

Лабораторная работа № 9

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Цель работы – изучение спектрального состава периодической последовательности импульсов прямоугольной формы при различных частотах следования и длительностях импульсов.

Содержание отчета о выполнении лабораторной работы

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- основы теории спектрального представления сигналов;
- текст программы;
- временные диаграммы и графики амплитудных спектров сигналов, построенные на основе расчета по методу Фурье;
- анализ результатов исследований.

Контрольные вопросы

- 1) Что понимается под спектром сигнала?
- 2) Что называется амплитудным спектром сигнала?
- 3) Что называется фазовым спектром сигнала?
- 4) Что называется шириной спектра?
- 5) Как ширина спектра периодической последовательности сигналов зависит от длительности импульсов?
- 6) Как изменяется амплитудный спектр периодической последовательности сигналов при изменении периода повторения импульсов?
- 7) Для решения каких практических задач используется спектральное представление сигналов?

1 Краткие теоретические сведения

Частотным спектром (или просто **спектром**) сигнала называется представление этого сигнала в частотной области. Спектр определяется через **преобразование Фурье** сигнала и подразделяется на амплитудный и фазовый спектры.

Амплитудным спектром (или спектром амплитуд) называется зависимость амплитуды спектральных составляющих сигнала от частоты. Аналогично, зависимость фазы спектральных составляющих сигнала от частоты называется **фазовым спектром** (или спектром фаз).

1.1 Спектры периодических сигналов

Периодический сигнал $s(t)$, удовлетворяющий условию абсолютной интегрируемости, можно разложить в **ряд Фурье**:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi f_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi f_n t, \quad (1)$$

где $\frac{a_0}{2}$ — постоянная составляющая сигнала $s(t)$, $f_n = n f_1$ — частоты гармонических составляющих (**гармоник**) сигнала, $f_1 = \frac{1}{T}$ — основная частота (частота первой гармоники), n — номер гармоники, T — период сигнала, a_n и b_n — коэффициенты разложения:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos 2\pi f_n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin 2\pi f_n t dt.$$

Выражение (1) можно переписать в другой форме:

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n), \quad (2)$$

где $A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$ — гармонические составляющие (**гармоники**) сигнала, A_n — амплитуды и φ_n — фазы гармоник сигнала:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n},$$

причём

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n.$$

Совокупность амплитуд A_n ряда Фурье образует **амплитудный** спектр сигнала $s(t)$, а совокупность фаз φ_n — его **фазовый** спектр.

Выражения (1) и (2) записаны в тригонометрической форме. Однако, существует также и комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \exp(j2\pi f_n t), \quad (3)$$

где комплексные коэффициенты \dot{C}_n рассчитываются по формуле:

$$\dot{C}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt.$$

Совокупность модулей комплексных амплитуд C_n образует **амплитудный** спектр сигнала $s(t)$, а совокупность аргументов φ_n — его **фазовый** спектр:

$$\dot{C}_n = C_n \exp(j\varphi_n), \quad C_n = |\dot{C}_n|, \quad \varphi_n = \arg(\dot{C}_n).$$

Суммирование в выражении (3) происходит по всем целым n , в том числе и отрицательным, т.е. в спектре сигнала помимо положительных содержатся также и отрицательные частоты. В геометрической интерпретации комплексная экспонента $\exp(j2\pi f_n t)$ есть единичный вектор, вращающийся против часовой стрелки с частотой f_n . Соответственно, смена знака n (и знака f_n) означает смену направления вращения: не против часовой, а по часовой стрелке.

Амплитудные спектры действительных сигналов являются чётными, а фазовые — нечётными функциями частоты. По этой причине на графиках, как правило, изображают только правую половину спектра, соответствующую положительным частотам (рис. 1).

Амплитуды гармоник на рис. 1 рассчитываются по формуле:

$$C_n = \frac{U_0 \tau}{T} \left| \frac{\sin(\pi f_n \tau)}{\pi f_n \tau} \right| = \frac{U_0}{Q} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{Q}\right)}{\frac{\pi n}{Q}} \right|, \quad (4)$$

где U_0 — амплитуда импульсов, τ — длительность, T — период, $Q = \frac{T}{\tau}$ — **скважность**.

Из рис. 1 видно, что спектр периодического сигнала является **линейчатым** (или **дискретным**), т.е. состоит из отдельных линий, каждая из которых соответствует определённой гармонике, следующих с интервалом $f_1 = \frac{1}{T}$.

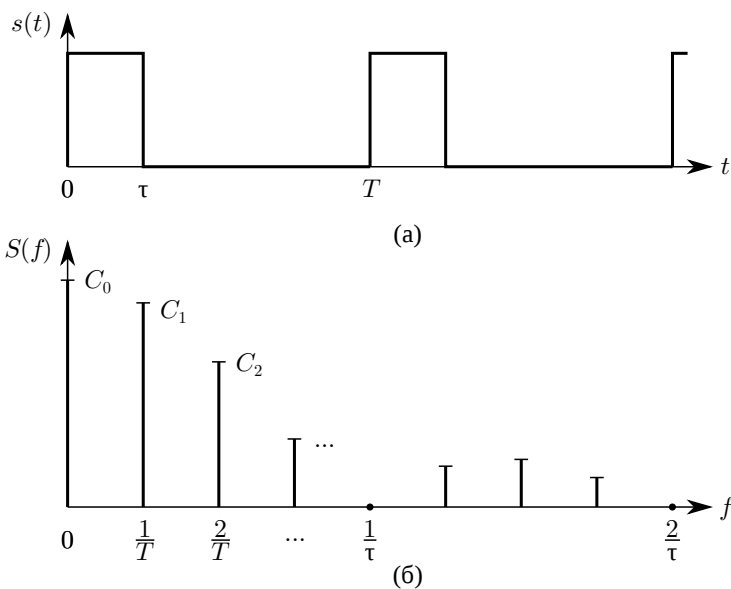


Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (а) и её амплитудный спектр (б)

1.2 Спектры непериодических сигналов

Непериодический сигнал получается предельным переходом из периодического при $T \rightarrow \infty$. При этом ряд Фурье (3) переходит в **интеграл Фурье**:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) \exp(j2\pi ft) df, \quad (5)$$

где

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (6)$$

комплексный спектр сигнала $s(t)$, называемый также **спектральной плотностью**:

$$\dot{S}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \dot{C}_n T = \lim_{f_1 \rightarrow 0} \frac{\dot{C}_n}{f_1}.$$

Выражение (6) называют **прямым**, а (5) — **обратным преобразованием Фурье** сигнала $s(t)$.

Модуль комплексного спектра $S(f)$ называется **амплитудным** спектром сигнала $s(t)$, а его аргумент $\varphi(f)$ — **фазовым** спектром:

$$\begin{aligned}\dot{S}(f) &= S(f) \exp \{j\varphi(f)\}, \\ S(f) &= |\dot{S}(f)|, \quad \varphi(f) = \arg \dot{S}(f).\end{aligned}$$

Амплитудные спектры действительных непериодических сигналов, как и периодических, являются чётными, а фазовые — нечётными функциями частоты.

В отличие от спектра периодического сигнала, спектр непериодического сигнала является **сплошным**, т.к. при $T \rightarrow \infty$ расстояния между спектральными линиями стремятся к нулю: $f_1 = \frac{1}{T} \rightarrow 0$ (рис. 2).

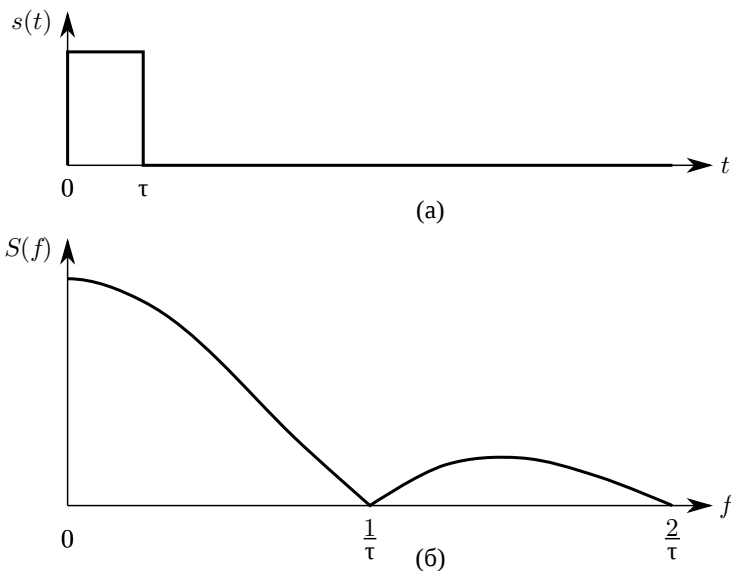


Рис. 2. Одиночный прямоугольный импульс (а) и его амплитудный спектр (б)

Значения функции $S(f)$ на рис. 2 рассчитываются по формуле:

$$S(f) = U_0 \tau \left| \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right|. \quad (7)$$

Сравнивая выражения (4) и (7), можно видеть, что огибающая спектра периодического сигнала с точностью до коэффициента $\frac{1}{T}$ повторяет спектральную плотность непериодического сигнала.

1.3 Ширина спектра сигнала

Под **шириной спектра** понимается полоса частот, в которой сосредоточен амплитудный спектр данного сигнала.

В силу дуальности преобразования Фурье сигналы, ограниченные во времени (а к таковым относятся все реальные сигналы), имеют бесконечно широкие спектры. Однако, большая часть энергии спектра этих сигналов обычно сосредоточена в некоторой ограниченной полосе, которую и принимают за эквивалентную полосу частот данного сигнала.

Конкретные критерии расчёта эквивалентной полосы частот различны и зависят от сигнала и типа решаемой задачи. Например, ширина спектра прямоугольного импульса часто рассчитывается «по первому лепестку» (см. рис. 3, а), т.е. $\Delta F = \frac{1}{\tau}$, причём в этой области оказывается сосредоточено 95% энергии сигнала. Для монотонно убывающих (вне ос-

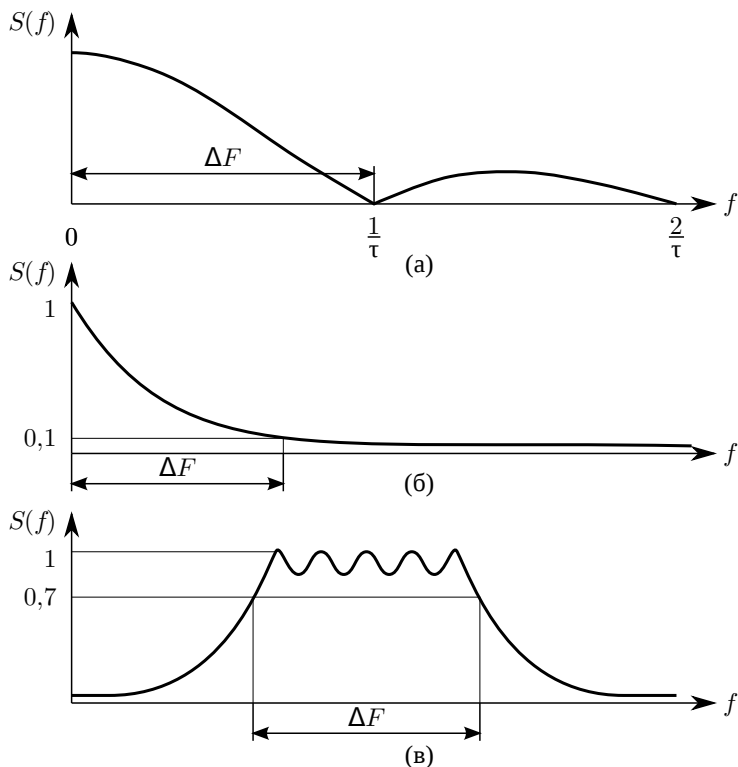


Рис. 3. Определение ширины спектра различных сигналов

новой своей части) спектров границы полосы частот определяются по относительному уровню амплитуды, например, 0,1 или 0,7¹, в зависимости от вида сигнала (см. рис. 3, б, в).

2 Домашнее задание

Построить временные диаграммы, рассчитать и построить **в масштабе** амплитудные спектры следующих сигналов:

1. Периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $U_0 = N + 1$ (В), длительностью $\tau = MN + 1$ (мс) и периодом $T = (N \bmod 3 + 2)\tau$ (мс). Здесь N — последняя цифра номера студенческого билета (например, 4), MN — две последние цифры номера студенческого билета (например, 94), $x \bmod y$ — операция взятия по модулю, эквивалентная взятию остатка от деления x на y (например, $4 \bmod 3 = 1$).
2. Периодической последовательности прямоугольных импульсов с длительностью в 2 раза меньшей, чем в п. 1.
3. Периодической последовательности прямоугольных импульсов с длительностью как в п. 1, но в 2 раза большим периодом.
4. Одиночного прямоугольного импульса с амплитудой и длительностью как в п. 1.

При построении спектра в п. 1 ограничиться частотой $\frac{4}{\tau}$, в остальных пунктах — той частотой, что получилась в п. 1. Построение лучше всего проводить следующим образом: слева располагаются построенные друг под другом в едином масштабе временные диаграммы, справа, напротив них, соответствующие спектральные, также построенные в едином масштабе. При расчёте значений спектральных составляющих можно использовать программы для математических вычислений (MathCad, MatLab, SciLab и пр.);