

# Вывод закона $3/2$ Ленгмюра

GordStep

15 ноября 2025 г.

Если предположить, что электроды вакуумной трубки плоские, а температура катода постоянная, то потенциал электрического поля будет зависеть только от одной координаты  $x$ , направленной вдоль вакуумной трубки от катода к аноду.

Используем одно из уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

где  $\rho$  - объёмная плотность заряда. Спроецируем это уравнение на ось  $x$ :

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{\epsilon_0} en \quad (1)$$

Знак минус учитывает, что эмиттируемые электроны имеют отрицательный заряд,  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная,  $n$  - концентрация электронов,  $E$  - напряжённость электрического поля.

Работа по перемещению единичного точечного положительного заряда из одной точки поля в другую вдоль оси  $x$  при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу  $x_2 - x_1 = dx$ , равна  $E_x dx$ . Та же работа равна  $\phi_1 - \phi_2 = -dU$ . Приравняв оба выражения, можем записать:

$$E = -\frac{dU}{dx} \quad (2)$$

Выразим напряжённость  $E$  через потенциал  $U$ , с помощью формулы (2). Концентрацию электронов выразим через плотность тока эмиссии:  $j = enU$ , а скорость электронов - из закона сохранения энергии:  $mu^2/2 = eU$ , где  $u$  - дрейфовая скорость электронов.

$$n = \frac{j}{eu} \quad (3)$$

$$u = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (4)$$

Тогда уравнение (1) с учётом (2), (3) и (4) принимает вид:

$$\frac{d}{dx} \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\epsilon_0} e \frac{j}{e} \sqrt{m} 2eU$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{j}{\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} U^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка (5) будем искать при граничных условиях  $\lim_{x \rightarrow 0} U = \lim_{x \rightarrow 0} E = 0$ . Если бы электрическое поле на границе катода было больше нуля, то все электроны, испускаемые катодом, увлекались бы этим полем к аноду, и термоэлектронный ток достигал бы насыщения при любых напряжениях на вакуумной трубке. Коэффициент перед  $U^{-1/2}$  обозначим за  $a$ :

$$a^2 = \frac{j}{\mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad (6)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = a^2 U^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Введём замену:

$$p = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = p \frac{dp}{dU}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} p \frac{dp}{dU} &= a^2 U^{-\frac{1}{2}} \\ p dp &= a^2 U^{-\frac{1}{2}} dU \\ \frac{p^2}{2} &= 2a^2 U^{\frac{1}{2}} \\ p &= 2a U^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{U^{1/4}} &= 2a dx \\ \frac{4}{3} U^{\frac{3}{4}} &= 2ax \end{aligned}$$

$$a = \frac{2U^{3/4}}{3x} \quad (8)$$

Подставим (8) в (6) и полагая, что  $x = l$ , где  $l$  - расстояние между анодом и катодом, получаем:

$$j = \frac{4\mathcal{E}_0}{9l^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U^{-\frac{3}{2}} \quad (9)$$

Учитывая, что коэффициент перед  $U$  - константа, зависящая только от геометрических свойств прибора и фундаментальных постоянных (обозначим её  $B$ ), то уравнение (9) можно переписать в виде:

$$j = BU^{3/2} \quad (10)$$