

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΑΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**



**ΕΡΓΑΣΙΑ: ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ**

**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ**

**ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ , ΑΜ :15390 /1335**

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Το πρόβλημα του χρωματισμού γραφήματος είναι ένα **NP-hard** πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Αφορά την ανάθεση ενός χρώματος σε κάθε κορυφή ενός γραφήματος έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα (όπως στο ακόλουθο σχήμα), ενώ παράλληλα χρησιμοποιείται ο ελάχιστος αριθμός διαφορετικών χρωμάτων. Στην εργασία ζητείται η υλοποίηση τεσσάρων αλγορίθμων χρωματισμού γραφημάτων και η εφαρμογή τους σε γνωστά προβλήματα από τη βιβλιογραφία . Η αποδοτική δημιουργία προγραμμάτων εξετάσεων είναι ένα σημαντικό και επαναλαμβανόμενο πρόβλημα το οποίο καλούνται να αντιμετωπίσουν τα εκπαιδευτικά ιδρύματα σε όλο τον κόσμο .

## ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Το πρόβλημα χρωματισμού γραφήματος τυπικά ορίζεται ως εξής. Δεδομένου ενός μη κατευθυνόμενου απλού γραφήματος  $G = (V, E)$  με ένα σύνολο κορυφών  $V$  και ένα σύνολο ακμών  $E$ , ζητείται η ανάθεση σε κάθε κορυφή  $v \in V$  ενός ακεραίου  $c(v) \in \{1, 2, \dots, k\}$  έτσι ώστε το  $k$  να ελαχιστοποιείται και να ισχύει ότι  $c(v) \neq c(u) \ \forall \{v, u\} \in E$ . Το πρόβλημα συναντάται σε μεγάλο αριθμό πρακτικών εφαρμογών όπως ο χρονοπρογραμματισμός εκπαιδευτικών ιδρυμάτων (educational timetabling), ο χρονοπρογραμματισμός αθλητικών γεγονότων (sports scheduling), η ανάθεση συχνοτήτων (frequency assignment), η ανάθεση καταχωρητών στους μεταγλωττιστές (compiler register allocation) και άλλα. Πολλοί αλγόριθμοι χρωματισμού γραφημάτων έχουν προταθεί τα τελευταία 50 έτη. Στην παρούσα εργασία θα εξεταστούν τέσσερις αλγόριθμοι που ανήκουν στις λεγόμενες κατασκευαστικές τεχνικές (constructive techniques). Οι κατασκευαστικές τεχνικές δημιουργούν λύσεις βήμα προς βήμα, αναθέτοντας στη σειρά, σε κάθε κορυφή, ένα χρώμα, πιθανά εφαρμόζοντας οπισθοχώρηση κατά τη διαδικασία. Οι αλγόριθμοι που θα εξεταστούν είναι ο αλγόριθμος first fit, ο αλγόριθμος DSATUR, ο αλγόριθμος Recursive Largest First και ο αλγόριθμος backtracking DSATUR.

### ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (Toronto datasets)

Το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού εξετάσεων αφορά φοιτητές που έχουν πραγματοποιήσει εγγραφές σε εξετάσεις μαθημάτων. Για κάθε εξέταση διατίθεται μια λίστα από φοιτητές και κάθε φοιτητής μπορεί να είναι εγγεγραμμένος σε μια ή περισσότερες εξετάσεις. Κάθε εξέταση θα πρέπει να τοποθετηθεί σε μια περίοδο εξέτασης και η λύση του προβλήματος συνίσταται στην ανάθεση όλων των εξετάσεων στο μικρότερο δυνατό αριθμό περιόδων έτσι ώστε να μην υπάρχουν συγκρούσεις, δηλαδή να μην υπάρχουν φοιτητές που θα έπρεπε να συμμετάσχουν σε εξετάσεις σε περισσότερα του ενός μαθήματα στην ίδια περίοδο. Ως δεδομένα του προβλήματος θα χρησιμοποιηθούν τα δεδομένα του προβλήματος χρονοπρογραμματισμού εξετάσεων Toronto τα οποία είναι διαθέσιμα προς μεταφόρτωση στη διεύθυνση <https://github.com/chgogos/datasets/blob/main/UETT/toronto.zip>.

Τα δεδομένα Toronto αποτελούνται από 13 προβλήματα και πληροφορίες για κάθε πρόβλημα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Τα αρχεία δεδομένων (κατάληξη .stu) διαθέτουν για κάθε σπουδαστή μια γραμμή που περιέχει τους αριθμούς των μαθημάτων στα οποία είναι εγγεγραμμένος χωρισμένους μεταξύ τους με κενά. Η πρώτη γραμμή του αρχείου αντιστοιχεί στον πρώτο σπουδαστή, η δεύτερη γραμμή στο δεύτερο σπουδαστή κ.ο.κ. Για παράδειγμα το αρχείο car-f-92.stu περιέχει 18419 σειρές δεδομένων και ξεκινά με τις ακόλουθες σειρές: 01700156028100060154 015603830534 0535 053602750091 0160 0164 που σημαίνει ότι ο φοιτητής 1 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0170, ο φοιτητής 2 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0156, ο φοιτητής 3 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0281, ο φοιτητής 4 έχει εγγραφεί στο μάθημα 0006, ο φοιτητής 5 στα μαθήματα 0154 0156 κ.ο.κ

### ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ	ΑΡΧΕΙΟ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ	ΦΟΙΤΗΤΕΣ	ΕΓΓΡΑΦΕΣ
car-f-92	car-f-92.stu	543	18419	55522
car-s-91	car-s-91.stu	682	16925	56877
ear-f-83	ear-f-83.stu	190	1125	8109
hec-s-92	hec-s-92.stu	81	2823	10632
kfu-s-93	kfu-s-93.stu	461	5349	25113
lse-f-91	lse-f-91.stu	381	2726	10918
pur-s-93	pur-s-93.stu	2419	30029	120681
rye-s-93	rye-s-93.stu	486	11483	45051
sta-f-83	sta-f-83.stu	139	611	5751
tre-s-92	tre-s-92.stu	261	4360	14901
uta-s-92	uta-s-92.stu	622	21266	58979
ute-s-92	ute-s-92.stu	184	2749	11793
yor-f-83	yor-f-83.stu	181	941	6034

Θεωρώντας κάθε εξέταση ως κόμβο ενός γραφήματος και κάθε ακμή ανάμεσα σε δύο κόμβους να υποδηλώνει την ύπαρξη κοινών φοιτητών ανάμεσα στις δύο εξετάσεις που βρίσκονται στα άκρα της ακμής, το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλημα χρωματισμού γραφήματος όπου κάθε χρώμα είναι και μια περίοδος εξέτασης.

### Πίνακας Στατιστικών Στοιχείων Προβλήματος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ	ΚΟΡΥΦΕΣ	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ	MIN	MEDIAN	MAX	MEAN	CV
car-f-92	543	0.138	0	64	381	74.8	75.3%
car-s-91	682	0.128	0	77	472	87.4	70.9%
ear-f-83	1900	0.266	4	45	134	50.5	56.1%
hec-s-92	81	0.415	9	33	62	33.7	36.3%
kfu-s-93	461	0.055	0	18	247	25.6	120.0%
lse-f-91	381	0.062	0	16	134	23.8	93.2%
pur-s-93	2419	0.029	0	47	857	71.3	129.5%
rye-s-93	486	0.075	0	24	274	36.5	111.8%
sta-f-83	139	0.143	7	16	61	19.9	67.4%
tre-s-92	261	0.180	0	45	145	47	59.6%
uta-s-92	622	0.125	1	65	303	78	73.7%
ute-s-92	184	0.084	2	13	58	15.5	69.1%
yor-f-83	181	0.287	7	51	117	52	35.2%

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. [https://en.wikipedia.org/wiki/Graph\\_coloring](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring)
2. <https://github.com/Gooddboy/Algorithmoi>
3. <https://github.com/chgogos/alco>