Parcial #3 Señales y Sistemas
Ian Ix Alarcon - 119310601l

1) El sistema masa resorte se obtiene de conseguir el equilibrio de las fuerzas ejercidas en las masas

$$F_q(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_t(t)$$

$$\frac{d}{dt}(y(t))$$

donde:

$F_S(t) = k_y(t)$, $F_F(t) = e$

Reemplazando las fuerzas en la ecuación se obtiene:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_E(t) = x(t)$$

Se aplica transformada de laplace a ambos lados:

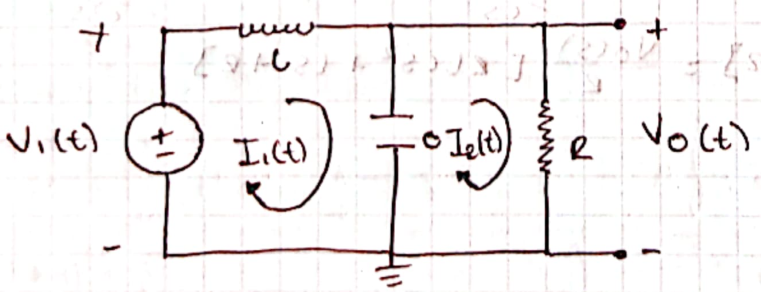
$$\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x(t)\right\}$$

$$ms^2y(s) + c'y'y(t) + ky(t) = x(s)$$

$$y(s)[ms^2 + cs + k] = x(s')$$

$$M(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

Siendo el circuito eléctrico:



Obteniendo las ecuaciones de malla para cada una:

malla 1 (L, C, R)

$$V_1(t) = L \frac{d}{dt}(i_1(t)) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1 - i_2)\,dt$$

con el concepto de impedancias complejas se tiene:

$$V_i(s) = sL\, i_1(s) + \frac{1}{sC}(i_1 + i_2)(s)$$

malla 2 (L, C, R)

$$\frac{1}{C}\int_0^t (i_2 - i_1)\,dt + i_2 R = 0$$

Tras aplicar el consepto de impedancias complejas se obtiene:

$$\frac{1}{sC}(i_2 - i_1)(s) + R i_2(s) = 0$$

$$V_0(s) = R i_2(s) \longrightarrow i_2(s) = \frac{V_0(s)}{R}$$

Utilizando el sistema de ecuaciones se despeja $i_1(s)$ de $i_2(s)$

$$R i_1(s) = -(i_2(s) - i_1(s))\, 1/cs \longrightarrow Rcs\, i_2(s) + i_2(s) = i_1(s)$$

$$\longrightarrow i_1(s) = (1 + Rcs)\, i_2(s)$$

Reemplazando en la ecuación de la malla 1

$$V_1(s) = Ls(1 + Rcs)\, i_2(s) + \frac{1}{cs}[1 + Rcs)\, i_2(s) - i_2(s)]$$

$$V_i(s) = Ls\, i_2(s) + RLC s^2 i_2(s) + \cancel{\frac{i_2(t)}{cs}} + R i_2(t) - \cancel{\frac{i_2(s)}{cs}}$$

$$V_i(s) = i_2(s)[RLCs^2 + Ls + R] = \frac{V_0(s)}{R}[RLCs^2 + Ls + R]$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Entonces:

La ecuación de trasferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Equivalencia del circuito RLC con un pendulo elastico.

Circuito RLC	Pendulos Elasticos
LC	m
L/R	e
1	k

Ecuación de transferencia equivalente:

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}}$$

En su forma canonica de segundo orden:

$$s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}$$

$$s^2 : 1 = 1 \quad ; \quad si \quad 2\epsilon\omega_n = \frac{cn}{m}$$

Independiente $\omega_n^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow \omega_n \sqrt{\frac{n}{m}}$

se encuentra ϵ:

$$2\epsilon \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = \frac{c}{m} \longrightarrow \epsilon = \frac{c\sqrt{m}}{2m\sqrt{k}} \longrightarrow$$ Factor de Amortiguamento

Ganancia k

$$k\omega_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow k = \frac{1}{m\left(\frac{k}{m}\right)} = \frac{1}{k} = k$$

$$H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{k}{m}\right)}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m}\right)\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}\right)^s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}}$$

Se encuentra la frecuencia natural amortiguada

$$\omega d = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{4m^2k - c^2m}}{\sqrt{4m^2k}} = \frac{\sqrt{k}\sqrt{4m^2k + c^2m}}{2m\sqrt{m}\sqrt{k}}$$

$$\omega d = \frac{\sqrt{4m^2k \mp c^2m}}{2m\sqrt{m}}$$

Tiempo de desplazamiento:

$$ts = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{\left(\frac{c\sqrt{m}}{2m\sqrt{k}}\right)\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right)} = \frac{6m}{c}$$

El tiempo pico y de levantamiento se encuentran mediante la simulación en python.

-Función de transferencia masa resorte amortiguada en lazo cerrado. Se puede representar la función de transferencia de un sistema de lazo cerrado de la siguiente manera.

$$Hlc = \frac{H(s)}{1 \pm A(s)A(s')} = \frac{\frac{1}{ms^2 + cs + k}}{1 + \left(\frac{1}{ms^2 + cs + k}\right)} = \frac{\frac{1}{ms^2 + cs + k}}{\frac{ms^2 + cs + k + 1}{ms^2 + cs + k}}$$

$$Hlc = \frac{1}{ms^2 + cs + k + 1}$$

ó también

$$Hlc(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m} + \frac{k}{m} + \frac{1}{m}}$$

Se encuentra la forma canonica de segundo orden.

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m} + \frac{1}{m}$$

Igualando los coeficientes se obtiene:

$$s^2 \cdot 1 = 1 ; \quad s = 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

Independientes: $\omega_n^2 = \frac{k+1}{m} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k+1}{m}}$

Se encuentra ξ_0

$$2\xi \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{m}} = \frac{c}{m} \rightarrow \xi = \frac{c\sqrt{m}}{2m\sqrt{k+1}}$$

Se encuentra la ganancia igualando los numeradores de $H(s)$ y $H_{lc}(s)$

$$k\omega_n^2 = \frac{1}{m} \longrightarrow k = \frac{1}{m\frac{(k+1)}{m}} = \frac{1}{k+1}$$

La forma canónica de segundo orden es:

$$H_{lc}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi n s + \omega_n^2} = \frac{(k+1)/m}{s^2 + 2\left(\frac{c\sqrt{m}}{2m\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{m}}\right)s + \frac{k+1}{m}}$$

$$H_{lc}(s) = \frac{((k+1)/m)}{s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k+1}{m}}$$

Funcion natural amortiguada:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\sqrt{k+1}}{m}\sqrt{1 - \left(\frac{c-\sqrt{m}}{2\sqrt{k+1}}\right)^2}$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{4(k+1)-c^2m}{4k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{m}} \frac{4(k+1)-c^2m}{2\sqrt{k+1}}$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4(k+1)-c^2m}}{2\sqrt{m}}$$

Tiempo de establecimiento:

$$ts = \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{\frac{c\sqrt{m}}{2m\sqrt{k+1}}\left(\frac{k+1}{\sqrt{m}}\right)} = \frac{6m}{c}$$