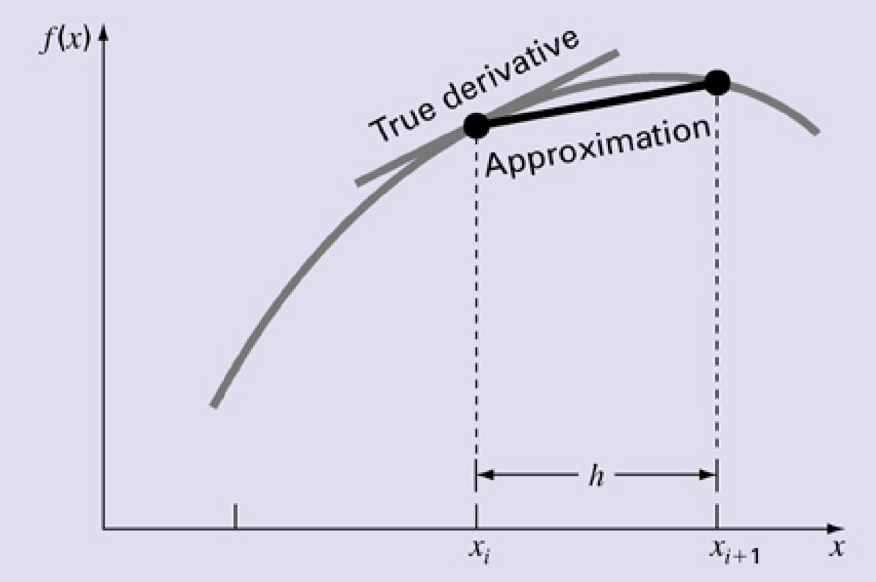
4.3 절단오차 (7/11)

■ 수치미분

◆ 1차 도함수의 *전향차분* 근사

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

또는 $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$



(a)

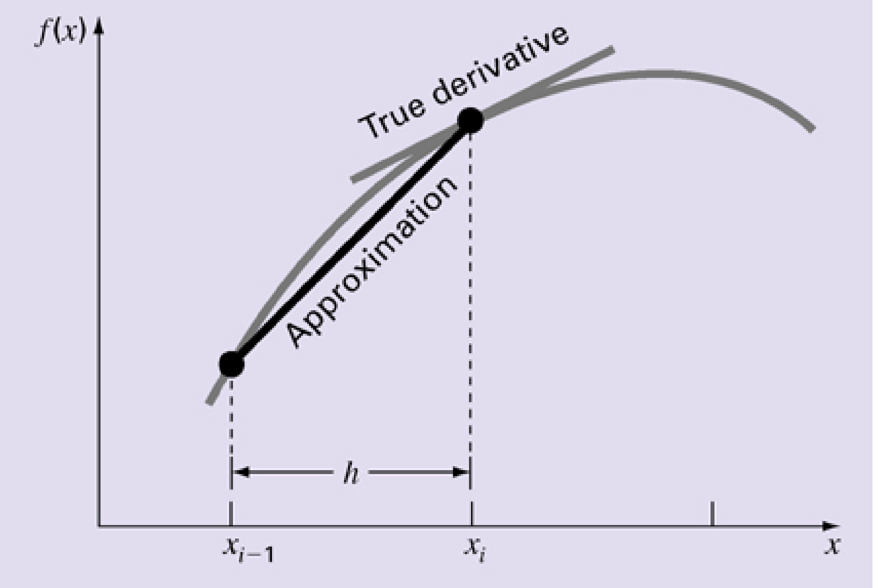
4.3 절단오차 (8/11)

▪ 수치미분

- 1차 도함수의 *후향차분* 근사
  - 후향 전개하면

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \cdots$$

또는 $$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$



(b)

4.3 절단오차 (9/11)

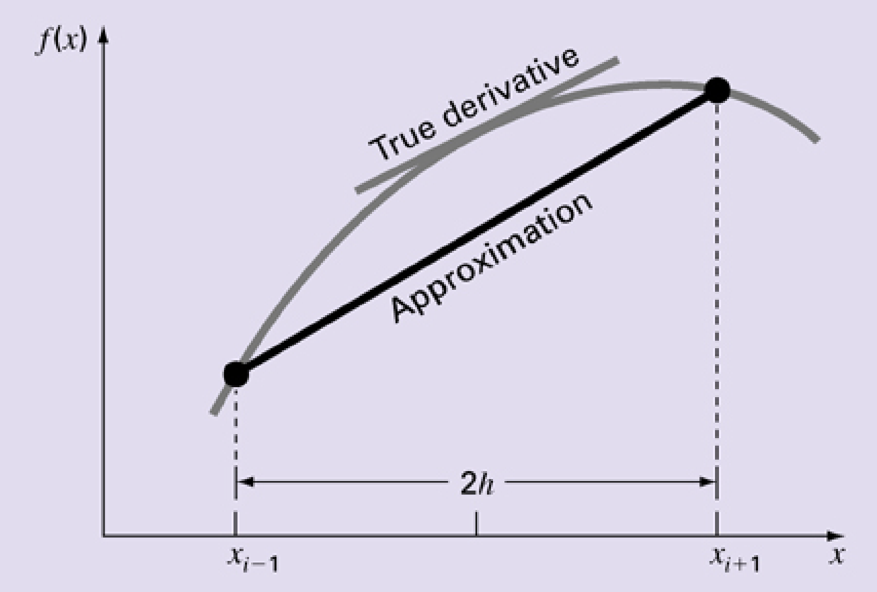
■ 수치미분

- 1차 도함수의 *중심차분* 근사
  - (전향–후향) Taylor 전개

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{2f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

또는 $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^2 + \cdots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$$



(c)

예제 4.4 (1/4)

Q. O(h)의 전향 및 후향 차분 근사와 O(h²)의 중심 차분 근사를 사용하여 함수 f(x)에 대해 x=0.5에서의 1차 도함수 값을 계산하라.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \qquad \text{at } x = 0.5$$

우선 h = 0.5로 놓고 푼 후에 h = 0.25로 놓고 다시 푼다.
직접 미분하면 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

따라서 참값은 $f'(0.5) = -0.9125$.

예제 4.4 (2/4)

풀이) h = 0.5인 경우

$x_{i-1} = 0 \qquad x_i = 0.5 \qquad x_{i+1} = 1.0$

$f(x_{i-1}) = 1.2 \qquad f(x_i) = 0.925 \qquad f(x_{i+1}) = 0.2$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45 \qquad |\varepsilon_t| = 58.9\%$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{h} = \frac{0.925 - 0.2}{0.5} = -0.55 \qquad |\varepsilon_t| = 39.7\%$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0 \qquad |\varepsilon_t| = 9.6\%$$

예제 4.4 (3/4)

풀이) h = 0.25인 경우

$x_{i-1} = 0.25$ $\quad$ $x_i = 0.5$ $\quad$ $x_{i+1} = 0.75$

$f(x_{i-1}) = 1.10351563$ $\quad$ $f(x_i) = 0.925$ $\quad$ $f(x_{i+1}) = 0.63632813$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{0.63632813 - 0.925}{0.25} = -1.155 \qquad |\varepsilon_t| = 26.5\%$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{h} = \frac{0.925 - 1.10351563}{0.25} = -0.714 \qquad |\varepsilon_t| = 21.7\%$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{0.63632813 - 1.10351563}{0.5} = -0.934$$

$$|\varepsilon_t| = 2.4\%$$

예제 4.4 (4/4)

- 중심 차분 근사가 가장 정확하다.
- 전향과 후향 차분의 경우에 간격 크기를 반으로 줄이면 오차도 반으로 준다.
- 중심 차분의 경우에는 간격 크기를 반으로 줄이면 오차는 1/4로 준다.

4.3 절단오차 (10/11)

■ 고차 도함수의 유한차분 근사

$f(x_{i+2})$에 대해 $f(x_i)$의 항으로 Taylor 급수를 전개하면

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots$$

$f(x_{i+1})$에 대해 $f(x_i)$의 항으로 Taylor 급수를 전개한 식에 2를 곱한 것을 위 식에서 빼면

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

따라서 다음의 결과를 얻는다.

- 2차 *전향* 유한차분

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

4.3 절단오차 (11/11)

마찬가지 방법으로

- 2차 *후향* 유한차분

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

- 2차 *중심* 유한차분

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

또는

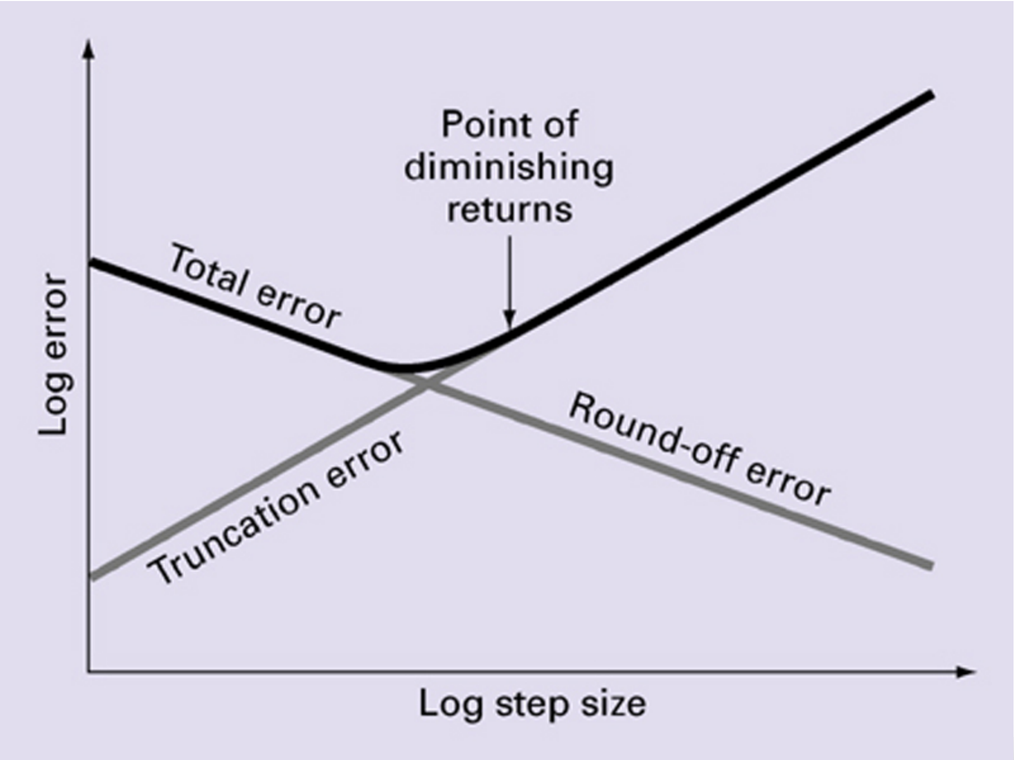
$$f''(x_i) \cong \frac{\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}}{h}$$

4.4 전체 수치오차

- **전체 수치오차=절단오차+반올림오차**

  간격 크기를 줄이면 → 절단오차↓

  ⇔ 계산 횟수가 증가 → 반올림오차↑



〈그림 4.10 수치해법의 과정에서 나타나는 반올림오차와 절단오차의 거동에 대한 도시적 설명〉

4.5 실책, 모델오차, 그리고 자료의 불확실성

- 실책

- 모델오차

- 자료의 불확실성