МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе "Определение отношения удельных теплоёмкостей воздуха"

Отчет по (учебной) практике
Студентов группы 0424С1ИБг1
1 курса специалитета
Скороходов С.А., Степушов Г.С.

Основная образовательная программа
подготовки по направлению
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
(направленность «Системы подвижной цифровой
защищенной связи»)

Нижний Новгород, 2025

1 Теоретическая часть

1.1 Случайные события и случайная величина

Статистическое испытание - это наблюдение, производимое при неизменном комплексе контролируемых условий.

Всякий исход испытания называется *случайным событием.*

В нашем опыте случайным событием является попадание зернышка в какую-либо из ячеек.

Случайные события принято описывать количественно с помощью случайных величин. Например, номер ячейки **n**, в которую попало зернышко, время падения в ячейку или пройденный до ячейки путь - это случайные величины, относящиеся к рассматриваемому случайному событию.

1.1.1 Свойство статистической устойчивости. Относительная частота и вероятность события

Ключевое понятие вероятности случайного события опирается на свойство *статистической устойчивости*, которое поясним на примере.

Пусть зёрнышко брошено на доску Гальтона N раз. Обозначим N_k число испытаний, в которых зерно попало в ячейку с заданным номером k(или же один раз брошено N одинаковых зёрен, тогда N_k - число зёрен в k-й ячейке). Отношение $P^*(k, N) = \frac{N_k}{N}$ называется *относительной частотой* события, заключающегося в попадании зерна в ячейку с номером k в серии из N испытаний. По-другому можно сказать, что это относительная частота того, что случайный номер ячейки n примет значение k.

Относительная частота - случайная величина. Но если провести N одинаковых испытаний, то окажется, что чем больше N, тем меньше относительная частота зависит от N. Это свойство называется статистической устойчивостью относительной частоты появления случайного события. Именно статистическая устойчивость позволяет построить для случайных явлений и величин теорию, предсказывающую результаты многократно воспроизводимых(при одинаковых условиях) испытаний. Статистическая устойчивость - частный случай появления основного статистического закона, который называется законом больших чисел.

На математическом языке тот факт, что с увеличением N относительная частота становится всё менее случайной, записывается в виде

$$\lim_{N\to\infty} P^*(k, N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_k}{N} = P(k) \quad (1)$$

Детерминорованную величину $P(k)$ называют вероятностью случайного события. В данном случае событие состоит в попадании зерна в k-ю ячейку, в то же время можно сказать, что $P(k)$ есть вероятность того, что случайная величина n равна k.

1.1.2 Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайною величину X, которая может принимать ограниченное или счётное число значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, называют *дискретной.* В нашем случае дискретной величиной является номер ячейки. Величины, принимающие непрерывный ряд значений(например, время падения зерна в ячейку), называют *непрерывными* случайными величинами.

1.2 Закон распределения случайной величины

1.2.1 Закон распределения дискретной случайной величины

Все свойства дискретной случайной величины определяются вероятностью возможных значений:

$$P(k_1) = p_1, P(k_2) = p_2, \dots, P(k_n) = p_n, \dots$$

Если набор значений невелик, то составляют таблицу, первая строка которой включает все значения случайной величины, а вторая - их вероятности. При этом говорят, что задан *закон распределения* случайной дискретной величины. Тот же закон можно представить графически, откладывая по оси абсцисс значения, которые принимает случайная величина, а на оси ординат - их вероятности.

1.2.2 Интегральная и дифференциальная функции распределения

Запись распределения случайных величин в виде таблицы неудобна в аналитических расчётах. Удобнее использовать *функцию распределения*. По определению *интегральная функция распределения*

$$F(x) = P(X < x) \tag{2}$$

равна вероятности того, что случайна величина X принимает значение, меньшее наперёд заданного x. Интегральная функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ - неубывающая функция x, определённая на всей оси $x \in (-\infty, \infty)$ и принимающая значения в интервале $[0, 1]$.

2. Наименьшее значение функции $F(x)$ достигается при $x = -\infty$, а наибольшее - при $x = \infty$.

$$F(-\infty) = 0, \qquad F(\infty) = 1. \tag{3}$$

Применительно к дискретной случайной величине $F(x)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию, терпящую скачки в точках разрешённых значений x_k случайной величины X:

$$F(x) = \sum_k p_k \chi(x - x_k). \tag{4}$$

В записи (4) использована χ - единичная функция

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{5}$$

так что величина скачка равна вероятности p_k.

Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины является гладкой монотонно возрастающей.

Наряду с интегральной функцией распределения часто используют и *дифференциальную функцию распределения*, или *плотность вероятностей*, по определению равную

$$W(x) = \frac{dF}{dx} \tag{6}$$

Если интервал Δx достаточно мал, то из (6) и (2) следует, что величина $W(x)\Delta x$ будет приближённо равна вероятности попадания случайной величины X в интервал значений Δx. Поэтому с помощью плотности вероятностей можно найти вероятность попадания случайной величины X в любой наперёд заданный интервал $[a, b)$:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b W(x)dx \tag{7}$$

В частности, отсюда следует явное выражение для интегральной функции распределения через плотность вероятностей

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} W(x)dx \tag{8}$$

Перечислим общие свойства плотности вероятностей:

1. Из (6) и (2) видно, что плотность вероятностей имеет размерность, обратную размерности случайной величины X.

2. Плотность вероятностей неотрицательна:

$$W(x) \geq 0. \tag{9}$$

3. Для плотность вероятностей выполнено *условие нормировки*, которое получим, устремив в (8) x к бесконечности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(z)dz = 1 \tag{10}$$

1.2.3 Среднее значение и дисперсия

Пусть дискретная случайная величина X в N независимых испытаниях принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Тогда среднее значение (его будем обозначать чертой сверху) равно

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i. \tag{11}$$

Здесь X_i - исход $i-$го испытания. Вычислим предел среднего арифметического при безграничном увеличении N. Для этого перегруппируем слагаемые считая, что значения x_k выпадают N_k раз. Тогда

$$\overline{X} = \sum_k x_k \frac{N_k}{N}. \tag{12}$$

При большом N каждая дробь под знаком суммы даёт вероятность p_k, в итоге

$$\overline{X} = \sum_k x_k p_k \tag{12a}$$

Равенство (12a) является определением среднего значения дискретной случайной величины. Его ещё называют *математическое ожидание* и обозначают E_x. Математическое ожидание (среднее значение) непрерывной случайной величины вычисляется с помощью плотности вероятностей:

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} (xW(x)dx) \tag{12b}$$

Ещё более информативной, чем математическое ожидание является *дисперсия* случайной величины D_x, по определению равная:

$$D_x = \overline{(X - \overline{X})^2} \tag{13}$$

Из определения среднего значения следует, что дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$D_x = \sum_k (x_k - \overline{X})^2 p_k = \sum_k x_k^2 p_k - \overline{X}^2, \tag{13a}$$

а непрерывной - по формуле

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^2 \, W(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x)dx - \overline{X}^2 \tag{13b}$$

По смыслу математическое ожидание есть постоянная составляющая случайной величины X, а дисперсия служит количественной мерой случайности - разброса X вокруг среднего. В частности, детерминированная величина совпадает со своим средним, а её дисперсия равна нулю.

В инженерных приложениях, где приходится иметь дело с размерными величинами, удобнее использовать не дисперсию, а *среднеквадратичное отклонение* случайной величины от среднего:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \tag{14}$$

По-другому эту величину называют *стандартным отклонением* ли просто *стандартом* случайной величины X.

Случайные отклонения величины от среднего значения называются *флуктуациями*. Наиболее показательной характеристикой таких отклонения является *относительная флуктуация*, по определению равная

$$\eta = \frac{\sigma_x}{\overline{X}} \tag{15}$$

Пусть некоторый опыт повторяется независимо N раз, а вероятность наступления события A не зависит от номера опыта и равна p (например, в опытах с доской Гальтона событие A состоит в том, что зёрнышко попадает в ячейку с заранее заданным номером). Если X - число наступлений события A в серии из N опытов, то можно показать:

$$\overline{X} = Np, \qquad \sigma_x = \sqrt{Np(1-p)}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{1-p}{Np}} \tag{16}$$

1.3 Закон распределения для доски Гальтона

В опытах с доской Гальтона при большом числе частиц вероятность $P(k)$ пропорциональна высоте столбика в ячейке k. Колоколообразная кривая, которую можно провести через точки на графике, будет иметь ту же форму, что и холмик, образованный зёрнами ячейках. Эту кривую называют *кривой вероятностей*.

Обозначим $\overline{k}$ номер средней ячейки, над которой находится воронка. Средняя ячейка доски Гальтона оказывается наиболее вероятной: вероятность $P(\overline{k})$ попадания в неё максимальна. Оказывается, при достаточно большом числе ячеек вероятность $P(k)$ приближённо выражается формулой

$$P(k) = P(\overline{X}) \exp\left(-\frac{(k-\overline{k})^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{17}$$

Чтобы выяснить влияние σ_x на вид распределения, положим в формуле (17) значения k равными $k_1 = \overline{k} + \sigma_k$ и $k_2 = \overline{k} - \sigma_k$. Формула (17) даёт тогда

$$P(k_1) = P(k_2) = \frac{P(\overline{k})}{\sqrt{e}}$$

Это значит, что $2\sigma_k = k_2 - k_1$ равняется ширине кривой вероятностей, измеренной на на уровне $P(\overline{k})/\sqrt{e}$, т.е. стандарт характеризует величину случайных отклонений от среднего значения.

Установим значение $P(\overline{k})$. Для этого учтём, что в любом испытании случайный номер ячейки n обязательно примет какое-либо(и только одно) значение $n = k$.