Вывод закона 3/2 Ленгмюра

GordStep

17 ноября 2025 г.

Если предположить, что электроды вакуумной трубки плоские, а температура катода постоянная, то потенциал электрического поля будет зависеть только от одной координаты x, направленной вдоль вакуумной трубки от катода к аноду.

Используем одно из уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\mathrm{div}E = \frac{\rho}{\mathcal{E}_0}$$

где ρ - объёмная плотность заряда. Спроецируем это уравнение на ось x:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{\mathcal{E}_0}en \tag{1}$$

Знак минус учитывает, что эмиттируемые электроны имеют отрицательный заряд, $\mathcal{E}_0$ - электрическая постоянная, n - концентрация электронов, E - напряжённость электрического поля.

Работа по перемещению единичного точечного положительного заряда из одной точки поля в другую вдоль оси x при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу $x_2 - x_1 = dx$, равна $E_x dx$. Та же работа равна $\phi_1 - \phi_2 = -dU$. Приравняв оба выражения, можем записать:

$$E_x = -\frac{dU}{dx} \tag{2}$$

Выразим напряжённость E через потенциал U, с помощью формулы (2). Концентрацию электронов выразим через плотность тока эмиссии: $j = enu$, а скорость электронов - из закона сохранения энергии: $mu^2/2 = eU$, где u - дрейфовая скорость электронов.

$$n = \frac{j}{eu} \tag{3}$$

$$u = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) с учётом (2), (3) и (4) принимает вид:

$$\frac{d}{dx}\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\mathcal{E}_0}e\frac{j}{e}\sqrt{m}2eU$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{j}{\mathcal{E}_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}U^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения второго порядка (5) будем искать при граничных условиях $\lim_{x\to 0} U = \lim_{x\to 0} E = 0$. Если бы электрическое поле на границе катода было больше нуля, то все электроны, испускаемые катодом, увлекались бы этим полем к аноду, и термоэлектронный ток достигал бы насыщения при любых напряжениях на вакуумной трубке. Коэффициент перед $U^{-1/2}$ обозначим за a:

$$a^2 = \frac{j}{\mathcal{E}_0}\sqrt{\frac{m}{2e}} \tag{6}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = a^2 U^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Введём замену:

$$p = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = p\frac{dp}{dU}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} p\frac{dp}{dU} &= a^2U^{-\frac{1}{2}} \\ pdp &= a^2U^{-\frac{1}{2}}dU \\ \frac{p^2}{2} &= 2a^2U^{\frac{1}{2}} \\ p &= 2aU^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{U^{1/4}} &= 2adx \\ \frac{4}{3}U^{\frac{3}{4}} &= 2ax \end{aligned}$$

$$a = \frac{2U^{3/4}}{3x} \tag{8}$$

Подставим (8) в (6) и пологая, что $x = l$, где l - расстояние между анодом и катодом, получаем:

$$j = \frac{4\mathcal{E}_0}{9l^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}U^{\frac{3}{2}} \tag{9}$$

Учитывая, что коэффициент перед U - константа, зависящая только от геометрических свойств прибора и фундаментальных постоянных(обозначим её B), то уравнение (9) можно переписать в виде:

$$j = BU^{3/2} \tag{10}$$