
Estudio de la fase cuántica en el formalismo de la Transformación De Fourier Fraccionaria

Miguel Jafert Serrano Mantilla

*Trabajo de grado para optar por el título de: Magister en matemática
aplicada*

Director:

PhD. Rafael Ángel Torres Amaris

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2026

Dedicatoria

Aquí va tu dedicatoria. Puedes escribir lo que desees aquí es decir podés introducir la dedicatoria.

Agradecimientos

Aquí van tus agradecimientos. Puedes escribir lo que desees aquí.

Tabla de contenido

1	Introducción	6
2	Fundamentos matemáticos de la Transformación de Fourier Fraccionaria	9
2.1	Nociones básicas	9
3	Metodología	13
4	Resultados	14
4.1	xd	14
4.1.1	probando	14
5	Conclusiones	16
	Referencias	16

Lista de figuras

Resumen

En este trabajo hemos desarrollado una formulación teórica en espacios \mathcal{L}^p del operador que representa a la transformación de Fourier Fraccionaria en su formulación exponencial e integral, a su vez, hemos definido dos espacios nuevos, uno al que llamamos espacio de funciones de decrecimiento acelerado y el espacio de distribuciones atemperadas, esto con el fin de estudiar a la Transformación de Fourier Fraccionaria de orden complejo.

Capítulo 1

Introducción

Sobre la notación En el presente trabajo de investigación todo vector estará expresado en negrilla, y todo cuerpo en doble lineado, es decir, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$, a su vez, adoptamos el doble lineado para representar cualquier tipo de matriz, por ejemplo, $\mathbb{P}_{x,y,z} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ representa a las matrices de Pauli como elementos del espacio de matrices cuadradas 2×2 con cuerpo en los números complejos y a los operadores los representaremos mediante el símbolo que representa a la cantidad física con un acento circunflejo, es decir, el operador de posición en x será \hat{x} . A su vez, toda proposición, definición, lema, teorema o colorario propuesto y demostrado por algún autor externo tendrá un asterisco *, es decir, *Definición** se refiere a una definición propuesta por algún autor externo, y si no tiene asterisco alguno hará referencia al trabajo propio.

La fase cuántica es un recurso fundamental en óptica cuántica, interferometría y teoría de la coherencia, pues gobierna fenómenos de interferencia, metrología de alta precisión y control de estados de la luz. Sin embargo, la definición rigurosa de un operador de fase para el oscilador armónico cuántico (o un modo de campo) ha sido notoriamente problemática desde los trabajos pioneros de Dirac y los desarrollos posteriores, que exhiben problemas entre hermiticidad, unitariedad e interpretación física. Hoy, el consenso académico reconoce que el “problema de la fase” sigue siendo sutil y con variantes activas (operadores, POVMs, fase relativa, etc.). Revisiones recientes, tanto matemáticas como físicas, documentan la persistencia y evolución del problema en las últimas décadas.[Barnett and Vaccaro, 2007, van Neerven, 2020]

Clásicamente, Dirac intentó una descomposición polar del operador de aniquilación, lo que conduciría a un operador de fase hermítico canónicamente conjugado al operador número [Dirac, 1927]; pero el exponencial de fase resultante no es unitario, dando lugar a inconsistencias formales. Susskind y Glogower propusieron entonces operadores seno y coseno de fase (o un exponencial semi-unitario), que evitan parte de los problemas pero introducen una dependencia crítica del vacío y rompen la identidad pitagórica en la base de Fock[Susskind and Glogower, 1964]. Más tarde, Pegg y Barnett ofrecieron una solución en

dimensión finita, truncando el espacio de Hilbert para luego tomar el límite, con un operador de fase unitario bien definido; no obstante, su extensión al espacio infinito reabre debates físicos y matemáticos. Este arco histórico permanece vigente en obras de referencia, con análisis técnicos finos sobre dominios, relaciones de conmutación y la estructura matemática de estos operadores.

Aunque el formalismo de Pegg–Barnett se ha tomado en cuenta, desarrollos contemporáneos buscan conectarlo con otros enfoques y clarificar su posición conceptual. Por ejemplo, se ha establecido recientemente una relación formal entre el marco de Pegg–Barnett y el formalismo de Paul [Linowski et al., 2023] lo que sugiere que el segundo puede verse como límite semiclásico del primero reforzando la unificación de distintas propuestas de fase. En paralelo, la teoría moderna de mediciones generalizadas (POVMs) y observables covariantes ofrece marcos operacionales para la medición de fase que coexisten [Haapasalo and Pellonpää, 2021] (y a veces sustituyen) a operadores auto-adjuntos exactos, con resultados recientes sobre optimalidad y realizaciones experimentales en plataformas fotónicas y de información cuántica.

Más allá de la fase “absoluta”, una línea de trabajo especialmente fértil considera que la magnitud físicamente accesible y relevante es la diferencia de fase entre dos modos. En esta dirección, Luis y Sánchez-Soto [Luis and Sánchez-Soto, 1993] introdujeron un operador unitario del exponencial de la diferencia de fase, íntimamente ligado a las simetrías $SU(2)$ y a los operadores de Stokes, lo que conecta directamente la fase con observables de polarización y proporciona un espectro discreto natural en subespacios de número total fijo. Esta perspectiva enlaza con marcos de fase-espín y herramientas $SU(2)$ que hoy se utilizan también en representaciones de Wigner [Sánchez-Soto et al., 2025] para qubits, metrología y caracterización de estados con número de excitaciones no fijado.

En paralelo al desarrollo conceptual, en las últimas tres décadas la Transformación de Fourier Fraccionaria (TFFr) ha emergido como una herramienta unitaria y continua que realiza rotaciones en el espacio de fase (posición–momento o tiempo–frecuencia) por un ángulo arbitrario. Sus funciones propias son las Hermite–Gauss, compartidas con el oscilador armónico, y su núcleo integral se relaciona estrechamente con la difracción de Fresnel [Mustard, 1996, Namias, 1980]; de hecho, la TFFr articula una familia uniparamétrica que interpela directamente la dinámica del oscilador, el formalismo de óptica de Fourier y las transformaciones lineales canónicas. En representaciones de Wigner, la TFFr induce una rotación de la distribución, lo que la convierte en un candidato natural para modelar evoluciones (o “rotaciones de fase”) a nivel cuántico.

Este nexo ha sido verificado y explotado experimentalmente con creciente sofisticación. Por ejemplo, en 2023 se demostró en óptica cuántica una implementación experimental de la TFFr en el dominio tiempo–frecuencia con memorias atómicas, validando la rotación cronocíclica de funciones de Wigner mediante homodinaje limitado por ruido de disparo [Niewelt et al., 2023]. Asimismo, a nivel fundamental, se ha mostrado que el propagador de fotones de Feynmann puede escribirse de forma equivalente a una TFFr/Fresnel, aportando una lectura unificadora entre propagación cuántica y óptica clásica [Santos

et al., 2018]. Estas evidencias refuerzan la idoneidad de la TFFr como operador unitario para describir transformaciones de fase físicas y controlables.

La transformación de Fourier tradicional ya se ha explorado matemáticamente de muchas maneras sobre espacios útiles y abstractos, como lo son los espacios de Schwarz, los espacios de Lebesgue o incluso sobre distribuciones [de Figueiredo, 2018, Lesfari, 2012]. Sin embargo, la teoría fraccional ha sido escasamente explorada en estos espacios útiles, en especial el espacio de Lebesgue, es, en este sentido que partimos de lo desarrollado por Fiona H. Kerr, quien toma lo desarrollado por Namias y le da soporte teórico junto con algunas correcciones [Kerr, 1988, McBride and Kerr, 1987] y desarrollamos un formalismo teórico para la transformación de Fourier Fraccionaria en su forma diferencial e integral para órdenes reales y complejos.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos de la Transformación de Fourier Fraccionaria

En 1980 Victor Namias [Namias, 1980] presentó una teoría fraccionaria para la transformación de Fourier y derivó una cantidad de fórmulas operacionales que utilizó para resolver varios tipos de ecuaciones de Schrödinger. Namias admitió que su derivación de la transformación de Fourier Fraccionaria (TFFr de ahora en adelante) fue, básicamente, heurística y que reconocía que aún había una cantidad grande de trabajo para darle un soporte matemático riguroso a su teoría.

Es en este orden de ideas que en [Kerr, 1988, McBride and Kerr, 1987] se dio un soporte a la TFFr en su formulación integral para órdenes reales sobre el espacio de funciones de decrecimiento rápido o espacio de Schwartz \mathcal{S} sobre el cuerpo de los reales \mathbb{R} . Vamos a repasar brevemente el desarrollo de Namias y el desarrollo de McBride y Fiona H. Kerr.

2.1. Nociones básicas

Vamos a empezar a definir un conjunto de espacios de bastante de utilidad e interés.

Definición* 1. (*Espacio de Schwartz*): El espacio de funciones de decrecimiento rápido $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de funciones

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty : \forall \alpha, \beta : \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty\}, \quad (2.1.0.1)$$

donde α, β son multi-índices, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^n$ es el conjunto de funciones suaves sobre \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$ es una

seminorma¹ definida como

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_m}^{\alpha_m} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \partial x_{j_2}^{\beta_2} \dots \partial x_{j_k}^{\beta_k}} \right|, \quad (2.1.0.2)$$

donde α_i, β_j corresponde a números enteros positivos y $|\alpha|, |\beta|$ están definidos como

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad |\beta| = \sum_{j=1}^k \beta_j.$$

De forma un poco más cualitativa, este espacio consiste en todas las funciones que por si solas y todas sus posibles derivadas decrecen más rápido que cualquier polinomio.

Definición* 2. (*Distribuciones*): Dado el espacio de funciones suaves de soporte compacto \mathcal{C}_c^∞ se define al espacio de distribuciones o de funciones generalizadas al conjunto $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definido como el espacio dual topológico de las funciones \mathcal{C}_c^∞ , es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.1.0.3)$$

donde f es una distribución y $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ usualmente se le conoce como función de prueba.

El ejemplo más común en la física es el del delta de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x})$ y, de manera un poco más tácita pero aún así muy utilizado en muchos resultados físicos, es que toda función localmente integrable es una distribución.

Definición* 3. (*Distribuciones temperadas*): Dado el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define al espacio de distribuciones temperadas como al espacio dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ del espacio de Schwartz, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.1.0.4)$$

donde f es una distribución temperada y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ también se le conoce como función de prueba, es por eso que a lo largo de este trabajo se especificará a qué espacio pertenece cada función de prueba sobre la cual se trabaje.

Ahora, vamos a dar las nociones básicas sobre los espacios de Lebesgue [Folland, 1999] o también conocidos como espacios L^p .

¹Recordemos que una seminorma es un funcional que no satisface la propiedad de que $\|f\| = 0 \iff f = 0$.

²Se dice que el espacio tiene soporte compacto cuando toda función perteneciente al espacio se hace cero fuera de un conjunto compacto.

Definición* 4. Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu)$ el espacio de medida de Lebesgue, donde \mathcal{L} es la σ -álgebra de conjuntos Lebesgue-medibles y μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Se define el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ de funciones como

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mu < \infty \quad 1 \leq p < \infty \right\}, \quad (2.1.0.5)$$

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \exists C \geq 0 : |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ en c.t.p.} \}. \quad (2.1.0.6)$$

También se define la siguiente seminorma [Stein and Shakarchi, 2005] $\| \cdot \|_p$ como

Definición* 5. (Seminorma \mathcal{L}^p) Se define a la seminorma $\| \cdot \|_p : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p.} \}.$$

Vale la pena recalcar que $\| \cdot \|_p$ es una seminorma en \mathcal{L}^p ya que $\|f_p\| = 0$ implica que $f = 0$ solamente en casi todo punto.

Para poder construir un espacio normado útil, el conocido espacio de Lebesgue o espacio L^p debemos definir la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ en c.t.p respecto a la medida de Lebesgue } \mu.$$

Definición* 6. (Espacio normado de Lebesgue) El espacio normado de Lebesgue $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_p)$ es el espacio cociente

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \sim,$$

tal que un elemento de $L^p(\mathbb{R}^n)$ es una clase de equivalencia de funciones

$$[f] = \{ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) : f \sim g \},$$

donde seminorma $\| \cdot \|_p$ ahora desciende al espacio cociente definiendo

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p,$$

Esta definición es independiente del representante elegido.

Con esto en mente, enunciaremos uno de los teoremas [Brezis and Brézis, 2011] más importantes en el análisis funcional.

Teorema* 1. (Teorema de completitud de Reisz-Fischer) El espacio normado de Lebesgue $(L^p(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_p)$

es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Con estos espacios en mente, vamos a recorrer la teoría de la transformación de Fourier Fraccionaria. Namias parte de que los valores propios del operador Transformación de Fourier³

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \\ f(x) &\longmapsto \mathcal{F}[f(x')](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x') e^{ixx'} dx', \end{aligned} \quad (2.1.0.7)$$

son $\{\exp(\frac{i}{2}n\pi)\}$ con n entero y sus funciones propias son las funciones de Hermite-Gauss [Namias, 1980], las cuales corresponden al producto de los polinomios de Hermite por una gaussiana, es decir

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{1}{2}x'} H_n(x')\right](x) = e^{\frac{i}{2}n\pi} e^{-\frac{1}{2}x} H_n(x),$$

donde $H_n(x)$ obedece a la fórmula de Rodrigues [?]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Ahora, Namias define al operador *Transformación de Fourier Fraccionaria* \mathcal{F}_α como el operador que satisface la siguiente ecuación de valores y funciones propias

$$\mathcal{F}_\alpha\left[e^{-\frac{1}{2}x'} H_n(x')\right](x) = e^{in\alpha} e^{-\frac{1}{2}x} H_n(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (2.1.0.8)$$

y prueba

³Victor Namias en ningún momento utilizó una formulación formal en teoría de operadores en su artículo, por ende, cuando sea estrictamente necesario hacemos uso de dicha notación y cuando no se aclarará el porqué no se hace uso de esta.

Capítulo 3

Metodología

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Capítulo 4

Resultados

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

4.1. xd

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.0.1)$$

4.1.1. probando

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{A}. \quad (4.1.1.2)$$

Acá va una cita [?]

Capítulo 5

Conclusiones

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Referencias

- Barnett, S. M. and Vaccaro, J. A. (2007). The quantum phase operator: a review. *Physical Review A*.
- Brezis, H. and Brézis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer.
- de Figueiredo, D. G. (2018). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. IMPA.
- Dirac, P. A. M. (1927). The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 114(767):243–265.
- Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition.
- Haapasalo, E. and Pellonpää, J.-P. (2021). Optimal covariant quantum measurements. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(15):155304.
- Kerr, F. H. (1988). A distributional approach to namias’ fractional fourier transforms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 108(1-2):133–143.
- Lesfari, A. (2012). Distributions, analyse de fourier et transformation de laplace: cours et exercices. (*No Title*).
- Linowski, T., Schlichtholz, K., and Rudnicki, L. (2023). Formal relation between pegg-barnett and paul quantum phase frameworks. *Physical Review A*, 107(3):033707.
- Luis, A. and Sánchez-Soto, L. (1993). Phase-difference operator. *Physical Review A*, 48(6):4702.
- McBride, A. and Kerr, F. (1987). On namias’s fractional fourier transforms. *IMA Journal of applied mathematics*, 39(2):159–175.
- Mustard, D. (1996). The fractional fourier transform and the wigner distribution. *The ANZIAM Journal*, 38(2):209–219.

- Namias, V. (1980). The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3):241–265.
- Niewelt, B., Jastrzebski, M., Kurzyna, S., Nowosielski, J., Wasilewski, W., Mazelanik, M., and Parniak, M. (2023). Experimental implementation of the optical fractional fourier transform in the time-frequency domain. *Physical Review Letters*, 130(24):240801.
- Sánchez-Soto, L. L., Muñoz, A., de la Hoz, P., Klimov, A. B., and Leuchs, G. (2025). Phase space insights: Wigner functions for qubits and beyond. *Applied Sciences*, 15(9):5155.
- Santos, E. A., Castro, F., and Torres, R. (2018). Huygens-fresnel principle: Analyzing consistency at the photon level. *Physical Review A*, 97(4):043853.
- Stein, E. M. and Shakarchi, R. (2005). *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, volume 3 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press.
- Susskind, L. and Glogower, J. (1964). Quantum mechanical phase and time operator. *Physics Physique Fizika*, 1(1):49.
- van Neerven, J. (2020). The garrison-wong quantum phase operator revisited. *arXiv preprint arXiv:2008.08935*.