파트 1 모델링, 컴퓨터와 오차분석

1.1 개요

1.2 파트의 구성

1.1 동기

- 수치해법 : 수학적 문제를 대수적, 논리적 연산으로 풀 수 있도록 수식화 하는 기법
- 동기 : 공학과 과학 문제의 해결에서 수치해법의 역할이 폭발적으로 증대함에 따라 수치해법에 대한 이해가 필수적임

  - 광범위하고 다양한 문제 해결 능력의 향상
    - 대규모 방정식, 비선형 문제, 복잡한 형상
  - 수치해법에 대한 이해를 통한 상용코드의 올바른 활용
  - 상용코드로 해결할 수 없는 문제 해결을 위한 자신의 코드 개발 능력의 함양
  - 컴퓨터를 배우는 효율적인 수단
  - 수학에 대한 이해를 강화하는 수단

1.2 파트의 구성

- 1장 : 수학적 모델링, 수치해법과 문제풀이
- 2장 : MATLAB 기초
- 3장 : MATLAB 프로그래밍
- 4장 : 반올림오차와 절단오차

1장 수학적 모델링, 수치해법과 문제풀이

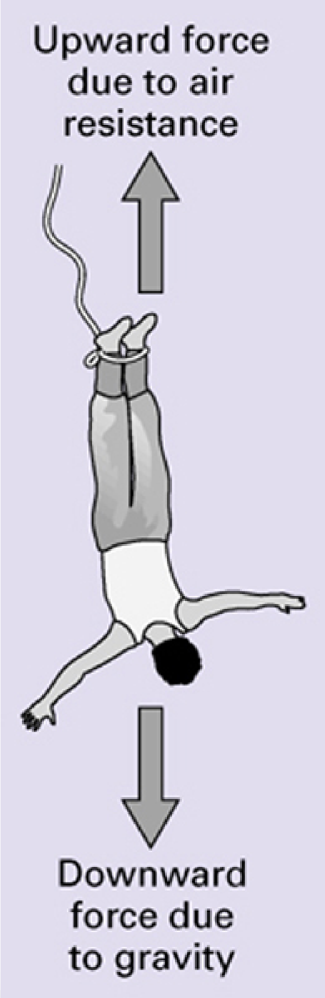
1.1 단순한 수학적 모델
1.2 공학과 과학에서의 보존법칙
1.3 본 강의에서 다루는 수치해법

1장 수학적 모델링, 수치해법과 문제풀이

- **번지점프하는 사람에 대한 운동방정식 (Newton의 제2법칙)**

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

여기서 v = 속도 (m/s)
t = 시간 (s)
g = 중력 가속도 (≅ 9.81m/s^2)
c_d = 항력계수 (kg/m)
m = 사람의 질량 (kg)



1.1 단순한 수학적 모델(1/6)

▪ 수학적 모델

- 물리 시스템의 중요 특성을 수학적 형태로 표시한 공식

종속변수 = *f* (독립변수, 매개변수, 강제함수)

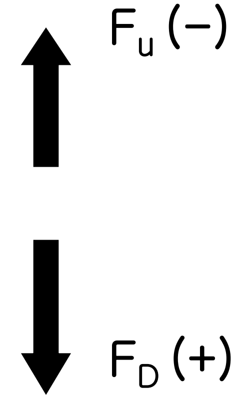
- 종속변수 = 시스템의 거동이나 상태
- 독립변수 = 시스템의 거동을 결정짓는 차원 (예를 들면 공간, 시간 등)
- 매개변수 = 시스템의 성질이나 구성
- 강제함수 = 시스템에 작용하는 외부의 영향

1.1 단순한 수학적 모델(2/6)

- Newton의 제2법칙

$$\text{종속변수} \rightarrow a = \frac{F \leftarrow \text{강제함수}}{m \leftarrow \text{매개변수}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{F_D + F_U}{m} = \frac{mg - c_d v^2}{m}$$



  - **여기서 F_D = 하향 중력**
    F_U = 상향 공기 저항력

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

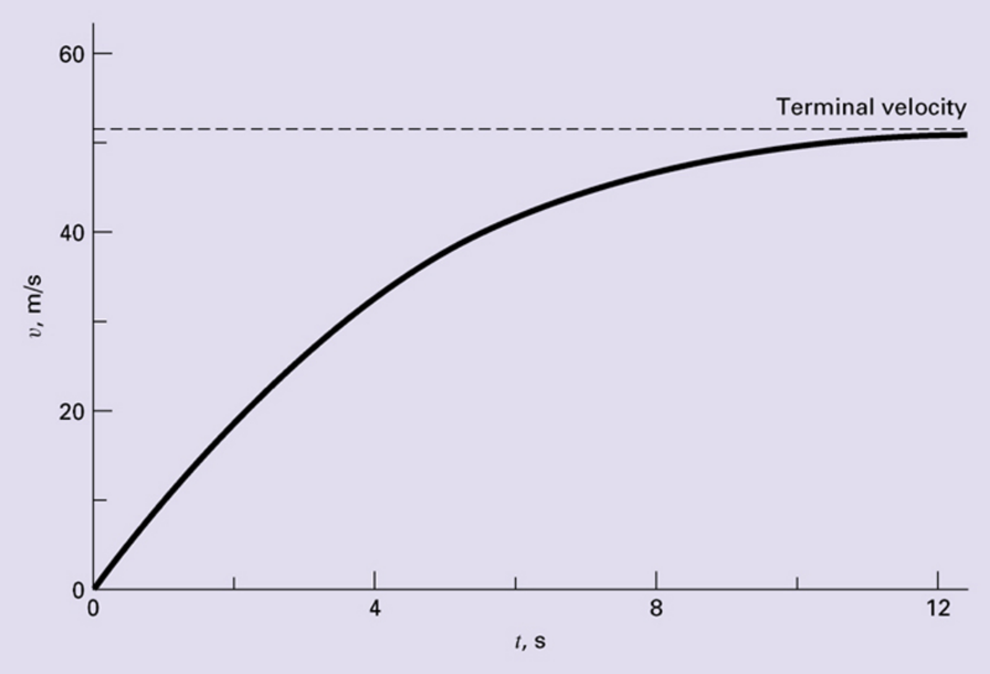
1.1 단순한 수학적 모델(3/6)

- 만약 $t = 0$ 에서 $v = 0$이면, 해석해는 다음과 같다.

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

해를 구하는 과정은 부록 참조!

  - **독립변수** ← t
  - **종속변수** ← $v(t)$
  - **매개변수** ← cd, m
  - **강제함수** ← g



☹ *수학적 모델의 해를 해석적으로 구하지 못하는 경우가 너무도 많다!*

- 따라서 정확한 해석해 대신에 근사적으로 **수치해를 구하는 것이** 필요하다.

1.1 단순한 수학적 모델(4/6)

- **수치해법**

  산술연산을 통해 해를 구할 수 있도록 수학문제를 재구성한다.

  – 미분을 극한으로 표시하면

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

  – 도함수를 유한제차분으로 근사하면,

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d}{m} v^2(t_i)$$

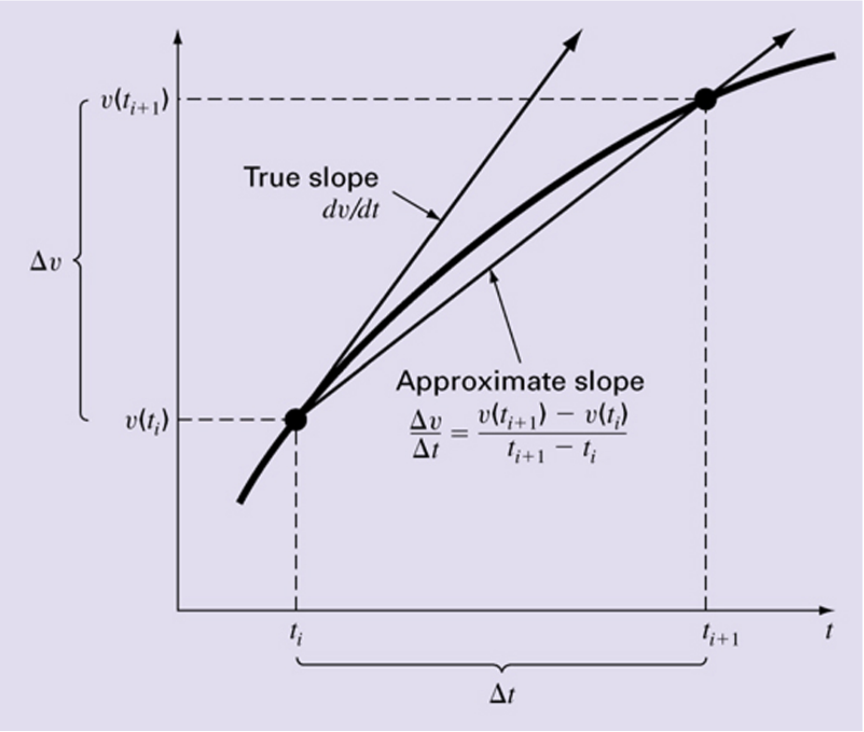
1.1 단순한 수학적 모델(5/6)

정리하면,

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \underbrace{\left[g - \frac{c_d}{m} v^2(t_i) \right]}_{\Rightarrow \frac{dv_i}{dt}} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\Delta t}$$

또는

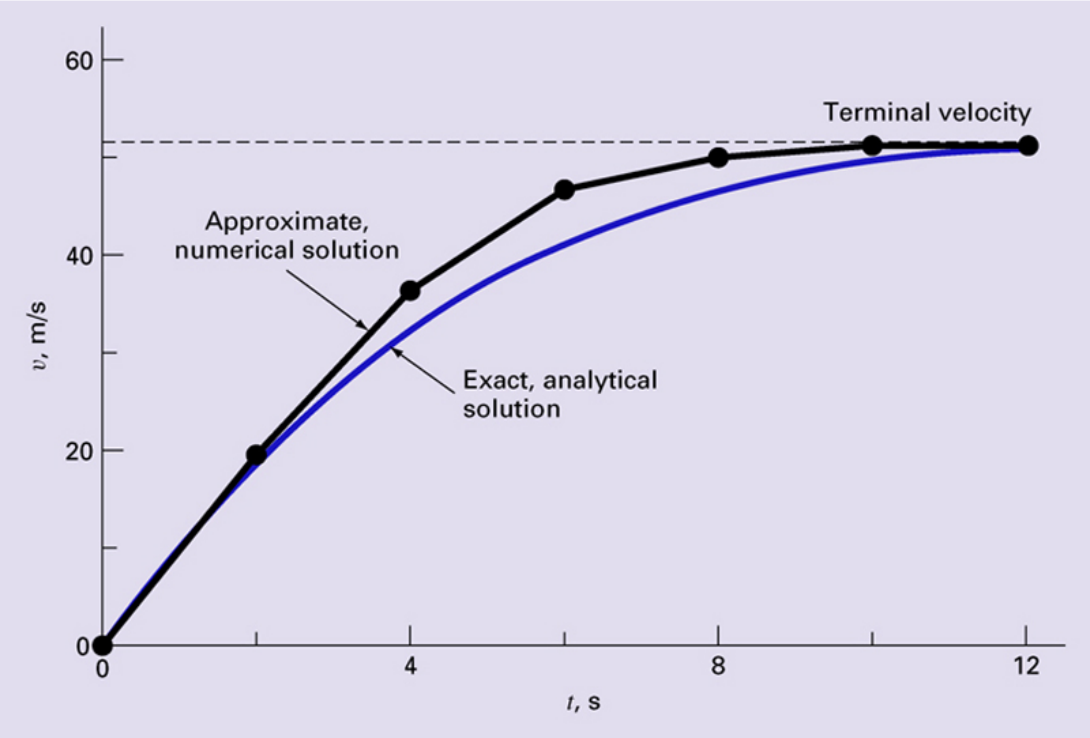
$$v_{i+1} = v_i + \frac{dv_i}{dt} \Delta t$$



새로운 값 = 이전 값 + 기울기 × 간격크기

→ Euler 방법

1.1 단순한 수학적 모델(6/6)



※ 어떻게 하면 정해와 수치해 사이의 차이를 최소화할 수 있을까?

간격크기를 줄임 ➜ 계산시간의 증가함 ➜ 비현실적!➜ 컴퓨터의 도움이 필요함

1.2 공학과 과학에서의 보존법칙(1/3)

- **과도(또는 시변, transient) 해석**
  - 시간에 따른 변화를 추정함
  - 변화량 = 증가량 – 감소량

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2(t) \Longrightarrow v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

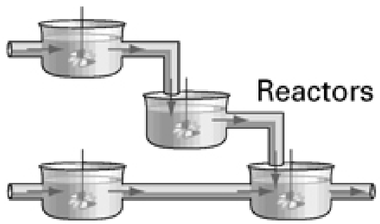
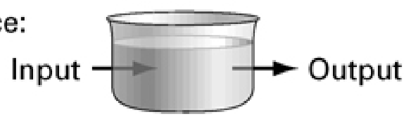
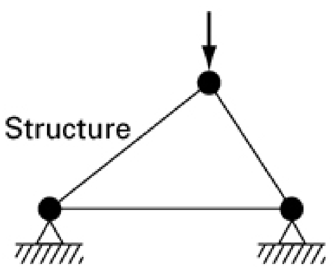
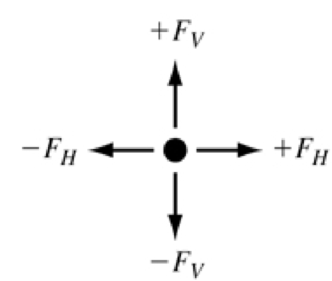
- **정상상태 해석**
  - 변화량 = 0 = 증가량 – 감소량

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0 = g - \frac{c_d}{m}v^2(t) \Longrightarrow mg = c_d v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}$$

Terminal velocity

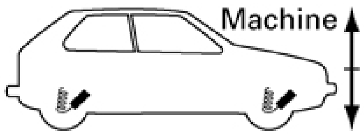
1.2 공학과 과학에서의 보존법칙(2/3)

- 공학 분야에서 자주 사용되는 장치와 평형(보존)

Field	Device	Organizing Principle	Mathematical Expression
Chemical engineering		Conservation of mass	Mass balance:  Over a unit of time period Δmass = inputs − outputs
Civil engineering		Conservation of momentum	Force balance:  At each node Σ horizontal forces (F_H) = 0 Σ vertical forces (F_V) = 0

1.2 공학과 과학에서의 보존법칙(3/3)

Mechanical engineering



Conservation of momentum

Force balance:

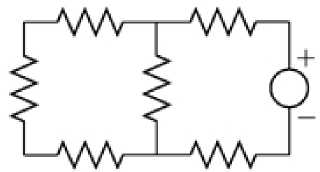
Upward force

$x = 0$

Downward force

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{downward force} - \text{upward force}$$

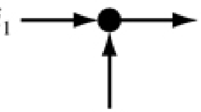
Electrical engineering



Circuit

Conservation of charge

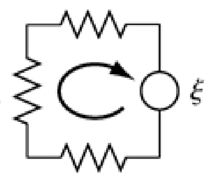
Current balance:



For each node
Σ current $(i) = 0$

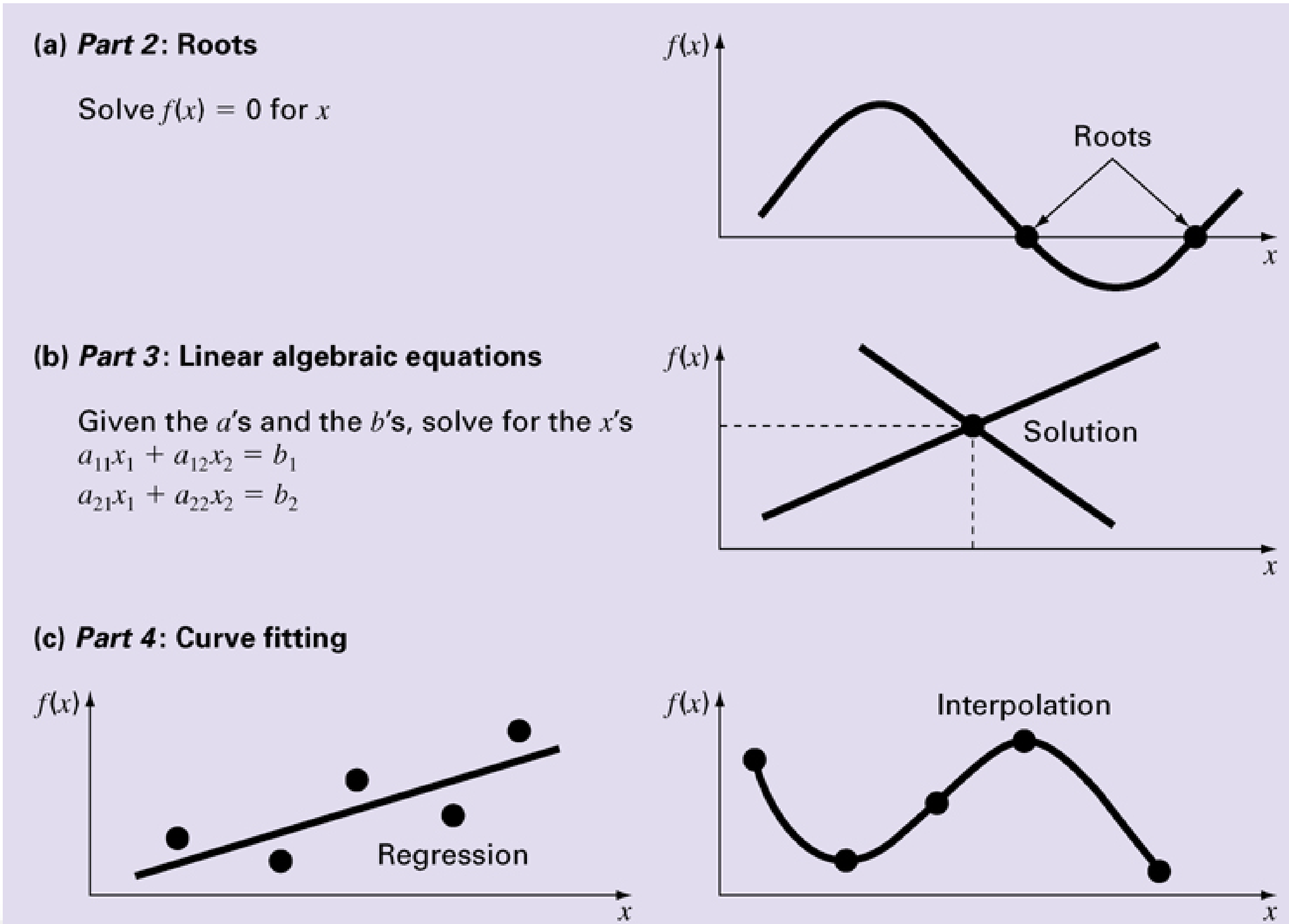
Conservation of energy

Voltage balance:



Around each loop
Σ emf's $- \Sigma$ voltage drops for resistors
$= 0$
$\Sigma \xi - \Sigma iR = 0$

1.3 본 강의에서 다루는 수치해법(1/2)

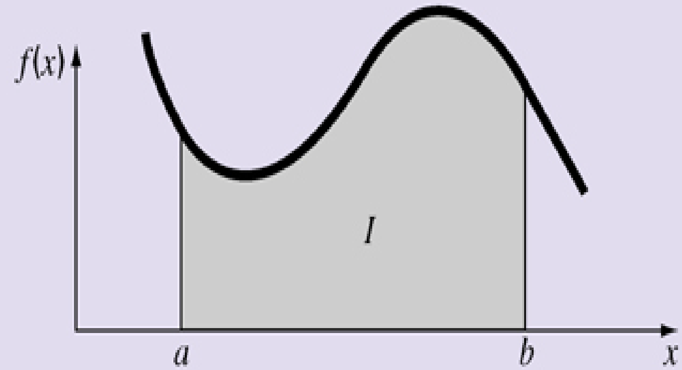


1.3 본 강의에서 다루는 수치해법(2/2)

(d) *Part 5*: Integration

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Find the area under the curve.



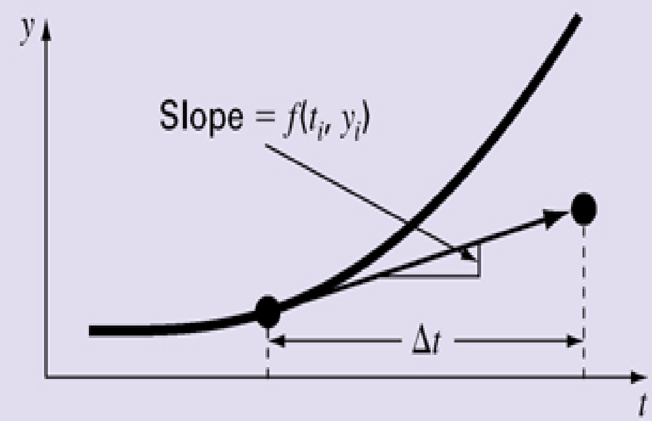
(e) *Part 6*: Differential equations

Given

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t, y)$$

solve for y as a function of t

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\Delta t$$



부록 (1/3)

- 다음의 미분방정식의 해를 구하라.

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2(t)$$

해법)주어진 방정식을 다음과 같이 정리한다.

$$\frac{dv(t)}{-\frac{c_d}{m}\left[v^2(t) - \frac{gm}{c_d}\right]} = dt$$

좌변의 분모를 부분분수로 나누면,

$$\frac{1}{v^2(t) - \frac{m}{c_d}} = \frac{k_1}{v + \sqrt{gm/c_d}} + \frac{k_2}{v - \sqrt{gm/c_d}}$$

여기서,

$$k_1 = -\frac{1}{2\sqrt{gm/c_d}} \qquad k_2 = \frac{1}{2\sqrt{gm/c_d}}$$

또는

$$\frac{1}{-\frac{c_d}{m}\left[v^2(t) - \frac{gm}{c_d}\right]} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{gc_d/m}}}{v + \sqrt{gm/c_d}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{gc_d/m}}}{v - \sqrt{gm/c_d}}$$

부록 (2/3)

각항에 해당되는 미분방정식의 해를 구해서 더하면,

$$\frac{1}{2\sqrt{gc_d/m}}\ln\left|\frac{v+\sqrt{gm/c_d}}{v-\sqrt{gm/c_d}}\right| = t + C_1$$ 또는 $$\ln\left|\frac{v+\sqrt{gm/c_d}}{v-\sqrt{gm/c_d}}\right| = 2\sqrt{gc_d/m}t + C_2$$

또는 $$\frac{v+\sqrt{gm/c_d}}{v-\sqrt{gm/c_d}} = C_3 e^{2\sqrt{gc_d/m}t}$$

초기조건 $v(0) = 0$에 의해 상수를 구하면, $C_3 = -1$

최종적으로 다음과 같은 정해를 얻을 수 있다.

$$v(t) = \sqrt{gm/c_d}\,\frac{-1+e^{2\sqrt{gc_d/m}t}}{1+e^{2\sqrt{gc_d/m}t}} = \sqrt{gm/c_d}\,\frac{e^{\sqrt{gc_d/m}t}-e^{-\sqrt{gc_d/m}t}}{e^{\sqrt{gc_d/m}t}+e^{-\sqrt{gc_d/m}t}} = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

부록 (3/3)

보다 일반적인 경우인 1차 항력을 받는 물체의 자유낙하 운동을 생각해 보자.

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v(t)$$; 1차 *선형* 미분방정식

전형적으로 1차 *선형* 미분방정식은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$y' + p(x)y = r(x)$$

이 방정식의 해는 다음과 같다 (적분인자 이용).

$$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right]$$ 여기서 $h = \int p(x)dx$

그러므로 자유낙하 속도는 다음과 같은 형태로 얻어진다.

$$v(t) = \frac{gm}{c_d}\left[1 - e^{(c_d/m)t}\right]$$