Istotnie, $I \subset I$, widząc $|I| \leqslant m_w(I)$. Z drugiej strony, jeżeli $I_1' + ... + I_l' \subset I$ i przedziały $I_1', ..., I_l'$ nie zachodzą na siebie, to $|I_1'| + ... + |I_l'| \leqslant |I|$, a zatem $m_w(I) \leqslant |I|$

Z określenia miary wewnętrznej $\mathfrak{J}$ wynika wprost, że

(2.4) *Jeżeli $A \subset B$, to $m_w(A) \leqslant m_w(B)$.*

3. Własności miary Jordana. Między miarami zewnętrzną $\mathfrak{J}$ a wewnętrzną $\mathfrak{J}$ dowolnego zbioru A zachodzi związek

$$m_w(A) \leqslant m_z(A). \tag{3.1}$$

Dowód. Jeżeli $m_w(A) = 0$, nierówność (3.1) jest oczywista. W przeciwnym rezie do każdego $\varepsilon > 0$ istnieją na mocy (1.2) i (2.2) przedziały $I_1, ..., I_k$ oraz $I_1', ..., I_l'$, czyniące zadość warunkom (ii) oraz (ii'), skąd na mocy tw. (2.2), str. 181, $|I_1'| + ... + |I_l'| \leqslant |I_1| + ... + |I_k|$, więc $m_w(A) - \varepsilon \leqslant m_z(A) + \varepsilon$. Stąd wobec dowolności liczby ε wynika nierówność (3.1), c.b.d.d.

Ponieważ dla każdego zbioru A mamy oczywiście $m_z(A) \geqslant 0$ i $m_w(A) \geqslant 0$, więc wnosimy stąd na mocy (3.1), że

(3.2) *Jeżeli $m_z(A) = 0$, to również $m_w(A) = 0$.*

(3.3) *Dla każdej rodziny skończonej zbiorów ograniczonych $A_1, ..., A_r$ zachodzi wzór*

$$m_z(A_1 + ... + A_r) \leqslant m_z(A_1) + ... + m_z(A_r)$$

Dowód. Wystarczy oczywiście dowieść, że

$$m_z(A_1 + A_2) \leqslant m_z(A_1) + m_z(A_2). \tag{1}$$

Do każdego $\varepsilon > 0$ istnieją na mocy tw. (1.2) przedziały $I_1, ..., I_k$ i $I_{k+1}, ..., I_k$ o własnościach:

$$A_1 \subset I_1 + ... + I_{k_1}, \quad A_2 \subset I_{k_1+1} + ... + I_{k_2}, \tag{2}$$

$$|I_1| + ... + |I_{k_1}| < m_z(A_1) + \varepsilon, \quad |I_{k_1+1}| + ... + |I_{k_2}| < m_z(A_2) + \varepsilon. \tag{3}$$

Na mocy (2) jest $A_1 + A_2 \subset I_1 + ... + I_{k_2}$, skąd

$$m_z(A_1 + A_2) \leqslant |I_1| + ... + |I_{k_2}|,$$

a stąd na mocy (3)

$$m_z(A_1 + A_2) < m_z(A_1) + m_z(A_2) + 2\varepsilon$$

Wobec dowolności liczby ε wynika stąd nierówność (1), c.b.d.d.

(3.3') *Dla każdej rodziny skończonej zbiorów ograniczonych rozłącznych $A_1, ..., A_r$ zachodzi wzór*

$$m_w(A_1) + ... + m_w(A_r) \leqslant m_w(A_1 + ... + A_r).$$

Dowód. Wystarczy oczywiście dowieść, że

$$m_w(A_1) + m_w(A_2) \leqslant m_w(A_1 + A_2). \tag{1'}$$

Do każdego $\varepsilon > 0$ istnieją na mocy (2.1) niezachodzące na siebie przedziały $I'_1, ..., I'_{l_1}$ i niezachodzące na siebie przedziały $I'_{l_1+1}, ..., I'_{l_2}$ o własnościach:

$$I'_1, ..., I'_{l_1} \subset A_1, \quad I'_{l_1+1}, ..., I'_{l_2} \subset A_1, \tag{2'}$$

$$m_w(A_1) - \varepsilon < |I'_1| + ... + |I'_{l_1}|, \quad m_w(A_2) - \varepsilon < |I'_{l_1+1}| + ... + |I'_{l_2}|. \tag{3'}$$

Wobec rozłączności zbiorów A_1 i A_2 wnosimy z (2'), że przedziały całej rodziny $I'_1, ..., I'_{l_2}$ nie zachodzą na siebie, a ponadto że $I'_1, ..., I'_{l_2} \subset A_1 + A_2$, skąd $|I'_1| + ... + |I'_{l_2}| \leqslant m_w(A_1 + A_2)$, a stąd na mocy (3')

$$m_w(A_1) + m_w(A_2) - 2\varepsilon < m_w(A_1 + A_2).$$

Wobec dowolności liczby ε wynika stąd nierówność (1'), c.b.d.d.

(3.4) *Dla miar $\mathfrak{J}$ dowolnego zbioru ograniczonego A i jego pochodnej A' (p. str. 59) zachodzi wzór*

$$m_w(A) \leqslant m_w(A') \leqslant m_z(A') \leqslant m_z(A).$$

Dowód. Pierwsza z nierówności wynika stąd, że jeżeli przedział jest zawarty w zbiorze, to jest zawarty także w jego pochodnej. Druga jest bezpośrednim wnioskiem z (3.1).

Niech $I_1, ..., I_k$ będą takimi przedziałami zamkniętymi, że $A \subset I_1 + ... + I_k$. Ponieważ suma tych przedziałów jest zbiorem zamkniętym, więc $A' \subset I_1 + ... + I_k$. Zatem

$$m_z(A') \leqslant m_z(A). \tag{4}$$

Z drugiej strony, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją takie przedziały otwarte $J_1, ..., J_r$, że

$$A' \subset J_1 + ... + J_r, \tag{5}$$

$$|J_1| + ... + |J_r| < m_z(A') + \varepsilon \tag{6}$$

Na mocy (5) zbiór A nie ma punktów skupienia poza przedziałami $J_1, ..., J_r$, a więc poza tymi przedziałami leży co najwyżej skończona liczba punktów zbioru A. Punkty te można tedy pokryć skończoną liczbą przedziałów $J_{r+1}, ..., J_s$ o sumie przekraczającej ε. Ponieważ $A \subset J_1, ..., J_s$, więc

$$m_z(A) \leqslant |J_1|, ..., J_s \leqslant m_z(A') + 2\varepsilon$$

na mocy (6). Wobec dowolności ε mamy zatem

$$m_z(A) \leqslant m_z(A'). \tag{7}$$

Z (4) i (7) wynika równość $m_z(A') \leqslant m_z(A)$ c.b.d.d.

PRZYKŁADY. 1. Zbior liczb postaci $1/n$, gdzie $n = 1, 2, ...$, nie ma zewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą zeru, taka jest bowiem miara pochodnej tego zbioru, jako złożonej z jednego punktu (punktu 0).

2. Zbiór liczb wymiernych przedziału $\langle 0, 1\rangle$ ma miarę wewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą jedności, czyli mierze tego przedziału (jako swej pochodnej), miarę zaś wewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą zeru, ponieważ jest zbiorem brzegowym.

To samo dotyczy zbioru liczb niewymiernych przedziału $\langle 0, 1\rangle$.

3. Każdy zbiór gęsty w przedziale ma miearę zewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą mierze tego przedziału.

(3.5) *Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym, a $B(A)$ jego brzegiem, to:*

$$m_w[B(A)] = 0, \quad m_z[B(A)] = m_z(A) - m_w(A)$$

Dowód. Pierwsza równość jest oczywista, ponieważ zbiór $B(A)$ nie ma punktów wewnętrznych.

Na mocy (i), (ii), (i') i (ii') istnieją dla każdego $\varepsilon > 0$ przedziały $I'_i, ..., I'_l$ o własnościach:

$$I'_i + ... + I'_l \subset A \subset I_1 + ... + I_k, \tag{8}$$

$$m_z(A) > |I_k| + ... + |I_k|, \quad m_w(A) - \varepsilon < |I'_1| + ... + |I'_l|. \tag{9}$$

$$B(A) \subset I_{k+1} + ... + I_r, \tag{10}$$

$$m_z[B(A)] + \varepsilon > |I_{k+1}| + ... + |I_r|. \tag{11}$$

Niech I będzie przedziałem zamkniętym, zawierającym $I_1, ..., I_r$, a Δ podziałem przedziału I na takie podprzedziały, żeby $I_1, ..., I_r$ były ich sumami.

Oznaczmy przez $J_1, ..., J_\mu$ te spośród przedziałów podziału Δ, których wnętrza zawarte są w różnicy $(I_1, ..., I_k) - (I'_1, ..., I'_l)$, a przez $J'_1 ..., J'_\nu$ te, których wnętrza zawarte są w różnicy $A - (I_{k+1} + ... + I_r)$. Zatem:

$$I_1 + ... + I_k = J_1 + ... + J_\mu + I'_1 + ... + I'_l,$$
$$A \subset J'_1 + ... + J'_\nu + I_{k+1} + ... + I_r$$

i na mocy (8) i (10) po prawej stronie każdego z tych wzorów występują przedziały nie zachodzące na siebie. Na mocy (9) i (11) otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned} m_z(A) + \varepsilon &\geqslant |J_1| + ... + |J_\mu| + m_w(A) - \varepsilon, \\ m_z(A) &\leqslant |J'_1| + ... + |J'_\nu| + m_z[B(A)] + \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Ponieważ zbiór $B(A)$, jako brzeg zbioru A, jest zawarty na mocy (8) w $J_1 + ... + J_\mu$, więc

$$m_z[B(A)] \leqslant |J_1| + ... + |J_\mu|, \tag{13}$$

a ponieważ wnętrza przedziałów $J'_1 + ... + J'_\nu$ są zawarte w A, więc

$$m_w(A) \geqslant |J'_1| + ... + |J'_\nu|. \tag{14}$$

Z nierówności (12), (13) i (14) otrzymujemy

$$m_z(A) - m_w(A) - \varepsilon \leqslant m_z[B(A)] \leqslant m_z(A) - m_w(A) + 2\varepsilon$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, a więc równość, c.b.d.d.

(3.6) *Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym, a $W(A)$ jego wnętrzem, to*

$$m_w[W(A)] = m_w(A).$$

Istotnie, wobec $W(A) \subset A$ mamy na mocy (1.5)

$$m_w[W(A)] \leqslant m_w(A).$$

Z drugiej strony, każdy przedział otwarty, zawarty w A, jest zawarty w $W(A)$, skąd $m_w(A) \leqslant m_w[W(A)]$.

4. Zbiory mierzalne $\mathfrak{J}$. Zbiór ograniczony A nazywamy *mierzalnym w sensie Jordana* lub *mierzalnym* $\mathfrak{J}$, jeżeli jego miary zewnętrzna $\mathfrak{J}$ i wewnętrzna $\mathfrak{J}$ są równe, t.j. jeżeli $m_w(A) = m_z(A)$.

Wspólną wartośc obu miar nazywamy wówczas *miarą* $\mathfrak{J}$ zbioru A i oznaczmy przez $m(A)$.

PRZYKŁADY. 1. Każdy przedział I jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $m(I) = |I|$ (por. (1.3) i (2.3)).

2. Zbiór W liczb wymiernych przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ nie jest mierzalny $\mathfrak{J}$, gdyż $m_w(W) = 0$ i $m_w(W) = 1$ (p. przyklad 2, str. 199)

(4.1) *Jeżeli $m(A) = 0$, to A jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Wynika to wprost z określenia miary zewnętrznej $\mathfrak{J}$ i miary $\mathfrak{L}$ zero.

(4.2) *Jeżeli $m_z(A) = 0$, to A jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $m(A) = 0$.*

Na mocy bowiem (3.1), str. 197, mamy wtedy $m_w(A) = 0$.

Natomiast zbiór miary $\mathfrak{L}$ zero może nie być mierzalny $\mathfrak{J}$ jak wskazuje przyklad zbioru liczb wymiernych, który nie jest mierzalny $\mathfrak{L}$, a jako przeliczalny jest miary $\mathfrak{L}$ zero.

(4.3) *Każdy zbór A zamknięty, ograniczony i mieary $\mathfrak{L}$ zero jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i $m(A) = 0$.*

Istotnie, na mozy tw. (8.2), str. 92, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wówczas skończona liczba przedziałów pokrywających zbór A, których suma miar jest mniejsza niż ε. Zatem $m_z(A) < \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$, skąd $m_z(A) = 0$. Zatem na mocy tw. (4.1) jest $m(A) = 0$.

W szczególności, ponieważ brzeg przedziału jest zbiorem zamkniętym i ograniczonym o mierze $\mathfrak{L}$ zero (tw. (7.1), str. 187), więc:

(4.4) *Miara $\mathfrak{J}$ brzegu przedziału jest zerem.*

(4.5) *Jeżeli A jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$, to jego również zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $m(A) = m(A')$.*

Wynika to wprost z tw. (3.4).

Uwaga. Twierdzenie odwrotne byłoby fałszywe: pochodna A' może być zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$. Np. zbiór liczb wymiernych przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ nie jest mierzalny $\mathfrak{J}$ (przyklad 2, str. 201), podczas gdy jego pochodna jest przedziałem $\langle 0, 1 \rangle$, a więc zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.

(4.6) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zbiór ograniczony był mierzalny $\mathfrak{J}$, jest żeby jego brzeg był zbiorem miary $\mathfrak{J}$ zero.*

Wynika to wprost z tw. (3.6).

Uwaga. Ponieważ brzeg jest zbiorem zamkniętym, więc tw. (4.6) pozostaje prawdziwe, gdy mearę $\mathfrak{J}$ brzegu zastąpić miarą $\mathfrak{L}$.

Z tw. (3.7) wynika, że

(4.7) *Mierzalność $\mathfrak{J}$ zbioru A jest równoważna mierzalności $\mathfrak{J}$ jego wnętrza $W(A)$ i*

$$m(A) = m[W(A)].$$

PRZYKŁADY. 1. *Wielokąt jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Brzeg jego jest bowiem linią łamaną, a więc zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero (p. tw. (7.3), str. 188).

2. *Koło $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Brzeg jego jest bowiem sumą wykresów funkcji $y = \sqrt{r^3 - x^2}$, $y = -\sqrt{r^3 - x^2}$, ciągłych w przedziale $\langle -r, r\rangle$; na mocy tw. (7.3), str. 188, jest on więc zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.

Podobnie, *kula jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

3. *Każdy wielościan w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ jest zbiorem $\mathfrak{L}$.*

Brzeg wielościanu tworzą bowiem jego ściany, a każda ściana jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero (p. str. 190).

(4.8) *Suma skończonej liczby zbiorów $A_1, ..., A_r$ mierzalnych $\mathfrak{J}$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i*

$$m(A_1 + ... + A_r) \leqslant m(A_1) + ... + m(A_r).$$

Mierzalność sumy $A_1 + ... + A_r$ wynika z tw. (4.6), ponieważ brzeg sumy zbiorów $A_1, ..., A_r$ zawarty jest w sumie brzegów tych zbiorów. Wzór zaś wynika z tw. (3.3), str. 197, przez zastąpienie w nim miary zewnętrznej $\mathfrak{J}$ przez miarę $\mathfrak{J}$.

(4.9) *Jeżeli zbiory $A_1, ..., A_r$ są mierzalne $\mathfrak{J}$ i rozłączne, to*

$$m(A_1 + ... + A_r) = m(A_1) + ... + m(A_r). \tag{15}$$

Istotnie, zastępując w tw. (3.3), str. 198, miarę wewnętrzną $\mathfrak{J}$ przez miarę $\mathfrak{J}$ dostajemy

$$m(A_1 + ... + A_r) \geqslant m(A_1) + ... + m(A_r), \tag{16}$$

a nierówność odwrotną mamy z tw. (4.8).

Uwaga. Tw. (4.9) zachodzi już przy założeniu, *że zbiory $A_1, ..., A_r$ mierzalne $\mathfrak{J}$ mają wnętrza rozłączne.*

Mamy bowiem wobec tw. (3.3')

$$m_w[W(A_1) + ... + W(A_r)] \geqslant m_w[W(A_1)] + ... + m_w[W(A_r)]. \tag{17}$$

Ponieważ na mocy tw. (3.6) jest $m_w[W(A_i)] = m_w(A_i) = m(A_i)$ dla $i = 1, 2, ..., r$ oraz $W(A_1)_W(A_r) \subset A_1 + ... + A_r$, więc

$$m_w[W(A_1) + ... + W(A_r)] \leqslant m(A_1 + ... + A_r).$$

Stąd na mocy (4.7) dostajemy (16), a z (4.9) równość (15).

(4.10) *Iloczyn skończonej liczby zbiorów mierzalnych $\mathfrak{J}$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Wynika to z tw. (4.7), ponieważ brzeg iloczynu zbiorów jest zawarty w sumie ich brzegów.

(4.11) *Dopełnienie zbioru mierzalnego $\mathfrak{J}$ do przedziału jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Dowód. Jeżeli zbiór A jest zawarty w przedziale I, to brzeg zbioru $I - A$ jest zawarty w sumie brzegu zbioru A i brzegu przedziału I. Ponieważ oba brzegi są zbiorami miary $\mathfrak{J}$ zero na mocy tw. (4.1) i (4.6), więc ich suma, a tym bardziej brzeg zbioru $I - A$ jest więc mierzalny $\mathfrak{J}$.

(4.12) *Jeżeli zbiory A i B są mierzalne, to różnica $A - B$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Jeżeli ponadto $B \subset A$, wówczas

$$m(A - B) = m(A) - m(B).$$

Dowód. Niech I będzie przedziałem zawierającym $A + B$. Wówczas $A - B = A \cdot (I - B)$ i różnica $A - B$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ na mocy tw. (4.10), jako iloczyn zbiorów A i $I - B$, z których pierwszy jest mierzalny $\mathfrak{J}$ z założenia, a drugi na mocy tw. (4.11).

Jeżeli ponadto $B \subset A$, wówczas $A = B + (A - B)$, skąd

$$m(A) = m[B + (A - B)] = m(B) + m(A - B),$$

gdyż zbiory A i $A - B$ są rozłączne.

5. Przesunięcie równoległe. Niech E będzie dowolnym zbiorem ograniczonym w $\mathcal{E}^n$, a $(a_1, ..., c_n)$ dowolnym układem n liczb. Niech każdemu punktowi $p' = (x'_1, ..., x'_n)$ za pomocą równań

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{18}$$

Przyporządkowanie to jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym i ciągłym zbioru E na zbiór E' punktów p'.

Odwzorowanie (18) nazywamy *przesunięciem (równoległym).*

Z określenia wynika, że odwzorowanie odwrotne

$$x_i = x'_i + a_i \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{19}$$

jest przesunięciem (równoległym) zbioru E' na zbiór E.

Przez Przesunięcie równoległe przedział $I = \langle a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n\rangle$ przechodzi na przedział $I' = \langle a_1 + a_1, ..., a_n + a_n; b_1 + a_1, ..., b_n + a_n\rangle$ i miara przedziału zostaje zachowana, t.j. $|I| = |I'|$. Ogólnie:

(5.1) *eżeli zbiór ograniczony E przechodzi przez przesunięcie równoległe w zbiór E', to*

$$m_w(E) = m_w(E'), \quad m_z(E) = m_z(E').$$

Dowód. Niech $E \subset I_1 + ... + I_m$. Zbiór E' jest oczywiście zawarty w sumie przedziałów $I'_1, ..., I'_m$, na które przejdą przedziały $I_1, ..., I_m$ przez przesunięcie (18). Ponieważ przesunięcie równoległe zachowuje miarę przedziałów , więc $|I_1| + ... + |I_m| = |I'_1| + ... + |I'_m|$, skąd $m_z(E) \geqslant m_z(E')$. Na odwtót, ponieważ przez przesunięcie (19) E' przechodzi na E, więc dostajemy $m_z(E') \geqslant m_z(E)$. Zatem $m_z(E) = m_z(E')$.

Podobnie dowodzi się równości miar wewnętrznych.

Wynika stąd od razu twierdzenie następujące:

(5.2) *eśli zbiór E jest mierzalny $\mathfrak{J}$, to jego przesunięcie E' jest również zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i miary $\mathfrak{J}$ obu zbiorów są równe.*

6. Całka $\mathfrak{R}$ funkcji w zbiorze. Niech E będzie zbiorem ograniczonym w $\mathcal{E}^n$, a $f(p)$ funkcją ograniczoną, określoną w E.

Oznaczmy przez f^* funkcje, która jest przedłużeniem funkcji f na całą przestrzeń $\mathcal{E}^n$, przyjmując $f^*(p) = 0$ dla p nie należących do E. Zatem funkcja $f^*(p)$ jest określona w całej przestrzeni $\mathcal{E}^n$ i ograniczona w tej przestrzeni.