При сравнении любых однородных по целевому назначению объектов ЛПР всегда пытается определить, какие из них важнее, т.е. требуется определить ценность (важность) этих элементов. Обычно с помощью коэффициентов важности измеряется степень влияния элемента или его характеристик на результат операции, степень его предпочтительности. Чем больше значение коэффициента важности, тем более предпочтителен для ЛПР этот элемент

На коэффициент важности налагаются ограничения неотрицательности, неравенства нулю

$\gamma_j > 0 \quad j = \overline{1, m}$ и нормировки $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$

Значения коэффициентов важности оцениваются следующими способами

1. Способ непосредственной численной оценки значения коэффициента важности заключается в том, что каждому эксперту предлагается установить элементам множества предъявления коэффициент важности γ

Коэффициенты важности должны быть $\gamma_j > 0 \quad j = \overline{1, m}$

и эксперт исходит из того, что $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1$

2. Способ балльной оценки значения коэффициента важности. Способ заключается в том, что каждый эксперт должен оценить значимость того или иного элемента в заданной балльной шкале. Обычно выбирается шкала от 1 до 10 или от 1 до 100. При этом наивысший балл соответствует самому предпочтительному элементу. Коэффициент важности *j* –ого элемента вычисляется следующим образом:

$$\gamma_j = \frac{b_j}{\sum_{j=1}^{m} b_j}.$$

где *bj* – балльная оценка j –ого элемента

Для принятия решений в условиях определенности характерна полная информированность ЛПР о закономерностях поведения рассматриваемой системы, объекта или процесса при известных состояниях окружающей среды. Это означает, что между выбираемыми вариантами решения и результатом решения имеется детерминированная взаимная связь, заданная функциями и отношениями. Т.е., ЛПР заранее знает результат каждой альтернативы

Задача оптимального детерминированного выбора (выделение лучшего варианта решения) в условиях определенности формулируется так:

найти вектор результатов варианта решения

$$E_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{im})$$

который обеспечивает максимальные значения целевой функции $e_{ij} = f(E_i) \to \max$

и удовлетворяет заданным ограничениям

$$g_q(E_i, \delta) \le b_q, \qquad q = 1, \ldots, p,$$

(ограничения, например, по температуре, габаритам, быстродействию и т.д.)

δ — *детерминированные факторы (например, совокупность определённых параметров)*

Найденный таким образом вариант решения E_i называется *оптимальным решением*, а целевые функции — *критериями оптимальности*

Оптимальный детерминированный выбор может быть осуществлён с помощью математического программирования

Задача математического программирования формулируется обычно как задача максимизации (или минимизации) целевой функции

$$e = f(E)$$

на множестве допустимых решений Е, которая задаётся системой равенств и/или неравенств

$$e = f(E) \to \max$$

$$g_q(E_i, \delta) \le b_q, \qquad q = 1, \dots, p,$$

Задачи линейного программирования являются задачами математического программирования, когда критерии оптимальности представляют собой линейные функции

$$e = f(E) = \sum_{j=1}^{n} C_j * e_{ij} \to \max$$

а ограничения – систему линейных уравнений и неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_j * e_{ij} \le b$$

a_j, c_j b *- заданные постоянные*

В реальных условиях ЛПР почти всегда делает выбор вариантов решений в условиях недостатка информации относительно проблемной ситуации

Различается *статистическая (стохастическая) неопределённость* и *природная неопределённость*

При статистической неопределённости у ЛПР имеется неполная информация о состоянии среды, но известны вероятностные распределения факторов, влияющих на результат

Природная неопределённость характеризуется тем, что имеется недостаточная, приблизительная информация о состоянии среды, о возможных факторах, влияющих на результат

Оптимальный выбор в условиях неопределённости осуществляется с помощью целевых функций

$$e = f(E, \delta, \xi, \zeta)$$

Функции e зависят от варианта решения E_i, $i = 1, m$, детерминированных δ и неопределённых (ξ , ζ) факторов, отражающих степень информированности ЛПР о внешних условиях, в которых осуществляется выбор. Для случайных факторов ξ известны функции распределения вероятностей и их параметры. Неопределённые факторы ζ определены нечётко, приблизительно или неизвестны

Задача оптимального детерминированного выбора (выделение лучшего варианта решения) в условиях неопределенности формулируется так:

найти с учётом неопределённых факторов ξ *и* ζ

вектор результатов варианта решения

$$E_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{in})$$

который обеспечивает максимальные значения

целевой функции $e = f(E, \delta, \xi, \zeta)$

и удовлетворяет заданным ограничениям

Возможны два подхода к принятию решения в условиях неопределённости

1. ЛПР использует имеющуюся у него информацию, собственные суждения, опыт для определения вероятностей факторов, влияющих на результаты вариантов решений (альтернатив). Для выбора решений в этом случае применяется, например, критерий Байеса-Лапласа
2. При высокой степени неопределённости ЛПР предпочитает не делать допущений относительно вероятностей внешних условий. Для выбора решений в этом случае применяются, например, минимаксный критерий, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица

Выбор оптимального варианта решения производится с помощью критерия

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i e_{i0} \right\}$$

Множество E_0 оптимальных вариантов решения состоит из тех вариантов E_{i0}, которые принадлежат множеству E всех вариантов и оценка e_{i0} которых максимальна среди всех оценок e_i

Сведем матрицу решений $\|e_{ij}\|$ к одному столбцу

Каждому варианту E_i приписывается, таким образом, некоторый результат e_{ir}, характеризующий последствия этого решения

e_{ir} можно представить любой комбинацией результатов решения, позволяющей сделать выбор варианта решения (альтернативы)

Тогда соответствие вариантов E_i и результата e_{ir} описывается так

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Оптимистическая позиция:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\max_j e_{ij} \right)$$

Из матрицы результатов решений выбирается вариант (строка), содержащий в качестве возможного результата наибольший из всех возможных результатов. ЛПР делает ставку на то, что реализуется наилучшая ситуация

Позиция нейтралитета

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right)$$

ЛПР исходит из того, что выбирать следует решение с наибольшим средним значением

Пессимистическая позиция

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right)$$

ЛПР определяет для каждого из вариантов наихудший из возможных результатов. После этого он выбирает самый выгодный вариант, то есть ожидает наилучшего результата в наихудшем случае. Для каждого иного внешнего состояния результат может быть только равным этому или лучшим

Позиция относительного пессимизма

$$\max_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right)$$

Для каждого варианта решения ЛПР оценивает потери в результате по сравнению с определенным по каждому варианту наилучшим результатом, а затем из совокупности наихудших результатов выбирает наилучший

Минимаксный критерий (ММ-критерий) использует оценочную функцию Z_{MM} , соответствующую пессимистической позиции

При $Z_{MM} = \max_i e_{ir}$ и $e_{ir} = \min_j e_{ij}$

выбор оптимальных вариантов решения в соответствии с ММ-критерием определяется следующим образом

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \Lambda e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}$$

Правило выбора решения в соответствии ММ-критерием:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. Выбираются те варианты E_{i0}, в строках которых стоят наибольшие значения e_{ir} этого столбца

e_{ir} - наименьшие результаты каждой строки (наименьшие результаты при каждом решении)

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Выбранные в соответствии ММ-критерием варианты решений полностью исключают риск. Это означает, что лицо, принимающее решение, не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Какие бы условия F_j ни встретились, соответствующий результат не может оказаться хуже. Поэтому в технических задачах ММ-критерий применяется чаще всего, как сознательно, так и неосознанно

Ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний F_j не известны
- риск худшего результата исключается

Критерий Байеса-Лапласа (BL-критерий) использует оценочную функцию, соответствующую позиции нейтралитета

Применение BL-критерия возможно при известных вероятностях q_j появления внешнего состояния F_j

Оценочная функция BL-критерия:

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir} \qquad e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j$$

Оптимальный вариант решения в соответствии с BL-критерием определяется следующим образом

$$E_o = \{E_{io} \mid E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\}$$

Правило выбора варианта решения в соответствии с BL-критерием:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется еще одним столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты E_{i0}, в строках которых стоит наибольшее значение e_{ir} этого столбца

e_{ir} - математическое ожидание значений результатов каждой строки

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний F_j известны и не зависят от времени
- допускается некоторый риск

Исходная позиция применяющего BL-критерий оптимистичнее, чем в случае ММ-критерия, однако предполагается более высокий уровень информированности

Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа (S-критерий) использует оценочную функцию, соответствующую позиции относительного пессимизма

Обозначим

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right)$$

Исходя из введенных обозначений, оценочная функция:

$$Z_s = \min_i e_{ir} = \min_i \left[\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right]$$

Оптимальный вариант решения определяется следующим образом

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}$$

Критерий Сэвиджа

Величину $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ можно интерпретировать как потери, возникающие в состоянии F_j при замене оптимального для него варианта на вариант E_i. Тогда величина e_{ir} представляет собой максимальные возможные (по всем внешним состояниям $F_j,\ j = 1, \ldots, n$) потери в случае выбора варианта E_i. Затем эти максимально возможные потери минимизируются

Правило выбора решения в соответствии с S-критерием:

каждый элемент матрицы решений $\|e_{ij}\|$ вычитается из наибольшего результата $\max_j e_{ij}$ соответствующего столбца

Разности a_{ij} образуют матрицу потерь $\|a_{ij}\|$

Эта матрица дополняется столбцом наибольших разностей e_{ir}

Выбираются те варианты E_{i0}, в строках которого стоит наименьшее для этого столбца значение

e_{ir} - максимальные возможные потери в случае выбора варианта E_i вместо оптимального

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
...	...
E_i	e_{ir}
...	...
E_m	e_{mr}

Ситуация, в которой принимается решение такова:

- о возможности появления внешних состояний F_j ничего не известно
- необходимо исключить риск, то есть, не допускается получать результат худший, чем в соответствии с оценочной функцией S-критерия

Оценочная функция критерия находится между точками зрения предельного оптимизма и крайнего пессимизма:

$$Z_{HW} = \max_i e_{ir} \qquad e_{ir} = c \cdot \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij}$$

Выбор оптимальных вариантов решения в соответствии с критерием Гурвица определяется следующим образом

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left[c \cdot \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le c \le 1 \right\}$$

с – весовой коэффициент

Правило выбора решения в соответствии с HW -критерием:

Матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется столбцом, содержащим наименьшие и наибольшие результаты для каждой строки с установленными весовыми коэффициентами. Выбираются те варианты E_{i0},

в строках которых стоят наибольшие элементы e_{ir} этого столбца

Для *c* = 1 HW–критерий превращается в ММ–критерий. Для *c* = 0 он превращается в критерий азартного игрока. В технических приложениях правильно выбрать весовой коэффициент трудно. Сложно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Чаще всего весовой коэффициент *c* = 0,5 принимается в качестве некоторой «средней» точки зрения

Ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о вероятностях появления состояний F_j ничего неизвестно
- допускается некоторый риск

Критерий Ходжа-Лемана (HL) опирается одновременно на ММ-критерий и BL-критерий. С помощью параметра ν выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Если это доверие велико, то акцентируется BL-критерий, в противном случае предпочтение отдается ММ-критерию

Оценочная функция

$$Z_{HL} = \max_i e_{ir} \quad e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij}, \; 0 \le \nu \le$$

Выбор оптимальных вариантов решения в соответствии с критерием Ходжа-Лемана определяется следующим образом

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}$$

Правило выбора решения в соответствии с HL -критерием:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется еще одним столбцом, составленных из математического ожидания и наименьшего результата каждой строки с установленными коэффициентами доверия. Отбираются те варианты решений E_{i0}, в строках которых стоит наибольшее значение этого столбца

При ν = 1 HL-критерий переходит в BL-критерий, а при ν = 0 превращается в MM-критерий

Ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний F_j неизвестны, но некоторые предположения о распределениях вероятностей возможны
- допускается некоторый риск

Оценочная функция $$Z_G = \max_i e_{ir}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j$$

Оптимальный вариант решения в соответствии с критерием Гермейера определяется следующим образом

$$E_o = \left\{ E_{io} \middle| E_{io} \in E \wedge e_{io} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}$$

Правило выбора решения в соответствии с G -критерием:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется еще одним столбцом, содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния F_j. Выбираются те варианты E_{io}, в строках которых находится наибольшее значение e_{ir} этого столбца

В случае равномерного распределения

$$q_j = 1/n, \; j = 1, \ldots, n$$

критерий Гермейера становится идентичным ММ-критерию

Ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний F_j известны
- допускается некоторый риск

Критерий произведений ориентирован на величины выигрышей, то есть на положительные значения e_{ij}

Оценочная функция:

$$Z_P = \max_i e_{ir} \qquad e_{ir} = \prod_j e_{ij}$$

Оптимальный вариант решения в соответствии с критерием произведений определяется следующим образом

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \Lambda e_{i0} = \max_i \prod_j e_{ij} \Lambda e_{ij} > 0 \right\}$$

Правило выбора решения в соответствии с критерием произведений:

матрица решений $\|e_{ij}\|$ дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты E_{io}, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца

Критерий произведений применяется, когда все e_{ij} положительны. Если указанное условие нарушается, а P-критерий применяется, то следует выполнить некоторый сдвиг $e_{ij} + a$ с некоторой константой $a > \left|\min_{i,j} e_{ij}\right|$. Результат применения критерия существенно зависит от значения a. На практике в качестве значения a часто используют величину $\left|\min_{i,j} e_{ij}\right| + 1$

Выбор оптимального решения согласно P-критерию оказывается значительно менее пессимистическим, чем выбор в соответствии с ММ-критерием

Ситуация, в которой принимается решение, ни характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний неизвестны
- допускается некоторый риск