

Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Science in Finanzdienstleistungen / Risikomanagement

# **Erstellen von Ausscheidetafeln in der Personenversicherung**

**Masterarbeit**

im Fachbereich Wirtschaftswissenschaften II  
im Studiengang Finanzdienstleistungen / Risikomanagement  
der Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

vorgelegt von:	Gorden Pfitzmann
Matrikelnr.:	s0518012
Erstbetreuer:	Prof. Dr. Torsten Becker
Zweitbetreuer:	Dr. Richard Herrmann
Abgabetermin:	24.09.2012

## Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>IV</b>
<b>Symbolverzeichnis .....</b>	<b>V</b>
<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Ausscheidetafeln und die Datenbasis.....</b>	<b>4</b>
Einleitung und Problemstellung .....	4
2.1. Tafeltypen.....	5
2.2. Das Datenmaterial .....	6
2.3. Ausscheidewahrscheinlichkeiten.....	9
2.3.1. Sterbewahrscheinlichkeit.....	10
2.3.2. Invalidisierung .....	11
2.4. Ordnung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten .....	12
2.5. Ausscheideordnungen.....	13
2.5.1. Die Sterbetafel .....	15
2.5.2. Aktivitätsordnung .....	16
2.6. Die Lebenserwartung.....	18
2.7. Aktuelle Tafeln .....	21
2.8. Unisex-Tarife in der Personenversicherung .....	22
<b>3 Gewinnung roher Ausscheidewahrscheinlichkeiten .....</b>	<b>23</b>
Einleitung und Problemstellung .....	23
3.1. Die Personengesamtheit .....	24
3.1.1. Risikomerkmale einer Personengesamtheit.....	25
3.2. Methoden zur Ermittlung relativer Häufigkeiten .....	26
3.2.1. Die Geburtsjahrmethode.....	27
3.2.2. Die Verweildauermethode .....	29

<b>4</b>	<b>Ausgleichsverfahren .....</b>	<b>30</b>
	Einleitung und Problemstellung .....	30
4.1.	Gütemaße.....	32
4.1.1.	Glättemaß .....	32
4.1.2.	Anpassungsmaß .....	33
4.2.	Mechanische Ausgleichsverfahren .....	33
4.2.1.	Whittaker-Henderson Verfahren .....	34
4.3.	Analytische Ausgleichsverfahren .....	36
4.3.1.	Das Verfahren der Kleinsten Quadrate.....	36
4.3.2.	Ausgleichende Splines.....	38
4.4.	Zusammenfassende Betrachtung .....	39
<b>5</b>	<b>Extrapolation und Projektivität.....</b>	<b>40</b>
	Einleitung und Problemstellung .....	40
5.1.	Extrapolation in den höheren Altersklassen .....	41
5.2.	Die Projektivität.....	45
5.3.	Zusammenfassende Betrachtung .....	48
<b>6</b>	<b>Sicherheitsmargen und Tafel 1.Ordnung.....</b>	<b>48</b>
	Einleitung und Problemstellung .....	48
6.1.	Schwankungsrisiko .....	50
6.2.	Irrtumsrisiko .....	55
6.3.	Änderungsrisiko .....	56
6.4.	Zusammenfassende Betrachtung .....	57
<b>7</b>	<b>Überprüfung der biometrischen Rechnungsgrundlagen .....</b>	<b>57</b>
	Einleitung und Problemstellung .....	57
7.1.	Vorzeichentest .....	60
7.2.	Iterationstest von Walfowitz.....	62
7.3.	Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test.....	64

### III

7.4. Chi-Quadrat-Anpassungstest .....	65
7.5. Betrachtung einer einzelnen Altersklasse .....	67
7.6. Zusammenfassende Betrachtung .....	69
<b>8 Generationensterbetafel.....</b>	<b>71</b>
Einleitung und Problemstellung .....	71
8.1. Trendfortschreibung der Generationensterbewahrscheinlichkeiten .....	72
8.2. Ermittlung der Generationensterbewahrscheinlichkeiten.....	72
<b>9 Fazit/Zusammenfassung .....</b>	<b>75</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>79</b>
<b>Anhang A – Darstellung: Das Empirische Gesetz der Großen Zahlen .....</b>	<b>81</b>
<b>Anhang B – Partielle Ausscheidewahrscheinlichkeiten .....</b>	<b>83</b>
<b>Anhang C – Lösungsvorschläge für Ausgleichsverfahren.....</b>	<b>86</b>
<b>Anhang D – Computerbasierte Lösungen ausgewählter Probleme.....</b>	<b>93</b>
<b>Anhang E – Inhalt der beigelegten CD .....</b>	<b>95</b>

## Abkürzungsverzeichnis

bAV	- betriebliche Altersvorsorge
bspw.	- beispielsweise
BU	- Berufsunfähigkeit
bzgl.	- bezüglich
bzw.	- beziehungsweise
DAV bzw. DAA	- Deutsche Aktuar Vereinigung bzw. Akademie
DAV 1994 R / DAV 2004 R	- Sterbetafel DAV 1994 R / 2004 R für Rentenversicherungen
DAV 2004 T / DAV 2008 T	- Sterbetafel DAV 1994 T / DAV 2008 T für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter
DAV 2008 P	- Ausscheidetafel DAV 2008 P für die Pflegerenten(zusatz)versicherung
ebenda (auch wie vorgenannt)	- Fußnote, welche sich auf die vorgenannte Quelle bezieht
EU	- Erwerbsunfähigkeit
EuGH	- Europäischer Gerichtshof
f. bzw. ff.	- folgend bzw. fort folgend
GST	- Generationensterbetafel
ggf.	-gegebenenfalls
i.A.	- im Allgemeinen
i.d.R.	- in der Regel
i.H.v.	- in Höhe von
i.i.d.	- independent and identically distributed, eine Reihe bzw. Menge von ZV'n heißt i.i.d., wenn alle ZV'n unabhängig und identisch verteilt sind.
KI	- Konfidenzintervall
(L)GS	- (Lineares-)Gleichungssystem
LV, KV bzw. PV	- Lebens-, Kranken- bzw. Personenversicherung
o.g.	- oben genannten
PKV	- Private Krankenversicherung
PST	- Periodensterbetafel
RT 2005 G	- Richttafeln 2005 Generationentafeln
u.U.	- unter Umständen
visa versa	- umgekehrt, „mit vertauschten Plätzen“
VDR	- Verband Deutscher Rentenversicherungsträger
Vgl. bzw. Siehe	- (Fußnoten-)Vergleich (indirekt) bzw. Zitat (direkt)
VL	- Versicherungsleistung
VR bzw. VN	- Versicherer bzw. Versicherungsnehmer
ZV	- Zufallsvariable

## Symbolverzeichnis<sup>1</sup>

### Allgemein:

$\wedge$  bzw.  $\vee$

$\forall$  bzw.  $\exists$

$\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{R}$

$|A|$

$I = \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$

$1_A(i) = \begin{cases} 1, & i \in A \\ 0, & i \notin A \end{cases}$

$q_{(n+1) \times (m+1)}$

Zielfunktion  $\rightarrow \text{Min}!$

Dezimaltrennzeichen

### Wahrscheinlichkeitstheorie:

$P("..") = p$  bzw.  $P(A) = p$

ZV:  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$

$P(A|B)$

$X \sim Q$

$E(X)$

$\text{Var}(X) = \sigma_X^2$  bzw.  $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sigma_X$

$F_X(x)$

$B(p)$

$B(n, p)$

$P(\lambda)$

- Kon- bzw. Disjunktion.

- All- bzw. Existenzquantor.

- Menge der natürlichen Zahlen bzw. reellen Zahlen.

- Anzahl der Elemente der Menge A.

- Endliche Indexmenge (ggf. auch mit der 0).

- Indikatorfunktion auf Menge A.

$$-q_{(n+1) \times (m+1)} \leftrightarrow q[n+1][m+1] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & m+1 \\ \dots & & \\ n+1 & & (n+1) \cdot (m+1) \end{bmatrix}$$

;  $n, m \in \mathbb{N}$  - Zwei- bzw., für  $m = 0$ , eindimensionales Array (für  $n = 0 \wedge m = 0$  ein Element). Analog wird  $q_{(n+1) \times (m+1)}$  als Matrix bzw. Vektor (Menge) bezeichnet. Der Bezeichner  $q$  ist hier willkürlich. Der untere Index  $_{(n+1) \times (m+1)}$  gibt die Eindeutigkeit der Dimension vor.

- Optimierungsproblem, setze die Parameter bzw. variablen Werte so, so dass die Zielfunktion ihr Minimum annimmt. (Analog zum Maximum.) Ggf. unter Beachtung von Nebenbedingungen, die einzuhalten sind. Die Lösung (für die Existenz einer Lösung) kann (je nach dem) mit analytischen und/oder mit numerischen Methoden gefunden werden. Punkt („“, „“).

- Wahrscheinlichkeits- bzw. normiertes Maß des

Ausdruckes/Grammatik „...“ bzw. des Ereignisses A.  $p \in [0,1]$ .

-  $X$  produziert Zufallswerte in  $\Omega'$  mit Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, P)$ . Die Verteilung von  $X$  (unter  $P$ ) ist das induzierte

Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^X$  (Häufigkeitsverteilung potentieller Werte von  $X$ ).

- Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.

-  $X$  ist verteilt gemäß  $Q$ .

- Erwartungswert von  $X$ .

- Varianz bzw. Standardabweichung von  $X$ .

- Verteilungsfunktion von  $X$ .

- Bernoulli(p)-Verteilung (diskrete Verteilung).

- Binomial(n,p)-Verteilung (diskrete Verteilung).

- Poisson(p)-Verteilung (diskrete Verteilung).

<sup>1</sup> Angelehnt an Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), Beichelt / et.al. (2003), Behnen, K. / Neuhaus, G. (2003).

$$N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z = (X - E(X)) / \sigma_X$$

$$\Phi(x)$$

- Normalverteilung mit dem Erwartungswert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$  (stetige Verteilung).
- Standardisierung von  $X$  mit  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .
- Verteilungsfunktion von  $Z \sim N(0,1)$  bzw. von  $X \sim N(0,1)$ .

### Mathematische Statistik:

$$X_i, i \in I \text{ bzw. } (X_i = x_i), i \in I$$

$$(X, Y)$$

$$(X = x, Y = y) \text{ bzw. } \{(x_i, y_i)\}, i \in I$$

$$x_\alpha$$

$$z_\alpha = x_{1-\alpha} \text{ für } 0 < \alpha < 0.5$$

$$T = T(X_i) \text{ bzw. } T(x_i), i \in I$$

$$\alpha \text{ bzw. } 1 - \alpha$$

- Mathematische Stichprobe bzw. Realisierungen von  $X_i$ .
- Zweidimensionale ZV bzw. Zufallsvektor.
- Realisierung von  $(X, Y)$  bzw. eine konkrete Stichprobe aus einer verbundenen mathematischen Stichprobe  $(X_i, Y_i), i \in I$ .
- $\alpha$  - Quantil  $x_\alpha$  von  $X$  mit  $F_X(x)$ . Definition:  
 $F_X(x_\alpha) = \alpha, 0 < \alpha < 1$ .
- $(1 - \alpha)$  - Quantil von  $Z \sim N(0,1)$ .
- (Zufällige) Testfunktion bzw. Testgröße (Realisierung von  $T$ ).
- Irrtums- bzw. Sicherheitswahrscheinlichkeit (bzgl. Konfidenzintervalle und Tests)

### Versicherungsmathematik (Biometrisches Risiko):

$$x \text{ bzw. } y$$

$$x = \omega \text{ bzw. } y = \omega$$

$$AB = [x_0, \dots, x_n] \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

$$L$$

$$l_x$$

$$d_x$$

$$b = [t, t + \Delta]$$

$$e_x$$

$$q_x \text{ bzw. } q_{x,t}$$

$$p_x = 1 - q_x$$

$${}^G q_x$$

$$q_x^j$$

$$q_x^k$$

$$i_x$$

$$s \text{ bzw. } s_x$$

- Ganzzahlige Alter der Männer bzw. Frauen.
- Endalter der Männer bzw. Frauen.
- Altersbereich der Männer (Analog für Frauen mit  $y$ ).
- Personengesamtheit.
- Anzahl der  $x$  - Jährigen (Männer) einer Personengesamtheit.
- Anzahl der  $x$  - Jährigen Gestorbenen (Männer).
- Beobachtungsperiode mit  $t$  als Datum (kleinste Zeiteinheit).  
und  $\Delta$  als Periodenlänge (i.d.R. in Jahren). Bspw. folgt für  $t = 1.1.2000$  und  $\Delta = 10$  Jahre, dass  $b = [1.1.2000, 1.1.2010] = [1.1.2000, 31.12.2009]$  ist. Analoge Modellierung für den Geburtszeitraum.
- Mittlere Lebenserwartung eines  $x$  - Jährigen.
- Sterbewahrscheinlichkeit eines  $x$  - Jährigen als  $x$  - Jähriger zu versterben bzw. Sterblichkeit eines  $x$  - Jährigen im Jahr  $t$ .
- Überlebenswahrscheinlichkeit eines  $x$  - Jährigen (Mannes) das Alter  $x+1$  zu erleben.
- Sterblichkeit eines  $x$  - Jährigen mit Geburtsjahr  $G$  (auch  $\tau$ ).
- ( $j = a$ ) Aktivensterbe-, ( $j = i$ ) Invalidensterbe-, ( $j = r$ ) Rentnersterbe-, und ( $j = w$ ) Witwensterbewahrscheinlichkeit einer  $x$  - Jährigen Person.
- ( $k = 1$ . Ordnung) oder ( $k = 2$ . Ordnung) Sterbewahrscheinlichkeit 1.- oder 2. Ordnung bzw. ( $k = \text{'roh'}$ ) oder ( $k = \text{'ausg'}$ ) rohe- oder ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit einer  $x$  - Jährigen Person.
- Invalidenwahrscheinlichkeit eines  $x$  - Jährigen.
- Altersun- bzw. abhängiger Schwankungszu-/Abschlag.

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Prozessschema.....	3
Abbildung 2: Tafeltypen.....	6
Abbildung 3: Auswahl der Personengesamtheit.....	7
Abbildung 4: Prozess der Ordnungen der Rechnungsgrundlagen.....	12
Abbildung 5: Populationsmodell der RT 2005 G.....	14
Abbildung 6: Spezialfälle von Ausscheideordnungen.....	15
Abbildung 7: Sterbetafel.....	16
Abbildung 8: Aktivitätsmodell.....	17
Abbildung 9: Durchschnittliche Lebenserwartung Neugeborener.....	19
Abbildung 10: Lebenserwartung im Vergleich: Zwei fiktive Sterblichkeitsverläufe.....	21
Abbildung 11: Beispiel: Whittaker-Henderson-Verfahren.....	35
Abbildung 12: Vorgehensweise zur menügeführten Modelllösung mittels SPSS – Nichtlineare Regression.....	42
Abbildung 13: Beispiel: Extrapolation in den hohen Altern mittels des Logistischen Modells.....	42
Abbildung 14: Beispiel: Extrapolation in den hohen Altern mittels des modifizierten Gompertz-Ansatzes.....	43
Abbildung 15: Beispiel: Traditionelles Modell für das Alter 20.....	46
Abbildung 16: Beispiel: Schwankungsrisikobetrachtung.....	54
Abbildung 17: Das Vorgehen bei Testverfahren.....	60
Abbildung 18: Beispiel: Vorzeichen- und Iterationstest.....	64
Abbildung 19: Beispiel: Vorzeichen-Rang-Test.....	65
Abbildung 20: Beispiel: Chi-Quadrat-Anpassungstest.....	67
Abbildung 21: Beispiel: Betrachtung einzelner Altersklassen.....	69
Abbildung 22: Ergebniszusammenfassung der Beispiele.....	69
Abbildung 23: Diagonalisierung.....	73
Abbildung 24: Beispiel: Kontinuierlich- und schrittweise-exponentielles Modell.....	74
Abbildung 25: Beispiel: Zustandsmodell.....	81
Abbildung 26: Algorithmus zur Erzeugung der Schätzkurve $q_x^{\sim}$ .....	82
Abbildung 27: Beispiel: Bernoulli-Experiment.....	82
Abbildung 28: Modellbetrachtung: Abhängige Wahrscheinlichkeiten.....	83
Abbildung 29: Modellbetrachtung: Unabhängige Wahrscheinlichkeiten.....	84
Abbildung 30: Visueller Zusammenhang zwischen den ab- und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten.....	84
Abbildung 31: Prozess zur Vorgehensweise zur Ableitung der abhängigen- aus den partiellen Wahrscheinlichkeiten.....	86
Abbildung 32: Algorithmus zur Ableitung der abhängigen Wahrscheinlichkeiten (siehe (*) in Abb.).....	86
Abbildung 33: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix K.....	87
Abbildung 34: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix W.....	87
Abbildung 35: Beispiel: Whittaker-Henderson-Verfahren-Steigende Differenzordnungen.....	88
Abbildung 36: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix L.....	90
Abbildung 37: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix T.....	90
Abbildung 38: Beispiel: Rohe Werte und zugehörige Funktion zur Bestimmung des Lagrange-Parameter... ..	90
Abbildung 39: Algorithmus für Ausgleichende Splines.....	92
Abbildung 40: Beispiel: Spline-Ausgleich mit verschiedenen Anpassungswert.....	92
Abbildung 41: Beispiel: Spline-Ausgleich mit verschiedenen Gewichten.....	93
Abbildung 42: Rekursiver Algorithmus zur Erzeugung einer Sterbetafel mit gegebenen Sterblichkeiten.....	94
Abbildung 43: Algorithmus zur Erzeugung der verbleibenden Lebenserwartung eines x-Jährigen.....	94
Abbildung 44: Algorithmus zur Erzeugung des Wahrscheinlichkeitsproduktes als x-Jähriger das x+k.Lebensjahr zu erreichen.....	94
Abbildung 45: Algorithmus zur Diagonalisierung.....	95



## 1 Einleitung

„Versicherungsgeschäfte betreibt, wer, [...] gegen Entgelt verpflichtet ist, ein wirtschaftliches Risiko derart zu übernehmen, dass er anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, [...]“.<sup>2</sup> Die zu erbringenden Leistungen des Versicherers hängen vom Eintritt ungewisser Ereignisse ab. Die Ungewissheit hinsichtlich des versicherten Ereignisses stellt ein Hauptmerkmal eines Versicherers (VR's) dar. Versicherte Ereignisse können ungewiss hinsichtlich der Tatsache des Eintrittes, des Eintrittszeitpunktes oder der Qualität des Eintrittes (Art, Ausmaß) sein. So ist zum Beispiel der Zeitpunkt des Ereignisses „menschlicher Tod“ ungewiss, jedoch die Tatsache des Ereignisses nicht. Wohingegen für das Ereignis „invalide werden“ die Tatsache, der Zeitpunkt und das Ausmaß ungewiss sind.<sup>3</sup>

Ein weiteres Hauptmerkmal des Versicherungsgeschäfts stellen die Risikokalkulation und der Risikoausgleich im Versicherungskollektiv dar. Der VR gibt den Personen im Kollektiv ein Versprechen, und zwar, beim Eintritt eines versicherten Ereignisses den Schaden zu decken. Das versicherte Ereignis stellt für den VR das versicherte Risiko dar. Die systematischen Veränderungen von langfristig übernommenen Risiken stellen den VR vor eine schwierige Aufgabe.<sup>4</sup> Risiken, die das Leben und den Lebensunterhalt einer Person betreffen, nennt man biometrische Risiken.<sup>5</sup> Dazu zählen das Todesfallrisiko, das Langlebighkeitsrisiko und das Invaliditätsrisiko einer Person.<sup>6</sup> Versicherungen, die dazu dienen persönliche Risiken abzusichern, fasst man unter dem Begriff der Personenversicherungen. Diese gliedert sich in die Lebens- (LV), Kranken- (KV), Pensions- und Pflegeversicherung. Zu den Arten der Lebensversicherungen werden (in Deutschland) die Erlebensfall-, Todesfall-, gemischte Kapital-, Pflegerenten-, Pensions- und Altersrentenversicherung gezählt.

---

<sup>2</sup> Siehe Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 2.

<sup>3</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 3. Da die Invalidität nicht eintreten muss. Der Zeitpunkt des Eintrittes (Lebensalter), sowie der Grad der Invalidität (somit die Schadenshöhe) ist ungewiss.

<sup>4</sup> Die Zukunft wird niemals absolut risikofrei sein, demnach geht es darum größtmögliche Risiken bzw. Ereigniseintritte und deren Konsequenzen aufzudecken.

<sup>5</sup> Weitere versicherbare Risikogruppen sind Schadenrisiken, Haftungsrisiken und Kostenrisiken.

<sup>6</sup> Das Invaliditätsrisiko sei hier stellvertretend genannt für die Berufs- und/oder Erwerbsunfähigkeit einer Person oder der Schutz im Pflegefall (bis hin zu Demenz) einer Person. Die Leistungsdefinitionen sind je nach Eintritt bzw. Konsequenz für VN und VR unterschiedlich.

Mit der wachsenden Anzahl gleichartiger Risiken im Kollektiv, wird das Zufällige der Einzelereignisse statistisch messbar bzw. kontrollierbar. Folglich wächst die Qualität des Ausgleichs im Kollektiv mit Hinzunahme gleichartiger Risiken. Der Grad der Gewissheit bzw. Ungewissheit des Eintretens eines zufälligen Ereignisses wird durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmt.<sup>7</sup> Der Ausgleich in der Zeit erfolgt für biometrische Risiken alleine durch den VR im Kollektiv.<sup>8</sup> Aufgabe des VR's ist es ein optimales Kollektiv zu bauen, also ein Kollektiv mit gleichartigen Risiken. Dies geschieht durch Bildung von homogenen Risikogruppen bspw. durch Zuordnung von Risikomerkmale.

Milbrodt, H. / Helbig, M. beschreiben das Zufallsgeschehen in der Personenversicherung, welche dadurch charakterisiert ist, dass eine Person zwischen endlich vielen Zuständen zu zufälligen Zeiten wechselt (bzw. aus einem Zustand ausscheidet und in einen Folgezustand eintritt), mittels kontinuierlicher Zeit und Zustandsräumen. Bei der Beschreibung solcher Prozesse bedient man sich der Markov-Eigenschaft<sup>9</sup>. Mittels Ausscheidetafeln diskretisiert man das Problem zu ganzzahligen Zeitpunkten. Die Annahme ist, dass die Risiken einer Person nur von definierten Risikomerkmale abhängen. Die ermittelten einjährigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden vertafelt und mit zusätzlichen Elementen bilden sie die Ausscheidetafel.<sup>10</sup>

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Methoden zur Erstellung einer Ausscheidetafel. Der Schwerpunkt liegt in der Erstellung von Periodentafeln, ebenso erfolgt eine kurze Beschreibung von Generationentafeln. In der Abbildung 1 ist das methodische Vorgehen zur Herleitung der biometrischen Rechnungsgrundlagen, bzw. zur Erstellung der Ausscheidetafeln (Periodenanalyse) visualisiert. Die Übergänge sollen durch (mathematische) Methoden, sowie durch Aktuarsentscheidungen<sup>11</sup> abgebildet werden. Die Ergebnisse können als Zustände betrachtet werden. Ein Zustandswechsel (beim

---

<sup>7</sup> Betrifft folgende Disziplinen: Stochastik, Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Risikothorie. Das Risiko kann aus mathematischer Sicht als Zufallsvariable angesehen werden, folglich mit unbekannter Realisation aus einer Menge möglicher Realisationen. Wobei man ein Wahrscheinlichkeitsmaß über die Menge aller möglichen Realisationen (Mengensystem) definiert.

<sup>8</sup> Vgl. Int[1], S. 2.

<sup>9</sup> Bzw. Gedächtnislosigkeit, der Prozess hängt vom aktuellen Zustand ab und nicht von der Vorgeschichte.

<sup>10</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 98.

<sup>11</sup> Die Entscheidungen bzgl. der biometrischen Rechnungsgrundlagen werden von einem Aktuar getroffen. Ein Aktuar ist ein wissenschaftlich Ausgebildeter, der mit mathematischen Methoden Fragestellungen insbesondere aus der Versicherungswirtschaft analysiert und unter Berücksichtigung des rechtlichen und wirtschaftlichen Umfeldes Lösungen entwickelt. Siehe [https://aktuar.de/dav/beruf\\_aktuar/berufsbild/](https://aktuar.de/dav/beruf_aktuar/berufsbild/).

methodischen Vorgehen) kann von mehreren Verfahren bzw. Methoden und Aktuarsentscheidungen abhängen.

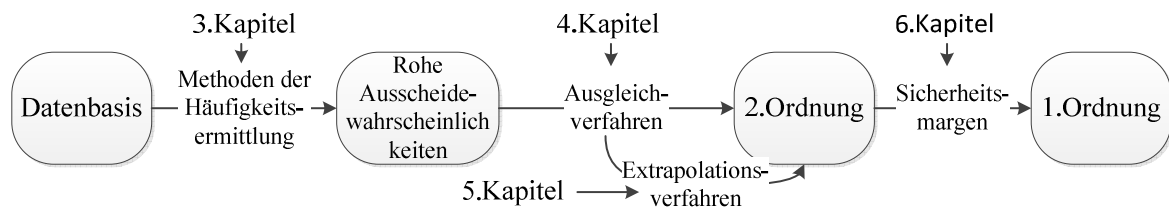


Abbildung 1: Prozessschema

Quelle: Eigene Darstellung.

Ziel der Arbeit ist es, einen Einblick in der Erstellung von Ausscheidetafeln und in Ausscheidewahrscheinlichkeiten als Rechnungsgrundlage zu erlangen. Die einzelnen Methoden zur Erstellung einer Ausscheidetafel sollen systematisch vorgestellt und untersucht werden. Dabei soll der interaktive Prozess zur Erstellung der Ausscheidetafeln zwischen mathematischen Methoden und Aktuarsentscheidungen analysiert werden. Insbesondere werden Methoden vorgestellt, die sich bisher in der Praxis bewährt haben.

Im 2. Kapitel werden auf detaillierte Weise einzelne Grundlagen, welche Ausscheidetafeln betreffen, beschrieben. Die Kapitel 2.1., 2.5. und 2.7 geben eine erste Einführung in die verschiedenen Tafeltypen, Ausscheideordnungen und aktuellen Ausscheidetafeln (mit ihrer Anwendung). Auf die Besonderheiten der gegebenen Datenbasis und der abzuleitenden Ausscheidewahrscheinlichkeiten wird im Kapitel 2.2. und 2.3 eingegangen. Das anschließende Kapitel befasst sich dann mit der Gewinnung der rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Zusätzlich wird im Anhang A das Grundprinzip des empirischen Gesetzes der Großen Zahlen, am Beispiel einer Ausscheidewahrscheinlichkeit, erläutert.

Im 4. Kapitel wird der Übergang von den rohen zu den ausgeglichenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten gegeben. Die verschiedenen mathematischen Ausgleichsverfahren werden klassifiziert und ein Praxisbezug wird hergestellt. Die Ergebnisse, die ausgeglichenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, werden aus aktuarieller Sicht interpretiert. Auf Stärken und Schwächen der einzelnen Verfahren und auf aktuarielle Kriterien und Güte des Ausgleichs wird eingegangen. Der Anhang C stellt Lösungsmodellierungen und Beispiele der relevanten Ausgleichsverfahren dar.

Im 5. Kapitel wird auf die Extrapolation niedriger und höherer Altersklassen eingegangen. Dabei werden verschiedene Modelle vorgestellt, die sich in der Praxis bewährt haben. Ferner werden Modelle zur Projektivität angegeben. Hierzu gibt das Kapitel 2.6. vorab ein Grundverständnis zur Lebenserwartung. Im 6. Kapitel wird auf die Einarbeitung von Sicherheitsmargen eingegangen. Die Notwendigkeit von Sicherheitsmargen wird aus Versicherungssicht erläutert. Hierfür dient zusätzlich das Kapitel 2.2. als Grundlage der Ordnungen der Rechnungsgrundlagen.

Das 7. Kapitel dient der Überprüfung der Rechnungsgrundlagen. Es werden verschiedene statistische Methoden vorgestellt und anhand von Beispielen aus aktuarieller Sicht interpretiert. Das 8. Kapitel beschäftigt sich mit Generationensterbetafeln. Weiterhin werden im Kapitel 2.7. Unisex-Tarife erläutert, im Anhang B wird auf die Ableitung abhängiger Wahrscheinlichkeiten eingegangen und im Anhang D werden computerbasierte Lösungen für einzelne ausgewählte Berechnungen angegeben.

Zum Abschluss der Arbeit wird eine Zusammenfassung der beschriebenen Methoden vorgenommen und eine persönliche Einschätzung zur Anwendbarkeit gegeben. Ferner wird ein Ausblick hinsichtlich verschiedener Aspekte und Verfahren vorgenommen.

## **2 Ausscheidetafeln und die Datenbasis**

Zweck von Ausscheidetafeln ist es zu beurteilen, wie sich ein Bestand künftig entwickelt hinsichtlich eines oder mehrerer Risiken. Die Ausscheidewahrscheinlichkeiten stellen eine versicherungsmathematische Rechnungsgrundlage dar und dienen unter anderem der Kalkulation versicherungstechnischer Rückstellungen, der Beitragskalkulation und der Kalkulation von Prognoserechnungen. Je nach Versicherungsart werden unterschiedliche biometrische Rechnungsgrundlagen verwendet. Das Versicherungskollektiv bzw. der Bestand, welcher auf Antrag auch zunehmen kann, kann durch eine oder mehrere Ausscheidegründe (Risiken) abnehmen, genau dann, wenn eine Versicherungsleistung eintritt. Bspw., im Fall der Todesfallversicherung steht dann das Versicherungskollektiv

für die Versicherungssumme ein.<sup>12</sup> Die möglichen Ausscheidegründe betreffen dabei immer den Versicherungsnehmer (VN) im Kollektiv.<sup>13</sup> Folglich ändert ein VN seinen Zustand, bspw. kann eine Person, welche sich heute im Zustand Aktiv befindet in den Folgezustände Tod mit oder ohne Hinterbliebene, Invalidität, Kündigung (Storno) oder Altersrentner übergehen. Dabei ist der Zeitpunkt eines Zustandswechsels, die Lebenszeit und der Zustandspfad den ein VN in seiner Lebenszeit durchläuft ungewiss. Der Grad der Gewissheit der Übergänge bzw. Ausscheidung aus einem Zustand wird durch Übergangs- bzw. Ausscheidewahrscheinlichkeiten beschrieben. Um die Ausscheiderisiken eines Bestandes quantitativ zu erfassen, benutzt man Ausscheidetafeln bzw. Ausscheideordnungen. Diese Tafeln enthalten die einjährigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten als Funktion für ganzzahlige Alter, welche Schätzwerte der Risikoausprägungen darstellen. Die Ausscheidetafeln werden nach dem Geschlecht getrennt bestimmt. Eine einfache Ausscheideordnung berücksichtigt nur einen Ausscheidegrund (eine Person unter einem einzigen Risiko stehend).<sup>14</sup> Das Ausscheiderisiko (z.B. Sterblichkeit) wird durch die Risikomerkmale und deren Ausprägungen beeinflusst.<sup>15</sup> Liegen mehrere Ausscheideursachen vor, so findet die zusammengesetzte Ausscheideordnung Anwendung.<sup>16</sup>

## 2.1. Tafeltypen

Man unterscheidet zwischen der Längsschnittanalyse (Kohorten- oder Generationsanalyse → siehe Kapitel 8), bei welcher alle Personen eines Geburtsjahrganges betrachtet werden, und der Querschnittanalyse (Periodenanalyse). Beim Letztgenannten betrachtet man alle Lebenden und Gestobenen bzw. Ausgeschiedenen des Beobachtungszeitraumes, somit alle Geburtsjahrgänge einer Periode gleichzeitig. Eine Periodentafel mit einem gegebenen Ausscheidegrund, bildet die Ausscheideverhältnisse der betrachteten Personengesamtheit während eines Beobachtungszeitraums ab → **Momentaufnahme**. Zukünftige Trends

---

<sup>12</sup> In der Summenversicherung ist die Versicherungssumme i.d.R. ein vorher vereinbartes Kapital, welche auch zufallsabhängig sein kann, bspw. todeszeitabhängige Versicherungsleistung. Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 5.

<sup>13</sup> Die Ereignisse, die zu einer Versicherungsleistung in der Personenversicherung führen können.

<sup>14</sup> Das individuelle Risiko kann durch solche Tafeln nicht abgebildet werden, vielmehr stellen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten zeitliche Mittelwerte dar.

<sup>15</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 98. Auf Risikomerkmale wird im Kapitel 3 eingegangen.

<sup>16</sup> Siehe Aktivitätsordnung (Kapitel 2.5.2.) mit zwei Ausscheideursachen.

werden durch Periodentafeln nicht abgebildet.<sup>17</sup> Die folgende Tabelle gibt verschiedene Typen von Tafeln und ihre Charakteristika an. Da Ausscheidetafeln nach dem Geschlecht getrennt erfasst werden und die folgenden Betrachtungen für beiderlei Gesamtheiten Gültigkeit besitzen, wird im Weiteren, wenn nicht explizit angegeben, angenommen, dass es sich, um eine Männergesamtheit handle.

Aggregattafel	Sterbetafeln, die lediglich nach dem Alter abgestuft sind.
Selektionstafeln	Abgestuft nach dem Alter und der Versicherungsdauer.
Invalidensterbetafel	Abgestuft nach dem Alter und der Invaliditätsdauer.
Generationen-sterbetafel	Abgestuft nach dem Alter und dem Kalenderjahr, bezieht sich auf die komplette Lebensdauer einer Generation bzw. eines Geburtsjahrganges.
Periodensterbetafel	Querschnittanalyse, bezieht sich auf den Beobachtungszeitraum.
Dekrementtafel	Berücksichtigt Tod und Storno als Ausscheideursache.
Kompakttafel	Lediglich nach der Versicherungsdauer abgestuft.
Tafeln der Versicherungswirtschaft	Dienen ihren jeweiligen Versicherungszweck.
Tafeln des Statistischen Bundesamtes	Dienen der Untersuchung für Bevölkerungsvorausberechnungen, der Auskunft über durchschnittliche geschlechtsspezifische Lebenserwartungen und der Beurteilung der Sterblichkeitsverhältnisse von Deutschland.

Abbildung 2: Tafeltypen.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Saxer, W. (1955), S.18 f.

Der Ausscheidgrund einer Ausscheidetafel gibt das Risiko vor, welches betrachtet wird. Risiken können auch zusammengefasst und unter einem einzigen Ausscheidegrunde betrachtet werden, bspw. Tod und Storno bei Dekrementtafeln.

## 2.2. Das Datenmaterial

Das Datenmaterial bzw. das Ausgangsmaterial zur Erstellung der biometrischen Rechnungsgrundlagen muss sorgfältig ausgewählt werden und sich eng an dem zu untersuchten Personenkreis orientieren. Die ermittelten Kennzahlen können nicht auf beliebige Personengesamtheiten verallgemeinert werden. Idealerweise sollten die beiden Gesamtheiten, die aus der die Ausscheidewahrscheinlichkeiten gewonnen wurden und die für die sie ermittelt worden sind, hinsichtlich der Risikomerkmale übereinstimmen.<sup>18</sup> Die

<sup>17</sup> Vgl. DAV[6], S. 200. und Heubeck, K. (2005), S. 10. Eine gewisse Projektivität kann durch Sicherheitsmargen berücksichtigt werden. Siehe Kapitel 6.

<sup>18</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 103. Auf die Risikomerkmale wird im Kapitel (3.1.1.) eingegangen, die Definition der Personengesamtheit ist in (3.1.) beschrieben.

folgende Abbildung visualisiert die Grundidee (vereinfacht dargestellt). Die Personen, für welche die Ausscheidewahrscheinlichkeiten angewandt werden, sollten der Personengesamtheit, aus welcher sie ermittelt wurden, ähneln.

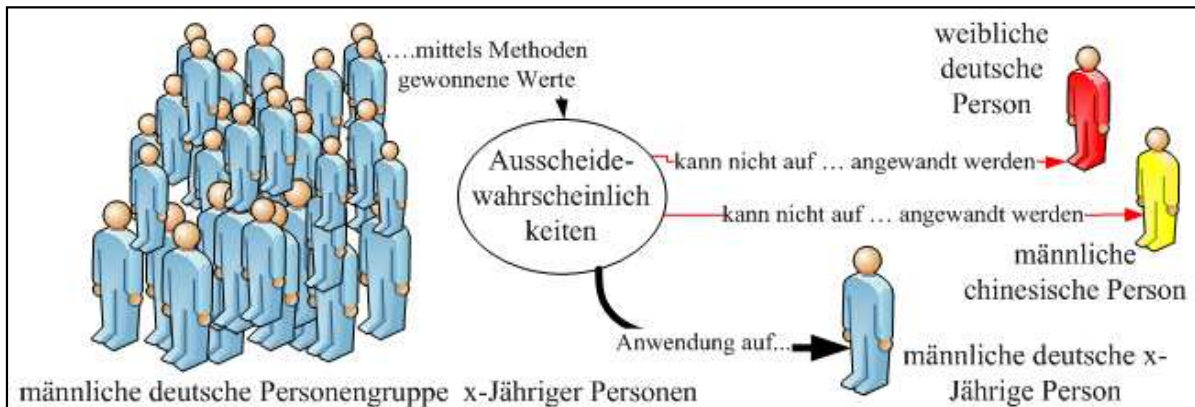


Abbildung 3: Auswahl der Personengesamtheit.

Quelle: Eigene Darstellung.

Somit hängen die Ausscheidewahrscheinlichkeiten von der Art des beobachteten Bestandes und auch von der Länge der Beobachtungsdauer ab.<sup>19</sup> Die ermittelten Ausscheidetafeln sind auf ihren jeweiligen Versicherungszweck ausgerichtet und nicht auf beliebige Personengesamtheiten verallgemeinbar.

Das Datenmaterial, aus welchen die relativen Häufigkeiten bzw. die Schätzwerte gewonnen werden, muss ausreichend groß sein, da ansonsten eine vorgegebene Schätzgenauigkeit nicht gegeben ist. Umso größer die betrachtete Personengesamtheit ist, desto kleiner sind die Schätzfehler.<sup>20</sup> Die Idee, die dahinter steckt, wird anhand eines Beispiels im Anhang A beschrieben.

Für einen ausreichend großen Bestand, sollten unternehmenseigene Daten herangezogen werden. Im anderen Fall werden oft große Personengesamtheiten zur Schätzung hinzugezogen. Aber auch im erstgenannten Fall werden große Personengesamtheiten zum Vergleich herangezogen, um bspw. zukünftige Tendenzen abzuschätzen und um die Daten zu plausibilisieren. Ist der Bestand nicht ausreichend groß, so kann ein VR die unternehmenseigene Daten mittels einer festen Referenztafel (bspw. Bevölkerungssterbetafeln / Tafeln der DAV) anpassen, um eine statistisch gesicherte Tafel zu erstellen. Milbrodt, H. / Helbig, M. erläutern bspw., dass dies (annahmegemäß) mittels

<sup>19</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 18.

<sup>20</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 14. und Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 103.

eines funktionalen Zusammenhangs zwischen einer Referenztafel und den unternehmenseigenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten beschrieben werden kann.<sup>21</sup> Eine Überprüfung der modifizierten biometrischen Rechnungsgrundlagen kann mit den im Kapitel 7 erläuterten Methoden erfolgen. Es obliegt dem Aktuar zu prüfen, ob unternehmensindividuelle Sachverhalte bestehen, die gegen oder für eine bestehende Ausscheidetafel sprechen. Denn ein Versicherungsbestand kann sich bzgl. des Wahrscheinlichkeitsniveaus (bspw. durch Kundenstruktur oder der Verteilung der Versicherungssummen) oder auch durch die Bestandsstruktur (bspw. Altersstruktur) von einer vorgegebenen Referenztafel unterscheiden. Demzufolge sind Ausscheidewahrscheinlichkeiten und Sicherheitsmargen vom Aktuar zu überprüfen.<sup>22</sup>

Abhängig vom Zweck der Ausscheidetafeln (vom Versicherungszweck) lassen sich folgende Statistiken bzw. Datenmaterialien verwenden:

- Bevölkerungsstatistiken des Statistischen Bundesamtes.  
Diese Statistiken geben Auskunft über die Sterblichkeitsverhältnisse, geschlechtsspezifische durchschnittliche Lebenserwartungen, zukünftige Entwicklungstendenzen der Lebenserwartung und der Sterblichkeit (auf Basis der Daten seit 1871), Heiratswahrscheinlichkeiten, Erwerbstätigkeit der deutschen Bevölkerung.
- Verband Deutscher Rentenversicherungsträger (VDR).  
Diese Statistiken geben Auskunft über Rentenbestände der gesetzlichen Rentenversicherung, über jährliche Rentenzugänge und Wegfalle, über Sterbewahrscheinlichkeiten von Rentner, Witwern(-en) und Invaliden und über Versicherte im Aktivstatus.
- Datenmaterial aus Versicherungsbeständen.
  - Bspw. wurde unter anderem ein Datenpool deutsche LV-Bestände bei der Erstellung der DAV 2008 T verwendet.
  - Bei der Ableitung der Sterbewahrscheinlichkeiten der Pflegebedürftigen der DAV 2008 P wurde unter anderem auf Beobachtungsdaten von Rückversichern zurückgegriffen.
- Verband der privaten Krankenversicherungen e.V. (PKV-Verband).  
Bei der Erstellung der DAV 2008 P wurde auf den Schadenserfahrungen des PKV-Verbands zurückgegriffen. Die zur Verfügung gestellten Daten lagen in Form von Anzahlen der Pflegebedürftigen und der Versicherten vor, deren Verhältnis die

---

<sup>21</sup> Der funktionale Zusammenhang könnte bspw. mittels der Methode der Kleinsten Quadrate (siehe 4.3.1.) erfolgen. Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 102.

<sup>22</sup> Vgl. DAV[1], S. 4.



Pflegeprävalenz (Pflege-Krankheitshäufigkeit) darstellt. Alle versicherten Personen der Mitgliedsunternehmen des PKV-Verbandes stellte die Grundgesamtheit dar.<sup>23</sup>

- Gesetzliche Pflegeversicherungen.

### 2.3. Ausscheidewahrscheinlichkeiten

Die Ausscheidewahrscheinlichkeiten sind als relative Häufigkeiten des **Eintretens oder Nichteintretens** eines bestimmten Ereignisses gemäß der Ausscheideordnung zu betrachten.

Je nach Versicherungsart werden unterschiedliche Ausscheidegründe berücksichtigt. In der Lebens- und Krankenversicherung werden der Tod und der Austritt (Storno, Kündigung) berücksichtigt.<sup>24</sup> In der Pensionsversicherung kommt noch die Invalidität als Ausscheidgrund hinzu. Die Ausscheidewahrscheinlichkeiten sind der Grundbaustein einer jeden Ausscheideordnung und dienen dazu (aus heutiger Sicht) künftige Bestandsentwicklungen aufzuzeigen. Die weiteren Elemente einer Ausscheideordnung (wie die Kohorten oder die Anzahlen der Ausgeschiedenen) lassen sich aus den Ausscheidewahrscheinlichkeiten ableiten. Im Anhang A ist erklärt was die Grundidee der konsistenten Wahrscheinlichkeiten darstellt. Dabei muss ein Aktuar sorgfältig prüfen, aus welchem Datenbestand die Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden bzw. auf welchem sie anzuwenden sind. Weiterhin gilt, dass diese statistisch gesicherten Wahrscheinlichkeiten zeitlich nicht konstant sind. Deshalb müssen die Wahrscheinlichkeiten im Laufe der Zeit immer wieder neu bestimmt werden.<sup>25</sup> Dies liegt daran, dass die Ausscheidewahrscheinlichkeiten sich auf Ereignisse beziehen, welche Personen betreffen (bspw. „sterben“, „invalide werden“ oder „stornieren“). Je nachdem unterliegen die Ausscheidegründe wirtschaftlichen, politischen und gesellschaftlichen Maßnahmen bzw. Einflüssen. Ebenso unterliegen Personen, mit gleichem Ausscheidgrund, nicht demselben Risiko (wie in 2.2. dargestellt). Aus diesem Grund soll in (2.3.1) und in (2.3.2) zusätzlich auf die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und deren Einflüsse eingegangen werden.

---

<sup>23</sup> Vgl. DAV[4], S. 4 f.

<sup>24</sup> In der KV haben die Kopfschäden (Rechnungsgrundlage) den größten Einfluss auf den Beitrag.

<sup>25</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 8.

### 2.3.1. Sterbewahrscheinlichkeit

Jede Person unterliegt dem Sterblichkeitsrisiko. Versichert sich nun diese Person bei einem VR, so obliegt es dem VR das Sterblichkeitsrisiko einzuschätzen. Neben dem Versichertenkollektiv können verschiedene Datenquellen (siehe 2.2.) genutzt werden, um konsistente Werte zu ermitteln. Die Bevölkerungssterbewahrscheinlichkeiten des statistischen Bundesamtes stehen repräsentativ für die deutsche Bevölkerung. Diese einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten können nicht als zeitlich konstant angesehen werden, da sie eine sogenannte säkulare Änderung aufweisen.<sup>26</sup> Bomsdorf, E. erläutert in seiner Analyse zur Lebenserwartung und somit zu den Sterblichkeitsverhältnissen, dass Modellrechnungen zur zukünftigen Sterblichkeitsverhältnissen eine große Qualität aufweisen, da politische und gesellschaftliche Maßnahmen nur einen geringen denkbaren Einfluss auf die zukünftigen Lebenserwartungen haben.<sup>27</sup> Fällt die Betrachtung auf einzelne Teilpopulation der deutschen Bevölkerung, so können diese niedrigere- oder höhere Sterbewahrscheinlichkeiten als die der Gesamtbevölkerung aufweisen.<sup>28</sup> Populationen mit gleichartigen Risiken bilden homogene Gesamtheiten (gemäß 2.2. und 2.5.), deren Sterblichkeitsverhältnisse gilt es zu ermitteln, um eine Risikogerechtigkeit bei der Bewertung zu erzielen und um den Ausgleich im Kollektiv zu verbessern.

Risikofaktoren bzw. Merkmale, die einen Einfluss auf die Sterblichkeit haben sind bspw. das Alter, das Geschlecht, der Raucherstatus, der Familienstand, der Beruf, der Gesundheitszustand, die Dauer der zurückgelegten Versicherungszeit und sozialökonomische Gesichtspunkte.<sup>29</sup> Im Weiteren soll kurz auf die jeweiligen Sterblichkeiten verschiedener Personengruppen eingegangen werden:

- Die **Sterblichkeiten der Invaliden**  $q_x^i$  ist höher als die der Aktiven  $q_x^a$ , das folgt aus dem Fakt, dass invalide gewordene Personen einer Krankheit unterliegen.

---

<sup>26</sup> Eine Änderung, die eine bestimmte Tendenz aufweist. Vgl. Saxer, W. (1955), S. 25. Die Tendenz bezieht sich auf eine Sterblichkeitsabnahme. Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 100. Rückgänge der Bevölkerungssterblichkeiten wurden beobachtet bei den Neugeborenen Ende des 19. Jahrhunderts und verstärkt Mitte des 20. Jahrhunderts bei älteren Menschen. Verursacht wird dieser Rückgang durch den medizinischen Fortschritt und durch verbesserte Hygiene, Ernährung, Wohn- und Arbeitssituation, sowie durch gestiegenen materiellen Wohlstand. Vgl. Statist[1], S. 29.

<sup>27</sup> Vgl. Int[1], S. 25.

<sup>28</sup> Die Bevölkerungssterbewahrscheinlichkeiten bilden Durchschnittswerte für ganz Deutschland. Somit können keine Schlüsse auf einzelne Gruppen gemacht werden.

<sup>29</sup> Vgl. Int[5], S. 3.

Weiterhin lässt sich feststellen, dass die  $q_x^i$  ebenfalls von der Invaliditätsdauer abhängt.<sup>30</sup>

- Die **Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven** wurde bspw. bei den RT 2005 G aus der Gesamtsterblichkeit abgeleitet (siehe 2.5.2). Dass die Sterblichkeit der Aktiven unter der Gesamt- und Invalidensterblichkeit liegt, folgt aus dem vorangegangenen Punkt. Bei der DAV 2008 P wurde die Aktivensterblichkeit 2. Ordnung gewonnen aus den Werten der Selektionstafel DAV 2004 R (ultimate) ohne Selektionsfaktoren.<sup>31</sup>
- Die Untersuchungen zur Herleitung der RT 2005 G zeigten, dass der **Rentnersterblichkeitsverlauf** (ab dem 65. Lebensjahr) des VDR niedriger war als der Profilverlauf der Bevölkerungssterblichkeiten.<sup>32</sup> Ebenso unterlag der Hinterbliebenenbestand abweichende Sterbewahrscheinlichkeiten als vom Gesamtbestand.
- Ebenfalls werden auch Autoselektionen beobachtet. Personen die Versicherungsleistungen mit Erlebensfallcharakter abschließen unterliegen niedrigeren Sterbewahrscheinlichkeiten.<sup>33</sup>
- In der DAV 2004 R haben die Untersuchungen gezeigt, dass das Sterblichkeitsniveau vom sozioökonomischen Status abhängt. So zeigten Bezieher höherer Renten gegenüber Bezieher niedrigerer Renten, Beamte gegenüber Versicherte der Angestelltenversicherung und die wiederum gegenüber Versicherte der Arbeitsversicherung ein niedriges Sterblichkeitsniveau auf.<sup>34</sup>

Die Konstruktion homogener Risikogruppen verlangt eine adäquate Datenbasis, welche mit steigender Differenzierung schwierig verfügbar ist. Unter Kosten/Nutzen Erwägungen werden in der Praxis die wichtigsten Faktoren berücksichtigt.

### 2.3.2. Invalidisierung

Die Invalidität und deren Umkehrung bzw. Reaktivierung ist schwer objektivierbar und kontrollierbar. Neben den objektiven Risikofaktoren, bestehen eine Vielzahl subjektiver Risikofaktoren (→ Beeinflussbarkeit durch den Versicherten in seinem Interesse), die der

---

<sup>30</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 18 f. und Wolfsdorf, K. (1986), S. 353 f. Erfahrungen zeigen: Eine  $x$  – Person die gerade invalide geworden ist, hat eine höhere Sterblichkeit als eine  $x$  – Person, die bereits ein paar Jahre invalide ist. Zur exakten Beschreibung der Invalidensterblichkeit müsste nach dem Alter und der Invaliditätsdauer abgestuft werden. Siehe auch DAV[4], S. 27.

<sup>31</sup> Vgl. DAV[4], S. 34 f..

<sup>32</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 5. Ab dem 65. Lebensjahr lagen ähnliche Profilverläufe vor. Aus diesem Grund wurde die Gesamtsterblichkeit bis zum 65. Lebensjahr durch Niveaushiftung aus den beiden Profilverläufen abgeleitet.

<sup>33</sup> Bspw. wird eine Person eine Rentenversicherung nur abschließen, falls (nach eigener Einschätzung) die Lebenserwartung nicht unterdurchschnittlich ist. Dem Fakt der Kenntnis und Überlegung vorausgesetzt.

<sup>34</sup> Vgl. DAV[6], S. 206 f. Auf Datenbasis der gesetzlichen Rentenversicherung.

VR übernimmt.<sup>35</sup> Dienst, H.R. beschreibt neben dem subjektiven Risiko (bspw. Reize zur Manipulation) eine Vielzahl von Einflussfaktoren auf das Invaliditätsrisiko. Im Gegensatz zur Sterblichkeit hängen die Invalidenhäufigkeiten von den Versicherungsbedingungen (Wortlaut und marktübliche Interpretation) ab. So ist bspw. zu erwarten, dass bei unterschiedlichem Leistungsangebot (bspw. Einmal- oder Rentenzahlungen) unterschiedliche Kundenkreise angesprochen werden. Weiterhin lässt sich die Invaliditätsstufe, der Beruf, das Alter, das Geschlecht, das Umfeld des Versicherten, Lebensumstände- und gewohnheiten und die wirtschaftliche Konjunktur als Faktoren nennen.<sup>36</sup>

Die o.g. Ausführungen und der Fakt, dass es an gut gesicherten Informationen und eine tragfähige empirische Basis fehlt, erschwert die Ermittlung von Trends, so dass im Allgemeinen konstante zeitliche Invalidisierungswahrscheinlichkeiten (für die jeweilige Ausscheidetafel) angenommen werden.

## 2.4. Ordnung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten

In Deutschland unterscheidet man, je nach Art der Ausscheideursache, Rechnungsgrundlagen nach erster- (1.) und zweiter (2.) Ordnung. Ziel dieses Abschnitts ist es die Ordnungen und ihren Zweck darzustellen. Für die Notation gibt der rechte obere Index die Ordnung an, bspw.  $q_x^k$ ,  $k \in \{1., 2. \text{ Ordnung}\}$ . Der folgende Prozess bildet den Zyklus der Vorgehensweise ab, bis zur erneuten Schätzung der Werte 2. Ordnung.

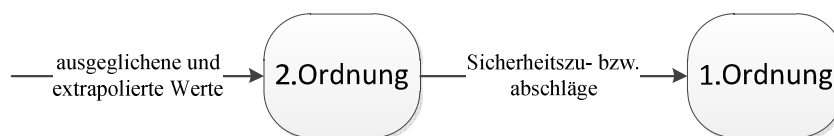


Abbildung 4: Prozess der Ordnungen der Rechnungsgrundlagen.

Quelle: Eigene Darstellung.

Die realitätsnahen Rechnungsgrundlagen sind die der **2. Ordnung**. Dafür sollten unternehmenseigene Daten mit einfließen.<sup>37</sup> Sie finden bspw. in der Überschussanalyse und im versicherungsmathematischen Controlling Anwendung. Das 3.-, 4.- und 5. Kapitel

<sup>35</sup> Vgl. Dienst, H.R. (1995), S.26. Das Invaliditätsrisiko (Schadenrisiko in der Invaliditätsversicherung) kann auch risikomindernd wirken, genau dann, wenn der Versicherte (un-)bewusst auf begründete Invalidisierung verzichtet.

<sup>36</sup> Dienst stuft die Minderung der Erwerbsunfähigkeit (EU) wie folgt ab: Spezielle Berufsunfähigkeit (BU) < Allgemeine BU < EU < Totale Arbeitsunfähigkeit < Hilfsbedürftigkeit. Vgl. Dienst, H.R. (1995), S. 13.

<sup>37</sup> Siehe Abschnitt 2.2.

beschreibt die Vorgehensweise und Verfahren zur Erlangung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung. Aus den rohen Werten (siehe Kapitel 3), welche Erfahrungswerte darstellen, werden die Werte der 2. Ordnung abgeleitet. Aus den Wahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung lassen sich dann die Werte der 1. Ordnung ableiten. Die Ausscheidewahrscheinlichkeiten **1. Ordnung** werden für die Tarifierung verwendet. Sie sind vorsichtig bemessen und beinhalten Sicherheitszuschläge bzw. -abschläge. „Denn auf Grund von Vorgaben durch das VAG muss die dauernde Erfüllbarkeit der teilweise äußerst langfristigen Personenversicherungsverträgen gewährleistet sein.“<sup>38</sup> Das 6. Kapitel beschreibt die Modellierung und Einarbeitung von Sicherheitsmargen.

## 2.5. Ausscheideordnungen<sup>39</sup>

Saxer, W. beschreibt die Ausscheideordnung mittels der Begriffe Objekt und Attribut. Objekte stellen Personen dar und die Attribute sind zugehörige Eigenschaften einer Person; bspw. am leben, invalide oder aktiv. Eine bestimmte, wohldefinierte Anzahl von Objekten bzw. Personen, mit einen oder mehreren Attributen, stellt eine Personengesamtheit dar. Jede Person kann, mit fortschreitender Zeit, Eigenschaften verlieren und annahmegemäß diese nicht wieder erlangen. Folglich verliert eine Person ihre Zugehörigkeit an einer Personengesamtheit, die mit dieser Eigenschaft definiert ist. Eine Ausscheideordnung beschreibt den zeitlichen (in Altersjahren) Abbau einer Personengesamtheit bzgl. eines Ausscheidegrunds bzw. bzgl. des Verlustes einer Eigenschaft.<sup>40</sup> „Eine Ausscheideordnung mit  $n$  Attributen gibt den zeitlichen Ablauf des Zerfalles einer Hauptgesamtheit in ihre verschiedenen Nebengesamtheiten an.“<sup>41</sup> Dabei weist eine jede Nebengesamtheit eine andere Struktur, als die der Hauptgesamtheit, auf und unterliegt somit wiederum einer anderen Ausscheideordnung.<sup>42</sup> Saxer, W. beschreibt die Grund- und Nebengesamtheiten mit Hilfe derer Attribute. Folglich erhält man  $2^n$  Gesamtheiten, die Grundgesamtheit und  $2^n - 1$  Nebengesamtheiten.<sup>43</sup> Alle erzeugten Nebengesamtheiten werden dabei nicht immer

---

<sup>38</sup> Siehe Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 101.

<sup>39</sup> Analoge Modellierung nach Saxer, W. (1955), S. 21 ff.

<sup>40</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 21 f.

<sup>41</sup> Siehe Ebenda, S. 22.

<sup>42</sup> Weisen Haupt- und Nebengesamtheiten die gleiche Struktur auf, so spricht man von einer homogenen Zerlegung. Vgl. Ebenda, S. 22 f.

<sup>43</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 26 f. Weiterhin unterteilt er die Nebengesamtheiten nach Ordnungen. Diese Ordnungen sind nicht zu verwechseln mit den Ordnungen aus (2.3). Die Anzahl der Gesamtheiten ergibt sich

weiter beobachtet, da dies bspw. aus praktischen Gründen nicht immer möglich oder von Interesse ist. In der Regel wird aus einer Gesamtheit nur ein Ausscheidegrund betrachtet, da sich mehrere Ausscheidegründe gegenseitig beeinflussen. Wird aus einer Grundgesamt nur ein Ausscheidegrund betrachtet und die andere Ausscheidegründe außer Acht gelassen, so spricht man von **partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten**.<sup>44</sup> Diese werden dann zum Schluss korrigiert, um den gegenseitigen Einfluss mehrerer Ausscheidegründe Rechnung zu tragen.

Die folgende Abbildung visualisiert bspw. das Aktiven- und Gesamtbestand Populationsmodell, welche bei den RT 2005 G angewandt wurden. Demzufolge gibt die Ausscheideordnung der Grundgesamt AKTIVE (nach gewisser Zeit) an, wie viele den Status „aktiv“ noch besitzen und wie viele sie an ihren Nebengesamtheiten abgibt.<sup>45</sup>

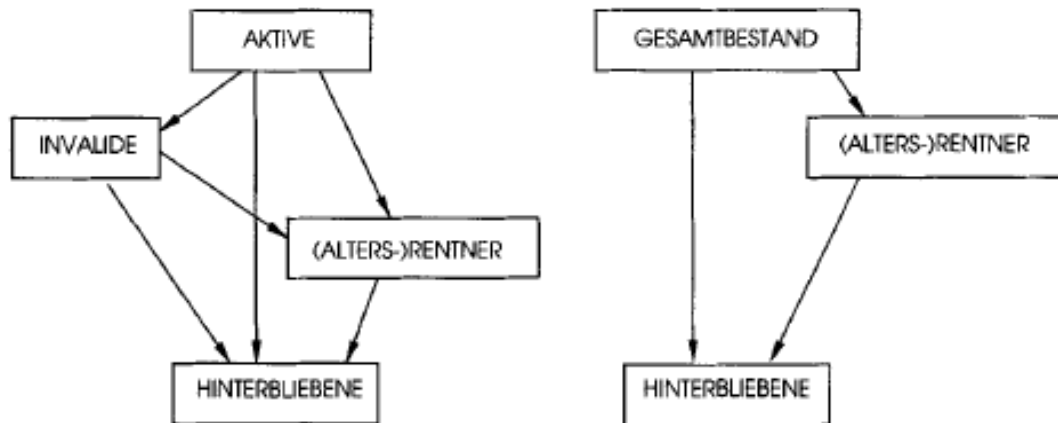


Abbildung 5: Populationsmodell der RT 2005 G.

Populationsmodell AKTIVE mit den Nebengesamtheiten INVALIDE, (ALTERS-)RENTNER und HINTERBLIEBENE und Populationsmodell GESAMTBESTAND mit den Nebengesamtheiten (ALTERS-)RENTNER und HINTERBLIEBENE.

Quelle: Heubeck, K. (2005), S. 32. bzw. Onlineversion, S. 504.

---

aus dem binomischen Lehrsatz mit  $x=y=1 \Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ . Bspw., für die Attribute  $\{A, B\}$  folgt die

Hauptgesamt  $\{A, B\}L$  und die Nebengesamtheiten  $\{A\}L, \{B\}L \wedge \{1\}L$ . Das Mengensystem stellt die Potenzmenge dar (demzufolge eine Sigma Algebra) und kann mit Hilfe des Dualsystems programmiertechnisch umgesetzt werden.

<sup>44</sup> Im Anhang B ist die Grundidee der partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten dargestellt.

<sup>45</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 32 ff. Zur Modellierung von Grund- und Nebengesamtheiten sind die Status der Personen einer Personengesamtheit relevant für welche bestimmte Zahlungsverpflichtungen bestehen.

Das folgende Organigramm bildet Spezialfälle von Ausscheideordnungen ab.

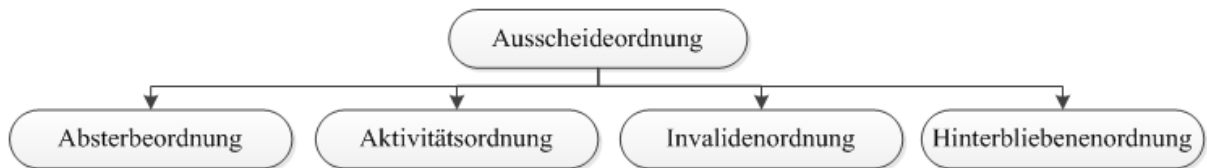


Abbildung 6: Spezialfälle von Ausscheideordnungen.

Quelle: Eigene Darstellung.

### 2.5.1. Die Sterbetafel<sup>46</sup>

Ist der einzige Ausscheidgrund der „Tod“ und ist die geschlechtsspezifische Tafel lediglich nach dem Alter abgestuft, so spricht man von einer einfachen Sterbetafel bzw. Absterbeordnung. Man unterscheidet im Allgemeinen zwischen den Bevölkerungsterbetafeln<sup>47</sup> für Deutschland, die des Statistischen Bundesamtes, und den Sterbetafeln der Versicherungswirtschaft, wie die der Deutschen Aktuarvereinigung (DAV). Sterblichkeitsverhältnisse und Lebenserwartung der Bevölkerung Deutschland werden durch die Sterbetafeln des Statistischen Bundesamtes beschrieben. Diese werden nach dem Geschlecht getrennt erfasst und geben ebenfalls Auskunft über die geschlechtsspezifischen durchschnittlichen Lebenserwartungen der einzelnen Altersjahre.<sup>48</sup>

Im Versicherungsbereich stellt die Sterbetafel ein Spezialfall der Ausscheideordnung dar. Typen von Sterbetafeln ergeben sich je nach Art der betrachteten Personengesamtheit und den berücksichtigten Risikomerkmale (nach den abgestuften Merkmalen und Zielgröße(n)).<sup>49</sup> Mit der Menge der Sterblichkeiten  $\{q_x\}_{x \in AB}$ , mit Altersbereich  $AB = [x_0, \dots, x_\omega]$  und eine fiktiven Anfangsgröße  $l_{x_0}$  (auch Radix genannt), welche auf 100000 gesetzt wird, lassen sich die weiteren Elemente einer Sterbetafel bestimmen.<sup>50</sup>

Durch die Definitionen  $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ,  $q_x = 1 - p_x$  und  $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$  erhält man  $\omega + 1$  Kohorten

$\{l_x\}_{x \in AB}$ . Die Anzahl der Lebenden lässt sich rekursiv mittels  $l_{x+1} = l_x \cdot p_x = l_{x_0} \cdot \prod_{j=1}^{x-x_0} p_{x_0+j-1}$

<sup>46</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 98.

<sup>47</sup> Die Periodensterbetafeln des Statistischen Bundesamtes stellen ein demografisches Modell dar und dienen unter anderem den Bevölkerungsvorausrechnungen.

<sup>48</sup> Vgl. Statis[3], S. 2.

<sup>49</sup> Die Zielgröße stellt das beobachtete Risiko dar, demzufolge „Tod“. Risiken können auch zusammengefasst betrachtet werden. Bspw. „Tod“ und „Storno“ als Zielgröße.

<sup>50</sup> Da man fünfstellig Angaben machen will setzt man den Radix  $l_{x_0} = 100000$ . Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 99.

bestimmen. Die Zahl der Toten  $d_x = l_x - l_{x+1}$  ergibt sich aus dem Abbau bzw. aus den ersten Differenzen der Überlebensfunktion<sup>51</sup>  $\{l_x\}_{x \in AB}$ . Demzufolge subtrahiert man in jedem Jahrgang die Zahl der Sterbefälle  $d_x$  von dem zugehörigen Ausgangswert  $l_x$  und durch Aufsummieren alle Toten erhält man wieder die Ausgangsgröße. Die Abbildung 7 zeigt eine einfache Sterbetafel. Das Endalter einer Sterbetafel wird mit  $\omega$  bezeichnet und üblicherweise auf 110 bzw. 115 gesetzt, es gilt  $l_\omega > 0$  und  $l_{\omega+1} = 0$ .<sup>52</sup> Im Anhang D (Abb. 42) ist ein rekursiver Algorithmus dargestellt, welcher zur Erstellung einer Sterbetafel dient.

$x$	$l_x$	$d_x$	$q_x$
0	100000	879	8.790E-03
1	99121	46	4.641E-04
2	99076	33	3.331E-04
...	...	..	.
$\omega$	..	..	1.000E+00
$\omega+1$	0	0	-

Abbildung 7: Sterbetafel.

Quelle: In Anlehnung an Olivieri, A. / Pitacco, E. (2010), S. 142.

Für die komplette Arbeit wurde der Punkt als Dezimaltrennzeichen verwendet.

### 2.5.2. Aktivitätsordnung

Die Personengesamtheit der Aktiven ist die der berufsfähigen. Saxer, W. beschreibt die Aktivitätsordnung mit zwei Ausscheidegründen, den Tod als Aktiver und die Invalidität als Aktiver. Weiterhin vernachlässigt er die Reaktivierung und den Austritt bzw. Storno. Folglich kann eine invalide gewordene Person nicht wieder aktiv werden und ein Austritt durch Kündigung wird nicht berücksichtigt. Die Gesamtheit der Aktiven bildet die Hauptgesamtheit. Dabei handelt es sich um eine inhomogene Zerlegung, da die Sterblichkeiten der Nebengesamtheiten eine andere Struktur aufweist.<sup>53</sup> Das folgende Modell visualisiert die Übergänge.

<sup>51</sup> Die Überlebensfunktion stellt eine monoton fallende Folge dar. Das ergibt sich daraus, dass die fiktive Größe Personengesamtheit der Ausscheidetafel nur Abgänge vorsieht.

<sup>52</sup> Das Anfangsalter sei  $x_0 = 0$  oder abweichend in der Pensionsversicherung  $x_0 = 15$  oder  $x_0 = 20$ .

<sup>53</sup> Siehe (2.4.3). Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 354.



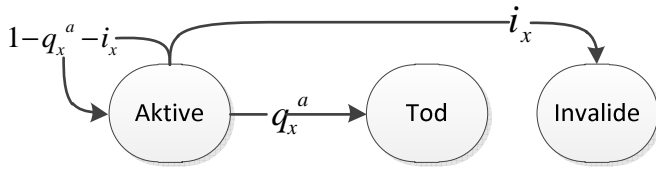


Abbildung 8: Aktivitätsmodell.

Mit den abhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten (versicherungsmathematische Sprechweise) gemäß Anhang B als Aktiver zu sterben oder als Aktiver invalide zu werden.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Saxer, W. (1955), S. 28.

Demzufolge erhält man zwei Nebengesamtheiten, die der Toten und die der Invaliden mit vorheriger Aktivität. Die Überlebensfunktion  $l_{x_0}^a, l_{x_0+1}^a, \dots, l_{\omega}^a$  erhält dabei den oberen rechten Index  $a$  (für aktiv) und ergibt sich (rekursiv) durch  $l_{x+t+1}^a = l_{x+t}^a \cdot (1 - q_{x+t}^a - i_{x+t})$ , mit  $t \in [0, \dots, \omega - x]$ .<sup>54</sup> Die Aktivensterbe-  $q_{x+t}^a$  und Invalidenwahrscheinlichkeit  $i_{x+t}$  stellen die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten (gemäß Anhang B) dar, da die Hauptgesamtheit zwei Ausscheidegründen unterliegt und diese sich beeinflussen. Die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden aus den partiellen bzw. unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten  ${}^*q_{x+t}^a$  und  ${}^*i_{x+t}$  abgeleitet. Dazu wird die Hauptgesamtheit der Aktiven jeweils einzeln nach Aktiventod und Invalidität als Ausscheidegrund untersucht. Folglich erhält man die abhängigen Wahrscheinlichkeiten mittels  $i_{x+t} = {}^*i_{x+t} \cdot (1 - \frac{{}^*q_{x+t}^a}{2})$  und  $q_{x+t}^a = {}^*q_{x+t}^a \cdot (1 - \frac{{}^*i_{x+t}}{2})$ .<sup>55</sup> In der Form wurden sie bspw. bei den RT 2005 G angewendet.<sup>56</sup> Heubeck, K. bezeichnet die Wahrscheinlichkeit aus der Hauptgesamtheit als Aktiver auszusteiden mittels  $q_x^{aa}$ .<sup>57</sup> Weiterhin betont er, dass es an geeignetem Datenmaterial fehlt, um die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven zu gewinnen. Aus diesem Grund wurden die Sterbewahrscheinlichkeiten der Aktiven (bei den RT 2005 G) aus den gewonnenen Grundwerten der Gesamtbestands- und Invalidensterblichkeit, sowie aus der Invalidisierung abgeleitet.<sup>58</sup> Dazu betrachtet man die Grundgesamtheit  $l_{x+t}^g = l_{x+t}^a + l_{x+t}^i$  als eine zusammengesetzte Ordnung der Aktiven und der

<sup>54</sup> Weiterhin steht der obere Index  $g$  für Gesamtbestand und  $i$  für Invalidenbestand. Die Variable  $t$  ist der Zeitindex und dient der Modellierung des zeitlichen Zerfalles der Hauptgesamtheit. Siehe Anhang B.

<sup>55</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 28 f. Bzw. Siehe Anhang B.

<sup>56</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 10. Die Aktivenordnung stellt die einzige Ordnung der RT 2005 G dar die zwei Ausscheidegründe berücksichtigt, da weitere Ausscheidegründe (auch für andere Ordnungen der RT 2005 G) eingegrenzt wurden. Für die Sterblichkeiten der Rentner, der Invaliden und der des Gesamtbestandsmodells stimmen ab- und unabhängige Wahrscheinlichkeiten überein.

<sup>57</sup> Die Wahrscheinlichkeiten  $q_{x+t}^{aa}$  nach Heubeck, K. entsprechen den Werten  $q_{x+t}^a$  nach Saxer, W..

<sup>58</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 17 f.

Invaliden. Dann ergibt sich gemäß Saxer, W. die folgende Beziehung

$$\overbrace{l_{x+t}^g \cdot q_{x+t}^g}^{\text{Sterbefälle der Grundgesamtheit}} = \overbrace{l_{x+t}^a \cdot q_{x+t}^a}^{\text{Sterbefälle der Aktiven}} + \overbrace{l_{x+t}^i \cdot q_{x+t}^i}^{\text{Sterbefälle der Invaliden}} + \overbrace{l_{x+t}^a \cdot i_{x+t} \cdot \frac{1}{2} q_{x+t+1/2}^i}^{\text{Die Aktiven die invalide werden und im gleichen Jahr als invalide versterben}} \quad (\text{unter der Annahme der Gleichverteilung für unterjährige Ausscheidezeitpunkte})$$
 mit der Übergangswahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2} q_{x+t+1/2}^i$  der RT 2005 G. Folglich ergibt sich
 
$$l_{x+t}^g \cdot q_{x+t}^g = l_{x+t}^a \cdot (q_{x+t}^a + i_{x+t} \cdot \frac{1}{2} q_{x+t+1/2}^i) + l_{x+t}^i \cdot q_{x+t}^i.$$
 Durch Einsetzen der Näherungsformeln zur Ableitung der abhängigen Wahrscheinlichkeiten erhält man
 
$$l_{x+t}^a \cdot [*q_{x+t}^a \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot i_{x+t}) + i_{x+t} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot *q_{x+t}^a) \cdot \frac{1}{2} q_{x+t+1/2}^i] + l_{x+t}^i \cdot q_{x+t}^i.$$
 Die Ableitung zur Aktivensterblichkeit, gemäß Heubeck, K., erhält man durch Auflösen nach  $*q_{x+t}^a$ .<sup>59</sup>

## 2.6. Die Lebenserwartung<sup>60</sup>

Gemäß der Periodensterbetafel (PST) lässt sich die mittlere Lebenserwartung mittels

$$e_x = \frac{l_x + l_{x+1} + \dots + l_\omega}{l_x} - \frac{1}{2}$$
 bestimmen.  $e_x$  ist die mittlere Anzahl von Jahren, die ein  $x$ -

Jähriger noch erlebt, wenn sich die Todesfälle gleichmäßig über das Jahr verteilen und die Sterblichkeitsverhältnisse der einzelnen Kohorten während ihres ganzen Lebens erhalten

bleiben. Analog lässt sich  $e_x = \frac{l_x}{l_x} + \dots + \frac{l_\omega}{l_x} - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\omega-x} p_x - E(X)$  beschreiben, als die Summe

der Wahrscheinlichkeitsmaße eine jede Kohorte zu erreichen, abzüglich des erlebten Bruchteils des Ausscheidejahres, mit der stetigen gleichverteilten Zufallsvariable  $X: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .<sup>61</sup> Die mittlere Lebenserwartung ist somit abhängig von den

Sterblichkeitsverhältnissen der Kohorten  $\{l_x\}_{x \in AB}$ . Die Lebenserwartung bei Geburt ist  $e_0$ , analog spricht man von der verbleibenden bzw. fernerer Lebenserwartung  $e_x$  eines  $x$ -Jährigen, mit  $x > 0$ . Das durchschnittliche Sterbealter ergibt sich folglich aus  $x + e_x$ . Die PST'n des Statistischen Bundesamtes geben die mittlere Lebenserwartung für den

<sup>59</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 17. Annahmegemäß sind die Sterbewahrscheinlichkeiten gleichverteilt für  ${}_s q_x, 0 < s < 1$ , dann folgt  $1 - q_x = (1 - {}_s q_x) \cdot (1 - {}_{1-s} q_{x+s})$ .

<sup>60</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 10.

<sup>61</sup> Die Dichte der Gleichverteilung ist definiert durch  $f(t) = 1/(b-a) \cdot 1_{a \leq t \leq b}$ . Mittels Erwartungswerte bei Dichten folgt  $\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_{a=0}^{b=1} t \cdot dt = [0.5 \cdot t^2]_0^1 = 0.5$ . Vgl. Behnen, K. / Neuhaus, G. (2003), S. 227.

betrachteten Beobachtungszeitraum der PST an.<sup>62</sup> Jedoch sind diese nicht als zukünftige Prognose zu verstehen. Die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten können nicht als zeitlich konstant angesehen werden, da sie eine sogenannte säkulare Änderung aufweisen. Das folgende Liniendiagramm verdeutlicht einen Anstieg von  $e_0$  auf Basis der PST'n seit 1991/93.<sup>63</sup> Weiterhin lässt sich erkennen, dass die Lebenserwartung der Frauen höher ist als die der Männer (dies gilt für alle Altersstufen).

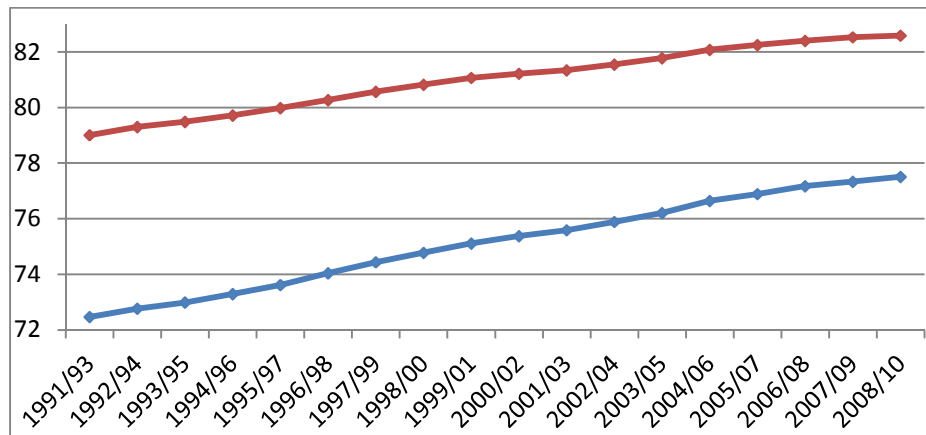


Abbildung 9: Durchschnittliche Lebenserwartung Neugeborener.

Blau: Männlich. Rot: Weiblich. Auf Basis der PST'n seit 1991/93 des Statistischen Bundesamtes für Deutschland. Die Verbindungslinien dienen lediglich der Veranschaulichung.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Statis[6], S. 464.

In den Bevölkerungsvorausrechnungen des Statistischen Bundesamtes wird annahmegemäß von einem (verlangsamten) Anstieg der Lebenserwartung ausgegangen.<sup>64</sup>

Bomsdorf, E. erläutert in seiner Analyse zur Lebenserwartung, dass Modellrechnungen zur zukünftigen Lebenserwartung eine große Qualität aufweisen, da politische und gesellschaftliche Maßnahmen nur einen geringen denkbaren Einfluss auf die zukünftigen Lebenserwartungen haben. Jedoch ist ein weiterer Anstieg ungewiss und kann nur aus einem Rückgang der Sterbewahrscheinlichkeiten der höheren Altersstufen erreicht werden.<sup>65</sup> Eine allgemeine Beschreibung der verbleibenden Verweildauern geben Milbrodt, H. / Helbig, M, sowie Olivieri, A. / Pitacco, E. an. Sie bezeichnen die verbleibende Restlebensdauer bzw. Verweildauer eines  $x$ -Jährigen mit  $T_x$ . Wobei  $T_x$  sich aus der ganzzahlig gestützten Restlebenserwartung  $K_x$  plus den erlebten Bruchteil des

<sup>62</sup> Dabei erfolgt der Beobachtungszeitraum in Jahresangabe  $n/n+k-1$ , mit Dauer  $k$ .

<sup>63</sup> Siehe Fußnote 26. Es lässt sich ein kontinuierlicher Anstieg der Lebenserwartung in Deutschland seit über 130 Jahren beobachten.

<sup>64</sup> Vgl. Statis[1], S. 29. Dabei unterliegt die 12. koordinierte Bevölkerungsvorausrechnung zwei Annahmen, die kurzfristige- (seit den 70er Jahren) und die langfristige Trendentwicklung (seit 1871). Beide gehen davon aus, dass sich die Differenz der Lebenserwartung zwischen Männern und Frauen verkleinert.

<sup>65</sup> Vgl. Int[2].

Ausscheidejahres  $R_x$  zusammen setzt. Die Modellierung erfolgt mittels der Erwartungswertbildung, wobei auf die  $K_x$  mit  $(K_x = i \Leftrightarrow i \leq T_x < i + 1), i \in \mathbb{N}_0$ , die ganzzahligen Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten und auf  $R_x$  die Gleichverteilung angewandt wird.  $e_x = E(T_x) = E(\text{"zukünftige Verweildauer eines } x\text{-Jährigen"}) = E(K_x) + E(R_x) = \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot P(\text{"als } x+k \text{ Jähriger auszuscheiden"}) +$

$$\int_0^1 t \cdot \frac{1}{(1-t)} dt = \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} + 0.5. {}^{66}$$

Eine computerbasierte Lösung bieten die beiden Funktionen im Anhang D (Abb. 43 und 44) zur Erzeugung der Lebenserwartung. Olivieri, A. / Pitacco, E. geben ebenfalls in einem Beispiel an, dass eine höhere Lebenserwartung von Neugeborenen einer Population A gegenüber einer Population B, also  $e_0(A) > e_0(B)$ , nicht immer mit einer höheren Pensionsverpflichtung, bspw. eines Versicherers, einhergeht. Da  $e_0$  von der ganzen Sterblichkeitsverteilung abhängig ist, kann eine höhere Lebenserwartung auch durch niedrigere Säuglings- und Kindersterblichkeiten verursacht sein.<sup>67</sup> Für Pensionsverpflichtungen ist die verbleibende Lebenserwartung relevant. Es gilt, dass  $e_x + x > e_0$ , da das Risiko zu sterben zwischen  $0, \dots, x-1$  nicht mehr existiert. In der folgenden Abbildung sind zwei fiktive Sterblichkeitsverläufe, mit gleicher Restlebenserwartung  $e_{65} = 8$ , für  $x = 65, \dots, 85$  mit Endalter  $\omega = 85$  und die dazugehörigen Überlebensfunktionen, gegeben. Abhängig von der Definition einer abzuschließenden Versicherung können die Sterblichkeitsverläufe der Abbildung 10 zu verschiedene Zahlungsverpflichtungen führen.<sup>68</sup>

<sup>66</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 94 f. und Olivieri, A. / Pitacco, E. (2010), S. 148 ff.

<sup>67</sup> Vgl. Olivieri, A. / Pitacco, E. (2010), S. 155. Analog kann auch  $e_x(A) = e_x(B)$  mit unterschiedlichen Sterblichkeitsprofilen zu nicht identischen Zahlungsverpflichtungen führen.

<sup>68</sup> Bspw. ergeben sich unterschiedliche Barwerte (zum Betrag Eins) einer Erlebensfallversicherung

${}_n E_{x=65} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$  mit Zins  $i$  und für  $n = 1, \dots, 20$ .

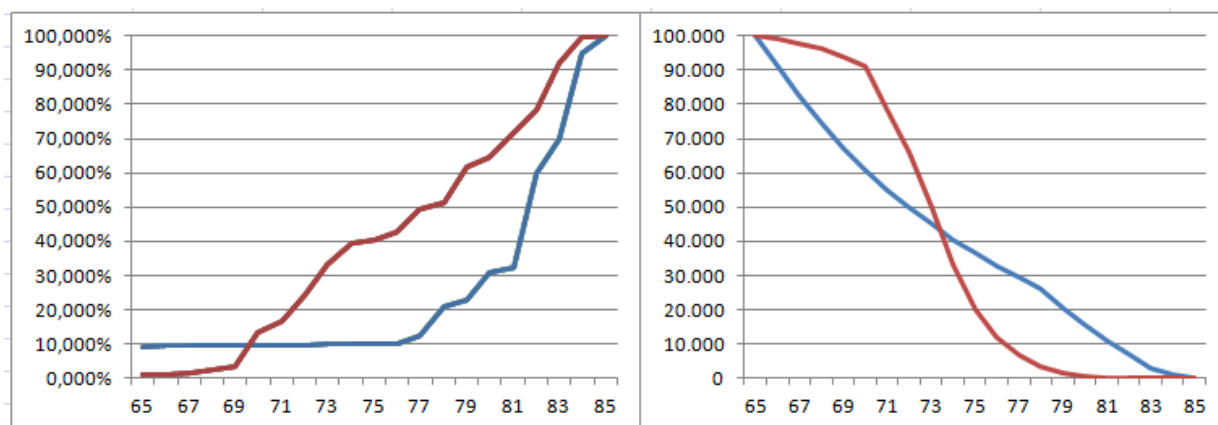


Abbildung 10: Lebenserwartung im Vergleich: Zwei fiktive Sterblichkeitsverläufe.

Für  $x = 65, \dots, 85$  mit identischer Restlebenserwartung  $e_{65} = 8$ . Links: Sterblichkeitsverläufe. Rechts: Die zugehörigen Überlebensfunktionen.

Quelle: Eigene Darstellung.

## 2.7. Aktuelle Tafeln

Die einzelnen Methoden/Modelle der Kapitel wurden teils aus den aktuellsten Tafeln entnommen. Je nach Versicherungszweck haben sich verschiedene Methoden/Modelle als tauglich erwiesen. Ferner soll kurz dargestellt werden, welche Tafeln die Arbeit (mehr oder weniger) begleiten und derzeit in Deutschland zur Verfügung stehen.<sup>69</sup> Je nach Versicherungszweck stehen verschiedene Tafeln zur Verfügung.

- Die Sterbetafel **DAV 2008 T** für LV mit Todesfallcharakter ist am 04.12.2008 in Kraft getreten und dient der Reservierung für Fondsgebundene LV'n, sowie Kapital- und Risiko LV'n.<sup>70</sup> Das Sterblichkeitsniveau wurde aus Datenbeständen deutscher LV-Unternehmen, mit Beobachtungszeitraum 2001-04, und deutscher Bevölkerungsstatistiken gewonnen.
- Die Sterbetafel **DAV 2004 R** dient der Berechnung von Prämien und Deckungsrückstellungen für Rentenversicherungen und LV'n mit Erlebensfallcharakter (für das Neugeschäft 2005) und ist als System von Generationentafeln ausgelegt. Das Sterblichkeitsniveau wurde aus Datenbeständen deutscher LV-Unternehmen (Münchener Rück und Gen Re), mit Beobachtungszeitraum 1995-02, deutscher Bevölkerungsstatistiken und Daten der gesetzlichen Rentenversicherung gewonnen. Die DAV 2004 R löst die DAV 1994 R ab.
- **Sterbetafeln des Statistischen Bundesamtes:** Die abgekürzten Sterbetafeln basieren auf fortgeschriebene Bevölkerungszahlen, Dreijahresdurchschnitt und werden nicht ausgeglichen. Das Kürzel „abgekürzt“ entfällt seit 2000. Allgemeine Sterbetafeln, mit höherer Verlässlichkeit, werden direkt im Anschluss einer Volkszählung erstellt (Dreijahreszeitraum).<sup>71</sup> Die Tafeln des Statistischen Bundesamtes dienen als Demografisches Modell und werden für Versicherungszwecke als Vergleich herangezogen.
- Die **Richttafeln 2005 G** (RT 2005 G) dienen dazu geeignete Rechnungsgrundlagen für Bewertungen in der betrieblichen Altersvorsorge bereitzustellen. Die RT 2005 G sind als

<sup>69</sup> Dabei wird nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

<sup>70</sup> Vgl. DAV[1], S. 3. Die DAV 2008 T löst die DAV 1994 T ab. Aufgrund der Sterblichkeitsabnahme ergibt sich im Allgemeinen kein Auffüllbedarf.

<sup>71</sup> Vgl. Statis[4], S. 3.

Generationentafeln konzipiert und lösen die Richttafeln 1998 ab. Der Herleitungsbestand umfasst Statistiken von 2001 bis 2003 des Verband Deutscher Rentenversicherungsträger (VDR) und Bevölkerungsstatistiken.<sup>72</sup>

## 2.8. Unisex-Tarife in der Personenversicherung<sup>73</sup>

Die Kurve der Sterblichkeiten der Frauen liegt für jedes Alter unter der der Männer. Folglich weisen Frauen eine höhere durchschnittliche Lebenserwartung auf. Das Geschlecht hat somit einen signifikanten Einfluss auf das **Sterblichkeitsrisiko**.<sup>74</sup> Ein Versicherungsbeitrag orientiert sich am übernommenen Risiko des VR's und somit kann bzw. ist das Geschlecht ein Risikofaktor. Die Kalkulation der Produkte in der Personenversicherung erfolgt weitgehend geschlechtsspezifisch und somit weisen geschlechtsspezifische Produkte, der verschiedenen Versicherungsarten, unterschiedliche Beiträge auf. Jedoch hat der Europäische Gerichtshof (EuGH) entschieden (in der Rechtssache C-236/09 – Urteil des Gerichtshof 01.03.2011)<sup>75</sup>, dass das diskriminierend sei und gegen den Grundsatz der Gleichberechtigung von Männern und Frauen verstößt und hat

*„... im vergangenen Jahr über eine entsprechende Vorlage des belgischen Verfassungsgerichts entschieden: Laut diesem EuGH-Urteil sind die in vielen Ländern praktizierten Ausnahmeregelungen ungültig mit der Konsequenz, dass auch in Deutschland ab dem 21. Dezember 2012 für das Neugeschäft in der Personenversicherung keine Differenzierung nach dem Geschlecht mehr erfolgen darf.“<sup>76</sup>*

Die Auswirkungen bzw. Konsequenzen der einzelnen Versicherungsarten bzw. Produkte in der Personenversicherung sind unterschiedlich beträchtlich. So schrieb die DAV in ihrer Pressemitteilung vom 28.04.2011

*„Die Konsequenzen der geschlechtsunabhängigen Kalkulation werden insbesondere in der Personenversicherung zum Teil beträchtlich sein: „Gewinnern“ stehen „Verlierer“ gegenüber und insgesamt wird es teurer werden.“<sup>77</sup>*

---

<sup>72</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 3 f..

<sup>73</sup> Vgl. Int[3], DAV[8], DAV[9] und DAV[10].

<sup>74</sup> Zu diesem Schluss kommt auch die Ausarbeitung DAV[2]. Das Geschlecht ist (auch langfristig) ein relevanter Faktor bei der Risikobewertung bzgl. der Sterblichkeit. Ebenfalls hat das Geschlecht einen Einfluss auf die Invalidisierung.

<sup>75</sup> <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=CELEX:62009CJ0236:DE:HTML>

<sup>76</sup> Siehe DAV[9].

<sup>77</sup> Siehe DAV[10]. Insbesondere ist die private Rentenversicherung betroffen. Für Männer wird diese unattraktiver, da sie nun die längeren Renten der Frauen, welche sich durch deren höhere Lebenserwartung

Für das Neugeschäft sind ab dem 21.12.2012 geschlechtsneutrale Tarife anzubieten. Ob das Unisex-Gebot auch für die bAV gilt bleibt eine offene Frage. Für weitere Einzelheiten des Geltungsbereichs des EuGH-Urteils und für die einzelnen Konsequenzen der verschiedenen Versicherungsarten wird auf DAV[8], DAV[9], DAV[10] und Int[2] verwiesen. Für die Konstruktion einer **Unisex-Tafel** können die geschlechtsspezifischen Ausscheidewahrscheinlichkeiten weiterhin verwendet werden. Ferner ist ein Männeranteil, welche vorsichtig zu wählen und pro Tarif festzusetzen ist, zu schätzen. Bspw. ergibt sich für Rentenversicherungen, dass mit wachsendem Männeranteil der Produktpreis sinkt.<sup>78</sup>

Abschließend sei erwähnt, dass die Versicherungsbranche vor höheren Beiträgen warnt. Es gilt: Die Qualität der Ausgleichs im Kollektiv wächst mit wachsender Anzahl gleichartiger Risiken. Gleiche Beiträge für Männer und Frauen stellt keine homogene Zerlegung gemäß 2.5. dar. Ferner liegt auch **keine Risikogerechtigkeit** vor. Somit könnten unter Umständen weitere Zuschläge nötig werden.

### 3 Gewinnung roher Ausscheidewahrscheinlichkeiten

Ziel dieses Abschnittes ist es, relative Häufigkeiten bzw. relative Kennzahlen eines Ausscheidemerkmals (bspw. Tod, Storno oder Invalidität) aus einem gegebenen Datenmaterial zu ermitteln. Die so gewonnenen Tafeln stellen Periodentafeln dar und die relativen Häufigkeiten werden als rohe Ausscheidewahrscheinlichkeiten<sup>79</sup> interpretiert. Das Kapitel 4 bietet dann den Übergang zu den ausgeglichenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, welche wiederum Kennzahlen dafür sein sollen, wie die Abgänge einer Personengesamtheit<sup>80</sup> infolge einer Ausscheideursache, erfolgt. Diese

---

ergibt, mitfinanzieren müssen. In der privaten Krankenversicherung haben die geschlechtsspezifischen Kopfschäden den größten Einfluss auf die Beiträge. Durch Unisex-Tarife werden junge Männer und ältere Frauen erhebliche Beitragserhöhungen erleiden.

<sup>78</sup> Vgl. DAV[8], S. 9 ff. Die Schätzung des Männeranteils, in weiter Zukunft, stellt ein aktuarielles Problem dar.

<sup>79</sup> Die Existenz von Ausscheidewahrscheinlichkeiten sei vorausgesetzt. Solche Wahrscheinlichkeiten stellen relative Häufigkeiten einer Personengesamtheit innerhalb einer Zeitperiode dar. Also die Häufigkeit des Eintretens oder Nichteintretens eines bestimmten Ereignisses gemäß der Ausscheideordnung. Vgl. Saxer, W. (1955), S. 10. und Kakies, P. / et.al. (1985), S. 6.

<sup>80</sup> Die Personengesamtheit wird auch als Kollektiv oder Kohorte - nur für gleichaltrige und gleichgeschlechtliche Personen - bezeichnet. Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 59.

Abgangsgesetze bzw. diese Ausscheideordnung ist zeitlichen Änderungen unterworfen, was Zuzufolge hat, dass die Ausscheideordnung stets neu bestimmt werden muss.<sup>81</sup>

Die Begriffe der Ausscheideordnung wurde im Kapitel 2.5. beschrieben. Auf die Besonderheiten der Ausscheidewahrscheinlichkeiten wurde im Kapitel 2.3. eingegangen. Bevor auf die Methoden zur Häufigkeitsermittlung eingegangen wird, ist es notwendig, den Begriff der Personengesamtheit und ihre Risikomerkmale zu definieren. Für die weiteren Betrachtungen wird stellvertretend die Sterblichkeit als Ausscheidgrund gewählt. Die Betrachtungen können ebenfalls auf andere Ausscheideursachen angewandt werden.

### 3.1. Die Personengesamtheit

Eine eindeutig definierte Menge  ${}^tL$  an Personen, zu einem Zeitpunkt  $t$ ,<sup>82</sup> stellt eine Personengesamtheit dar. Mit der Mächtigkeit<sup>83</sup>  ${}^t l^{roh} = |{}^t L|$ . Beispiele für  ${}^tL$  sind bspw. die Bevölkerung eines Landes in der Sozialversicherung, das Personal einer Firma bei Pensionskassen oder versicherte Personen mit gleichem Tarif bei Lebensversicherungen. Dabei spricht man von einer offenen Personengesamtheit, falls Zugänge (Eintritte auf Antrag bzw. Abschlüsse) und Abgänge (Austritte durch Storno, Leistungsfälle, Invalidität oder Tod) möglich sind.  ${}^tL$  heißt geschlossen, falls nur Abgänge möglich sind.<sup>84</sup> Die Anzahl der Abgänge eines Ausscheidemerkmals während eines Beobachtungszeitraums  $b = [t, t + \Delta[$  stellen eine Teilgesamtheit von  ${}^{(b)}L$  dar.<sup>85</sup> Es sei  ${}^{(b)}d^{roh} = |{}^{(b)}D|$  die Anzahl der Toten von  ${}^{(b)}l^{roh}$ . Diese Gesamtheiten, ob offen oder geschlossen, stellen somit

<sup>81</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 8.

<sup>82</sup> Ein Zeitpunkt  $t$  sei ein Datum (hier, die kleinste Zeiteinheit). Ein Zeitraum  $t + \Delta$  sei bspw. eine oder mehrere Wochen, Monate oder Jahre. Bspw. das Kalenderjahr 2012 (für  $\Delta=1$  in Jahren) lässt sich darstellen als  $[t, t + \Delta[ = [01.01.2012, 01.01.2013[ = [01.01.2012, 31.12.2012]$ .

<sup>83</sup> Anzahl der Elemente einer endlichen Menge. Für eine Menge  $L$  (bspw. Einwohner eines Landes) lässt sich die Anzahl  $l = |L| = \sum_{i \in L} 1_L(i)$  mit Hilfe der Indikatorfunktion  $1_L(i) = \begin{cases} 1, & i \in L \\ 0, & i \notin L \end{cases}$  bestimmen.

<sup>84</sup> Aus demografischer Sicht spricht man Migration bzw. Wanderung. Die Migration ist ein wichtiger Parameter der Bevölkerungsdynamik. Vgl. Padel, S. (2010), S. 37. Falls nur Abgänge möglich sind, so konvergiert  ${}^tL$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0.

<sup>85</sup> Falls nicht explizit erwähnt, sei  $\Delta$  eine Jahresangabe. Siehe Fußnote 82. Der Beobachtungszeitraum sollte mindestens ein Kalenderjahr betragen, da auch jahreszeitliche Sterblichkeitsänderungen beobachtet werden. Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 7.



zeitabhängige Gebilde dar. Die relative Maßkennzahl  ${}^{(b)}q^{roh} = \frac{{}^{(b)}d^{roh}}{{}^{(b)}I^{roh}}$  stellt dann die rohe Sterblichkeit dar. Die rohe Sterblichkeit der Form  ${}^{(b)}q^{roh}$  hat wenig Aussagekraft und die Annahme, dass die Sterblichkeit  ${}^{(b)}q^{roh}$  einer jeden Person aus  ${}^{(b)}L$  gleich ist, ist falsch. Statistische Erfahrungen untermauern, dass die Sterblichkeit von vielen Einflussfaktoren abhängt, welche hier nicht berücksichtigt werden. Ziel ist es die Personengesamtheiten zu vereinheitlichen (homogenisieren), um eine Vergleichbarkeit herzustellen. Es gilt Merkmale zu ermitteln, die auf Personen hindeuten, die sich bzgl. des gewählten Ausscheidegrunds signifikant voneinander unterscheiden.

### 3.1.1. Risikomerkmale einer Personengesamtheit

Als Risikomerkmale bezeichnet man die Faktoren, welche Einfluss auf die betrachtete Ausscheideursache haben. Kakies, P. / et.al. geben für die Sterblichkeit eine Vielzahl von Faktoren an (siehe Kapitel 2.3.1). Die Risikomerkmale besitzen disjunkte Ausprägungen. Desweiteren wurde in den letzten Jahrzehnten ein Rückgang der Sterblichkeit beobachtet, somit sind die relativen Sterblichkeiten auch von dem Beobachtungszeitraum  $b$  abhängig. Um aussagekräftige Kennzahlen zu erhalten, unterteilt man die Personengesamtheit nach den signifikantesten Faktoren, um ein möglichst homogenes Kollektiv erhalten.<sup>86</sup> Dabei sind das Alter, das Geschlecht und die Kalenderzeit die Faktoren mit dem größten Einfluss. Die Betrachtung der Personengesamtheit  ${}^{(b)}L$  erfolgt separat nach den Ausprägungen des **Geschlechts** ( $x$  für Männer und  $y$  für Frauen). Das Risikomerkmale Geschlecht ist (auch langfristig gesehen) ein relevanter Risikofaktor bzgl. der Sterblichkeit.<sup>87</sup> Die Gesamtheit der Personen wird, jeweils für Männer und Frauen, in  $n+1$  Risikoausprägungen des Risikomerkmals Alter aufgeteilt. Der **Altersbereich** sei definiert durch  $AB = [x_0, \dots, x_n]$  bzw.  $AB = [y_0, \dots, y_n]$ , für ganzzahlige Alter. Für einen Stichtag  $t \in b$ , erhält man die zerlegende Darstellung  ${}^tL = \bigcup_{x \in AB} {}^tL_x \cup \bigcup_{y \in AB} {}^tL_y$ .<sup>88</sup> Dieses Konzept der

<sup>86</sup> Kakies, P. / et.al. geben an, dass es wohl unmöglich sei völlig homogene Kollektive zu finden, man betrachte bspw. nur die Sterblichkeit von Rauchern und Nichtrauchern. Die Annahme eines homogenen Kollektivs gestattet es dem Aktuar in der Praxis zu arbeiten.

<sup>87</sup> Siehe DAV[2]. Untersucht wurde das Frauen-Männer-Verhältnis (Quote) bei Sterbewahrscheinlichkeiten für Lebens- und Renten-, sowie Invaliditäts- und Pflegeversicherungen. Dabei belegen die Untersuchungen, dass eine Differenzierung erforderlich ist.

<sup>88</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 12 ff.. Eine Personengesamtheit lässt sich theoretisch in beliebig vielen Teilen zerlegen. Mit Hinzunahme weiterer Unterscheidungsmerkmale wächst die Zahl der Teilgesamtheiten

Zerlegung in (annahmegemäß) homogener (Teil-) Personengesamtheiten und der anschließenden Ableitung von aussagekräftigen Kennzahlen kann auch auf andere Zielgrößen bzw. Ausscheideursachen angewandt werden. Um Aussagen über die wichtigsten Einflussvariablen zu gewinnen, bieten sich Klassifizierungsanalysen und Bivariate Tests an.

Im Weiteren wird für die Beschreibungen der Index  $x$  der Männer gewählt, da wie erwähnt, die Tafeln nach dem Geschlecht getrennt erfasst werden und die folgenden Betrachtungen für beiderlei Geschlechter gelten. Für die Weiteren Betrachtungen wird der

Zeitindex unterdrückt.<sup>89</sup> Die Maßkennzahlen  $\frac{d_x^{roh}}{l_x^{roh}}$  hängen dann vom Alter, vom

Geschlecht und vom Beobachtungszeitraum ab. Die Periodenanalyse stellt den eindimensionalen Fall dar. Auf den zweidimensionalen Fall, welcher in der Praxis auf den eindimensionalen Fall reduziert wird, wird im Kapitel 8 eingegangen. Wie sich später herausstellt, ist die Periodenanalyse die Basis, auch für die Generationentafeln. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Ermittlung geeigneter Stichproben und Methoden zur Ermittlung der Populationsgrößen.

### 3.2. Methoden zur Ermittlung relativer Häufigkeiten

Die absoluten Populationsgrößen  $l_x^{roh}$  und  $d_x^{roh}$  sollen zahlenmäßig erfasst werden, um die relativen  $q_x^{roh}$  ermitteln zu können. Zur Bestimmung der Anzahlen der Personen in einer Personengruppe können verschiedene Methoden angewandt werden. Kakies, P. / et.al. und Wolfsdorf, K. beschreiben die Methoden mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems<sup>90</sup>. Auf die graphische Beschreibung soll verzichtet werden. Vielmehr soll es das Ziel sein, die Methoden formelmäßig zu beschreiben, um präzise Schätzungen der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten zu erhalten.

---

exponentiell. Eine zu feine Zerlegung wäre nicht sinnvoll, da dann nicht genügend Repräsentanten der Teilgesamtheiten vorhanden wären. Das Gesetz der Großen Zahlen wäre nicht mehr anwendbar und die resultierenden Häufigkeit wären ohne jede Aussagekraft. Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 54. Siehe Anhang A.

<sup>89</sup> Der Zeitindex  $b$  wird im Weiteren unterdrückt.

<sup>90</sup> Beckerscher- oder auch Lexisdiagramme. Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 109 ff.

Für die Ermittlung der  $q_x^{roh}$  ist das  $x+1$ .Lebensjahr relevant. Die Problematik geht darauf zurück, dass für einige Personen zum Beobachtungsbeginn  $t$  bereits ein Teil des  $x+1$ . Lebensjahr verstrichen ist. Bei anderen Personen kann nicht beobachtet werden, ob sie das  $x+1$ .Lebensjahr beenden konnten, weil es nicht mehr auf  $b$  fällt. Ebenso stehen Zugänge und Abgänge  $x$ -Jähriger nur teils unter dem Risiko. Für offene und geschlossene Personengruppen bietet die Verweildauermethode<sup>91</sup> ein exaktes Verfahren, um die  $q_x^{roh}$  zu ermitteln. Die Geburtsjahrmethode wirft hingegen nur für geschlossene Personengruppen exakte Ergebnisse abwirft.

Der mögliche Geburtszeitraum eines  $x$ -Jährigen, mit gegebenem  $b=[t, t+\Delta[$ , ist definiert durch  $g=[t-(x+1), t-x+\Delta[$ . Daraus wird ersichtlich, dass der mögliche Geburtszeitraum, um ein Jahr größer ist als der Beobachtungszeitraum. Die verwendeten Parameter zur Beschreibung von  $^{(b,g)}l_x^{roh}$  und  $^{(b,g)}d_x^{roh}$  sind  $b$ ,  $g$  und das Alter  $x$ .<sup>92</sup>

### 3.2.1. Die Geburtsjahrmethode<sup>93</sup>

Die rohe Sterblichkeit lässt sich für eine geschlossene Personengesamtheit, nach der Geburtsjahrmethode  $^Gq_x^{roh}$ , exakt bestimmen. Dabei werden nur die  $x$ -jährigen Personen berücksichtigt, welche auf einen Geburtszeitraum  $g=[t-x, t-x+\Delta-1[$ ,  $\Delta>1$ , fallen können; daher auch die Namensgebung. Folglich braucht man 2 Jahre, um einen kompletten Geburtsjahrgang zu untersuchen. Der Schätzer lässt sich mittels der Geburtsjahrmethode wie folgt darstellen:  $^Gq_x^{roh} = \frac{^{(b,g)}d_x^{roh}}{^{(b,g)}l_x^{roh}}$ . Die Anzahl der lebenden

Personen von  $^{(b,g)}L_x$  kann nur stichtagbezogen erfolgen. Dazu sei ein Stichtag  $t_s \in b$  gegeben. Die Anzahl der Personengesamtheit  $^{(b,g)}L_x$ , welche als  $x$ -Jährige in  $b$  unter Risiko standen, kann man dann wie folgt bestimmen

<sup>91</sup> Die Verweildauermethode fand bspw. Anwendung bei DAV 2008 T (Vgl. DAV [1], S. 11) und bei DAV 2006 HUR (Vgl. DAV [3]).

<sup>92</sup> Betrachtet man bspw. die 40-Jährigen und die Kalenderjahre 2010/11,  $b=[01.01.2010, 01.01.2012[$ , so ergibt sich  $g=[01.01.1969, 01.01.1972[ = [02.01.1969, 31.12.1971]$ . Das Alter errechnet sich durch Datum des Zeitpunktes minus Geburtsdatum. Für ganzzahlige Altersangaben kann man kaufmännisch runden oder mittels Gaußklammern (ganzzahliges Abschneiden).

<sup>93</sup> Nach „Becker und Zeuner“. Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 20 f. oder Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 107 f..

${}^{(b,g)}l_x = {}^{(t_s,g)}l - {}^{([t_s,t+\Delta[,g)}d_{x+1-\Delta} + {}^{([t_s,t_s],g)}d_x + {}^{([t_s,t_s],g)}d_{x+\Delta-1}$ . Wörtlich, das sind die Personen die während  $b$  auf den Geburtszeitraum  $g = [t-x, t-x+\Delta-1[$ ,  $\Delta > 1$ , fallen und das  $x$ . Lebensjahr vollendet konnten; folglich  ${}^{(b,g)}l_x^{roh} = \sum_{i \in I} 1_{(b,g) L_x}(i)$ , mit Person  $i$  aus dem Versichertenportfolio. Sei  $b = [t, t+\Delta[ = [t, t_1[$ , dann folgt für eine geschlossene Personengesamtheit mit nur einem Ausscheidgrund („Tod“), dass  ${}^{(b,g)}d_x = {}^{(t,g)}l - {}^{(t_1,g)}l + {}^{(b,g)}d_{x-\Delta+1} + {}^{(b,g)}d_{x+\Delta-1}$  die Teilmenge aus  ${}^{(b,g)}L_x$  ist, welche im Beobachtungszeitraum  $b$  als  $x$ -Jährige sterben, folglich  ${}^{(b,g)}d_x = \sum_{i \in I} 1_{(b,g) D_x}(i)$ . Die  $x$ -jährigen Personen mit einem Geburtsdatum vor oder nach  $g$ , folglich aus  $]t-x-1, t-x[ \cup [t-x+\Delta-1, t-x+\Delta[$ , bleiben unberücksichtigt. Denn Todesfälle dieser Personen können auch außerhalb von  $b$  stattfinden. Bei der Geburtsjahrmethode wird das komplette  $x+1$ .Lebensjahr einer Person betrachtet, in diesem Sinne können Todesfälle nur auf  $b$  fallen. Ebenfalls finden Wanderbewegungen keine Berücksichtigung. Kakies, P. / et.al. geben an, dass falls Wanderungsbewegungen berücksichtigt werden ein systematischer Fehler für  ${}^G q_x^{roh}$  auftritt. Dieser Fehler ist für Volkszählungen eher geringfügig, jedoch für Versicherungsunternehmen nicht vernachlässigbar.<sup>94</sup>

Kakies, P. / et.al. erläutern neben der Verweildauermethode und der Geburtsjahrmethode, auch die Sterbejahrmethode und das Sterbeziffernverfahren. Die beiden Letztgenannten sollen nur kurz angerissen werden. Die **Sterbejahrmethode** betrachtet die Sterbefälle eines Alters  $x$  aus den komplett möglichen Geburtszeitraum, welcher durch den Beobachtungszeitraum und dem Alter abgebildet wird. Die Sterbejahrmethode unterliegt dabei der Annahme, dass die Sterbefälle der Geburtsjahrgänge gleichverteilt sind. Die Nennergröße ergibt sich aus der Vereinigung der disjunkten zerlegten Personengesamtheiten nach den Geburtsjahrgängen, wobei die Personengesamtheiten der Randgeburtsjahrgänge nur zur Hälfte berücksichtigt werden. Die Ergebnisse der Sterbejahrmethode sind nicht exakt und lassen sich nur näherungsweise ermitteln. Ebenfalls werden Wanderbewegungen, wie bei der Geburtsjahrmethode, nicht berücksichtigt. Das **Sterbeziffernverfahren** berücksichtigt Wanderbewegungen nur näherungsweise durch Durchschnittsbildung vom Anfang- und Endbestand von  $b$ . Sie

<sup>94</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 22 f. Da bei offenen Personengesamtheiten die Nennergröße abhängig vom Stichtag ist, folglich werden die Werte über- oder unterschätzt.

geht ebenfalls, wie auch die Sterbejahrmethode, davon aus, dass die Sterbefälle während eines Beobachtungszeitraumes gleichverteilt sind.<sup>95</sup>

### 3.2.2. Die Verweildauermethode<sup>96</sup>

Die Verweildauermethode berücksichtigt im Zähler, wie im Nenner, die jeweilige Risikozeit eines  $x$ -Jährigen, welche auf  $b$  fällt.<sup>97</sup> Folglich wird jeder Person  $i \in {}^{(b)}L_x$  ihre Risikozeit zugeordnet. Fällt das komplette  $x+1$ .Lebensjahr einer Person auf  $b$  oder scheidet eine Personen als  $x$ -Jährige aus, so bekommt sie die Risikozeit bzw. das Gewicht  $w=1$  zugeordnet. Falls hingegen nur ein Teil der Risikozeit auf  $b$  fällt, so kriegt die Person nur ihren relativen Anteil der Risikozeit zugeordnet, tatsächliche Verweildauer in Relation zur maximalmöglichen Verweildauer. Die maximalmögliche Verweildauer bzw. Risikozeit beträgt eine Altersperiode. Kakies, P. / et.al. gehen von einer linearen Abhängigkeit der Sterbehäufigkeiten von der Verweildauer aus.<sup>98</sup> Die Beschreibung der Toten mit einer Verweildauer  $w$  lässt sich wie folgt darstellen:  ${}^{(b)}d_{x,w} = w \cdot {}^{(b)}d_x$ . Bspw., für  $w=0.5$ , ist die Anzahl der Toten gerade die Hälfte von  ${}^{(b)}d_x$ , da diese Personen auch nur die Hälfte der Zeit unter dem  $x$ -Jährigen Ausscheiderisiko standen. Die relativen

Sterblichkeiten lassen sich wie folgt bestimmen:  ${}^Vq_x^{roh} = \frac{{}^{(b)}d_x^{roh}}{{}^{(b)}d_x^{roh} + \sum_w w \cdot {}^{(b)}l_{x,w}^{roh}}$ . Der

Summenausdruck im Nenner (Summe aller Risikozeiten aller Personen  $i \in {}^{(b)}L_x$ ) stellt sich wie folgt dar:  $\sum_w w \cdot {}^{(b)}l_{x,w}^{roh} = (w_{\frac{1}{k}} \cdot {}^{(b)}l_{x,w_{\frac{1}{k}}}^{roh} + w_{\frac{2}{k}} \cdot {}^{(b)}l_{x,w_{\frac{2}{k}}}^{roh} + \dots + w_{\frac{k}{k}} \cdot {}^{(b)}l_{x,w_{\frac{k}{k}}}^{roh}) = \sum_{i \in {}^{(b)}L_x} w_i$  mit relativen Verweildauerangaben,  $k \in \mathbb{N}$ , (bspw.  $k=12$  für monatliche Verweildauern).

<sup>95</sup> Zu genaueren Beschreibung wird auf Kakies, P. / et.al. (1985), S. 23 f. verwiesen. Ebenfalls bietet DAA[12] eine Beschreibung mit leicht verständlichen Beispielen.

<sup>96</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 26 f. oder Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 110 f.

<sup>97</sup> Risikozeit := Die Zeit, die ein  $x$ -Jähriger während  $b$  dem Ausscheiderisiko ausgesetzt ist.

<sup>98</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 27. Angenommen wird, dass Ein- u. Austritte sich gleichmäßig auf  $b$  verteilen. Weiterhin sei  $q_x$  vom Eintrittszeitpunkt und von der Zugehörigkeitszeit in  ${}^{(b)}L_x$  unabhängig.

## 4 Ausgleichsverfahren

Ziel dieses Kapitels ist es, die realitätsnahen Ausscheidewahrscheinlichkeiten aus den geschätzten rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten abzuleiten. Für dieses Kapitel sei stellvertretend die Sterblichkeit genannt, dennoch sind die genannten Ausgleichsverfahren auch auf andere Ausscheidewahrscheinlichkeiten übertragbar. Schätzwerte sind im Allgemeinen mit Fehlern behaftet. Die konsistenten<sup>99</sup>  $q_x^{roh}$ , welche aus einer gegebenen Datenbasis abgeleitet sind, unterliegen zufälligen Schwankungen. Die geschätzte Kurve der  $q_x^{roh}$  weist somit einen sprunghaften Verlauf auf, welcher in der Praxis unerwünscht ist. Die Idee ist, dass die wahren Sterbewahrscheinlichkeiten eine **glatte Funktion des Alters** sind. Durch die Eliminierung der Schwankungen bzw. unwahrscheinlichen Regellosigkeiten lassen sich wiederum vernünftige Annäherungen durch interpolierende und extrapolierende Methoden erzielen. Mit Hilfe der Glättung heben sich Schätzfehler teilweise gegenseitig auf und Zufallsschwankungen werden eliminiert bzw. minimiert, wodurch sich die Qualität der Schätzungen erhöhen lässt. So werden Sterbewahrscheinlichkeiten gefunden, welche wahrscheinlicher sind als die der rohen Beobachtungen.<sup>100</sup>

Dem Aktuar steht eine Vielzahl von mathematischen Ausgleichsverfahren zur Verfügung. Objektiv gesehen gibt es keine optimale Lösung, da es bspw. zwischen den Kriterien Glätte und Anpassung ein Zielkonflikt<sup>101</sup> gibt. Desweiteren führen auch die verschiedenen mathematischen Ausgleichsverfahren zu nicht exakten Verläufen der Sterbewahrscheinlichkeiten. Die Annahmen über den Verlauf der  $q_x^{ausg}$  und die Kriterien an das Ausgleichsverfahren werden individuell vom einzelnen Aktuar festgesetzt und sind somit von subjektiver Natur.

---

<sup>99</sup> Konsistent:= Mit steigendem Stichprobenumfang konvergiert ein Schätzwert gegen seinen wahren (in der Regel unbekannten) Wert. Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 278. Siehe auch Anhang A.

<sup>100</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S.77 ff. und Milbrodt, H. (2005), S. 47 und Saxer, W. (1955), S. 17.

<sup>101</sup> Neben dem Ziel der Glätte der Sterbewahrscheinlichkeit ist auch insbesondere das Kriterium der Anpassungen (gute Approximation der ausgeglichenen- an die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten) zu berücksichtigen. Diese beiden Ziele sind gegenläufig. Das bedeutet, dass eine wachsende Anpassung an die rohen Werte mit einer rückläufigen Glätte der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten einhergeht (visa-versa). Folglich setzt ein Aktuar einen subjektiven unscharfen Zielwert fest, der beide Ziele gemäß seiner Präferenzen optimal iteriert.

Nach der Anwendung eines Ausgleichsverfahrens auf die Schätzwerte der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^{roh}$  erhält man die Sterbewahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung  $q_x^{2.Ordnung}$ , welche auch als „tatsächliche“ (oder effektive) Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x^{tats}$  bzw.  $q_x^{ausg}$  bezeichnet werden.<sup>102</sup>

Kakies, P. / et.al. differenzieren die Ausgleichsverfahren in drei Gruppen; dem mechanischen-, dem analytischen- und dem grafischen Ausgleich.<sup>103</sup> Im Folgenden Kapitel 4.1. werden auf die einzelnen Kriterien bzw. Gütemaße eingegangen, über die ein Aktuar zu entscheiden hat zur Erstellung der  $q_x^{ausg}$ . Das Verständnis dieser Gütemaße erleichtert das Grundverständnis der Herleitung einiger Ausgleichsverfahren.<sup>104</sup>

In den weiteren Kapiteln 4.2. und 4.3. wird auf das mechanische- und analytische Ausgleichsverfahren eingegangen. Dabei wird insbesondere auf die Verfahren eingegangen, welche sich in der Praxis bewährt haben.

Allgemein lässt sich die **Modellierung** der Ausgleichsverfahren wie folgt beschreiben:

Der Altersbereich  $AB$  sei ganzzahlig und äquidistant<sup>105</sup> mit dem Abstand eins. Folglich lässt sich der Altersbereich als Intervall bzw. Vektor  $AB = [x_0, \dots, x_n]$  schreiben, mit  $x_n$  als Endalter.<sup>106</sup> Die Menge der Sterbewahrscheinlichkeiten wird mit  $Q^i = \{q_x^i\}_{x \in AB}$  bezeichnet, mit dem Index  $i$  für die rohen oder ausgeglichenen Werte. Desweiteren sei  $F$  eine Abbildungsvorschrift  $F: (Q^{roh}, a_k(Q^{roh}, x), x) \rightarrow (Q^{ausg})$ , welche die  $q_x^{ausg}$  abbildet. Der Vektor  $a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$  stellt die endliche Anzahl von Ausgleichsparameter dar. Die

---

<sup>102</sup> Vgl. Wolfstdorf, K. (1986), S. 69. Wolfstdorf, K. bezeichnet die ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten als „tatsächliche“. Die „wahren“ Sterbenswahrscheinlichkeiten sind unbekannt (falls sie überhaupt existieren - siehe Fußnote 79). Milbrodt, H. bezeichnet die Schätzwerte als tatsächliche (oder effektive) Sterbenswahrscheinlichkeiten. Vgl. Milbrodt, H. (2005), S. 63. Um Missverständnissen aus dem Weg zu gehen, werden die ausgeglichenen Werte mit „ausg“ gekennzeichnet. Mit der anschließenden Extrapolation an den Rändern erhält man die Wahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung.

<sup>103</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 77 ff. Bei dem grafischen Ausgleich wird der Verlauf der ausgeglichenen Werte nicht mit mathematischen Mitteln errechnet, sondern durch gefühlsmäßiges Zeichnen erzielt.

<sup>104</sup> Insbesondere sind damit die relevanten Ausgleichsmodelle dieser Arbeit gemeint, die zur Ermittlung der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten ein Minimierungsproblem modellieren.

<sup>105</sup> Mit gleichem Abständen aufweisend.

<sup>106</sup> Dieses Endalter bezieht sich auf die rohen Beobachtungen. Das Endalter einer Ausscheidetafel wird üblicherweise mit einem kleinen Omega bezeichnet.

ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeiten können von den Werten bzw. Vektoren  $Q^{roh}$ ,  $a_k$  oder  $x$  abhängen, müssen dies aber nicht.

## 4.1. Gütemaße

Die Güte eines Ausgleichsverfahrens wird mittels Gütemaße<sup>107</sup> beurteilt. Insbesondere sind die Anforderungen der entgegengesetzten Kriterien der Glätte und der Anpassung zu erwähnen.<sup>108</sup> Kakies, P. / et.al. geben die Regellosigkeit, den Trend und einen vorgegebenen Kurvenverlauf als weitere Gütemaße an.<sup>109</sup>

Ergänzend sei zu erwähnen, dass beim Kriterium der Glätte ein eventueller Übergang von Ausscheidewahrscheinlichkeiten, welche aus verschiedenem Datenmaterial abgeleitet bzw. entnommen sind, zu gewährleisten ist.

### 4.1.1. Glättemaß

Das Krümmungsverhalten  $K$  einer Kurve über den Altersbereich  $AB$  gibt das Kriterium der Glätte  $G$  an. Dabei gilt, je kleiner  $K$  ist desto glatter ist die Kurve.<sup>110</sup> Das Glättemaß

einer stetig differenzierbaren<sup>111</sup> Funktion  $f(x)$  ist definiert durch  $G = \int_{AB} \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} dx$ .

Falls  $f'(x)$  klein ist, dann gilt  $G \approx \int_{AB} f''(x) dx$ . Für endliche Wertereihen, wie bei  $Q^i$ ,

finden auch die  $m^{\text{ten}}$  Differenzen  $G = \sqrt{(\sum_{x \in AB} (\Delta^m q_x)^2)}$  Anwendung.<sup>112</sup> Die Grundidee der

Differenzenbildung ist die Folgende:  $\Delta q_{x_i} = q_{x_i} - q_{x_{i+1}}$  und  $\Delta^2 q_{x_i} = \Delta q_{x_i} - \Delta q_{x_{i+1}} = q_{x_i} - q_{x_{i+1}} - (q_{x_{i+1}} - q_{x_{i+2}}) = q_{x_{i+2}} - 2 \cdot q_{x_{i+1}} + q_{x_i}$  usw.. Daraus ergeben sich die Koeffizienten

<sup>107</sup> Die Zuordnung reeller positiver Zahlen über ein Teilmengensystem wird als Maß bezeichnet.

<sup>108</sup> Siehe DAV[1], S. 12.

<sup>109</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 124 ff. Mögliche Gütemaße der Regellosigkeit ist der Zeichentest oder der Iterationstest, welche messen, ob eine Kurve zufällig um eine andere schwankt. Siehe Kapitel 7.

<sup>110</sup> Im stetigen Fall ist das Maß der Krümmung in einem Punkt, umso größer je stärker die Kurve in der Umgebung des betrachteten Punktes gekrümmt ist. Für eine Gerade ist das Maß der Krümmung somit null. Für identische Zuwächse (im diskreten Fall) ergibt sich, ab den zweiten Differenzen, ein Glättemaß von null.

<sup>111</sup> Vorausgesetzt wird, dass die betrachteten Funktionen (genügend oft) stetig differenzierbar sind.

<sup>112</sup> In der Praxis finden häufig die 2<sup>ten</sup> oder 3<sup>ten</sup> Differenzen Anwendung.



des Binomialkoeffizient mit alternierendem Vorzeichen, folglich gilt für die  $m^{\text{ten}}$  Differenzen von  $q_{x_0+k}$  :  $\Delta^m q_{x_0+k} = \sum_{v=0}^m (-1)^v \cdot \binom{m}{v} \cdot q_{x_0+k+v}$  für  $k=0, \dots, n-m$ .

Die beiden Maße, das Integral im stetigen und die Summe im diskreten Fall, geben jeweils das Maß der Glätte über den Altersbereich  $AB$  an. Man spricht von Glätte genau dann, wenn das Glättemaß klein ist. Ab wann das Glättemaß als ausreichend klein angesehen werden kann, hängt vom entscheidenden Aktuar, von der Aufgabenstellung und von dem Anpassungsmaß ab.<sup>113</sup>

#### 4.1.2. Anpassungsmaß

Das Anpassungsmaß ermittelt sich aus den Abweichungen der  $q_x^{\text{ausg}}$  und der  $q_x^{\text{roh}}$  über  $AB$ . Die Summe der quadratischen Abweichungen  $A = \sum_{x \in AB} (q_x^{\text{roh}} - q_x^{\text{ausg}})^2$  geben ein Maß

für die Schwankung an. Ebenso kann der Chi-Quadrat-Anpassungstest, mit der Prüfgröße

$$A = \chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(l_i \cdot q_i^{\text{roh}} - l_i \cdot q_i^{\text{ausg}})^2}{l_i \cdot q_i^{\text{ausg}}}, \text{ Anwendung finden.}^{114}$$

## 4.2. Mechanische Ausgleichsverfahren

**Definition 4.2.:**<sup>115</sup> Die Ausgleichsfunktion  $F : (Q^{\text{roh}}, a_k(Q^{\text{roh}}, x), x) \rightarrow (Q^{\text{ausg}})$  heißt mechanisch, falls

- $F$  hängt nicht explizit vom Alter  $x$  ab.
- Die Ausgleichsparameter  $a_k \in \mathbb{R}$  sind unabhängig von  $x$  und  $Q^{\text{roh}}$ .
- $F$  ist linear in  $q_x$  und  $a_k$ .
- $F$  lässt sich darstellen durch  $F = \sum_{k=-r}^{+s} a_k \cdot q_{x+k}, r+s \leq x_n, r \wedge s \in \mathbb{N}$ .
- Die Summe der Gewichte  $\sum_{k=-r}^{+s} a_k = 1$ .

<sup>113</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 126 f.

<sup>114</sup> Siehe Kapitel 7.4.

<sup>115</sup> Siehe Kakies, P. / et.al. (1985), S. 86.

Weiterhin gilt  $r \geq 0 \wedge s \geq 0$ , welche den Stützbereich  $t = r + s + 1$  angeben. Dabei kann der Stützbereich gerade oder ungerade sein. Man gleitet über die rohen Beobachtungswerte hinweg und berechnet jeweils aus  $t$  Werten einen Durchschnitt. Gilt für Gewichte  $a_k = a_{-k}$  spricht man von Symmetrie, ist  $r = s$  so ist  $F$  zentral. Falls die Gewichte gleichgewichtet über den Stützbereich sind, dann entspricht dieses Verfahren dem zentrierten gleitenden Durchschnitt.<sup>116</sup> Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass am Anfang  $r$  und am Ende  $s$  Werte der geglätteten Beobachtungsreihe verloren gehen. Kakies, P. / et.al. stellen eine Vielzahl weiterer mechanischer Ausgleichsverfahren vor. Bspw. Konstruktionsmethoden, deren Aufgabe es ist, die  $a_k$  aus aufgestellten Bedingungen abzuleiten. Der nächste Abschnitt (4.2.1.) behandelt ein solches Verfahren, welches sich in der Praxis bewährt hat.

#### 4.2.1. Whittaker-Henderson Verfahren

Dieses Verfahren fand u.a. Anwendung bei der Tafel DAV 2008 T. „Die Idee dieser Konstruktionsmethode besteht darin, die Bestimmungsgleichungen für die  $a_k$  aus einer Optimierungsaufgabe herzuleiten.“<sup>117</sup> Ziel ist es die beiden Gütemaße der Anpassung und der Glätte zu minimieren. Zur Modellierung der Zielfunktion werden die quadratischen Abweichungen (4.1.2.), welche mit positiven Gewichten versehen werden, und das Maß der  $m^{\text{ten}}$  Differenzen (4.1.1), welches mit einem zusätzlichen konstantem Glättungsfaktor  $g$  gewichtet wird, additiv zusammengefasst. Die Optimierungsaufgabe lässt sich wie folgt darstellen:

$$z = \overbrace{\sum_{k=0}^n w_k \cdot (q_{x_0+k}^{\text{roh}} - q_{x_0+k}^{\text{ausg}})^2}^{\text{Anpassung}} + \overbrace{g \cdot \sum_{k=0}^{n-m} (\Delta^m q_{x_0+k}^{\text{ausg}})^2}^{\text{Glätte}} \rightarrow \text{Min!}$$

$$\text{Mit } \Delta^m q_{x_0+k}^{\text{ausg}} = \sum_{v=0}^m (-1)^v \cdot \binom{m}{v} \cdot q_{x_0+k+v}^{\text{ausg}} \wedge g > 0 \wedge \sum_{k=0}^n w_k = 1.$$

<sup>116</sup> Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 109 f.

<sup>117</sup> Siehe Kakies, P. / et.al (1985), S. 92.

Anhand der Konstanten  $g$  kann man die Glätte justieren. Umso größer  $g$  gewählt wird, desto „glatter“ ist das Ergebnis.<sup>118</sup> Ebenso ist Wahl der Größe von  $g$  abhängig von  $m$  (der Ordnung der Differenzen) und von der Größe des Altersbereichs  $AB$ . Mit steigendem  $m$  oder  $|AB|$  muss auch  $g$  größer gewählt werden.<sup>119</sup> Mit den Gewichten lassen sich einzelne Abweichungen stärker gewichten, so dass dort individuell die Anpassung erhöht werden kann. Kakies, P. / et.al. modellieren ihren Lösungsvorschlag anhand von Matrizen. Man erhält keine Ausgleichsfunktion der Form wie in Definition 4.2., „sondern eine Matrix deren  $k^{\text{te}}$ -Zeile eine mechanische Ausgleichsfunktion für  $q_{x_0+k}^{\text{ausg}}$  darstellt.“<sup>120</sup> Ebenso kann ein Solver<sup>121</sup> zur Lösung der Optimierungsaufgabe verwendet werden. Im Anhang C wird die Lösung mittels Matrizendarstellung modelliert. Das folgende Beispiel soll die Grundidee des Henderson-Verfahrens visualisieren.

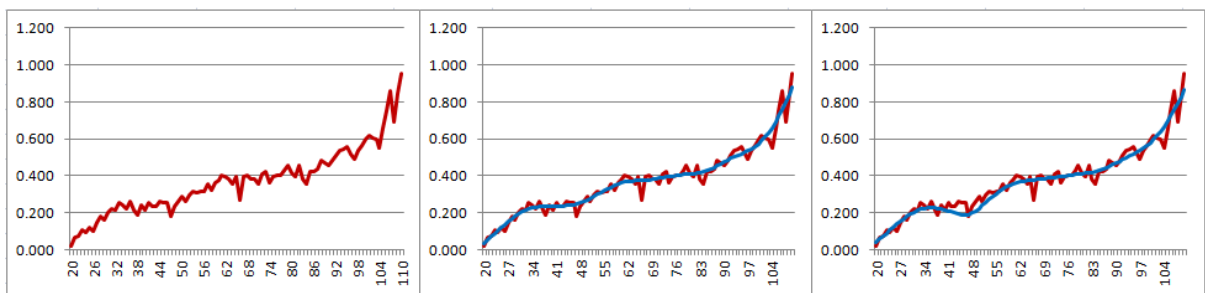


Abbildung 11: Beispiel: Whittaker-Henderson-Verfahren.

Mit  $AB=[20,\dots,110]$ . Links: (rote Kurve) Fiktiv erstellter Verlauf der rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Mitte: (blaue Kurve) Ausgleich mittels des Henderson-Verfahrens mit  $m=2 \wedge g=1 \wedge w_{x_k}=1/91 \forall k$ . Rechts: (blaue Kurve) Ausgleich mittels des Henderson-Verfahrens mit  $m=2 \wedge g=1$ . Der Abfall bei  $x=47$  wurde beim Ausgleich dadurch berücksichtigt, dass das zugehörige Gewicht  $w_{x=47}=100/190$  gesetzt wurde.

Quelle: Eigene Darstellung.

<sup>118</sup> Mit wachsenden  $g$  wird der Verlauf der geschätzten Sterbewahrscheinlichkeiten immer linearer und führt zu einem Entgegensetzen der Anpassung. Bei der DAV 2008 T wurde ein Glättungsfaktor i.H.v.  $g=0.5$  verwendet. Vgl. DAV[1], S. 12. Es ist davon auszugehen, dass i.d.R.  $g$  niedrig angesetzt ist, da ansonsten die besondere Struktur der Kurve (bspw. Unfallbuckels) verloren gehen.

<sup>119</sup> Die Analyse im Anhang C hat gezeigt, dass mit wachsendem  $m$  die Anpassung steigt.

<sup>120</sup> Siehe Kakies, P. / et.al (1985), S. 92.

<sup>121</sup> Ein Solver bietet eine schnelle, einfache Handhabung. Der Solver von Microsoft Excel lässt sich kostenlos als Add-In installieren. Nachteile sind u.a., dass man nur eine mögliche Lösung erhält, gelegentlich liefert der Solver falsche Näherungswerte und scheitert ggf. bei überdimensionalen Aufgaben (bspw. bei hohen Anzahlen von Variablen und Restriktionen). Vgl. Benker, H. (2007), S. 287. Benker gibt eine detaillierte Anleitung zur Implementierung und Anwendung des Solvers von Excel an. Alternativen zum Solver sind CONOPT, EASY-OPT, LINDO, LINGO, usw..

### 4.3. Analytische Ausgleichsverfahren

**Definition 4.3.:**<sup>122</sup> Die Ausgleichsfunktion  $F : (Q^{roh}, a_k(Q^{roh}, x), x) \rightarrow (Q^{ausg})$  heißt analytisch, falls

- Die Ausgleichsparameter  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  können abhängig vom Alter  $x$  und von  $Q^{roh}$  sein.
- $F$  ist eine stetige, reell-wertige Funktion in  $x$  und den  $a_k$ .

Die vom Aktuar vorzugebene Funktion  $F$  wird auch als **Sterbegesetz**<sup>123</sup> bezeichnet, welche für jeden Vektor  $Q^{roh}$  neu festzulegen ist. Die Idee ist, dass der Verlauf von  $Q^{ausg}$  einer analytischen Funktion folgt. Ziel ist es, die ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten mittels  $F$  abzubilden. Zur Schätzung der Funktionsparameter  $a_k$  werden Ausgleichsbedingungen bzw. das Anpassungsmaß herangezogen. Gesucht wird eine stetige Funktion, welche die rohen Daten optimal approximiert. Für praktische Erleichterungen können auch Zielgrößen, aus denen sich wiederum die  $q_x^{ausg}$  ableiten lassen, geschätzt werden. Zielgrößen könnten bspw. die Anzahl der Lebenden  $l_x^{ausg}$ , die Überlebenswahrscheinlichkeiten  $p_x^{ausg}$ , die Sterbeintensitäten  $\mu_x^{ausg}$  oder deren logarithmische Darstellungen sein. Solche parametrische Ansätze, bei welchen eine Funktion an die rohen Daten angepasst werden soll, sind bspw. das Gompertz-Makeham-Sterbegesetz  $k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$  oder die Ansätze von de Moivre, von Lambert, von Perks, oder von Dormoy. Ein universelles mathematisches Sterbegesetz gibt es nicht, vielmehr hängt das Sterbegesetz bzw. die Modellfunktion von den Modelldaten und den individuellen Bedingungen an das Modell ab.<sup>124</sup>

#### 4.3.1. Das Verfahren der Kleinsten Quadrate

Die Idee ist, dass das Anpassungsmaß  $A$  aus (4.1.2.) minimiert wird. Dabei werden die ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten durch ein Minimierungsproblem hergeleitet.

---

<sup>122</sup> Siehe Kakies, P. / et.al. (1985), S. 103 ff.

<sup>123</sup> Eine mathematische Funktion, die den Abbau einer Personengesamtheit durch Tod beschreibt. Dabei sind die Werte des Sterbegesetzes als Schätzwerte zu interpretieren. Gute Annäherungen an die Wirklichkeit könnten somit erfahrungsgemäß für bestimmte Altersbereiche mit verschiedenen Modellen erreicht werden. Vgl. Saxer, W. (1955), S. 16 f.

<sup>124</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 104 f. und Saxer, W. (1955), S. 16.

Durch das Minimieren mittels  $F$  lässt sich im Allgemeinen kein Anpassungsmaß von Null erreichen, da  $F$  einen kontinuierlichen Verlauf über  $AB$  hat.<sup>125</sup> Ein Vorteil dieses Verfahren ist, das  $F$  einen Extrapolationscharakter hat.<sup>126</sup> Die Zielfunktion der Optimierungsaufgabe lässt sich wie folgt darstellen:

$$z = \sum_{x=x_0}^{x_0+n} g(x, a_k) \cdot (q_x^{roh} - F(x, a_k))^2 \rightarrow Min! \quad k = 1, \dots, r.$$

Die Funktionen  $F$  und  $g$  sind 2-mal stetig differenzierbar.  $F$  ist ein vom Aktuar vorzugegebenes Sterbegesetz bzw. eine **Modellfunktion**, welche die  $q_x^{roh}$  bestmöglich annähert. Stehen mehrere Modellfunktionen zur Auswahl, dann kann neben dem aktuariellen Augenmaß auch die kleinste Fehlerquadratsumme entscheiden.<sup>127</sup> Im anderen Fall sollten Ausgleichende Splines oder das Henderson-Verfahren Anwendung finden.

Im allgemeinen Gaußschen Ansatz werden die einzelnen Gewichte eins gesetzt. Geht ein Aktuar davon aus, dass einige  $q_x^{roh}, x \in AB$ , bereits ziemlich genau sind, so kann man diesen Werten ein größeres Gewicht zuordnen. Normiert man die Gewichte, so lassen sich diese als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der  $q_x^{roh}$  interpretieren. Die **Gewichtsfunktion** wird dabei meistens so gewählt, dass sie unabhängig von den Parametern ist.<sup>128</sup> Geht man davon aus, dass die Todesfälle poissonverteilt sind, so geben Kakies, P. / et.al.  $g_x = l_x / q_x$  und  $g_x = l_x / (q_x \cdot p_x)$  für binomialverteilt Todesfälle, als Gewichtsfunktion an. Die Gewichtsfunktionen ergeben sich dabei wie folgt: Bildet man die Summe der quadrierten standardisierten Zufallsgrößen (jeweils für poissonverteilte und binomialverteilte Betrachtung) und minimiert diese, so ergeben sich jeweils die Gewichtsfunktion durch

<sup>125</sup> Lässt man das Glättemaß der Zielfunktion (4.2.1.) weg, so ergeben sich als ausgeglichene- die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten.

<sup>126</sup> Siehe auch Kapitel 5.

<sup>127</sup> Lässt sich die Modellfunktion der Form  $f((a_1, \dots, a_r), x) = \sum_{k=1}^r a_k \cdot \varphi_k(x)$  mit vollständig bestimmten,

linear unabhängigen Funktion  $\varphi_k \in AB$  darstellen, so heißt sie linear, andernfalls nichtlinear. Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), Kapitel 8.

<sup>128</sup> Das erleichtert die Bestimmung der Parameter.

$$\sum_{i=0}^n \frac{(l_i \cdot q_i^{roh} - l_i \cdot q_i^{ausg})^2}{l_i \cdot q_i^{ausg}} = \sum_{i=0}^n \frac{l_i^2 \cdot (q_i^{roh} - q_i^{ausg})^2}{l_i \cdot q_i^{ausg}} = \sum_{i=0}^n \frac{l_i}{q_i^{ausg}} \cdot (q_i^{roh} - q_i^{ausg})^2 \rightarrow Min ! \quad \text{bzw.}$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{(l_i \cdot q_i^{roh} - l_i \cdot q_i^{ausg})^2}{l_i \cdot q_i^{ausg} \cdot (1 - q_i^{ausg})} = \sum_{i=0}^n \frac{l_i^2 \cdot (q_i^{roh} - q_i^{ausg})^2}{l_i \cdot q_i^{ausg} \cdot (1 - q_i^{ausg})} = \sum_{i=0}^n \frac{l_i}{q_i^{ausg} \cdot (1 - q_i^{ausg})} \cdot (q_i^{roh} - q_i^{ausg})^2 \rightarrow Min !.^{129}$$

Ebenfalls Einfluss auf den Ausgleich, hat die Anzahl der Freiheitsgrade<sup>130</sup>. Ebenso haben die  $q_x^{roh}$  einen Einfluss auf die Parameter  $a_k, k \in \mathbb{N}$ . Zur Lösung dieses Problems unterscheidet man im Allgemeinen drei Vorgehensweisen (wobei  $g$  unabhängig von den Funktionsparametern sei). Der Ausdruck der Zielfunktion wird jeweils nach den einzelnen Funktionsparametern abgeleitet. Für  $r$  Parameter erhält man  $r$  Normalgleichungen, welche Null gesetzt werden. Liegt ein lineares Gleichungssystem (LGS) vor oder lässt sich das Modell durch Transformation der Modellfunktion in ein LGS überführen, so werden direkte Verfahren angewandt.<sup>131</sup>

Für ein nicht-LGS werden Näherungsverfahren, wie bspw. das Newtonverfahren oder das Gradientenverfahren, verwendet.<sup>132</sup> Die Lösung kann mittels eines Solvers erlangt werden.

#### 4.3.2. Ausgleichende Splines

Ohne Modellvorstellung bzw. ohne Anhaltspunkte für eine Modellfunktion (siehe (4.3.1.)) eignen sich Ausgleichende Splines dritten Grades (kubische Splines). Anwendung fanden sie u.a. bei den RT 2005 G. Unter einem Spline versteht man umgangssprachlich ein biegsames Kurvenlineal. Gesucht wird eine Spline-Kurve, welche die rohen Daten nicht mittels einer glatten Kurve verbindet, sondern sie am besten mittels einer glatten Kurve ausgleicht bzw. approximiert  $\rightarrow$  Ausgleichssplines.<sup>133</sup> Dafür eignen sich besonders

<sup>129</sup> Vgl. Wolfstdorf, K. (1986), S. 88 f.. Zum Grundverständnis zur Standardisierung von ZV'n und zu den genannten Verteilungen wird ferner auf die Kapitel 6 und 7 verwiesen. Für die Gewichtsfunktionen werden die rohen Wahrscheinlichkeiten verwendet, da die ausgeglichenen Wahrscheinlichkeiten erst ermittelt werden müssen. Der daraus resultierende Fehler ist minimal. Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 106/107.

<sup>130</sup> Anzahl der beobachteten Werte abzgl. der Anzahl der Parameter. Im Allgemeinen ist die Anzahl der Freiheitsgrade u. das Anpassungsmaß positiv korreliert (vica-versa). Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 113 ff.

<sup>131</sup> Direkte Verfahren liefern exakte Lösungen, sieht man von Rundungsfehlern ab (bspw. Gaußsche Algorithmus). Iterationsverfahren können auch Vorteile gegenüber direkten Verfahren ausweisen, genau dann wenn die Akkumulation von Rundungsfehlern unbrauchbare Lösungen erzeugt. Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), Kapitel 4/5.

<sup>132</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 108 f.

<sup>133</sup> Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), S. 266.

kubische Splines, da diese die Biegungsenergie minimieren.<sup>134</sup> Wie beim Henderson-Verfahren lässt sich der Ausgleich auf dem kompletten Altersbereich  $AB$  durchführen.

Gesucht ist eine zweimalstetig differenzierbare Funktion  $f$ , so dass  $\int_{AB} f''(x) dx \rightarrow \text{Min} !$

unter der Nebenbedingung, dass  $\sum_{i=0}^n \left( \frac{f(x_0 + i, a_k) - q_i^{\text{roh}}}{v_i} \right)^2 \leq A$  mit  $v_i$  als

Standardabweichung von  $q_i$  und  $A \in \mathbb{R}_+$  als vorzugebener Anpassungswert, welchen dem Aktuar erlaubt, das Ausmaß der Glätte zu kontrollieren.<sup>135</sup> Die Herangehensweise zur Lösung des Problems befindet sich im Anhang C.

#### 4.4. Zusammenfassende Betrachtung

Die Palette der Ausgleichsverfahren ist groß, so geben Kakies, P. / et.al., Wolfsdorf, K. oder Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. eine Vielzahl weiterer Verfahren an, welche zum Ausgleich verwendet werden können. Wolfsdorf, K. bezeichnet einen Ausgleich als gut, wenn beide Optimalitätskriterien hinreichend gut erfüllt sind. Ebenso können die Auswirkungen auf die Barwerte berücksichtigt werden, wenn man einerseits mit den rohen und andererseits mit den ausgeglichenen Werten rechnet. Es gilt, die Veränderungen der Barwerte, die durch den Ausgleich verursacht werden können, minimal zu halten.<sup>136</sup> In diesem Sinn ist es die Aufgabe des Aktuars plausible Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Für die Tafeln der DAV hat sich das Henderson-Verfahren bewährt. Die Gründe liegen in der einfachen Umsetzung und in der flexiblen Modifikation durch die Gewichte, durch die Differenzordnung und durch den Glättefaktor.

---

<sup>134</sup> Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), Kapitel 10/11 und Kakies, P. / et.al. (1985), S. 114 ff.. Je nach Art unterscheidet man zwischen parametrischen- und nichtparametrischen Interpolierenden bzw. Approximierenden Splines.

<sup>135</sup> Auf den Einfluss des Anpassungswertes und der Gewichte wird ebenfalls im Anhang C eingegangen.

<sup>136</sup> Denkbar wäre ein sukzessiver Algorithmus. Vorgehen: (1) Modifizierung des Ausgleichs (2) Neuberechnung der Barwerte mit anschließendem Vergleich der mit den rohen Rechnungsgrundlagen ermittelten Barwerte. Sind die Auswirkungen zufriedenstellend? Ja  $\rightarrow$  Abbruch.  $\rightarrow$  Nein (1).

## 5 Extrapolation und Projektivität

Der erste Teil des 5. Kapitels beschäftigt sich mit der **Extrapolation auf dem Altersbereich**, bzw. über einem Bereich hinaus Schätzwerte bestimmen. Im Kapitel 5.1. werden verschiedene Extrapolationsansätze für die höheren Altersklassen vorgestellt, welche sich bisher in der Praxis als geeignet erwiesen haben. Die Extrapolation auf dem Altersbereich dient dazu, schwach- oder nicht besetzte Altersklassen in den niedrigen- und hohen Altern einer Ausscheidetafel zu schätzen, da sich in diesem Bereichen im Allgemeinen keine Rechnungsgrundlagen direkt herleiten lassen. Die Schätzungen basieren dann auf den stark besetzten Altersklassen. Der Trend der vorliegt (für den Fall der Existenz eines Trends) kann dann verwendet werden, um die Ausscheidewahrscheinlichkeiten der höheren Altersklassen zu gewinnen, da bspw. dort die Bestandszahlen naturgemäß zurückgehen.<sup>137</sup> Das Problem der schwachbesetzten Altersklassen bzw. des geringen Beobachtungsmaterials verursacht größere Schwankungen

- ➔ in den niedrigeren Altern (vor dem 20.Lebensjahr) bzgl. der Sterblichkeit, so dass dort Bevölkerungsdaten (wie bei der DAV 2004 R) eingehen können.<sup>138</sup>
- ➔ in den niedrigeren Altern (vor dem 40.Lebensjahr) bzgl. der Rechnungsgrundlagen für Pflegeprodukte (DAV 2008 P), so dass dort explizit keine Rechnungsgrundlagen mit angegeben werden und es dem Aktuar obliegt gemäß der Besonderheiten im Anwendungsbestand geeignete Rechnungsgrundlagen zur Verfügung zu stellen.<sup>139</sup>
- ➔ in den höheren Altern, so dass dort extrapoliert wird.

In der Praxis finden Extrapolationsmodelle (zum Teil nur) für die höheren Altersklassen Anwendung. Jedoch ist es die Aufgabe des Aktuars geeignete Rechnungsgrundlagen herzuleiten. Dazu können spezifische Unternehmensdaten, geeignete Vergleichsdaten und geeignete Extrapolationsmodelle dienen.<sup>140</sup>

Im Kapitel 5.2. wird auf die Extrapolation von Sterbewahrscheinlichkeiten auf der Zeitachse eingegangen → Trendannahmen und Trendmodelle zur Sterblichkeit werden vorgestellt. Bei Generationentafeln werden zukünftige Entwicklungen mittels

---

<sup>137</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 16.

<sup>138</sup> Vgl. DAV[6], S.204. Bzw. ist auch ein modifizierter Profilverlauf einer Referenztafel denkbar.

<sup>139</sup> Vgl. DAV[4], S. 35. Die DAV 2008 P rät (in dem Fall, unter Prüfung eines Aktuars) zur einen Anlehnung an die Tafel der Erwerbsunfähigkeitsversicherung.

<sup>140</sup> Unter ein geeignetes Extrapolationsmodell wird verstanden, wenn das Modell den extrapolierten Ausscheideverlauf und somit die Zuwachse den Vorstellungen des Aktuars entsprechen. Weiterhin sind die Kriterien der Plausibilität (auch in Bezug auf frühere Werte) und die Modellgüte (Anpassung und die Stabilität bei Variation im Stützbereich) zu nennen. Vgl. Statis[2], S. 7 f.



Trendannahmen berücksichtigt. In diesem Zusammenhang versteht man unter der **Projektivität** eine Vorwegnahme zukünftiger Entwicklungen, die einerseits durch Sicherheitsmargen (siehe Kapitel 6), andererseits durch Trendfunktionen (wie bei den RT 2005 G) berücksichtigt werden kann.

### 5.1. Extrapolation in den höheren Altersklassen

Für höhere Alter verwendet man (je nach Zweck und Geeignetheit), bspw. für Sterbewahrscheinlichkeiten, Bevölkerungsterbetafeln. Jedoch reichen diese meist nicht aus, da das Endalter einer Ausscheidetafel meist höher festgesetzt ist (bspw. bei der DAV 2008 T mit  $\omega=121$ ). Ein anderer Grund kann unter Umständen darin liegen, dass Ausscheidewahrscheinlichkeiten höheren Alters ein unplausibles Verhalten aufzeigen können, welches wiederum durch geringe Beobachtungsanzahlen verursacht sein kann. In diesem Zusammenhang werden bei der Erstellung von Ausscheidetafeln, verschiedene Modelle angewendet. Wie beim Ausgleich haben verschiedene Modelle verschiedene Stärken, somit obliegt es dem Aktuar ein passendes Modell zu einer gegebenen Applikation<sup>141</sup> zu finden. Hat ein Aktuar ein gegebenes Modell ausgewählt bzw. hält es für geeignet, welches durch Beurteilung der Werte erfolgt, dann ist ebenfalls ein glatter Übergang zu den extrapolierten Werten zu gewährleisten.<sup>142</sup>

Für die **Extrapolation in den höheren Altern für die Rentnersterblichkeit** haben die Untersuchungen der DAV gezeigt, dass sich für die Rentnersterblichkeit das Logistische Modell (mit 4 Parametern  $\alpha, \beta, b \wedge c \in \mathbb{R}$ ) als tauglich erwiesen hat.

$$\rightarrow \text{Logistisches Modell: } q_x = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\beta \cdot \exp(b \cdot x)}{1 + \alpha \cdot \exp(b \cdot x)} + c\right)\right).^{143}$$

Als Lösung bzw. zur Schätzung der vier Parameter wird auf das „Sequential Quadratic Programming“-Verfahren mittels SPSS verwiesen. Bei der DAV 2008 T dienten die

---

<sup>141</sup> Mit Applikation (Anwendung) ist im diesem Sinne gemeint, dass die extrapolierten Ausscheidewahrscheinlichkeiten, welche mittels eines Modells gewonnen werden, als geeignet erscheinen müssen.

<sup>142</sup> Bspw., bei der DAV 2008 T gingen die extrapolierten Werte bei Männern ab Alter 97 und bei Frauen ab Alter 93 ein. Vgl. DAV[1], S. 14.

<sup>143</sup> Vgl. DAV[1], S. 12 f.. und DAV[6], S. 268. Untersucht wurden 6 Extrapolationsmodelle.

ausgeglichenen Bevölkerungsterblichkeiten der Alter von 85,...,95 als Stützstellen.<sup>144</sup> Die folgende Abbildung visualisiert das Vorgehen mittels SPSS.

→ Analysieren  
     → Regression Nichtlinear...  
         → Nichtlineare Regression

Zu wählende Dialogfeldoptionen:  
     → Parameter (Setzen der Modellparameter mit Anfangswert), Verlust... (Setzen der Minimierungsfunktion), Nebenbed... (Setzen von Parameternebenbedingungen), Speichern... (Speichern neuer Variablen-Vorhergesagte Werte, Residuen), Optionen... (Wahl des Schätzverfahren-Sequentielle Quadratische Optimierung)  
     → Modellformel und abhängige Variable setzen (mittels Parameter und den Variablen)  
     → OK (Durchführung)

Abbildung 12: Vorgehensweise zur menügeführten Modelllösung mittels SPSS – Nichtlineare Regression.  
 „→“ deutet auf eine Useraktion und deren Resultat hin.<sup>145</sup>

Quelle: Eigene Darstellung.

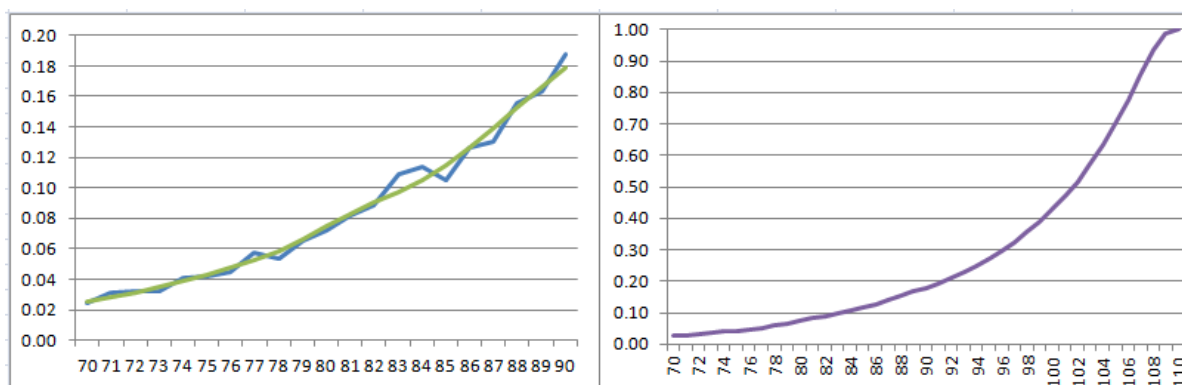


Abbildung 13: Beispiel: Extrapolation in den hohen Altern mittels des Logistischen Modells.

Links: (blaue Kurve) Rohe Werte und (grüne Kurve) ausgeglichene Werte. Rechts: Anwendung des Logistischen Modells mit SPSS (Visualisierung in Excel) mit ausgeglichenen Werten bis zum Alter 90 und extrapolierten Werten ab dem Alter 91. Das Endalter wurde 110 gesetzt. Eine Modifizierung oder Glättung, aufgrund eines Sprunges im Kurvenverlauf, war nicht notwendig. Die Alter 75,...,87 wurden für den Stützbereich gewählt, da so die extrapolierten Werte am plausibelsten waren.

Quelle: Eigene Darstellung.

Bei den RT 2005 G wurde ein modifizierter Gompertz-Ansatz (Quadratisches Modell) zur **Extrapolation in den hohen Altern für Rentner und Hinterbliebenen** angewandt.

➔ Modell:  $q_x = 1 - \exp(-\exp(a \cdot x^2 + b \cdot x + c))$ . Mittels Transformation erhält man das quadratische Polynom:  $\ln(-\ln(1 - q_x)) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Mit  $a, b \wedge c \in \mathbb{R}$  und  $I = [x | x \in \text{Stützbereich}]$  ergibt sich die Optimierungsaufgabe:  $\sum_{x \in I} (\ln(-\ln(1 - q_x)) - (a \cdot x^2 + b \cdot x + c))^2 \rightarrow \text{Min}!$ <sup>146</sup>

<sup>144</sup> Die Bevölkerungsterbetafel St 2002/04 D diente als Basis, welche ebenfalls ausgeglichen wurde (Henderson-Verfahren,  $m=2$ ,  $g=0.1$ , Gewichte entsprachen der Bevölkerungsverteilung zum 1.1.03 (Human Mortality Database)). Begründet wird die Nutzung der Tafel dadurch, dass sie vom Beobachtungszeitraum und -gebiet zu den Versichertendaten passt. Vgl. DAV[1], S. 12.

<sup>145</sup> Vgl. Int[4]. SPSS Regression Models 16.0. Ferner sind dort, im Kapitel 5, eine Vielzahl weiterer gängiger Modellformeln angegeben.

➔ Folgende Nebenbedingungen sind denkbar:

(1).  $q_{\omega} = 1 = 1 - \exp(-\exp(a \cdot \omega^2 + b \cdot \omega + c))$ . Der Wert von 1 wird nicht getroffen, vielmehr wird ein Wert nahe 1 erzielt (durch Iteration eines Solvers).

(2).  $\ln(-\ln(1 - q_{x_k})) - \ln(-\ln(1 - q_{x_{k-1}})) = 2 \cdot a \cdot x_k + b$  und (3).  $\ln(-\ln(1 - q_{x_k})) = a \cdot x_k^2 + b \cdot x_k + c$  mit  $x_k$  als der letzte Beobachtungswert (welcher nahezu unverändert bleiben soll).

Der modifizierte Gompertz-Ansatz fand auch Anwendung für die allgemeinen Periodensterbetafeln (1960/62, 1970/72, 1986/88) des Statistischen Bundesamtes und wurde zudem bei den Untersuchungen der DAV 2004 R untersucht.<sup>147</sup> Für die Sterbetafel 2008/10 hat sich ebenfalls ein modifizierter Gompertz-Ansatz als tauglich erwiesen. Für die **Extrapolation in den höheren Altern für die Bevölkerungsterblichkeit** fand folgendes Modell Anwendung.

➔ Modell:  $q_x = 1 - \exp(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$ . Transformation:  $\ln(1 - q_x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Mit der Nebenbedingung:  $q_{112}^{extr} = 0.623$  bzw.  $a \cdot 112^2 + b \cdot 112 + c = \ln(1 - 0.623)$ .<sup>148</sup> Mit Stützbereich 76,...,92.

Zur Lösung kann (analog zum Extrapolationsmodell der RT 2005 G) das Prinzip der Kleinsten-Quadrate angewandt werden.

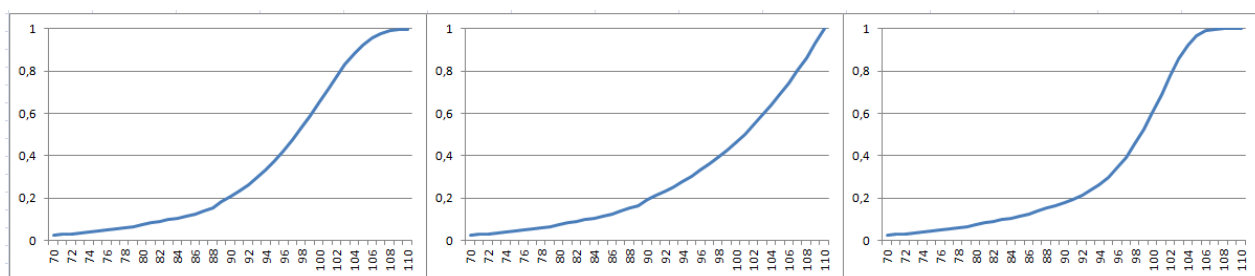


Abbildung 14: Beispiel: Extrapolation in den hohen Altern mittels des modifizierten Gompertz-Ansatzes. Aufbauend auf dem Beispiel der Abbildung 13 mit dem Stützbereich der Alter 75,...,87. Links: (blaue Kurve) Anwendung des modifizierten Gompertz-Ansatzes mit den ausgeglichenen Werten bis zum Alter 88. Die extrapolierten Werte fließen ab dem Alter 89 ein, da sich so ein einigermaßen glatter Übergang ergibt. Mitte: Hier wurde folgendes Modell:  $\ln(q_x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  umgesetzt. Die Modellwerte fließen ab dem Alter 89 ein. Rechts: Anwendung des modifizierten Gompertz-Ansatzes mit den dafür genannten Nebenbedingungen (1), (2) und (3) mit  $x_k = 90$ . Somit fließen die Modellwerte ab dem Alter 91 ein. Die Lösungen wurden jeweils mittels des Solvers von Excel ermittelt. Quelle: Eigene Darstellung.

<sup>146</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 16 f.. Zur Lösung kann ein Solver, bspw. von Excel, eingesetzt werden. Ersetzt man das quadratische Polynom durch ein lineares Polynom, so erlangt man das Gompertz-Modell, welches ebenfalls in DAV 2004 R untersucht wurde.

<sup>147</sup> Vgl. DAV[6], S. 269 f. Gegen das Quadratische Modell sprach u.a. die Robustheit des Stützbereiches.

<sup>148</sup> Vgl. Statis[2], S. 7 f. Die Nebenbedingung (analog für Frauen mit  $q_{112}^{extr} = 0.595$ ) hat zum Ziel, dass eine Überschneidung der Sterbewahrscheinlichkeiten von Männern und Frauen verhindert wird.

Für die **Extrapolation in den höheren Altern für die Invalidensterblichkeit** wird bei der DAV 2008 P auf das Kannisto-Modell verwiesen, mit  $c=0$ . Gestützt wird sich dabei (ebenfalls wie bei der DAV 2008 T) auf die Untersuchungen der DAV bzgl. der Herleitung der DAV 2004 R. Die Wahl fiel auf das Kannisto-Modell, da für das Logistische Modell die Invalidensterbewahrscheinlichkeiten für höhere Alter teilweise zu stark anstiegen und unplausibel waren.<sup>149</sup>

$$\rightarrow \text{Kannisto-Modell: } q_x = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha \cdot \exp(b \cdot x)}{1 + \alpha \cdot \exp(b \cdot x)}\right).^{150}$$

Zur Schätzung der beiden Parameter wird auf den „Levenberg-Marquardt“-Algorithmus (welcher ebenfalls in SPSS hinterlegt ist) verwiesen. Analog zur DAV 2008 T dienten die Alter von 85,...,95 als Stützstellen (in diesem Fall die geglätteten Invalidenwahrscheinlichkeiten). Ein glatter Übergang wurde dadurch erzielt, dass das Schnittalter zwischen den Eingangs- und projizierten Daten im Anpassungszeitraum den minimalen Abstand aufwies.<sup>151</sup> Die **Extrapolation in den höheren Altern der Pfleginzidenzen** (bei der DAV 2008 P) erfolgte mittels eines quadratischen Polynoms, da die Rohinzidenzen für hohe Alter (ab 90 Jahre) ein unplausibles Verhalten aufzeigten.<sup>152</sup>

$$\rightarrow \text{Modell: } i_x^{(j)} = p(x)^{(j)} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \text{ Mit den Pflegestufen } j=1,2 \text{ und } 3.$$

Unter den Nebenbedingungen:  $p(90)^{(j)} = i_{90}^{(j)}$ ,  $p(120)^{(j)} = 1$  und  $p'(90)^{(j)} = 2 \cdot a \cdot 90 + b = i_{90}^{(j)} - i_{89}^{(j)}$ .<sup>153</sup> Als Optimierungsaufgabe:  $\sum_{x \in I} (i_x^{(j)} - (a \cdot x^2 + b \cdot x + c))^2 \rightarrow \text{Min!}$  mit den gegebenen Nebenbedingungen. Mit  $I = [x | x \in \text{Stützbereich}]$ .

Der Stützbereich ergibt sich aus den geglätteten Rechnungsgrundlagen, vom Alter 40 bis zum Alter 90. Die Optimierungsaufgabe<sup>154</sup> kann mittels SPSS oder mittels eines Solvers, bspw. von Excel, gelöst werden.

<sup>149</sup> Vgl. DAV[4], S. 32. Das Kannisto-Modell setzt die Sterbewahrscheinlichkeiten für höhere Alter nicht so hoch an wie das Logistische Modell.

<sup>150</sup> Vgl. DAV[1], S. 12 f. und DAV[6], S. 269.

<sup>151</sup> Vgl. DAV[4], S. 32 f..

<sup>152</sup> Vgl. DAV[4], S. 10. Die (Pflege-)Inzidenz  $i_x^{(j)}$  (Neuerkrankung mit Pflegebedürftigkeit als Konsequenz) bezeichnet „die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen Aktiven, im nächsten Jahr pflegebedürftig mindestens der Stufe  $j$ “ zu sein. Siehe Ebenda.

<sup>153</sup> Vgl. DAV[4], S. 25. Das Endalter wurde auf 120 gesetzt mit Wahrscheinlichkeit 1. Die anderen zwei Nebenbedingungen beinhalten lediglich, dass die Pflegeinzidenz, sowie auch die Steigung des Polynoms im Alter 90 vorgegeben ist.

## 5.2. Die Projektivität

In der Praxis wird mit Trendfunktionen (verschiedene Modelle) gearbeitet, um die zukünftige Entwicklung zu berücksichtigen. Dies ist für Rentenversicherungen essentiell, da die Sterbewahrscheinlichkeiten nicht als konstant anzusehen sind. Relevant sind, neben einer soliden Datenbasis (Verfügbarkeit und Qualität der Daten), auch professionelle Tools und aktuarielles Fachwissen.<sup>155</sup> Ferner wird unter dem Begriff **Best Estimate** eine bestmögliche Schätzung zukünftiger Verhältnisse verstanden. Je nach Ausscheiderisiko werden verschiedene Annahmen getroffen, die einen Best Estimate darstellen. Um Aussagen über (zukünftige) Trendannahmen machen zu können, werden geeignete vergangenheitsbezogene Daten analysiert. Ferner sind Fachwissen und Vergleichsdaten den Analysen hinzuzuziehen. Zur Projektion von Sterblichkeitstrends wurden folgende Modelle in der DAV 2004 R untersucht<sup>156</sup>

- ➔ Traditionelles Modell:  $q_{x,t+1} / q_{x,t} = \exp(-F(x)) = e^{-F(x)}$ . (a)
- ➔ Kohorten Modell:  $q_{x,t+1} / q_{x,t} = \exp(-G(t+1-x))$ . Mit Geburtsjahr  $G$ . (b)
- ➔ Synthesemodell:  $q_{x,t+1} / q_{x,t} = \exp(-F(x) - G(t+1-x))$ . (c)
- ➔ Lee Carter Modell:  $\ln(q_{x,t}) = a_x + b_x \cdot k_t + e_{x,t}$ . (d)

Bei den Untersuchungen der DAV 2004 R hat sich das Traditionelle Modell als am geeignetsten erwiesen.<sup>157</sup> Auf die Modelle (b), (c) und (d) wird daher nicht eingegangen.<sup>158</sup> Um zukünftige Sterblichkeitsveränderungen (für Deutschland) beurteilen zu können, werden gewöhnlich Bevölkerungsstatistiken des Statistischen Bundesamtes als Datenbasis genutzt.

**Modell (a):** Die Trendfaktoren  $F(x)$  werden aus dem logarithmisch-linearen Ansatz  $\ln(q_{x,t}) = -F(x) \cdot t + B(x)$  ermittelt. Durch Verschiebung des letzten Beobachtungszeitraumes

<sup>154</sup> Die zu minimierende Zielfunktion wurde (mit der gegebenen Modellfunktion) mittels der Idee der Kleinsten Quadrate (siehe 4.3.1.) gebildet. Bei einer numerischen Lösung können auch die Beträge der Abweichungen genommen werden.

<sup>155</sup> Ohne professionelle Tools ist das Managen, das Verwalten und die Kalkulation verschiedener Modellbetrachtungen mit großen Datensätzen nicht möglich. Fachwissen kann (mehr oder weniger) medizinisches, rechtliches und/oder wirtschaftliches (demografisches, volkswirtschaftliches,..) Wissen verlangen.

<sup>156</sup> Vgl. DAV[6], S. 220 f. und DAA[12], S.73 ff.

<sup>157</sup> Vgl. DAV[6], S. 220. Ebenso fand das Traditionelle Modell Anwendung bei der DAV 1994 R.

<sup>158</sup> Ferner wird auf die Modelle verwiesen. Siehe DAV[6] oder DAV[12].

$t_n$  nach 0 erhält man die Trendfunktionskonstante  $\ln(q_{x,t_n+0}) = -F(x) \cdot 0 + B(x)$ .<sup>159</sup> Es folgt, dass sich der Ansatz in dieser Weise darstellt:  $\ln(q_{x,t_n+t}) = -F(x) \cdot (t - t_n) + \ln(q_{x,t_n})$ . Die Lösung kann mittels der Methode der Kleinsten-Quadrate ermittelt werden, Zielfunktion  $\sum_{t \in I} (\ln(q_{x,t}) - (-F(x) \cdot (t - t_n) + \ln(q_{x,t_n})))^2 \rightarrow \text{Min!}$  mit vergangenheitsbezogenen Sterblichkeiten  $q_{x,t}$  der Jahre  $t \in I = [t_0, \dots, t_n]$ .<sup>160</sup> Mit den ermittelten  $F(x)$  ergeben sich dann die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen, für  $(t - t_n) > 0$  bzw. für  $t = 1, 2, \dots$ , mittels  $\ln(q_{x,t_n+t}) = -F(x) \cdot t + \ln(q_{x,t_n}) \Leftrightarrow \ln(q_{x,t_n+t}) - \ln(q_{x,t_n}) = \ln(q_{x,t_n+t} / q_{x,t_n}) = -F(x) \cdot t$ . Es folgt, dass eine konstante exponentielle Abnahme angenommen wird,  $q_{x,t_n+t} = q_{x,t_n} \cdot e^{-F(x) \cdot t}$  für  $t = 1, 2, \dots$ .<sup>161</sup> Das Modell hat nur Gültigkeit für einen beschränkten zukünftigen Zeitraum.<sup>162</sup> Die folgende Abbildung demonstriert die Methode für das Alter 20.

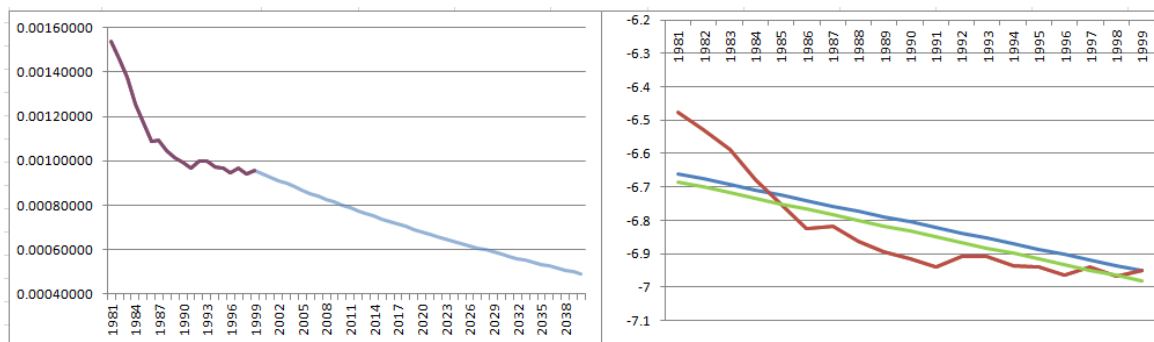


Abbildung 15: Beispiel: Traditionelles Modell für das Alter 20.

Zugrundegelegt wurden die abgekürzten Periodensterbetafeln von 1980/82 bis 1998/00 für das frühere Bundesgebiet. Das Beobachtungsjahr ergibt sich jeweils durch das mittlere Jahr des Beobachtungszeitraumes der Sterbetafel. Links: (violette Kurve) Beobachtete Sterbewahrscheinlichkeiten und (hellblaue Kurve) die extrapolierten Sterbewahrscheinlichkeiten gemäß dem Traditionellen Modell. Rechts: (rote Kurve) Beobachtete logarithmierte Sterbewahrscheinlichkeiten, (blaue Kurve) loglineare Regressionsgrade mit Verschiebung ( $F(x) = 0.016208$ ) und (grüne Kurve) loglineare Regressionsgrade ohne Verschiebung ( $F(x) = 0.016516$ ). Gleicht man die beobachteten Daten aus (bspw. mit dem Henderson-Verfahren mit  $g = 0.5$  und

<sup>159</sup> Die Verschiebung führt dazu, dass die Regressionsgrade die neueste bzw. zuletzt beobachtete Sterbetafel durchläuft. Dies ist nur angemessen, wenn das zugrunde gelegte Material keinen Zufallsschwankungen unterliegt. Vgl. DAV[7], S. 35. Die abgekürzten Sterbetafeln des Statistischen Bundesamtes sind nicht ausgeglichen.

<sup>160</sup> Vgl. Statis[4], S. 10 f. Die Lösung kann mit einem Solver oder analytisch erzielt werden,  $F(x) = [\sum_{t \in I} (t - t_n) \cdot (\ln(q_{x,t_n}) - \ln(q_{x,t}))] / [\sum_{t \in I} (t - t_n)^2]$ . Mit Beobachtungszeitraum  $I = [t_0, \dots, t_n]$ . Vgl.

Wolfsdorf, K. (1986), S. 118. Die Verschiebung lässt sich auch dadurch erzielen, dass man der zu minimierenden Optimierungsaufgabe, die Nebenbedingung: Regressionskonstante entspricht dem letzten Beobachtungswert bzw.  $\ln(q_{x,t_n}) = B(x)$ , mit gibt.

<sup>161</sup> Vgl. DAV[6], S. 32.

<sup>162</sup> Mit weiterer zukünftiger Extrapolation wächst auch die Unsicherheit. Ferner soll auch nicht unterstellt werden, dass die Sterblichkeiten gegen Null konvergieren.

$m = 2$ ), dann ergibt sich ein Trendfaktor von (mit Verschiebung)  $F(x) = 0.016893$  und (ohne Verschiebung)  $F(x) = 0.016625$ .

Quelle: Eigene Darstellung.

Das traditionelle Modell wird für jede zu betrachtende Altersklasse  $x \in AB$  durchgeführt. Dann ergeben sich die projizierten Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_{x_0+j, t_n+j}$  für  $j = 0, 1, \dots, \omega - x_0$  eines heute  $x_0$ -Jährigen mittels  $q_{x_0+j, t_n+j} = q_{x_0+j, t_n} \cdot e^{-F(x_0+j) \cdot j}$  (mit aktuellem Jahr  $t_n$ ).<sup>163</sup> Bei der DAV 2004 R wurde mit der linearen Trenddämpfung gearbeitet, um nicht einen konstanten zukünftigen Trendfaktor annehmen zu müssen und, um den zukünftigen Trend abzuschwächen. Die Trendfaktoren ergeben sich mittels einer stückweise-linearen Funktion.<sup>164</sup>

Im Traditionellen-Modell sind die Sterblichkeitsverbesserungen abhängig vom Alter. Wohingegen im Kohorten-Modell, die Sterblichkeitsverbesserung vom Geburtsjahr abhängen. Im Anhang 11 der DAV 2004 R wird darauf hingewiesen, dass die loglineare Regression zur Bestimmung der Trendfaktoren nicht auf das Kohorten- und Synthesemodell übertragbar ist, da kein linearer Zusammenhang besteht. Das Synthesemodell stellt eine Kombination aus Modell (a) und (b) dar mit alters- und geburtsjahrabhängigen Trendfaktoren. Die Modellierung des Lee-Carter Modells ist aufwendiger als bspw. die Modellierung des Traditionellen Modells. Jedoch führten sie zu sehr ähnlichen Sterblichkeitstrends in der Ausarbeitung bei der DAV 2004 R.

Zum Abschluss des Kapitels 5.2. sei noch auf die **Trendannahmen verschiedener Rechnungsgrundlagen** hingewiesen.

- ➔ Bei der DAV 2008 P stellt die **Annahme konstanter Pflegeprävalenzen und Pflegeinzidenzen** ein Best Estimate dar. Die Ausführungen dort folgern (i.A.) einen Trend abnehmender Pflegeprävalenzen. Somit stellt eine Trendannahme eines Nulltrends eine konservative Betrachtung dar.<sup>165</sup>
- ➔ Für die **Trendannahme von Invalidensterblichkeiten** lagen bei der DAV 2008 P keine Informationen vor. Die Plausibilitätsuntersuchung führte dazu, dass kein explizierter Trend für die Invalidensterblichkeiten angenommen wurde. Die

<sup>163</sup> Siehe Kapitel 6.6. der Ausarbeitung „Mortality in the next Millennium“ [http://www.sias.org.uk/view\\_paper?id=MortalityMillennium](http://www.sias.org.uk/view_paper?id=MortalityMillennium).

<sup>164</sup> Vgl. DAV[6], S. 221.

<sup>165</sup> Vgl. DAV[4], S. 42. Die Pflegeprävalenz stellt das Verhältnis Anzahl der Pflegebedürftigen und Anzahl der Versicherten dar. Gestützt wird die Annahme durch zwei entgegengesetzte Theorien, welche einmal davon ausgeht, dass sich weitere Lebensjahre (steigende Lebenserwartung) mehr in Krankheit /Pflegebedürftigkeit oder mehr in Gesundheit niederschlagen. Mit konservativ ist die Risikoneigung gemeint.

Untersuchungen beziehen sich dann auf den gesetzten Konsistenzrahmen zwischen Pflegeprävalenzen, Pflegeinzidenzen, Aktiven- und Invalidensterblichkeiten.<sup>166</sup>

### 5.3. Zusammenfassende Betrachtung

Die genannten Extrapolationsmodelle für höhere Altersklassen haben sich für ihren jeweiligen Zweck, als tauglich erwiesen. Eine Vielzahl Extrapolationsmodelle stehen bereits zur Verfügung, analog kann ein Aktuar auch ggf. ein Modell modifizieren. Prognosen bzgl. der zukünftigen Sterblichkeitsverbesserung sind nicht so problematisch wie bspw. für die Invalidität. Um zukünftige Sterblichkeitsentwicklungen abzuschätzen, muss ein Aktuar eine Vielzahl von Faktoren analysieren.<sup>167</sup> Für Extrapolationen im Allgemeinen gilt nicht, dass das Modell, welches die Daten (Stützbereich, vergangenheitsbezogenen Daten) am besten fittet, auch am besten geeignet ist für die Prognose. Zur Wahl eines Modells muss ein Aktuar eine Vorstellung bzw. Kenntnis über den Ausscheidungsverlauf (für höhere Alter, zukünftige Ausscheidungsverhalten) haben. Die extrapolierten/projizierten Ergebnisse sind dann einer Plausibilitätskontrolle<sup>168</sup> zu unterziehen. Sind alle genannten Kriterien zufriedenstellend, stellen die extrapolierten/projizierten Werte eine bestmögliche Schätzung der Ausscheidungsverhältnisse dar.

## 6 Sicherheitsmargen und Tafel 1.Ordnung

Die Ausscheidewahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung stellen die realitätsnahen biometrischen Rechnungsgrundlagen, und demzufolge eine bestmögliche Schätzung der realen erwarteten Verhältnisse, dar.<sup>169</sup> Das Kapitel 2.4. dient der Grundbeschreibung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten 1.- und 2. Ordnung. Je nach Versicherungszweck werden zu den realitätsnahen biometrischen Rechnungsgrundlagen Sicherheitszu- bzw. Abschläge berücksichtigt, um **unvorhergesehene Aufwendungen** zu kompensieren. Die

---

<sup>166</sup> Vgl. DAV[4], S. 45.

<sup>167</sup> Vgl. DAV [7], S. 33. Allgemein gilt: Die Richtigkeit einer wie auch immer bestimmten Trendfunktion für die Zukunft lässt sich nicht beweisen.“ Siehe Ebenda, S. 33.

<sup>168</sup> Bzw. Plausibilisieren. Ob die Werte annehmbar, einleuchtend und nachvollziehbar sind. Passende Vergleichsdaten und aktuarielles Fachwissen dienen als Hilfsmittel.

<sup>169</sup> Vgl. DAA[12], S. 111.



Wahrscheinlichkeiten 1. Ordnung stellen dann unrealistische Rechnungsgrundlagen dar, welche der Tarifierung dienen. Sie werden auch als die rechnerischen Werte bezeichnet.<sup>170</sup> Diese Werte sind dann für die erwartete Entwicklung als geeignet und ausreichend vorsichtig bemessen anzusehen.<sup>171</sup> Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten Sicherheitszu- bzw. Abschläge zu berücksichtigen. Zum einen können die Ausscheidewahrscheinlichkeiten modifiziert werden. Dies kann für jedes **einzelne Alter** erfolgen, für **Altersintervalle** (wie bei DAV 1994 R, DAV 1997 I) oder für den **kompletten Altersbereich** (wie bei DAV 2004 R). Zum anderen können die Rechnungsgrundlagen der 2. Ordnung verwendet werden. Die Sicherheitsmarge wird dann auf die Deckungsrückstellung oder in die Prämie eingerechnet.<sup>172</sup> Um Sicherheitsaspekte in den Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu berücksichtigen, erfolgt die Modifizierung derart, dass die Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit Erlebensfallcharakter verringert, und die Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit Todesfallcharakter erhöht werden.

Die Berücksichtigung von Sicherheitsaspekten und somit die Bildung von Reserven für biometrische Risiken ist für Lebens- und Krankenversicherungen durch das VAG vorgeschrieben.<sup>173</sup> „Denn die dauernde Erfüllbarkeit der teilweise äußerst langfristigen Personenversicherungsverträge muss gewährleistet sein.“<sup>174</sup>

In der Lebensversicherung ist die Einarbeitung der Zu- bzw. Abschläge abhängig vom Lebensversicherungsprodukt. Ziel des VR's ist es, den zu erbringenden Leistungsbarwert im Mittel zu überschätzen. Um das zu erreichen werden für Versicherungen, die nur im Todesfall leisten, die Sterbewahrscheinlichkeiten erhöht und für Versicherungen, die nur im Erlebensfall leisten, die Sterbewahrscheinlichkeiten verringert. Versicherungen, die im Todes- sowie im Erlebensfall leisten, versucht man nach Todesfall- oder Erlebensfallcharakter zu klassifizieren.<sup>175</sup> Für Bewertungen von Pensionsverpflichtungen von Unternehmen (für die Steuer- und Handelsbilanz) finden die Werte der 2. Ordnung

---

<sup>170</sup> Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 183.

<sup>171</sup> Vgl. Int[3], S. 1. Insbesondere hat der Sicherheitsaspekt gegenüber der Preisattraktivität Vorrang.

<sup>172</sup> Vgl. DAA[12], S. 114.

<sup>173</sup> Vgl. DAA[12], S. 112. Die Berücksichtigung von Risiken durch zusätzliche Sicherheiten ist in der Personenversicherung im Allgemeinen vorgeschrieben. Auch für Pensionskassen und Pensionsfonds.

<sup>174</sup> Siehe Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 101.

<sup>175</sup> Vgl. Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 101.

Anwendung und somit werden keine Zu- oder Abschläge berücksichtigt.<sup>176</sup> Für Leistungsverpflichtungen externer Träger der betrieblichen Altersvorsorge kann es durchaus angebracht sein zusätzliche Reserven zu bilden.<sup>177</sup> In der Krankenversicherung bedeuten Sicherheitsmargen gleich Sicherheitsabschläge, die ebenfalls eine gewisse Projektivität (Vorwegnahme der zukünftigen Verringerung von Ausscheidewahrscheinlichkeiten) berücksichtigen. Die Krankenversicherung besitzt Erlebensfallcharakter, so dass eine Sterblichkeitsreduktion zur Beitragserhöhung führt.<sup>178</sup>

Im Weiteren wird auf das Schwankungsrisiko, das Irrtumsrisiko und das Änderungsrisiko eingegangen.

## 6.1. Schwankungsrisiko

Ziel dieses Zuschlags ist es, zufällige Schwankungen der Schadenaufwendungen um deren Erwartungswerte zu kompensieren. Eventuelle Verluste müssen durch Sicherheitszu- bzw. abschläge kompensiert werden. Die geschätzten Ausscheidewahrscheinlichkeiten stellen zeitliche Mittelwerte dar. Folglich schwanken die tatsächlich eingetretenen Anzahlen der Ausgeschiedenen um deren Mittelwerte. Der Schwankungszuschlag berücksichtigt die **Unsicherheit bzgl. des Risikoausgleichs** im Kollektiv.<sup>179</sup>

➔ Das Schwankungsrisiko  $\sigma$  ist diversifizierbar und nimmt pro Person, um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  mit Bestandsgröße  $n$ , ab. Funktional lässt sich das gesamte Portfolio-

---

<sup>176</sup> Dies gilt auch für internationale Rechnungslegungsvorschriften wie US-GAAP oder IFRS. Vgl. DAA[12], S. 111. Die Werte der RT 2005 G stellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten 2.Ordnung dar. Lediglich bei den Sterbewahrscheinlichkeiten wurden zeitliche erwartete Veränderungen mit einbezogen.

<sup>177</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 19. Die Zu- bzw. Abschläge können in den Ausscheidewahrscheinlichkeiten oder auf Bewertungsebene berücksichtigt werden.

<sup>178</sup> Vgl. Milbrodt, H. (2005), S. 63 f. Die Beitragserhöhung aus einer Sterblichkeitsreduktion resultiert daraus, dass der VN (fiktiv) länger lebt und folglich weitere steigende Kopfschäden verursacht (analog zur Erlebensfallversicherung). Hingegen für die Todesfallversicherung die Anwendung eines Nulltrends (keine Vorwegnahme der erwarteten Sterblichkeitsverbesserung) ein vorsichtig bemessener Ansatz darstellt.

<sup>179</sup> Vgl. Int[3], S. 2. „Je grösser der Versichertenbestand ist, desto eher ist der Risikoausgleich gewährleistet (unabhängige Ereignisse vorausgesetzt). Das bedeutet: Bei vorgegebenem Sicherheitsniveau (Wahrscheinlichkeit des Überschadens) ist die Konfidenzschranke (Selbstbehalt) abhängig von der Größe des Bestandes“. Siehe Ebenda, S. 2.

Schwankungsrisiko durch  $S(n) = \sqrt{n} \cdot \sigma$  beschreiben. Für eine Person ergibt sich das Schwankungsrisiko durch  $S(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$ .<sup>180</sup>

Um die Schwankungsunsicherheit zu berücksichtigen, werden die Sterbewahrscheinlichkeiten überschätzt bzw. unterschätzt (je nach dem Versicherungszweck). Man unterscheidet zwischen Schwankungszu- oder Abschlägen. Anwendung finden

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{altersabhängige Zu-/Abschläge, } s_x \in \mathbb{R}_+, x \in AB, & \rightarrow \overbrace{(q_x + s_x)}^{\text{Todesfallcharakter}} \vee \overbrace{(q_x - s_x)}^{\text{Erlebensfallcharakter}} \\ \rightarrow \text{und altersunabhängige Zu-/Abschläge } s > 0, & \rightarrow (1 + s) \cdot q_x \vee (1 - s) \cdot q_x \end{aligned}$$

Im Allgemeinen hat der altersunabhängige Zu- bzw. Abschlag den Vorteil, dass er gegenüber typischen Bestandsabweichungen (zwischen Herleitungs- und Anwendungsbestand) robuster ist.<sup>181</sup> Im Folgenden soll die Beschreibung zur Herleitung der Schwankungszuschläge anhand einer Lebensversicherung mit Todesfallcharakter (LV T) modelliert werden. Zuerst wird der altersunabhängige Zuschlag beschrieben. Anschließend werden die altersabhängigen Zuschläge jeweils für den kompletten Altersbereich modelliert. Zusätzlich werden auch die entsprechenden Ansätze für eine Lebensversicherung mit Erlebensfallcharakter (LV E) gegeben.

Zur Modellierung muss ein Aktuar eine Konfidenzschranke  $k$ , ein Sicherheitsniveau  $1 - \alpha$  (mit akzeptierter Fehler- bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ ) und einen Modellbestand

$$\sum_{x \in AB} l_x^M, \text{ festlegen. Gegeben sind die Sterbewahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung } q_x^{2. \text{ Ordnung}}$$

.<sup>182</sup> Es soll dann gelten: Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha$  soll die Summe aller

<sup>180</sup> Das Portfolio-Schwankungsrisiko ergibt sich aus der Summe von  $n$  i.i.d. ZV'n  $X_i, i=1, \dots, n$ , mit

$$\text{var}(X_i) = \sigma^2 \text{ folgt } S(n) = \sqrt{\text{var}(\sum_{i=1}^n X_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{var}(X_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma.$$

Vgl. Beichelt, F.E. / et. al. (2003), S. 82. Siehe (1.92) und (1.95), mit dort  $\alpha_i = 1/n$ . Siehe auch Anhang A.

<sup>181</sup> Vgl. DAV[1], S. 25. In der DAV 2004 R und der DAV 2008 T wurde ein altersunabhängiger prozentualer Schwankungszuschlag berücksichtigt. Hingegen für die DAV 1994 R und DAV 1994 T altersabhängige Zuschläge verwendet wurden.

<sup>182</sup> Im Weiteren wird der Index der 2. Ordnung unterdrückt.

Todesfälle  $T = \sum_{x \in AB} T_x$  (mit ZV'n  $T_x$  der im Alter  $x$  Gestorbenen)<sup>183</sup> kleiner-gleich der vorgegebenen Schranke  $k$  sein. Folglich soll gelten:  $P(T \leq k) = 1 - \alpha$  bzw. für

$$\begin{aligned} \rightarrow P(T \leq (1+s) \cdot \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x) &= 1 - \alpha && \text{altersunabhängiger Zuschlag für LV T} \\ \rightarrow P(T \geq (1-s) \cdot \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x) &= 1 - \alpha && \text{altersunabhängiger Abschlag für LV E} \\ \rightarrow P(T \leq \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot (q_x + s_x)) &= 1 - \alpha && \text{altersabhängige Zuschläge für LV T} \\ \rightarrow P(T \geq \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot (q_x - s_x)) &= 1 - \alpha && \text{altersabhängige Abschlag für LV E} \end{aligned}$$

Man geht dann davon aus, dass die ZV'n  $T_x \sim B(l_x^M, q_x)$  binomialverteilt sind. Ist  $T_x \sim B(l_x^M, q_x)$ , so kann für hinreichend große  $l_x^M$  (bzw. für  $l_x^M \cdot q_x \geq 5 \wedge l_x^M \cdot (1 - q_x) > 5$ )  $T_x \sim N(l_x^M \cdot q_x, l_x^M \cdot q_x \cdot (1 - q_x))$  als normalverteilt ZV aufgefasst werden.<sup>184</sup> Weiterhin seien die  $T_x$  in  $x$  stochastisch unabhängig.<sup>185</sup> Es ergibt sich, dass

$$P(T \leq (1+s) \cdot \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x) = P\left(\frac{\overbrace{T - \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x}^{\approx Z \sim N(0,1)}}{\sqrt{\text{var}(T)}} \leq \frac{\overbrace{s \cdot \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x}^{\approx z_\alpha}}{\sqrt{\text{var}(T)}}\right) = 1 - \alpha. \text{ Unter Verwendung des}$$

Zentralen Grenzwertsatzes von Lindeberg und Lèvy<sup>186</sup> gilt  $z_\alpha \leq \frac{s \cdot \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x}{\sqrt{\text{var}(T)}}$  und es folgt,

dass sich der **altersunabhängige Zuschlag für AB** durch

$$s = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{\sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x \cdot (1 - q_x)}}{\sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x}$$

<sup>183</sup> Im Anhang A ist die bernoulliverteilte ZV  $X \sim B(p)$  beschrieben. Betrachtet man  $n$  i.i.d  $X \sim B(p)$  und die zufällige Anzahl  $Y = \sum_{i=1}^n 1_{(X_i=1)}$ ,  $Y \in [0, \dots, n]$ , so ist  $Y \sim B(n, p)$ ,  $P(Y = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ , binomialverteilt mit  $E(Y) = n \cdot p$  und  $\text{Var}(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ . Alternativ wird in der Praxis auch davon ausgegangen, dass  $T_x \sim P(\lambda)$  poissonverteilt ist. Wobei für hinreichend große  $n$  und kleine  $p$  gilt  $B(n, p) \approx P(n \cdot p)$ . Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 27 f.

<sup>184</sup> Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 226.

<sup>185</sup> Vgl. DAV[5], S. 500. Siehe Annahmen (a), (b) und (c):  $T \sim N(\sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x, \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x \cdot (1 - q_x))$ .

<sup>186</sup> Vgl. Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 97 Satz 1.13.

ergibt.<sup>187</sup> Für eine LV mit E ergibt sich  $s$  analog, aufgrund der Symmetrie der Verteilungsdichte der Normalverteilung.

Für die **altersabhängigen Zuschläge für eine LV mit T** gilt:  $P(T \leq \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot (q_x + s_x)) =$

$$P\left(\frac{T - \sum_{x \in AB} l_x^M \cdot q_x}{\sqrt{\text{var}(T)}} \leq \frac{\sum_{x \in AB} l_x^M \cdot s_x}{\sqrt{\text{var}(T)}}\right) = 1 - \alpha. \quad \text{Analog zur vorherigen Modellierung gilt}$$

$$z_\alpha \leq \frac{\sum_{x \in AB} l_x^M \cdot s_x}{\sqrt{\text{var}(T)}}. \quad \text{Zur Bestimmung der } s_x \text{ werden die Sicherheitsanforderungen der}$$

einzelnen Alter betrachtet, folglich  $P(T_x \leq l_x^M \cdot (q_x + s_x)) = 1 - \alpha^*$ .  $1 - \alpha^*$  stellt ein reduziertes Sicherheitsniveau<sup>188</sup> einer jeden Altersklasse dar, so dass das Sicherheitsniveau  $1 - \alpha$  für den kompletten Altersbereich erreicht wird. Mittels des zentralen

Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace<sup>189</sup> gilt, dass  $z_{\alpha^*} \leq \frac{l_x^M \cdot s_x}{\sqrt{\text{var}(T_x)}}$  bzw.

$s_x \cdot l_x^M = z_{\alpha^*} \cdot \sqrt{\text{var}(T_x)}$ . Will man die **altersabhängigen Zuschläge für jede Altersklasse**  $x \in AB$  zu einem Sicherheitsniveau  $1 - \alpha^*$  absichern, so gilt

$$s_x = z_{\alpha^*} \cdot \frac{\sqrt{\text{var}(T_x)}}{l_x^M} = z_{\alpha^*} \cdot \sqrt{\frac{q_x \cdot (1 - q_x)}{l_x^M}}.^{190} \quad \text{Mit wachsendem Sicherheitsniveau steigen die}$$

Quantilwerte und folglich auch  $s_x$ . Ebenso steigt  $s_x$  mit fallendem (Modell-) Bestand  $l_x^M$ .

Für kleine Bestände sind  $s_x$  (mit Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha^* = 0.01$ ) kaum begründbar.<sup>191</sup> Aus diesem Grund betrachtet man den kompletten Altersbereich. Will man für den kompletten Altersbereich ein Sicherheitsniveau von  $1 - \alpha$  erreichen, so kann für jede einzelne Altersklasse eine reduziertes Sicherheitsniveau  $1 - \alpha^*$  angenommen werden.

<sup>187</sup> Vgl. DAA[12], S. 120 ff. und DAV[1], S. 26 f. Die ZV  $Z = (X - E(X)) / \sigma_X$  heißt Standardisierung von  $X$ . Ist  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , so gilt für  $Z = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$ . Vgl. Beichelt, F.E. (2003), S. 40 (Def. 1.10.) u. S. 45 (Satz 1.1). Es gilt:  $P(Z \leq z_\alpha) = \Phi(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$  mit  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $z_\alpha = x_{1-\alpha}$  dem  $x_{1-\alpha}$ -Quantil der Ordnung  $1 - \alpha$  und der Verteilungsfunktion  $F(x_{1-\alpha}) = \Phi(x_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$  der Standardnormalverteilung. Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 43 f./98 und Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 252/355.

<sup>188</sup> Reduziertes Sicherheitsniveau einer einzelnen Altersklasse, da mit wachsender Bestandgröße das Schwankungsrisiko abnimmt.

<sup>189</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 98.

<sup>190</sup> Vgl. Int[3], S. 2 f. und DAV[5], S. 498 f.

<sup>191</sup> Vgl. DAV[5], S. 499 f. Weiterhin ist der Mindestbestand eines jeden Alters bei vorgegebener Genauigkeit für „mittelgroße“ VR (kaum) nicht erreichbar.

Durch Einsetzen ergibt sich für  $z_\alpha \leq \frac{\sum_{x \in AB} l_x^M \cdot s_x}{\sqrt{\text{var}(T)}} = \frac{\sum_{x \in AB} z_{\alpha^*} \cdot \sqrt{\text{var}(T_x)}}{\sqrt{\text{var}(T)}}$ . Es folgt: Das reduzierte

Sicherheitsniveau lautet  $z_{\alpha^*} = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{\sum_{x \in AB} \sqrt{\text{var}(T_x)}}$  und man erhält die **altersabhängigen**

**Zuschläge für AB** durch  $s_x = z_\alpha \cdot \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{\sum_{x \in AB} \sqrt{\text{var}(T_x)}} \cdot \frac{\sqrt{\text{var}(T)}}{l_x^M}$ .<sup>192</sup> Im Gegensatz zu dem

multiplikativen Zuschlag  $s$ , für  $AB$ , greift die Verteilung der Zuschläge  $s_x$ , gemäß dem reduzierten Sicherheitsniveau für eine einzelne Altersklasse, auf die Altersstruktur des Modellbestandes zurück.

Weiterhin gilt:

- ➔ Zuschläge müssen erhöht werden, falls der Versichertenbestand (in dem der Risikoausgleich erfolgt) kleiner ist als der Modell- bzw. Herleitungsbestand.
- ➔ Zuschläge können reduziert werden, falls der Versichertenbestand (in dem der Risikoausgleich erfolgt) größer ist als der Modell- bzw. Herleitungsbestand.

Liegen mehrere Ausscheidegründe vor, so sind Wechselwirkungen zu berücksichtigen.<sup>193</sup> Abschließend sei noch ein fiktives Zahlenbeispiel gegeben. Das Sicherheitsniveau für den kompletten Altersbereich beträgt 95%. Weiterhin gelten alle o.g. Annahmen. Für die altersabhängigen Zuschläge ergibt sich ein reduziertes Sicherheitsniveau i.H.v. 56.75%. Die folgende Abbildung verdeutlicht die Lösung mit  $s = 0.345\%$ .

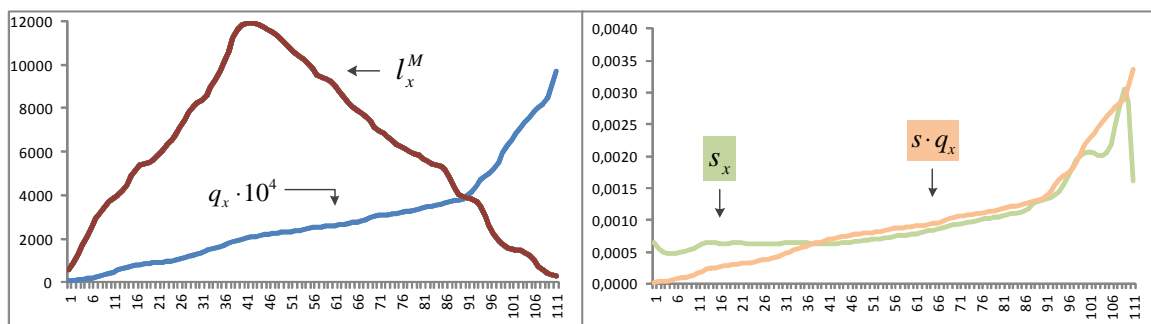


Abbildung 16: Beispiel: Schwankungsrisikobetrachtung.

Links: Fiktive Modellbestandszahlen (dunkelrot) und fiktiver Sterblichkeitsverlauf (blau). Rechts: Die Verläufe für altersab- (grün) und unabhängige (orange) Schwankungszuschläge. Die Darstellungen sind

<sup>192</sup> Vgl. DAV[5], S. 500. und Int[3], S. 2 f.

<sup>193</sup> Vgl. DAA[12], S. 125. Das Schwankungsrisiko für das Risiko Invalidität wird in ähnlicher Weise wie eine LV mit T beschrieben.

jeweils als Funktion für ganzzahlige  $x \in AB = [0, \dots, 110]$  zu deuten. Verbindungslinien dienen lediglich der Veranschaulichung.

Quelle: Eigene Darstellung.

Weiterhin wird nochmals darauf hingewiesen, dass die Summen der überschätzten Toten über  $AB$  für die altersun- und abhängige Betrachtung identisch sind, folglich

$$\sum_{x \in AB} l_x \cdot q_x \cdot (1+s) = \sum_{x \in AB} l_x \cdot (q_x + s_x).^{194}$$

Aus der Abbildung 16 wird deutlich, dass mittels der altersunabhängigen Methode nicht explizit auf die Altersstruktur des Modellbestandes zurückgegriffen wird.

## 6.2. Irrtumsrisiko<sup>195</sup>

Einerseits deckt der Irrtumszu- bzw. Abschlag **Parameterschätzunsicherheiten** ab, andererseits wird durch ihn auch das **Modellrisiko** berücksichtigt. Die möglichen<sup>196</sup> systematischen Fehler bei der Einschätzung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten stellen das Irrtumsrisiko, welches **nicht diversifizierbar** ist, dar.<sup>197</sup> In der Praxis werden dann meist relative Zu-/Abschläge, welche vom jeweiligen Alter und Geschlecht unabhängig sind, festgesetzt. Analog zum Schwankungsrisiko erhalten Sterbewahrscheinlichkeiten mit Erlebens- einen Abschlag und mit Todesfallcharakter einen Zuschlag. Invalidität verhält sich wie Todesfallcharakter und erhält folglich einen Zuschlag. Gerechtfertigt werden die Zu- bzw. Abschläge durch eine Vielzahl von Faktoren, wie

- ➔ Unterschiede in den Bestandsstrukturen zwischen Herleitungs- und Anwendungsbestand.
- ➔ Statistische Fluktuationen im Herleitungsbestand.
- ➔ Unterschiede im Sterblichkeitsniveau zwischen Herleitungs- und Anwendungsbestand.
- ➔ .....

Je nach Tafeltyp bzw. den Modellannahmen werden weitere oder andere Faktoren angegeben, die einen Irrtumszu- bzw. Abschlag rechtfertigen. Bei der DAV 2008 T wurde bspw. der Irrtumszuschlag in zwei Komponenten erfasst. Die erste Komponente, welche

<sup>194</sup> Aus der Gleichung lassen sich nicht die altersabhängigen Zuschläge (mittels arithmetischer Umformung) ableiten, da dann kein konstantes Sicherheitsniveau für jede Altersklasse erreicht wird und man erhält für die altersabhängigen Zuschläge lediglich den additiven altersunabhängigen Zuschlag.

<sup>195</sup> Vgl. DAV[1], S. 28 f.

<sup>196</sup> In diesem Sinne möglich, aber nicht wahrscheinlich. Denn die Werte der 2.Ordnung stellen die bestmögliche erwartete Realität (inkl. prognostizierte zeitliche Entwicklung) dar.

<sup>197</sup> Vgl. Milbrodt, H. (2005), S. 84.

10% beträgt, stellt den Mindestzuschlag. Diese soll insbesondere Risiken abdecken, welche durch Unterschiede zwischen dem Modell- und Anwendungsbestand verursacht werden.<sup>198</sup> Die zweite Komponente beträgt 15% und deckt Risiken ab, die durch unterschiedliche Sterblichkeitsniveaus zwischen dem Herleitungs- und Anwendungsbestand zustande kommen.<sup>199</sup> Bei der DAV 2008 P wurde ebenfalls ein relativer Zu- bzw. abschlag festgesetzt, welcher ebenfalls unabhängig vom Alter und vom Geschlecht ist.

### 6.3. Änderungsrisiko

Das Änderungsrisiko entsteht durch Veränderungen der Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit der Zeit. Somit wird der Änderungszu- bzw. Abschlag einerseits durch die zukünftige Ungewissheit der Ausscheidehäufigkeiten, andererseits aber auch durch das Auftreten gefährlicher Infektionskrankheiten, welche den Verlauf der Ausscheidewahrscheinlichkeiten ungünstig beeinflussen, gerechtfertigt. Für eine Lebensversicherung mit Todesfallcharakter bedeutet ein Trendzuschlag einen zusätzlichen Puffer. Dieser Zuschlag kann ein konstanter- oder stückweise linearer Zuschlag über den Altersbereich sein.<sup>200</sup> Für die DAV 2008 T wurde kein zusätzlicher Zuschlag erhoben, da „im Kollektiv eine hinreichende implizierte Absicherung durch den erwarteten Sterblichkeitstrend erfolgt.“<sup>201</sup> Im Gegensatz zur Sterblichkeit unterliegen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, welche stärker von gesetzlichen und gesellschaftlichen Maßnahmen beeinflussbar sind, einem höherem Änderungsrisiko. Die Pflegebedürftigkeit oder die Invalidität hängen stärker von den gesetzlichen Definitionen ab, als bspw. die Sterblichkeit.

---

<sup>198</sup> Bspw. Unterschiede in den Bestandstrukturen. Zumeist sind auch statistische Fluktuationen im Herleitungsbestand als Begründung genannt (Parameter-Schätzunsicherheiten). Vgl. DAV[4], S. 49 f.

<sup>199</sup> Die zweite Komponente kann, falls unternehmenseigene gesicherte Sterblichkeitsuntersuchungen vorliegen, entfallen. Vgl. DAV[1], S. 29.

<sup>200</sup> Vgl. Int[3], S. 5. In der Ausarbeitung wird ein höherer Zuschlag für die Sterblichkeiten für Alter unter 25 vorgeschlagen. Das basiert darauf, dass der Vergleich zweier Sterblichkeitsmessungen (von 1986/90 und 1971/75) ein generelles Absinken der Sterbewahrscheinlichkeiten, vor allem in den Altern unter 25, zeigte.

<sup>201</sup> Siehe DAV[1], S. 29. Mit anderen Worten: Erwartet wird eine weitere Reduktion der Sterbewahrscheinlichkeiten, welche jedoch in den biometrischen Rechnungsgrundlagen nicht berücksichtigt wird. Folglich stellen die Sterbewahrscheinlichkeiten mit der Zeit überschätzte Werte dar.



## 6.4. Zusammenfassende Betrachtung

In der Praxis kann der Irrtums- und Änderungszu- bzw. Abschlag additiv zusammengefasst bzw. in einer Komponente erfasst werden, so wie bei der DAV 2008 P.<sup>202</sup> Der **Gesamtzu- bzw. Abschlag** für das Schwankungs- bzw. Irrtums- und Änderungsrisiko kann dann multiplikativ zusammengefasst werden und  $q_x^{1.Ordnung}$  kann wie folgt beschrieben werden:

$$q_x^{1.Ordnung} = q_x^{2.Ordnung} \cdot (1 \pm r) \cdot (1 \pm s).$$

Für Zuschlag mit Plus und Abschlag mit Minus (analog für Invalidisierung mit Zuschlag).  $s$  stellt den altersunabhängigen Schwankungszu- bzw. Abschlag dar, welcher in den neueren Tafeln der DAV Anwendung fand.<sup>203</sup> Nach der Festsetzung der Zu- bzw. Abschlüsse werden deren Auswirkungen bspw. auf Barwerte und Nettobeiträge anhand vom Gesamtniveau oder auch vom einzelne Zu- bzw. Abschlag getestet. Eine weitere Untersuchung stellen Stresstests, schockartige Änderungen der Rechnungsgrundlagen, und Pandemieszenarien, länderübergreifende Ausbreitung einer Krankheit<sup>204</sup>, dar.<sup>205</sup>

## 7 Überprüfung der biometrischen Rechnungsgrundlagen

Im Kapitel 6.1. wurde darauf eingegangen, dass die tatsächlich eingetretenen Anzahlen der Ausgeschiedenen, welche ermittelt werden gemäß Kapitel 3, um deren Erwartungswerte, den rechnungsmäßigen erwarteten Ausgeschiedenen, schwanken. Für eine Abweichung bzw. für systematische Abweichungen zwischen erwartete Ausgeschiedene und tatsächlich eingetretene Ausgeschiedene im Laufe der Zeit, stellt sich dann die folgende Frage: Ist diese rein **zufälliger Natur oder auf wesentliche, tieferliegende (signifikante) Ursachen** zurückzuführen?<sup>206</sup> Die signifikante Ursache bedeutet dann, dass die Abweichung dadurch

---

<sup>202</sup> Vgl. DAV[4], S. 49 f. Der Zu- bzw. abschlag für das Irrtums- und Änderungsrisiko beträgt, bei der DAV 2008 P, 5 % für die Invalidisierungs- und Aktivensterbewahrscheinlichkeiten. Hingegen wird ein Abschlag von 20% für die Invalidensterbewahrscheinlichkeiten berücksichtigt, was dadurch begründet wird, dass „der Verbrauch von Sicherheiten durch Irrtums- und Änderungsrisiken in einer der beiden Rechnungsgrundlagen durch höhere Sicherheiten in der anderen Rechnungsgrundlage kompensiert wird. Siehe DAV[4], S. 51.

<sup>203</sup> So wie der der DAV 2008 P und DAV 2008 T.

<sup>204</sup> Bspw. Vogelgrippe. Die Szenarien basieren auf Expertenannahmen und werden in mehreren Phasen beschrieben.

<sup>205</sup> Vgl. DAV[1], S. 31 und DAV[4], S. 51 ff.

<sup>206</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 263.

bedingt ist, dass die Ausscheidewahrscheinlichkeit eine niedrigere bzw. höhere darstellen kann. Statistische Testverfahren geben darüber Antwort, ob Abweichungen als signifikant und/oder als systematisch anzusehen sind.<sup>207</sup> Im Wesentlichen können die Testverfahren zur Überprüfung der Rechnungsgrundlagen dem Vergleich durch

- ➔ den beobachteten und den erwarteten Häufigkeiten, oder  
(Also der Vergleich einer Stichprobe → die beobachteten Ausgeschiedenen ← mit einer vorgegebenen Ausscheidetafel. Die Prüffrage lautet dann: Ist die zugrunde gelegte Ausscheidetafel noch aktuell ? Oder haben sich im Zeitablauf die Ausscheideverhältnisse derart geändert, dass die zugrunde gelegte Ausscheidetafel nicht mehr aktuell ist ?  
Äquivalente Aufgabenstellung: Vergleich mit einer vorgegebenen Ausscheidetafel. Die Prüffrage lautet dann: Kann für unternehmenseigene Ausscheidhäufigkeiten eine vorgegebene Ausscheidetafel als ausreichende Näherung fungieren ?)
- ➔ zweier Stichproben, oder  
(Also der Vergleich zweier Stichproben aus einer Personengesamtheit im Zeitverlauf. Kakies, P. / et.al. beschreiben bspw., dass die Betrachtung der Personengesamtheit jeweils auf Zeitintervallen erfolgt, aus welchen dann die Stichproben ermittelt werden.)<sup>208</sup>
- ➔ den rohen- und den ausgeglichenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten dienen.  
(Also der Prüfung/Verifizierung des Ausgleichs der rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Die Prüffrage lautet dann: Unterscheiden sich die ausgeglichenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten signifikant von den beobachteten Ausscheidhäufigkeiten ? Mittels Testverfahren lassen sich Gütemaße für die Regellosigkeit und der Anpassung gewinnen.)<sup>209</sup>

Die Notwendigkeit der Überprüfung der biometrischen Rechnungsgrundlagen ergibt sich einerseits daraus, dass sich die biometrischen Verhältnisse im Zeitablauf verändern können, andererseits aus dem Fakt, dass die biometrischen Rechnungsgrundlagen nicht auf beliebige Personengesamtheiten übertragbar sind (falls die biometrischen Verhältnisse aus einer vorgegebenen Tafel verwendet werden sollen). Ebenso zeigt die Überprüfung die aktuellen biometrischen Verhältnisse im Bestand auf.<sup>210</sup>

Im Weiteren wird kurz auf die Grundlagen statistischer Testverfahren eingegangen. Ferner wird das Vorgehen eines Testverfahrens beschrieben. Der Entscheidungsprozess, zur Beantwortung einer spezifischen Aufgabenstellung (Annahme oder Ablehnung der Nullhypothese), erfolgt durch einen Aktuar. Ebenfalls werden die Bedingungen einer

---

<sup>207</sup> Kakies, P. / et.al. (1985), S. 46 geben ein Beispiel an, welches den Grundgedanken verdeutlicht. Im Beispiel werden 222 Tote erwartet, jedoch 203 Tote beobachtet. Testverfahren geben dann die Antwort, ob die geringere Anzahl an Toten durch eine niedrigere Sterbewahrscheinlichkeiten bedingt ist.

<sup>208</sup> Ebenda, S. 123. Der Vergleich lässt sich auch auf andere Aufgabenstellungen anwenden, bspw. „Versicherte mit Kleinlebensversicherungen“ und „Versicherte mit Großlebensversicherungen“.

<sup>209</sup> Bzw. Bestätigung modifizierter biometrischer Rechnungsgrundlagen vorzunehmen“. Siehe [http://www.heubeck.de/home/pdf/BMF\\_9\\_Dez\\_2011.pdf](http://www.heubeck.de/home/pdf/BMF_9_Dez_2011.pdf), S. 3 (Punkt 11).

<sup>210</sup> Siehe auch [http://www.heubeck.de/home/pdf/herrmann\\_aba\\_ms\\_2010\\_11\\_05.PDF](http://www.heubeck.de/home/pdf/herrmann_aba_ms_2010_11_05.PDF)

Entscheidungsfindung gegeben. Daraufhin folgen in den Kapiteln 7.1. bis 7.5 verschiedene Statistische Testverfahren.<sup>211</sup> Zum Abschluss des 7. Kapitels wird eine Zusammenfassende Betrachtung gegeben.

Es wird unterschieden zwischen Parametertests, die Mutmaßungen bzw. Hypothesen über unbekannte Parameter  $\theta$  (Erwartungswert, Varianz, Quantile) von Wahrscheinlichkeitsverteilungen prüfen, und verteilungsfreie Tests, die die unterliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Konstruktion des Tests nicht benötigen. Alle Testverfahren, außer Kapitel 7.5., sind vom letztgenannten Typ. Das **Testproblem** ergibt sich aus der Nullhypothese  $H_0$ , deren Wahrheitsgehalt vordergründig geprüft werden soll, gegen die Alternativhypothese  $H_1$ . Für Parameter- bzw. Signifikanztests definieren Beichelt, F.E. / et.al. das allgemeine Testproblem wie folgt: Die Menge der möglichen Parameterwerte sei disjunkt zerlegt,  $\theta = \theta_0 \cup \theta_1$  mit  $\theta_0 \cap \theta_1 = \emptyset$ , und das Testproblem ergibt sich dann durch  $H_0 : \theta \in \theta_0$  gegen  $H_1 : \theta \in \theta_1$ .<sup>212</sup> Die Entscheidung für oder gegen die Nullhypothese basiert dann auf eine konkrete Stichprobe  $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ , aus einer mathematischen Stichprobe  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , und wird ermittelt durch den Wert einer Testfunktion (auch Testgröße oder Testvariablenwert)  $T = T(x_1, \dots, x_n)$ , deren Wertebereich wiederum in einem Annahme- und Ablehnungsbereich aufgespalten ist.

➔ „Eine Entscheidungsvorschrift über die Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese, die auf einer geeignet zu wählende Testfunktion  $T(X_1, \dots, X_n)$  und dem Annahme- bzw. Ablehnungsbereich beruht, heißt statistischer Test.“<sup>213</sup>

Die Nullhypothese wird dann angenommen, wenn die vorliegende Stichprobe keinen Anlass zum Ablehnen gibt. Somit spricht man davon, dass  $H_0$  nicht abgelehnt werden konnte. Ferner ist „die Annahme von  $H_0$  nicht gleichbedeutend mit ihrer Richtigkeit.“<sup>214</sup> Mögliche Fehlentscheidungen bzgl. eines statistischen Tests heißen Fehler erster Art  $\alpha$  (

---

<sup>211</sup> Die jeweiligen Beispiele zeigen auch die Schwächen der Testverfahren auf und unterstreichen somit die Notwendigkeit des aktuariellen Augenmaßes.

<sup>212</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 263 f.  $H_1$  stellt die komplementäre Aussage von  $H_0$  dar, die Angabe der Alternativhypothese ist somit nicht nötig und wird im Weiteren unterlassen.

<sup>213</sup> Siehe Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 264. Bspw. ist die Testfunktion aus 7.5. genau so gewählt, so dass der Annahmehereich das Konfidenzintervall darstellt.

<sup>214</sup> Siehe Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 265. Dies wird deutlich durch die verwendeten Beispiele in den folgenden Kapiteln.

$H_0$  ist richtig und wird abgelehnt) und Fehler zweiter Art  $\beta$  ( $H_0$  ist falsch und wird angenommen).  $\alpha$  wird vorgegeben und heißt Signifikanzniveau oder Irrtumswahrscheinlichkeit, das Komplement ist dann das Sicherheitsniveau.<sup>215</sup> Der Bereich von  $\alpha$  liegt i.d.R. zwischen 0.1% bis 10 %. Für die Praxis seien die Richtigkeit der Nullhypothese, und die daraus resultierenden Konsequenzen für die Rechnungsgrundlagen, an folgende Bedingungen geknüpft

- ➔ Annahme von  $H_0$  mittels statistischer Testverfahren (ggf. Anwendung mehrerer Tests).
- ➔ Absehung der Daten (beobachtet und erwartet bzw. zweier Stichproben) mittels grafischer Analysen, Interpretation der Abweichungen und ggf. weitere Analysen durch einen Aktuar.

Die einzelnen Schritte beim Vorgehen eines Testverfahrens sind in der folgenden Abbildung zusammengefasst.

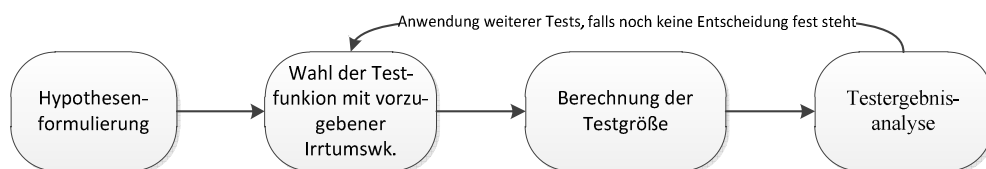


Abbildung 17: Das Vorgehen bei Testverfahren.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 266.

Stellt sich heraus, dass die biometrischen Rechnungsgrundlagen sich verändert haben, so ist eine Modifikation der „alten“ biometrischen Rechnungsgrundlagen durchzuführen. Dabei muss ein Aktuar genau überprüfen, inwieweit eine Modifikation angebracht ist und was für Konsequenzen diese Modifikation mit sich bringt.

## 7.1. Vorzeichentest<sup>216</sup>

Der Vorzeichentest stellt einen verteilungsfreien Test dar, da zur Konstruktion des Tests die unterliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht erforderlich ist. Ziel ist es aufzuzeigen, ob Gemeinsamkeiten von Grundgesamtheiten vorliegen oder nicht. Also ob,

- ➔ beobachtete und rechnungsmäßige Ausscheidehäufigkeiten übereinstimmen. (a)

<sup>215</sup>  $\alpha$  ist wie folgt definiert:  $\alpha = P(\text{"Fehler erster Art"}) = P(T \in \text{Ablehnungsbereich} | H_0 \text{ ist richtig})$ . Bei Vorgabe von  $\alpha$  hängt  $\beta$  vom Stichprobenumfang, von  $\alpha$  und vom wahren Parameter ab. Ziel ist es dann  $\beta$  möglichst klein zu halten. Weiterhin gilt im Allgemeinen  $\beta > \alpha$ . Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 265.

<sup>216</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 288 ff., Kakies, P. / et.al. (1985), S. 54 ff. und DAA[4], S. 98 ff.

Eine konkrete Realisierung aus einer verbundenen mathematischen Stichprobe der Form  $\{(X_i, Y_i, i \in I = [1, \dots, n])\}$  aus  $(X, Y)$  liegt zugrunde. „Die  $n$  zweidimensionalen zufälligen Vektoren  $(X_i, Y_i)_{i \in I}$  sind unabhängig und identisch wie  $(X, Y)$  verteilt.“<sup>217</sup> Die konkreten Realisierungen  $\{(X_1 = x_1, Y_1 = y_1), \dots, (X_n = x_n, Y_n = y_n)\}$  sind dann die beobachteten und die rechnerisch-erwarteten Ausscheidhäufigkeiten eines  $i^{\text{ten}}$  Objekts (bzw. Alter). Die Hypothesenformulierung (für den zweiseitigen Test) lautet:

$$\rightarrow H_0 : E(X) = E(Y) \text{ gegen } H_1 : E(X) \neq E(Y)^{218} \quad (\text{b})$$

Das Testprinzip basiert auf der Anzahl der positiven Differenzen  $D = X - Y$ . Der Stichprobenumfang  $n$  lässt sich mittels Differenzen wie folgt darstellen

$$n = \underbrace{\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i > y_i\}}(i)}_{T^+} + \underbrace{\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i = y_i\}}(i)}_{T^0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n 1_{\{x_i < y_i\}}(i)}_{T^-}.$$

Die Anzahl  $T^0$  bzw. die Stichprobenwerte werden nicht betrachtet und gestrichen, folglich ergibt sich  $n^{(\text{neu})} = n - T^0 = T^+ + T^-$ .<sup>219</sup> Für Stichprobenumfänge  $n^{(\text{neu})} > 1$  gilt für das Testprinzip: Ist  $H_0$  richtig, so ist  $T^+ \sim B(n^{(\text{neu})}, 0.5)$  mit  $E(T^+) = n^{(\text{neu})} \cdot 0.5$ .<sup>220</sup> Unwahrscheinlich ist  $H_0$  genau dann, wenn  $T^+$  zu weit nach oben bzw. unten abweicht. Mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und für  $n^{(\text{neu})} > 20$  ergibt sich für (Approximation mit der Standardnormalverteilung)

<sup>217</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 288.

<sup>218</sup> In Worten: (a) entspricht der Nullhypothese. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 288 f. erläutern die Hypothesenformulierung wie folgt: Gilt (a), so weisen die zufälligen Vektoren  $(X, Y)$  die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung auf und für alle Realisierungen für diskrete ZV'n gilt dann  $P(X = x, Y = y) = P(Y = y, X = x) \rightarrow$  vertauschbar. Dann gilt die Symmetrie der Verteilung der Differenz  $D = (X - Y)$  bzgl. des Nullpunkts und für diskrete Differenzen  $d$  gilt  $P(D = -d) = P(D = d)$ . Das Testproblem ergibt sich aus  $H_0 : P(D < 0) = P(D > 0)$ , für Symmetrie von  $D$  und Median 0 von  $D$  ergibt sich  $H_0$  gemäß (b).

<sup>219</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 290. Falls man, für gerade Anzahl, die Nulldifferenzen hälftig aufteilt, zu positiven und negativen Differenzen, so lassen sich alle Objekte verwenden. Für eine ungerade Anzahl von Nullobjekten entfällt dann folglich nur ein Objekt.

<sup>220</sup> Ebenda, S. 289. Siehe auch Anhang A und Kapitel 6.1. Nimmt man die Differenz eines  $i^{\text{ten}}$  Objekts und gilt  $P(D_i > 0) \approx 0.5$ , dann folgt für ein  $i^{\text{tes}}$  Objekt, dass  $D_i \sim B(0.5)$ . Woraus wiederum aus der Summe für  $n$

Objekte folgt, dass  $T^+ = \sum_{i=1}^n 1_{\{D_i > 0\}} \sim B(n, 0.5)$ .

$$\rightarrow \text{(Zweiseitiger Test)} H_0 : E(T^+) = n^{(\text{"neu"})} \cdot 0.5 \text{ wird abgelehnt, falls } \left| \frac{\overbrace{T^+ - n^{(\text{"neu"})} \cdot 0.5}^{\approx Z}}{\sqrt{n^{(\text{"neu"})} \cdot 0.5}} \right| > z_{\alpha/2}.$$

Mit dem  $p$ -Quantil  $z_{\alpha/2} = x_p$  der Ordnung  $p = 1 - \alpha/2$  der standardisierte normalverteilten ZV.<sup>221</sup> Für  $n^{(\text{"neu"})} \leq 20$  (ggf. auch für größere Werte) werden kritische Werte  $t_{n^{(\text{"neu"})}, \alpha}^+$ , abhängig von  $n^{(\text{"neu"})}$  und  $\alpha$ , ermittelt. Diese Werte werden tabellarisch festgehalten und der Annahmebereich für  $H_0$  ergibt sich (Zweiseitiger Test) aus  $[t_{n^{(\text{"neu"})}, \alpha}^+ + 1, n^{(\text{"neu"})} - t_{n^{(\text{"neu"})}, \alpha}^+ - 1]$ . Die Schranken für den Vorzeichentest stellen das jeweilige Konfidenzintervall für die mittlere absolute Abweichung dar.<sup>222</sup> Mit abnehmender Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. zunehmendem Sicherheitsniveau wachsen auch die Quantilwerte, folglich wächst auch der Annahmebereich des Tests. Wesentliche Nachteile ergeben sich dadurch, dass die Größe der Abweichungen (Absolutwerte der Differenzen) und systematische Abweichungen nicht erkannt werden bzw. nicht berücksichtigt werden.<sup>223</sup> Andere Testverfahren bieten die Möglichkeit zur Berücksichtigung dieser Informationen. Im Abschnitt 7.2. wird, zusätzlich mit dem dort beschriebenen Testverfahren, auf eine Beispielrechnung eingegangen.

## 7.2. Iterationstest von Walfowitz<sup>224</sup>

Der Iterationstest von Walfowitz berücksichtigt neben der Richtung der Differenzen durch ihre Anzahlen, auch deren Reihenfolge durch die Anzahl der Iterationen. Die Nullhypothese lautet

$$\rightarrow H_0 : \text{„Die Reihenfolge der Stichprobenwerte ist zufällig“}.$$

<sup>221</sup> Ebenda, S. 290 und 256. Analoges Grundgedanke wie im Kapitel 6.1. (standardisierte ZV annähernd normalverteilt). Es gilt, dass  $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ . Woraus der Ablehnungsbereich für  $Z$  folgt.

Bspw. mit den Quantilen  $z_{0.05} = x_{0.95} = 1.64$  oder  $z_{0.025} = x_{0.975} = 1.96$ .

<sup>222</sup> Vgl. Sachs, L. / et.al. (2006) S. 271 f. und 404 f. (siehe Tabelle 6.6.)

<sup>223</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 63.

<sup>224</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 297 ff.. Siehe Test auf Zufälligkeit. Hingegen der Iterationstest von Kakies, P. / et.al. (1985), S. 57 f. auf die Anzahl der Vorzeichenwechsel  $T \sim B(n^{(\text{"neu"})} - 1, 0.5)$  basiert.

Die Idee dahinter ist, dass man den gegebenen Realisierungen  $\{x_1, \dots, x_{n^{(neu)}}\}$  aus  $D$  jeweils mit positiven- eine Eins und mit negativen Vorzeichen eine Null zuordnet. Der Test prüft, ob Null- oder Eins-Werte zu selten oder zu oft nacheinander vorkommen bzw. wechseln. Unter  $T$  versteht man die Anzahl der Iterationen. Eine Iteration ist definiert als eine Folge gleicher Zeichen (von 1 oder 0), bis zum Vorzeichenwechsel. Mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und für  $n^{(neu)} > 20$ , mit  $n^{(neu)} = m_1 + m_0$  mit der Anzahl der positiven  $m_1$  bzw. negativen  $m_0$  Differenzen, ergibt sich für den zweiseitigen Test (Approximation mit der Standardnormalverteilung)

$$\rightarrow H_0 \text{ wird abgelehnt, falls } \left| \frac{\overbrace{T - \left( \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_0}{n^{(neu)}} + 1 \right)}^{E(T)}}{\underbrace{\sqrt{\frac{2 \cdot m_1 \cdot m_0 \cdot (2 \cdot m_1 \cdot m_0 - n^{(neu)})}{(n^{(neu)})^2 \cdot (n^{(neu)} - 1)}}}_{\sqrt{\text{Var}(T)}}} \right| > z_{\alpha/2}.$$

Für  $m_0 \leq 10$  und  $m_1 \leq 10$  stehen auch tabellierte kritische Werte  $t_{m_1, m_0, \alpha}$  zur Verfügung.<sup>225</sup>

Die genannte Beschreibung ist an Beichelt, F.E. / et.al. angelehnt. Weiterhin wurden Nulldifferenzen von vorherein ausgeschlossen.<sup>226</sup> Ein wesentlicher Informationsgehalt zweier Realisierungsreihen von Ausgeschiedenen sind die Absolutwerte der Differenzen. Beide voran genannten Testverfahren berücksichtigen diese nicht. Die beiden nächsten Testverfahren berücksichtigen diese Informationen. Die folgende Abbildung zeigt nochmals die Probleme auf, die durch die beiden vorgestellten Testverfahren verursacht werden können. Bei einer Annahme von  $H_0$  muss ein Aktuar zusätzlich den Test analysieren, in der Form, dass er die Daten bzw. Abweichungen analysiert und interpretiert. Grafiken, über Teile des Altersbereichs, visualisieren den Sachverhalt recht gut. Somit ist das aktuarielle Augenmaß dem Testergebnis hinzufügen.<sup>227</sup>

<sup>225</sup> Welche die größten Zahlen  $t$  sind, so dass gilt  $P(T \leq t) \leq \alpha$ . Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 419.

<sup>226</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003) S. 297 f. Zur Vermeidung der Ausschließung von Nulldifferenzen lassen sich diese einmal zu  $m_1$  und  $m_0$  zählen. Man bildet  $T$  dann so, dass man den Durchschnitt aus der kleinsten und größten Anzahl von Iterationen bildet. Bspw. für  $\{-, +, -, 0, -, +\}$  ersetzt man „0“ einmal mit „+“ und „-“ und man erhält  $\{-, +, -, +, -, +\}$  mit 6 und  $\{-, +, -, -, -, +\}$  mit 4 Iterationen und es ergibt sich  $T = 5$ .

<sup>227</sup> Ebenso können Abweichungen verschiedenen Alters unterschiedliche Ursachen und Konsequenzen haben.

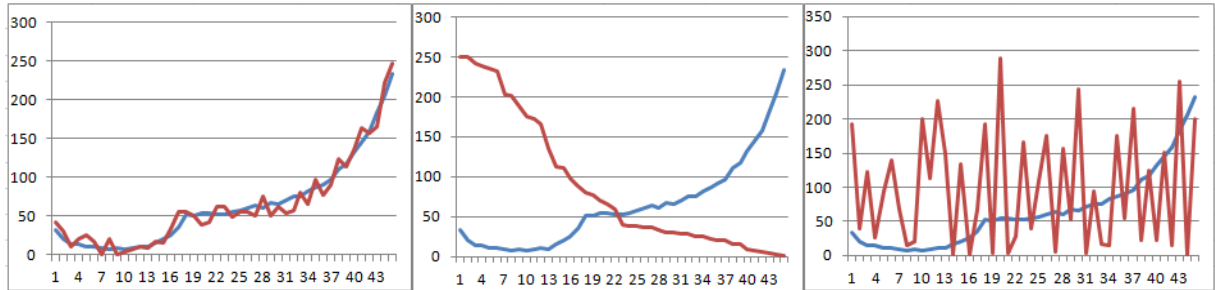


Abbildung 18: Beispiel: Vorzeichen- und Iterationstest.

Anwendung des Vorzeichen- und Iterationstests mit  $n^{(neu)} = 45$  und  $\alpha = 0.05$ . Blaue Kurve für die rechnerisch-erwarteten- und rote Kurve für die beobachteten Ausgeschiedenen. Links (Variante A): Annahme beider Testverfahren. Mitte (Variante B): Nur der Iterationstest wurde abgelehnt, da beim Vorzeichentest positive und negative Differenzen sich in Waage halten. Rechts (Variante C): Beide Testverfahren wurden angenommen, da sowohl positive/negative Differenzen sowie die Anzahl der Iterationen sich mehr oder weniger in Waage halten.<sup>228</sup>

Quelle: Eigene Darstellung.

### 7.3. Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test<sup>229</sup>

Der Vorzeichen-Rang-Test berücksichtigt die Absolutwerte der Differenzen  $abs(D_i)$ , indem er den  $abs(D_i)$  Ränge zuordnet. Die Bezeichnung und die Nullhypothese (siehe 7.1. (b)) sind gegeben durch das Kapitel 7.1.. Folglich sind  $n^{(neu)}$  von Null verschiedene Differenzen gegeben. Zur Vorgehensweise werden im ersten Schritt zu den jeweiligen  $D_i$  die  $abs(D_i)$  gebildet. Die Objekte bzw. Tupel werden nach  $abs(D_i)$  der Größe nach geordnet. Der Index  $j$  der geordneten Objekte  $\{abs(D_i), D_i\}_{j \in I = [1, \dots, n^{(neu)}]}$ , anfangend bei 1, stellt den jeweiligen Rang dar, folglich erhält man  $n^{(neu)}$  Tripel der Form  $\{abs(D_i), D_i, Rang_i\}$ . Weiterhin werden Objekte mit gleichen Absolutwerten der Differenzen als ein Komplex aufgefasst. Der Mittelwert der Ränge eines Komplexes stellt dann den Rang eines jeden Objekts eines Komplexes dar. Die Summe der Ränge  $R^+$  aller positiven  $D_i$  soll dann ihrem Erwartungswert entsprechen. Es ergibt sich, dass die Summe aller Ränge gleich  $n^{(neu)} \cdot (n^{(neu)} + 1) \cdot 0.5 = R^+ + R^-$  (Summe aller Rangzahlen der positiven und negativen Differenzen). Gilt  $H_0$ , dann lauten  $E(R^+) = E(R^-) =$

<sup>228</sup> Für die Beispiele des 7. Kapitels wurde die Reihe der erwarteten Ausgeschiedenen mittels den Sterbewahrscheinlichkeiten (für Männer) der Sterbetafel 2008/10 des Statistischen Bundesamtes erzeugt, für  $x = 1, \dots, 45$ . Für jede Altersklasse wurde die Anzahl der Lebenden auf 100000 gesetzt. Die Anzahlen der absoluten Ausgeschiedenen wurden dabei mittels kaufmännischen Rundens gewonnen. Die beobachteten Ausscheidzahlen wurden dabei so erzeugt, so dass verschiedene Szenarios betrachtet werden könnten. Es wurden vier Varianten (A, B, C und D) erzeugt.

<sup>229</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 292 ff.



$$0.25 \cdot n^{(\text{neu})} \cdot (n^{(\text{neu})} + 1) \quad \text{und} \quad \text{Var}(R^+) = \text{Var}(R^-) = n^{(\text{neu})} \cdot (n^{(\text{neu})} + 1) \cdot (2 \cdot n^{(\text{neu})} + 1) / 24.$$

Mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und für  $n^{(\text{neu})} > 20$  ergibt sich für den zweiseitigen Test (Approximation mit der Standardnormalverteilung)

$$\rightarrow H_0 \text{ wird abgelehnt, falls } \left| \frac{\overbrace{R^+ - E(R^+)}^{\approx Z}}{\sqrt{\text{Var}(R^+)}} \right| > z_{\alpha/2}.$$

Analog zu den vorherigen Testverfahren stehen auch Kritische Werte  $t_{n^{(\text{neu})}, \alpha}^+$  für den Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest zur Verfügung. Beichelt, F.E. / et.al. betonen, dass man für  $n^{(\text{neu})} > 20$  auf die standardisierte ZV bzw. Testfunktion zurückgreift. Das Beispiel der Abbildung 18 soll fortgesetzt werden.

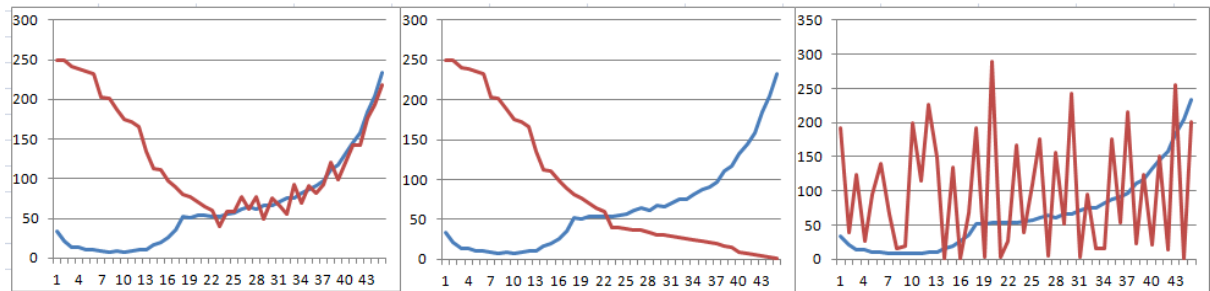


Abbildung 19: Beispiel: Vorzeichen-Rang-Test.

Anwendung des Vorzeichen-Rang-Tests mit  $n^{(\text{neu})} = 45$  und  $\alpha = 0.05$ . Aufbauend auf die Beispiele aus Abb. 18 kommt hier Variante D hinzu, hingegen Variante A entfällt. Blaue Kurve für die rechnermässigen-erwarteten- und rote Kurve für die beobachteten Ausgeschiedenen. Links (Variante D): Ablehnung der Nullhypothese für alle drei vorher genannten Testverfahren. Die Ablehnung resultiert aus den einseitigen hohen Abweichungen für Alter unter 20. Mitte (Variante B): Der Vorzeichen-Rang-Test führt zur Annahme, da sich die Summe der Ränge der positiven und negativen Differenzen in Waage halten. Rechts (Variante C): Der Vorzeichen-Rang-Test führt zur Ablehnung. Jedoch, setzt man das Sicherheitsniveau auf 99%, so führt die Nullhypothese zur Annahme, da der Annahmehereich größer bzw. unschärfer wird.

Quelle: Eigene Darstellung.

## 7.4. Chi-Quadrat-Anpassungstest<sup>231</sup>

Der Chi-Quadrat-Anpassungstest prüft, ob sich die Häufigkeiten der beobachteten Ausgeschiedenen an den vorgegebenen rechnermässigen-erwarteten Ausgeschiedenen anpasst. Die Nullhypothese lautet

$$\rightarrow H_0 : \text{Die Beobachteten- schwanken nur zufällig um erwarteten Ausgeschiedenen.}^{232}$$

<sup>230</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 292 f.

<sup>231</sup> Ebenda, S. 292 ff.

Aus einer mathematischen Stichprobe  $\{X_1, \dots, X_n\}$  sei eine konkrete Realisierung  $\{x_1, \dots, x_n\}$  gegeben ( $\rightarrow$  die beobachteten Ausgeschiedenen einer Altersklasse  $x \in [1, \dots, n]$ ). Es gilt dann, dass die diskreten ZV'n  $X_x \sim B(l_x, q_x)$  sind, mit  $E(X_x) = l_x \cdot q_x$ .<sup>233</sup> Folglich ist die theoretische Häufigkeit  $l_x \cdot q_x$  die mittlere Anzahl der Ausgeschiedenen einer Altersklasse  $x$ , die man erwartet, wenn  $H_0$  ist richtig. Für die Annahme von  $H_0$  dürfen sich zwischen den beobachteten- und theoretisch-erwarteten Häufigkeiten keine signifikanten Unterschiede ergeben. Die Testgröße errechnet sich durch Aufsummation des normierten Abweichungsquadrats zwischen den beobachteten und erwarteten Häufigkeiten einer jeden Altersklasse. Mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und für  $l_x \cdot q_x \geq 1$ <sup>234</sup> ergibt sich für den Test, dass

$$\rightarrow H_0 \text{ abgelehnt wird, falls } \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - l_i \cdot q_i)^2}{l_i \cdot q_i} > \chi_{1-\alpha, n}^2. \quad ^{235}$$

Die Testgröße  $\chi^2$  ( $\rightarrow$  aggregierter, standardisierte Wert für das Ausmaß der Abweichungen) genügt näherungsweise einer Chi-Quadrat-Verteilung.<sup>236</sup>

Mit vorgegebenen  $\alpha$  ergibt sich der Schwellenwert  $\chi_{1-\alpha, n}^2$  durch das  $(1-\alpha)$ -Quantil  $x_{1-\alpha} = \chi_{1-\alpha, n}^2$  der Chi-Quadrat-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden (welche vertafelt zur Verfügung stehen).

Die Beispiele in den Abbildungen 18 und 19 führen alle zur Ablehnung der Nullhypothese mittels des Chi-Quadrat-Anpassungstests. Für die Variante A scheint das Ausmaß der Abweichungen im Plot nicht signifikant zu sein, dennoch ergibt sich

<sup>232</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 58. Allgemeinzielsetzung: „...ob eine hypothetisch erwartete Verteilungsfunktion  $F_X^e$  einer ZV  $X$  als ein geeignetes Verteilungsmodell für eine empirisch beobachtete Verteilungsfunktion  $F_X$  angesehen werden kann...“, also  $H_0 : F_X = F_X^e$ . Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 297.

<sup>233</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 58. Die Binomialverteilung einer ZV  $X_x$  ergibt sich dadurch, dass wenn man das Zufallsexperiment einer einzelnen  $x$ -jährigen Person  $k \in [1, \dots, l_x]$  betrachtet, so gilt die Bernoulli-Verteilung für  $X_{x_k} \sim B(q_x)$ , folglich gilt  $X_x = \sum_{k=1}^{l_x} 1_{(X_{x_k} = \text{"Person } k \text{ scheidet aus" })}$ .

<sup>234</sup> Für die erwarteten Häufigkeiten sollte stets gelten  $l_x \cdot q_x \geq 5$  für  $n \leq 8$ . Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 297.

<sup>235</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 59.

<sup>236</sup> Eine ZV  $\chi_n^2$  genügt einer Chi-Quadrat-Verteilung, falls gilt  $\chi_n^2 = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$  mit i.i.d.  $Z_i \sim N(0,1)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Die Anzahl der Freiheitsgrade stellen die unabhängigen Einflussmöglichkeiten auf  $\chi_n^2$  dar. Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 250.

$\chi^2 \approx 134 > \chi^2_{0.95,45} = 61.67$ . Bspw. könnte ein Aktuar folgende Frage stellen: Wie groß dürfen die Abweichungen in einer jeden Altersklasse sein, damit der Test zur Annahme führt? Mit gegebenen  $n = 45 \wedge \alpha = 0.05$  ergibt sich  $\chi^2_{0.95,45} = 61.67$ . Es gilt nun

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - l_i \cdot q_i)^2}{l_i \cdot q_i} = 61.67 \text{ nach den Abweichungen aufzulösen. Unter der Annahme,}$$

dass jedes normierte Abweichungsquadrat einer Altersklasse den gleichen Beitrag einbringt, folgt  $n \cdot \frac{(x_i - l_i \cdot q_i)^2}{l_i \cdot q_i} = 61.67$  und es ergibt sich die erlaubte maximale

Abweichung einer Altersklasse durch  $(x_i - l_i \cdot q_i) = \sqrt{(61.67/n) \cdot l_i \cdot q_i}$ .

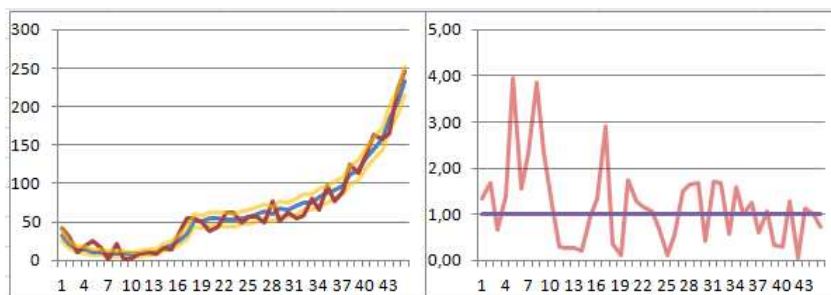


Abbildung 20: Beispiel: Chi-Quadrat-Anpassungstest.

Mit  $n = 45$  und  $\alpha = 0.05$ . Aufbauend auf der Variante A (Abb.18). Links: Die beiden orangefenen Kurven, um die erwarteten Ausgeschiedenen, stellen den Bereich dar, indem die Abweichungen zu einer Annahme des Chi-Quadrat-Anpassungstest führen ( $l_i \cdot q_i \pm \sqrt{(61.67/n) \cdot l_i \cdot q_i}$ ). Rechts: Hier wird die Relation bzw. Quote  $|x_i - l_i \cdot q_i| / \sqrt{(61.67/n) \cdot l_i \cdot q_i}$  betrachtet. Der Plot visualisiert die Verletzung der maximal erlaubten Abweichungen (Werte über 1) sehr gut.

Quelle: Eigene Darstellung.

Abschließend sei noch eine Idee genannt, um dem Beispiel der Variante D (der Abb. 19) Rechnung zu tragen. Die Prinzipien bauen auf den bereits genannten auf.

## 7.5. Betrachtung einer einzelnen Altersklasse

Eine weitere Möglichkeit stellt die Betrachtung einer jeden Altersklasse  $x$  dar. Für jede Altersklasse sind  $l_x \wedge q_x$  gegeben, somit stellt die Anzahl der Ausgeschiedenen  $x_x$  einer Altersklasse die Realisierung ( $X_x = x_x$ ) der ZV  $X_x \sim B(l_x, q_x)$  dar. Für ausreichend große  $l_x$  gilt näherungsweise, dass  $X_x \sim N(l_x \cdot q_x, l_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x))$  ist.<sup>237</sup> Mit Irrtums-

<sup>237</sup> Vgl. Abschnitt 7.3. und 6.1.

wahrscheinlichkeit  $\alpha$  und für  $l_x \cdot q_x > 5$  ist die folgende Betrachtungen möglich:  
(Approximation mit der Standardnormalverteilung)

➔ Vorbetrachtung: Das zentrale Schwankungsintervall  $P(l_x \cdot q_x - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{l_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x)} \leq X_x \leq l_x \cdot q_x + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{l_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x)}) = 1 - \alpha$ , mit bspw.  $z_{0.025} = 1.96$  für 95% Wahrscheinlichkeitsmasse, der normalverteilten ZV  $X_x$ , gibt dem Aktuar in Vorbetracht ein Schätzintervall an. Somit erwartet ein Aktuar, dass die Realisierung ( $X_x = x_x$ ) zu  $1 - \alpha$  im genannten Intervall liegt.<sup>238</sup> Es ergibt sich (Zweiseitiger Test)  $H_0 : x_x = l_x \cdot q_x$  wird abgelehnt,

$$\text{falls } \left| \frac{\overset{\approx Z}{x_x - l_x \cdot q_x}}{\sqrt{l_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x)}} \right| > z_{\alpha/2} \quad ^{239}$$

Es ergibt sich nun, dass der Schätzer einer Stichprobe, aus einem hinreichend großem Bestand, die neuen Verhältnisse besser wiedergeben kann und dann als „wahrer“ Schätzer fungieren kann. Es interessiert dann, ob der „neue“ erwartete Schätzer signifikant vom „alten“ erwarteten Schätzer abweicht.<sup>240</sup> Angenommen wird, dass der Schätzer

$\bar{X} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{i=1}^{l_x} X_{x_i}$ , mit  $X_{x_i} \sim B(q_x)$ , den Erwartungswert  $E(\bar{X}) = q_x$  und Varianz

$Var(\bar{X}) = q_x \cdot (1 - q_x) / l_x$  besitzt. Somit ergeben sich das Konfidenzintervall und der Test über eine Wahrscheinlichkeit

➔ durch  $P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - q_x}{\sqrt{q_x \cdot (1 - q_x) / l_x}} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ , mit normalverteilten Schätzer (siehe auch

Anhang A). Es ergibt sich (Zweiseitiger Test)  $H_0 : \bar{X} = q_x$  wird abgelehnt, falls

$$\left| \frac{\overset{\approx Z}{\bar{X} - q_x}}{\sqrt{q_x \cdot (1 - q_x) / l_x}} \right| > z_{\alpha/2} \quad ^{241}$$

<sup>238</sup> Vgl. Eckstein, P. (2006), S. 241. und Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S.43.

<sup>239</sup> Die Vorbetrachtung einzelner Altersklassen kann genau dann von Bedeutung sein, wenn es zu unterschiedlichen Auszahlungen in den verschiedenen Altersklassen kommt. Ferner stellt die genannte Hypothese, dann ebenso eine Güte der Vorbetrachtung dar.

<sup>240</sup> Das Testprinzip bedingt, dass bei sehr großem Bestand (fast) jede Abweichung signifikant ist. Dieser Sachverhalt ist dann vom Aktuar zu überprüfen.

<sup>241</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 278.

Ermittelt man wiederum die absoluten Anzahlen der Ausgeschiedenen, so kommt man zu gleichen Ergebnissen wie im vorgenannten Test, da  $x_x = \sum_{i=1}^{l_x} (X_{x_i} = 1)$ . Aufbauend auf das

Beispiel der Abbildung 19 (Variante D) sei folgende Analyse durchgeführt.

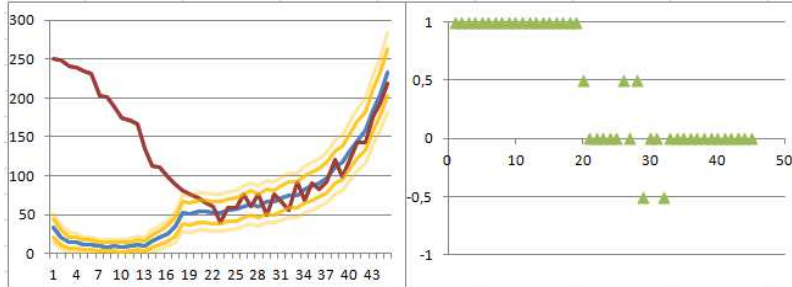


Abbildung 21: Beispiel: Betrachtung einzelner Altersklassen.

Mit  $n = 45$  und  $\alpha = 0.05$  bzw.  $\alpha = 0.001$  Aufbauend auf der Variante D (Abb. 19). Alle genannten Testverfahren haben bei der Variante D zu einer Ablehnung der Nullhypothese geführt. Links: Die vier orangenen Kurven um die erwarteten Ausgeschiedenen stellen den Annahmebereich bzw. das Konfidenzintervall zum Sicherheitsniveau von 95% (innere orange Kurven) bzw. 99.99% (äußere orange Kurven) dar. Rechts: Die x-Achse stellt wiederum die Altersklassen dar. Die Funktion die abgebildet worden ist lässt sich wie folgt beschreiben:  $H_0$  wurde für Alter  $x$  mit Wert  $\pm 1$  bzw. 0 auf beiden genannten Niveaus abgelehnt bzw. abgenommen. Werte  $\pm 0.5$  deuten darauf hin, dass  $H_0$  auf dem 95% abgelehnt und auf dem 99.99% Niveau angenommen wurden. Das jeweilige positive oder negative Vorzeichen deutet auf eine Abweichung nach oben oder unten hin.

Quelle: Eigene Darstellung.

Bspw. kann man für den Ausgleich fordern, dass  $q_x^{ausg}$  im Konfidenzintervall (für eine

Wahrscheinlichkeit)  $q_x^{ausg} \in [q_x^{roh} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{q_x^{roh} \cdot (1 - q_x^{roh}) / l_x}]$  liegt.<sup>242</sup>

## 7.6. Zusammenfassende Betrachtung

Die folgende Tabelle gibt die Ergebnisse der Testverfahren der betrachteten Varianten wieder.

	Vorzeichen- test (7.1.)	Iterations- test (7.2.)	Vorzeichen-Rang- Test (7.3)	Chi-Quadrat-Anpassungs- test (7.4.)	Test über Erwartungswert bei bekannter Varianz (7.5.)
Variante A	Annahme	Annahme	Annahme	Ablehnung	Annahme von 36 von 45 Altersklassen
Variante B	Annahme	Ablehnung	Annahme	Ablehnung	Annahme von 3 von 45 Altersklassen
Variante C	Annahme	Annahme	Ablehnung	Ablehnung	Annahme von 3 von 45 Altersklassen
Variante D	Ablehnung	Ablehnung	Ablehnung	Ablehnung	Annahme von 24 von 45 Altersklassen

Abbildung 22: Ergebniszusammenfassung der Beispiele.

Mit  $\alpha = 0.05 \wedge n = n^{(neu)} = 45$ .

Quelle: Eigene Darstellung.

<sup>242</sup> Vgl. Ebenda, S. 260. und Wolfsdorf (1986), S. 112. Bspw. unterlag die Allgemeine Sterbetafel 1924/26 dieser Forderung.

Schlussfolgernd lässt sich festhalten, dass ein einziges (der hier vorgestellten) Testverfahren zur Analyse keine ausreichenden Informationen geben kann, da neben der Anpassung an die erwarteten Werte auch die Regellosigkeit der Abweichungen zu berücksichtigen ist. Ferner basieren die Tests (mehr oder weniger) darauf ein aggregiertes Maß mit einem Schwellenwert zu vergleichen. Durch die Aggregation von Daten bzw. Werten (wie bspw. die Mittelwertbildung) gehen auch wesentliche Informationen (wie Datenausreißer) verloren. In der Statistischen Analyse kann man sich nicht nur auf das Testergebnis verlassen, zusätzlich ist die Grafische Analyse durchzuführen. Somit ist das aktuarielle Augenmaß ein wichtiges Beurteilungskriterium.<sup>243</sup> Was wiederum zu den signifikanten- und/oder systematischen Abweichungen geführt hat, ist ursachenbedingt, die von vielen Faktoren abhängen können (Bestandsstruktur, Konjunktur, äußere Einflüsse,...) und nicht mittels (der genannten) statistischer Testverfahren erklärbar sind.

---

<sup>243</sup> Beurteilung der Datenbasis durch einen Aktuar. Die Datenbasis ist recht gut überschaubar (aufgrund des begrenzten Altersbereiches) und lässt sich durch Grafiken gut visualisieren. Das aktuarielle Augenmaß nimmt bei der Beurteilung der Daten die bedeutendste Rolle ein.

## 8 Generationensterbetafel

Ausscheideverhältnisse unterliegen im Allgemeinen einer zeitlichen Veränderung. Je nach Ausscheidegrund und Zweck der Tafel können konstante Werte ein Best Estimate darstellen. Jedoch, für die Kalkulation von Rentenversicherungen und für die Bewertung von Altersvorsorgeprodukten ist die Verbesserung des Sterblichkeitstrends zu berücksichtigen bzw. üblich.

Generationensterbetafel bilden die Sterblichkeit pro Geburtsjahrgang ab ( $\rightarrow$  Abhängigkeit vom Geburtsjahr).<sup>244</sup> Generationensterbetafel wurden bei der DAV 2004 R und auch bei der RT 2005 G verwendet. Der Unterschied zu Periodentafeln, welche „eine Momentaufnahme der im betrachteten Zeitraum herrschenden Bedingungen“<sup>245</sup> darstellt, besteht also **„in der Berücksichtigung der künftig zu erwarteten Veränderungen“**.<sup>246</sup>

Im Vergleich zeigt sich, dass Periodensterbetafel die Lebenserwartung  $e_0$  unterschätzen.

Das methodische Vorgehen zur Erstellung von Generationensterbetafel erfolgt in vier Schritten

- ➔ Beste Schätzung der Sterblichkeit eines Geburtsjahrganges ( $\rightarrow$  Basistafel).
- ➔ Beste Schätzung zukünftiger Sterblichkeitsveränderungen. Dies erfolgt mittels Trendfunktionen (somit Trendfortschreibung  $\rightarrow$  siehe Kapitel 5.2.). Für die Trendfortschreibung kann eine kurzfristige- und langfristige Trendbetrachtung berücksichtigt werden.
- ➔ Ordnung der Generationenwerte mittels Diagonalisierung.
- ➔ Um nicht für jede Generation eine Sterbetafel speichern zu müssen, kann ausgehend von einer Basistafel die Altersverschiebung oder Trendfunktionen zur Beschreibung der Generationenwerte angewandt werden.

Die Trendfunktionen/Extrapolationsverfahren aus dem Kapitel 5.2. können bei der Erstellung von Generationensterbetafel verwendet werden. Die extrapolierten Sterbewahrscheinlichkeiten werden dann aus den geschätzten Sterbewahrscheinlichkeiten früherer Generationen gewonnen. Der Trend der Sterblichkeitsveränderung wird vom Statistischen Bundesamt, von der Heubeck AG und von der DAV in einer kurzfristigen-

---

<sup>244</sup> Vgl. DAV[6], S. 200. (Demografie) Um die tatsächlichen Verhältnisse einer Kohorte bzw. Generation abzubilden, müssen deren Ereignisse (Sterblichkeitsrisiken) abgeschlossen sein. Da dies i.d.R. für die betrachteten (jüngeren, nach 1910) Kohorten nicht der Fall ist wird mit Trendfunktionen gearbeitet, um zukünftige Ereignisse zu schätzen. Die Schätzungen werden folglich für jüngere Jahrgänge immer unsicherer. Ebenso beeinflussen Wanderungsbewegungen die Sterblichkeitsstruktur (mit der Zeit) einer Kohorte Vgl. Statis[4], S. 1.

<sup>245</sup> Siehe Statis[4], S. 1.

<sup>246</sup> Siehe Heubeck, K. (2005), S. 10.

und langfristigen Trendvariante betrachtet.<sup>247</sup> Die Sterblichkeitsveränderungen (für Deutschland) werden i.d.R. aus Bevölkerungsstatistiken des Statistischen Bundesamtes gewonnen. Bomsdorf, E. verweist dabei auf die Allgemeinen Sterbetafeln, bei denen die Volkszählungsdaten mit einbezogen werden. Diese sind den abgekürzten Sterbetafeln, welche auf Bevölkerungsfortschreibungszahlen aufbauen, vorzuziehen.<sup>248</sup> Jedoch bezieht sich die letzte Allgemeine Sterbetafel auf Periode 1986/88, so dass folglich Periodensterbetafeln zu verwenden sind.

### **8.1. Trendfortschreibung der Generationensterbewahrscheinlichkeiten<sup>249</sup>**

Voraussetzung einer langen Trendfortschreibung ist eine solide Datenbasis. Bei den Modellen der Sterblichkeitsprojektionen hat sich das Traditionelle Modell durchgesetzt.<sup>250</sup> Gemäß dem Ansatz des Statistischen Bundesamtes wird für jedes Alter  $x$  eine lineare Regression (loglinearer Ansatz) durchgeführt. Die exponentielle Trendfortschreibung wird dann mittels des Traditionellen Modells beschrieben (siehe Kapitel 5.2.). Der loglineare Ansatz wurde gewählt, da sich der Anstieg der Lebenserwartung annahmegemäß abschwächt (siehe auch den Ausführungen in Kapitel 2.6.).

### **8.2. Ermittlung der Generationensterbewahrscheinlichkeiten**

Ausgangspunkt sind die Sterbewahrscheinlichkeiten, abgestuft nach dem Alter und dem Geschlecht. Einerseits können diese Werte aus den Periodensterbetafeln entnommen werden, wo sie dann dem mittleren Beobachtungsjahr zuzuordnen sind, oder andererseits Neuberechnet werden. Die Neuberechnung basiert dann auf der Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner. Jedoch müssen dafür (für das Beobachtungsjahr) die Gestorbenen nach Alter, Geburtsjahr und Geschlecht; sowie der Bevölkerungsstand nach dem Alter (am Anfang bzw. Ende des Jahres) vorliegen.<sup>251</sup> Das Statistische Bundesamt verwendete für die Modellrechnungen der Geburtsjahrgänge 1871-2004 das Verkettungsverfahren. Mit der

---

<sup>247</sup> Vgl. Statis[4], Vorwort. Bei den Generationentafeln 1871-2004 des Statistischen Bundesamtes bezieht sich die langfristige bzw. kurzfristige Trendvariante auf die Entwicklung seit 1871 bzw. 1970.

<sup>248</sup> Vgl. Bomsdorf, E. (2002), S. 14.

<sup>249</sup> Vgl. Statis[4], S. 10.

<sup>250</sup> Siehe Ausführungen im Kapitel 5.2. bzw. DAV[4].

<sup>251</sup> Vgl. Statis[4], S. 4 f. Die Neuberechnung konnten für den Zeitraum von 1952-2003 durchgeführt werden. Die anderen Sterbewahrscheinlichkeiten wurden durch Rekonstruktion aus dem vorhandenem Material gewonnen bzw. abgeleitet (siehe den dortigen Punkt 2.2.).



Rekonstruktion fehlender Werte, der Neuberechnung und der Trendfortschreibung werden dann gemäß Geburtsjahr die Sterbewahrscheinlichkeiten geordnet → Diagonalisierung. Man erhält eine Matrix mit den Dimensionen (Alter)×(Geburtsjahr).

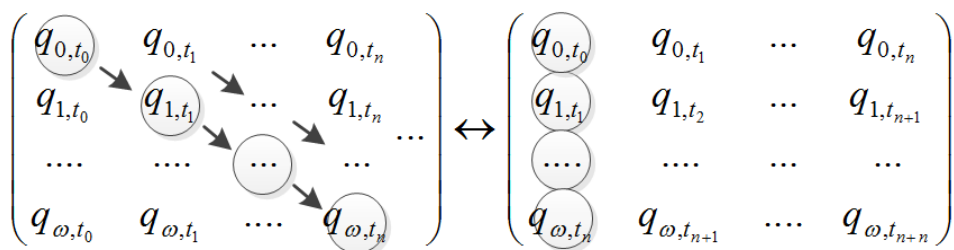


Abbildung 23: Diagonalisierung.

Links: Matrix mit den Sterblichkeiten (Spalten) der jeweiligen Periode ((Alter)×(Perioden)). Rechts: Anwendung der Diagonalisierung. Matrix mit den Werten (Spalten) der jeweiligen Generation ((Alter)×(Geburtsjahr)). Mit beobachteten Werten  $[t_0, \dots, t_n]$  (gemäß der Periodenanalyse) und extrapolierten Werten  $[t_{n+1}, \dots, t_{n+m}]$  (gemäß Trendfortschreibung).  $m$  ist so zu wählen, so dass die Werte der benötigten Generationen für alle Altersklassen vollständig (mit extrapolierten Werten) belegt sind.

Quelle: Eigene Darstellung.

Mit Hilfe des Algorithmus der Abbildung 42 (siehe Anhang D) lässt sich dann eine Sterbetafel für einen Geburtsjahrgang erstellen.

Aufbauend auf dem Traditionellen Modell  $q_{x,t} = q_{x,B} \cdot e^{-F(x)(t-B)}$ , mit Jahr  $t$  und Basisjahr  $B$ , ergeben sich die Sterbewahrscheinlichkeiten als System von Generationensterbetafeln mittels  ${}^Gq_x = q_{x,B} \cdot e^{-F(x)(G+x-B)}$  abhängig vom Geburtsjahr  $G$  und Alter  $x$ .<sup>252</sup> Die Werte werden mittels eines zeitlich exponentiellen Vorgangs ermittelt. Ebenso besteht die Möglichkeit schrittweise exponentiell vorzugehen,  ${}^Gq_x = q_{x,B} \cdot (1 - F(x))^{(G+x-B)}$ .

Für die RT 2005 G ergeben sich die Generationensterbewahrscheinlichkeiten durch den geschlechts- und altersabhängigen langfristigen-  $f_l(x)$  und kurzfristigen  $f_k(x) = f_l(x) + 0.0025 \text{ Trend}$ .<sup>253</sup> Die vom Alter  $x$  und Geburtsjahr  $G$  abhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten  ${}^Gq_x$  ergeben sich durch die Sterbewahrscheinlichkeiten der Basistafel 2005  ${}^{B=2005}q_x$  mittels folgenden Modells

<sup>252</sup> DAV[5], S. 41.

<sup>253</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 11 f.. Zugrundelegt wurden westdeutsche Bevölkerungsstatistiken von 1981-1999. Ferner wurde für die nächsten 10 Jahre (2005-2015) ein stärkerer Trend angenommen (kurzfristige Trend).

$$\rightarrow {}^G q_x = {}^{2005} q_x \cdot \begin{cases} (1 - f_k(x))^{\min(G+x-2005, 10)} \cdot (1 - f_l(x))^{\max(0, G+x-2015)} & \text{für } x+G \geq 2005 \\ (1 - f_k(x))^{\max(G+x-2005, -10)} \cdot (1 - f_l(x))^{\min(0, G+x-1995)} & \text{für } x+G < 2005 \end{cases} \quad 254$$

Bei diesem Modell werden die Werte mittels des zeitlich schrittweisen-exponentiellen Vorgangs ermittelt. Die Ermittlung der Trendfaktoren mittels eines schrittweisen-exponentiellen Ansatzes kann bspw. dadurch modelliert werden, dass die gegebenen Werte  $(q_{x,t_0}, q_{x,t_1}, \dots, q_{x,t_{n-1}}, q_{x,t_n})$  für jedes Alter gemäß des RT 2005 G Modells/Ansatzes bestimmt bzw. gefittet/angepasst werden. Es ergibt sich folgender Ansatz zur Bestimmung der Trendfaktoren (für den schrittweise-exponentiellen Ansatz)

$$\rightarrow \sum_{t \in I} (q_{x,t} - (q_{x,t_n} \cdot (1 - f(x))^{(t-t_n)}))^2 \rightarrow \text{Min!} \text{ Mit } I = [t_0, \dots, t_n] \text{ den beobachteten Werten. Die Werte } [t_{n+1}, \dots, t_m] \text{ werden dann gemäß der Modellfunktion extrapoliert.}$$

Aufbauend auf dem Beispiel der Abbildung 15 ergeben sich folgende Verläufe.

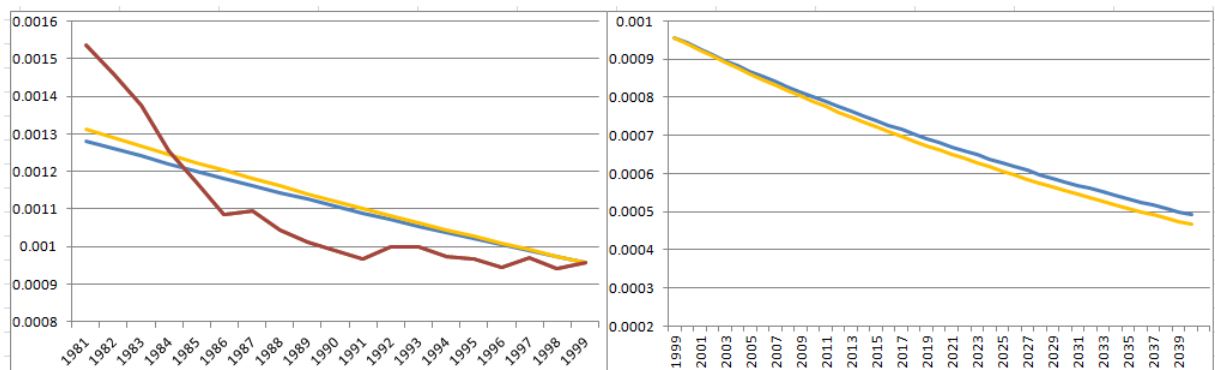


Abbildung 24: Beispiel: Kontinuierlich- und schrittweise-exponentielles Modell.

Aufbauend auf dem Beispiel der Abb.15. Links: (rote Kurve) Beobachtete Sterbewahrscheinlichkeiten, (hellblaue Kurve) die gefitteten Sterbewahrscheinlichkeiten gemäß dem Traditionellen Modell (kontinuierlich-exponentielles Modell mit  $F(x)=0.016208$ ) und die (orange Kurve) die gefitteten Sterbewahrscheinlichkeiten gemäß dem schrittweise-exponentiellen-Modell mit  $F(x)=0.017399$ . Rechts: Die jeweiligen Extrapolationen bis 2040.

Quelle: Eigene Darstellung.

Für das Beispiel der Abbildung 24 ergibt sich, dass der schrittweise exponentielle Ansatz einen stärkeren Trend berücksichtigt. Das jeweilige ausgewählte Modell stellt nur ein Werkzeug des Aktuars da, um adäquate Sterbewahrscheinlichkeiten, welche den Vorstellungen des Aktuars entsprechen, zu ermitteln.<sup>255</sup>

<sup>254</sup> Vgl. Heubeck, K. (2005), S. 12 f.. Das Modell bzw. der Ansatz findet Anwendung ab dem Alter 75 für die Sterbewahrscheinlichkeiten des Aktiven-, Witwen- und Rentnerbestands, sowie für den Invalidenbestand ab dem Alter 65.

<sup>255</sup> Somit ist es nicht ausgeschlossen, dass das Traditionelle Modelle zur Herleitung der Trendfaktoren dient und die Umsetzung zur Ermittlung der Generationensterbewahrscheinlichkeiten mittels des schrittweise

Als weitere Methode findet die Altersverschiebung nach Rueff Anwendung.<sup>256</sup> Die zweidimensionale Generationensterbetafel (Alter $\times$ Geburtsjahr) wird mittels eindimensionaler Approximation vereinfacht. Durch geeignete Altersverschiebung lassen sich die Generationensterbetafeln nahezu ineinander überführen.<sup>257</sup> Ausgehend von einer Basistafel, mit Generation  $\tau$ , lassen sich die Generationensterbetafeln näherungsweise bestimmen. Die Basistafel findet dann für alle Personen (auch für die die nicht in  $\tau$  geboren sind) bei der Kalkulation Anwendung, indem ein technisches Alter eingeführt wird, welches sich um einen Term  $\Delta(\tau)$  vom tatsächlichen Alter unterscheidet (vor  $\tau$  geboren ist  $\Delta(\tau) > 0$ , nach  $\tau$  geboren ist  $\Delta(\tau) < 0$ ). Dieses Näherungsverfahren fand bei der DAV 2004 R Anwendung. Bei der Anwendung der Altersverschiebung ist auf eine ausreichende gute Qualität der Approximation zu achten und die Approximation ist auf größere Ungenauigkeiten zu prüfen.<sup>258</sup>

## 9 Fazit/Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit genannten Methoden haben sich für ihren jeweiligen Zweck in der Praxis bewährt. Eine interaktive Lösungsfindung zwischen mathematischen Modellen und Aktuarsentscheidungen kann mit dem vorangegangenen Methoden erzielt werden. Das Erstellen einer Ausscheidetafel ist stets abhängig vom Anwendungszweck bzw. vom betrachteten Risiko. Ebenso können die in dieser Arbeit genannten Methoden eingesetzt werden, um eine bestehende Tafel zu modifizieren. Die Schwierigkeit liegt darin, einerseits vergangenheitsbezogene Daten sachadäquat zu analysieren und zu verwenden, andererseits in der Abschätzung und Ableitung künftiger Entwicklungen der betrachteten Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

---

exponentiellen Modell erfolgt (oder visa versa). Denn, betrachtet man kleine Werte und einen beschränkten Zeitraum für das Modell (bspw. 20 Jahre Zukunft- und Vergangenheitsbetrachtung), dann ist die Differenz der Modelle gering.

<sup>256</sup> Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 116. Hauptgrund der Altersverschiebung ist die Vereinfachung (Darstellung) der alters- und geburtsjahrabhängigen Sterbewahrscheinlichkeiten. Eine zweidimensionale Generationensterbetafel kann u.U. zu Schwierigkeiten führen, falls bspw. das bestehende EDV-System darauf nicht ausgelegt ist. Der zweidimensionale Fall kann auch erhöhte Rechenzeit zu Folge haben. Vgl. [http://www.math.ethz.ch/finance/Skripte/LV12\\_v060\\_151003.pdf](http://www.math.ethz.ch/finance/Skripte/LV12_v060_151003.pdf), S. 70.

<sup>257</sup> Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 116.

<sup>258</sup> Vgl. [http://www.avoe.at/pdf/KainhoferPredotaSchmock\\_AVOe2005R\\_Versicherungswirtschaft.pdf](http://www.avoe.at/pdf/KainhoferPredotaSchmock_AVOe2005R_Versicherungswirtschaft.pdf), S. 6. In der Ausarbeitung wird von der Verwendung der Altersverschiebung abgeraten.

Die Grundlage bildet stets die Datenbasis bzw. der Herleitungsbestand. Auf die Besonderheiten des Herleitungsbestands und den abzuleitenden Ausscheidewahrscheinlichkeiten wurde im Kapitel 2.2. und 2.5. eingegangen. Dabei muss ein Aktuar die Qualität der Datenbasis und die Anwendbarkeit auf dem Anwendungsbestand sorgfältig prüfen. Neben einer engen Orientierung an dem Anwendungsbestand sind auch die Größe und der Beobachtungszeitraum des Ausgangsmaterials relevant. Für die Größe gilt: Umso größer das Ausgangsmaterial, desto geringer sind die erwarteten Zufallsschwankungen. Jedoch, ist das Ausgangsmaterial (der jeweiligen Altersklasse) zu klein, so lassen sich keine zuverlässigen Werte ermitteln. Das Prinzip wurde im Anhang A, anhand eines Beispiels, erläutert. Für die Wahl der Länge des Beobachtungszeitraums ist vom Aktuar eine Kompromissentscheidung zu treffen. Einerseits muss der Beobachtungszeitraum lang genug gewählt werden, so dass repräsentative Durchschnittswerte entstehen. Andererseits darf der Beobachtungszeitraum nicht zu lang gewählt werden, da ansonsten zeitliche Änderungen der Ausscheidewahrscheinlichkeiten nicht mehr erkennbar sind.<sup>259</sup>

Ist das Ausgangsmaterial ausgewählt, so gilt es im nächsten Schritt die relativen Häufigkeiten zu ermitteln. Für die Kohortenanalyse ist die Geburtsjahrmethode anzuwenden, wohingegen für die Periodenanalyse die Verweildauer methode zu erwähnen ist, wobei die Letztgenannte theoretisch exakt ist. Im 3. Kapitel wurden auf die genannten Methoden zur Häufigkeitsermittlung eingegangen. Weiterhin kann ein Aktuar die Auswirkungen der verschiedenen Methoden zur Häufigkeitsermittlung analysieren, um rohe Werte zu ermitteln, die den Anforderungen der jeweiligen individuellen Aufgabenstellung gerecht werden.

Im 4. Kapitel wurden Methoden zur Bereinigung von Zufallsschwankungen vorgestellt. In der Praxis haben sich insbesondere das Whittaker-Henderson-Verfahren und die Ausgleichenden Splines bewährt. Das erstgenannte Verfahren hat sich aufgrund seiner flexiblen Modifizierung und aufgrund der einfachen Umsetzung für die Tafeln der DAV durchgesetzt.<sup>260</sup> Die Lösungsalgorithmen beider Verfahren sind im Anhang C modelliert. Ebenso sind dort anhand von Beispielen die Auswirkungen darstellt, welche sich durch die

---

<sup>259</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 44.

<sup>260</sup> Diese Annahme beruht u.a. darauf, da das Whittaker-Henderson-Verfahren bei den DAV-Tafeln, welche in dieser Arbeit erwähnt worden sind, angewandt worden ist.

festzusetzenden Ausgleichsinputparameter ergeben. Um zufallsschwankungsbereinigte Werte zu erhalten, die den subjektiven Anforderungen des Aktuars genügen, kann ein Aktuar interaktiv vorgehen, indem er die zusetzenden Ausgleichsparameter sukzessiv modifiziert und sich so den „idealen“ Ergebnisse annähert. In jedem Schritt können Sensitivitätsanalysen (Vergleich der Barwerte mit den rohen und ausgeglichenen Werten) eine Entscheidungsstütze sein.

Im 5. Kapitel wurden verschiedene Extrapolationsmodelle vorgestellt, die je nach Anforderung Anwendung finden können. Die Wahl des Extrapolationsmodells mit oder ohne Nebenbedingungen, für die höheren Altersklassen oder für die Projektivität, ist abhängig von der individuellen Aufgabenstellung und von den subjektiven Präferenzen des Aktuars. Ein Aktuar muss dabei eine Vorstellung über den zu extrapolierten Verlauf haben. Neben einer Vielzahl von Modellen kann auch eine Modifizierung des Stützbereichs hilfreich sein, um geeignete Werte zu ermitteln. Für eine individuelle Aufgabenstellung können Untersuchungen mit verschiedenen Modellen darüber Aufschluss geben, welches Modell am geeignetsten erscheint (wie bspw. bei der DAV 2004 R). Für die Extrapolationen in den höheren Altern, für das Ausscheiderisiko Sterblichkeit, hat sich der modifizierte Gompertz-Ansatz als tauglich erwiesen. Sterblichkeitsprojektionen wurden am besten mit dem Traditionellen Modell (Loglinearer Ansatz) abgebildet.<sup>261</sup> Für jede Altersklasse ist vom Aktuar zu überprüfen, ob eine Sterblichkeitsreduktion angebracht ist. Eine Abschwächung des Sterblichkeitstrends kann durch eine kurzfristige- und langfristige Trendbetrachtung erfolgen.<sup>262</sup> Die Verifikation der prognostischen Werte kann dann mittels Modellvergleiche und Plausibilitätsanalysen erfolgen.

Im Kapitel 6 wurden Sicherheitsbetrachtungen und ihre Notwendigkeit erläutert. Insbesondere wurden Margen für das Schwankungsrisiko modelliert. Die Aufgabe des verantwortlichen Aktuars ist es, die Höhe der Sicherheitszu- bzw. abschläge zu aktuariell gesicherten Erkenntnissen festzusetzen.

Die Ausscheideverhältnisse sind zeitlich nicht konstant und unterliegen säkularen Änderungen. Dies hat zur Folge, dass die Ausscheideverhältnisse im Laufe der Zeit immer

---

<sup>261</sup> Die Untersuchungen der DAV 2004 R zeigten, dass mit dem Lee Carter Modell sehr ähnliche Sterblichkeitstrends erzielt wurden.

<sup>262</sup> Ebenfalls ist die Modellierung mittels des Verfahrens der linearen Trenddämpfung möglich. Vgl. DAV[6], S. 220 f..

wieder neu bestimmt werden müssen, bzw. die alten Rechnungsgrundlagen auf Aktualität überprüft werden müssen. Die Überprüfung der Rechnungsgrundlagen erfolgt mittels verschiedener statistischer Methoden, welche anhand von Beispielen auf Stärken und Schwächen analysiert wurden. Die Ergebnisse zeigen, dass ein Aktuar sich nicht nur auf das Testergebnis verlassen kann, sondern, dass auch die Grafische Analyse durchzuführen ist, um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten.

Das letzte Kapitel beschäftigte sich mit Generationentafeln, welche für Rentenversicherungen unabdinglich sind. Für die Trendfortschreibung werden dann Projektivitätsmodelle verwendet. Ebenso wurde kurz dargestellt, wie die Ermittlung der Generationenwerte erfolgen kann.

Offen bleiben Analysen bzgl. von Selektionswirkungen (bspw. Unterschiede zwischen Versicherten- und Bevölkerungsausscheidewahrscheinlichkeiten). Ein ebenso offenes Thema ist das Erstellen von Ausscheidetafel für Unisex-Tarife. In diesem Zusammenhang sind statistische Methoden interessant, um Merkmale zu finden mit statistisch signifikantem Zusammenhang zwischen Einflussgröße und Zielgröße. Ferner wurden Untersuchungen zu Stresstests und Sensitivitätsanalysen bzgl. der Auswirkungen der Wahrscheinlichkeiten auf die Barwerte nicht betrachtet. Auch Trendmargen wurden nicht modelliert.

Die Frage nach der Effektivität und wie wirkungsvoll mathematische Methoden und Aktuarsentscheidungen bei der Erstellung von Ausscheidetafeln abgebildet werden können, ist zu beantworten mit: Der Entscheidungsprozess zur Erstellung von Ausscheidetafeln kann unter Nutzung mathematischer Methoden und Aktuarsentscheidungen modelliert und gelöst werden. Mathematische Methoden und Aktuarsentscheidung können interaktiv sukzessiv eingesetzt werden, um die Ausscheideverhältnisse so genau wie möglich abzubilden. Dabei sind beide genannten Mittel unerlässlich, um fehlerhafte Modellierungen realer Ausscheideverhältnisse zu verhindern.

## Literaturverzeichnis

**Benker, H. (2007):** Wirtschaftsmathematik – Problemlösungen mit Excel, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1. Auflage, 2007.

**Bomsdorf, E. (2002):** Neue Generationensterbetafeln für die Geburtsjahrgänge 1933-2003 – Modellrechnungen für die Bundesrepublik Deutschland, Reihe Versicherungswirtschaft Band 35, Josef Eul Verlag GmbH, Köln, 2002.

**Behnen, K. / Neuhaus, G. (2003):** Grundkurs Stochastik, 4. Auflage, PD-Verlag Heidenau, 2003.

**Beichelt, F.E. / Montgomery, D.C. (2003):** Teubner-Taschenbuch der Stochastik, 1. Auflage, B.G. Teubner-Verlag Wiesbaden, 2003.

**Dienst, Hans-Rudolf (1995):** Zur aktuariellen Problematik der Invaliditätsversicherung, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 27, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe 1995.

**Eckstein, P. (2006):** Repetitorium Statistik, 6. Auflage, Betriebswirtschaftlicher Verlag Dr.Th.Gabler | GWV Facherlage GmbH, Wiesbaden 2006.

**Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991):** Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Turbo-Pascal Programmen, 3. Auflage, Bibliografische Institut & F.A. Brockhaus AG -Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich 1991.

**Heubeck, K. (2005):** Richttafeln 2005 – Textband und Programm HEURIKA, Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln 2005. Siehe auch: <https://aktuar.de/custom/download/dav/veroeffentlichungen/2005-Heubeck-Herrmann-DSouza-Richttafeln-2005.pdf>

**Kakies P. / Behrens, H.-G. / Loebus, H. / Oehlers-Vogel, B. / Zschoyan, B. (1985):** Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 15, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe 1985.

**Milbrodt, H. (2005):** Aktuarielle Methoden der deutschen Privaten Krankenversicherung, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 34, Verlag Versicherungswirtschaft GmbH, Karlsruhe 2005.

**Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999):** Mathematische Methoden der Personenversicherung, Verlag: Walter de Gruyter GmbH & Co.KG, Berlin / New York 1999.

**Olivieri, A. / Pitacco, E. (2010):** Introduction to Insurance Mathematics, Technical and Financial Features of Risk Transfer, Springer Verlag, Heidelberg, 2010.

**Padel, S. (2010):** Einführung in die Demografie, 1. Auflage, Förlaget Perspektiv och tid KB, Helgum und Berlin, 2010.

**Sachs, L. / Hedderich, J. (2006):** Angewandte Statistik - Formelsammlung mit R, Zwölfte Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006.

**Saxer, W. (1955):** Versicherungsmathematik, Erster Teil, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

**Wolfsdorf, K. (1986):** Versicherungsmathematik, Teil 1 Personenversicherung, B.G. Teubner-Studienbücher: Mathematik, Stuttgart, 1986.

### Blätter der Deutschen Aktuar Vereinigung (DAV) || Deutsche Aktuar Akademie GmbH:

➔ <https://aktuar.de/dav/veroeffentlichungen/sonstiges/> (Sonstige Veröffentlichungen)

- **DAV[1]:** Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter, Endgültige Version 21.11.2008, Abrufzeit: 26.04.2012.
- **DAV[2]:** Ausarbeitung zum Thema: Berücksichtigung des Geschlechts als Faktor der Risikobewertung bei der Kalkulation von Lebensversicherungstarifen, Abrufzeit: 26.04.2012.
- **DAV[3]:** Herleitung der DAV-Sterbetafel 2006 HUR - DAV-Unterarbeitsgruppe Haftpflicht-Unfallrenten.
- **DAV[4]:** Herleitung der Rechnungsgrundlagen DAV 2008 P für die Pflegerenten-(zusatz)versicherung. Abrufzeit: 16.06.2012.
- **DAV[5]:** Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter, Horst Loebus, DAV 1994 T, Abrufzeit: 16.06.2012.
- **DAV[6]:** Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen, DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit Abrufzeit: 16.06.2012.

- **DAV[7]:** Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen, Bodo Schmithals und Esther U. Schütz, Köln, Abrufzeit: 17.08.2012.
- [https://aktuar.de/dav/pressediens/virtuelle\\_pressemappen/](https://aktuar.de/dav/pressediens/virtuelle_pressemappen/) (Virtuelle Pressemappen)
- **DAV[8]:** Folien zum Werkstattgespräch "Die Umsetzung des EuGH-Urteils zur Unisex-Tarifierung" am 26. April 2012, Abrufzeit: 15.06.2012.
- <http://aktuar.de/dav/pressediens/pressemitteilungen/> (Pressemitteilung)
- **DAV[9]:** Unisextarife in der LV, der RV und der bAV – Unterschiedliche Auswirkungen.
- **DAV[10]:** Unisex-Tarife: Konsequenzen des EUGH-Urteils aus aktuarieller Sicht. Abrufzeit: 15.06.2012.
- <https://aktuar.de/dav/pressediens/positionen/> (Die DAV im Dialog)
- **DAV[11]:** Positionspapier zu Kollektiv versus Individuum, Juni 2005, Abrufzeit: 15.06.2012.
- [http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/SRSM\\_2012\\_%285%29.pdf](http://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/SRSM_2012_%285%29.pdf)  
(Verwendet wurde die Ausgabe )
- **DAA[12]:** 4. Biometrische Rechnungsgrundlagen, Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden, Herrmann, R.

### Statistisches Bundesamt:

- <https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Thematisch/Bevoelkerung/ThemaBevoelkerung.html>
- **Statis[1]:** Bevölkerung Deutschlands bis 2060 - 12. koordinierte Bevölkerungsvorausberechnung, Abrufzeit: 26.04.2012.
- **Statis[2]:** Berechnung von Periodensterbetafeln - Methodische Erläuterungen zur Berechnung von Periodensterbetafeln für Deutschland von 1871/81 bis 2008/10, Abrufzeit: 26.04.2012.
- **Statis[3]:** Amtliche Sterbetafeln und Entwicklung der Sterblichkeit.  
[https://www.destatis.de/DE/Publikationen/WirtschaftStatistik/Bevoelkerung/AmtlicheSterbetafeln\\_3\\_2011.pdf?\\_\\_blob=publicationFile](https://www.destatis.de/DE/Publikationen/WirtschaftStatistik/Bevoelkerung/AmtlicheSterbetafeln_3_2011.pdf?__blob=publicationFile), Abrufzeit: 06.05.2012.
- **Statis[4]:** Generationstafeln für Deutschland – Modellrechnungen für die Geburtsjahrgänge 1871-2004, Abrufzeit: 06.05.2012.
- **Statis[6]:** Periodensterbetafeln für Deutschland – 1871/81 – 2007/09, Abrufzeit: 09.05.2012.

### Diverse Internetquellen:

- **Int[1]:** Die Lebenserwartung in Deutschland – Ein Blick in die Zukunft, Eckart Bomsdorf, Stand: 08.11.2010, Publikationsdatenbank DocBase der CES IFO Group.  
<http://www.cesifo-group.de/portal/pls/portal/docs/1/1199923.PDF>,  
Abrufzeit: 09.05.2012.
- **Int[2]:** Financial Times – Versicherungen müssen Uni-Sex-Tarife anbieten,  
<http://www.ftd.de/unternehmen/versicherungen/eu-gh-urteil-versicherungen-muessen-unisex-tarife-anbieten/60019005.html>  
EuGH entscheidet sich für Unisex Tarife,  
<http://www.wiwo.de/finanzen/urteil-eugh-entscheidet-sich-fuer-unisex-tarife/5248092.html>  
Mercer – Unisex-Tarife – Acht Thesen zur bAV, <http://www.mercer.de/articles/Unisex-Tarife>.  
Abrufzeit: 14.06.2012
- **Int[3]:** ASA | SAV | SAA – Mitgliedschaft → FachRichtlinien → Richtlinien Schweiz → Weitere Richtlinien → Biometrische Rechnungsgrundlagen (Aug 2001) - Konkretisierung der Anforderungen an den Qualitätsstandard für die Einzelkapitalversicherung.  
[http://www.actuaries.ch/mitgliedschaft/fachrichtlinien/richtlinien\\_schweiz.htm?richtlinie\\_id=12](http://www.actuaries.ch/mitgliedschaft/fachrichtlinien/richtlinien_schweiz.htm?richtlinie_id=12),  
Abrufzeit: 18.06.2012.
- **Int[4]:** SPSS Regression Models 16.0.  
[http://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/ziv/service/software/spss/handbuecher/deutsch/spss\\_regression\\_models\\_16.0.pdf](http://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/ziv/service/software/spss/handbuecher/deutsch/spss_regression_models_16.0.pdf), Abrufzeit: 22.07.2012.
- **Int[5]:** Best Estimate für Solvency II – Versicherungstechnische Rückstellungen  
[http://www.munichre.com/publications/302-05811\\_de.pdf](http://www.munichre.com/publications/302-05811_de.pdf), Abrufzeit: 24.07.2012.
- **Int[6]:** Smoothing by Spline Functions, Christian H. Reinsch, 03.02.1967.  
[http://www.cise.ufl.edu/class/cap5416fa10/resources/Reinsch\\_1967.pdf](http://www.cise.ufl.edu/class/cap5416fa10/resources/Reinsch_1967.pdf), Abrufzeit: 14.08.2012.



## Anhang A – Darstellung: Das Empirische Gesetz der Großen Zahlen

Die relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses  $A$  sei  $H_n(A) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1_A(\omega_i)$ , bei  $n$ -facher Durchführung eines Experiments mit den Realisationen  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .  $H_n(A)$  stabilisiert sich mit wachsendem  $n$  und konvergiert gegen den Grenzwert bzw. gegen die Wahrscheinlichkeit  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(A) = P(A)$  ( $\rightarrow$  Empirisches Gesetz der Großen Zahlen<sup>263</sup>).

Behnen, K. / et.al. nennen es das „**Sammeln von Erfahrungen**“ und beschreiben es damit, dass mit wachsender Beobachtungszahl  $n$  und zufälligen Versuchsergebnissen sich eine Gesetzmäßigkeit zeigt.<sup>264</sup> Milbrodt, H. / Helbig, M. geben ein Beispiel an, in dem sie die Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x$  von  $m$   $x$ -Jährigen mittels  $m$  unabhängigen Zufallsexperimenten schätzen. Jedes Zufallsexperiment lässt sich visuell durch das folgende Zustandsmodell darstellen.

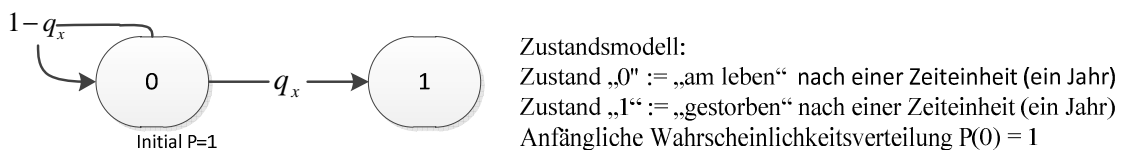


Abbildung 25: Beispiel: Zustandsmodell.  
 Quelle: Eigene Darstellung.

Die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres zu sterben (und somit den Zustand zu wechseln) sei mittels bernoullivertelter Zufallsvariablen<sup>265</sup> (ZV)  $X_i$ , mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $P(X_i = 1) = q_x$  (für eine jede Person  $i \in \{1, \dots, m\}$ ), beschrieben. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist durch die ZV bereits vollständig beschrieben. Dennoch ist es das Ziel, dieses Maß mittels des Schätzers  $\tilde{q}_x = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m X_i$  zu schätzen. Dafür wird für jede Person  $i$  im Bestand ein Bernoulli-Experiment durchgeführt, folglich  $m$  Zufallsexperimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $P(X_i = 1) = q_x$ .

<sup>263</sup> Das Gesetz der Großen untersucht das Konvergenzverhalten des arithmetischen Mittels einer Folge von ZV'n, um deterministische Aussagen („Auszuscheiden“ wird bestimmt durch die Ausscheidewahrscheinlichkeit) machen zu können. Weiterhin unterteilt man die Untersuchungen nach Schwache- und Starke Gesetze der Großen Zahlen. Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 94.

<sup>264</sup> Vgl. Behnen, K. / Neuhaus, G. (2003), S. 5.

<sup>265</sup> Die ZV  $X$  lässt sich mittels der Indikatorfunktion  $I_A$  beschreiben mit  $P(I_A = 1) = p \wedge P(I_A = 0) = 1 - p$ , wobei  $E(I_A) = p \wedge \text{Var}(I_A) = E(I_A^2) - E(I_A)^2 = p - p^2$ .

```

void function bernoulli_experiment(m, q_x, values_{(m) \times (1)})
input: Anzahl m der Personen, für welche jeweils ein Bernoulli-Experiment durch-
geführt werden soll, Erfolgswahrscheinlichkeit zu sterben, Vektor der Schätzer
(anfänglich Null)
definition: Schätzer (anfänglich Null)
for i=1 to m
    Schätzer += if(ErzeugeZufallszahl_zwischen_0_1() ≤ q_x) then 1 else 0
values_{i-1} = Schätzer/i

```

Abbildung 26: Algorithmus zur Erzeugung der Schätzkurve  $\tilde{q}_x$ .<sup>266</sup>

Quelle: Eigene Darstellung.

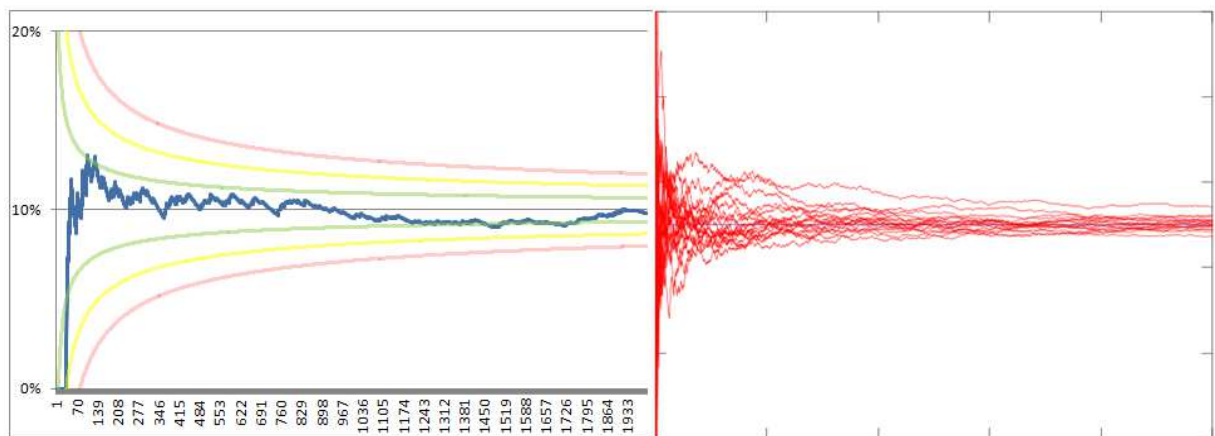


Abbildung 27: Beispiel: Bernoulli-Experiment.

Links: Mit  $m=2000$  (Blaue-)Kurve sind die Schätzer  $\tilde{q}_x$  für  $\{1, \dots, m\}$ . Mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit  $q_x=0.1$ . Darstellung in Excel. Die ampelfarbenden Bänder ergeben sich durch  $E(q_x) \pm j \cdot \sqrt{\text{Var}(q_x)}$ ,  $j \in \{1=\text{grün}, 2=\text{gelb}, 3=\text{rot}\}$ .<sup>267</sup> Rechts: Überlagerung von Zwanzig unabhängigen Versuchen mit  $m=1000$  und  $q_x=0.5$ . Darstellung in Octave.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Milbrodt, H. / Helbig, M. (1999), S. 106.

Man kann das Experiment auch durch ein Würfelexperiment beschreiben (ein zehnjäger Würfel, wobei ein Würfelauge „Tod“ und neun Würfelaugen „Leben“ zeigen). Für jede Person im Bestand wird einmal gewürfelt. Man erhält den Schätzer indem man die Anzahl der Toten in Relation setzt zu der bis dahin durchgeführten Experimente. Es ist ersichtlich, dass mit wachsender Bestandsgröße (wachsendem  $m$ ), der Schätzer  $\tilde{q}_x$  gegen seinen wahren Wert  $q_x$  konvergiert und die Varianz abnimmt. Genau das ist der Grund warum das Datenmaterial ausreichend groß gewählt werden muss.

<sup>266</sup> Eine Beschreibung des Pseudocodes befindet sich im Anhang D.

<sup>267</sup> Der Erwartungswert des Schätzers ergibt sich durch  $E(\tilde{q}_x) = E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E(X_i) = \frac{m \cdot q_x}{m}$  und die Varianz durch  $\text{Var}(\tilde{q}_x) = \text{Var}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i\right) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \text{Var}(X_i) = \frac{m \cdot (q_x \cdot (1 - q_x))}{m^2}$ . Die Bänder wurden mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit erzeugt.

## Anhang B – Partielle Ausscheidewahrscheinlichkeiten<sup>268</sup>

Der Zerfall einer Hauptgesamtheit  $l_{x+t}^{\{A,B\}}$  soll, mit fortschreitender Zeit (in Jahren  $t = 0, 1, \dots, \omega - x - 1$ ) und mit zwei Attributen ( $A \wedge B$ ), beschrieben werden.<sup>269</sup> Die folgende Abbildung soll den Vorgang verdeutlichen.

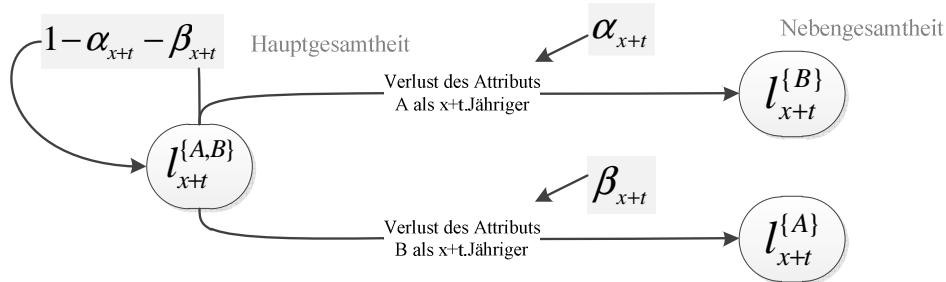


Abbildung 28: Modellbetrachtung: Abhängige Wahrscheinlichkeiten.

Modell 1. Inhomogene Zerlegung einer Hauptgesamtheit mit zwei Attributen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten beeinflussen sich gegenseitig und sind somit abhängig. Die Verbleibenswahrscheinlichkeit der Hauptgesamtheit widerspricht der Terminologie der Wahrscheinlichkeitstheorie, deshalb bezeichnet Saxer, W.  $\alpha_{x+t}$  und  $\beta_{x+t}$  als einfache Ausscheidewahrscheinlichkeiten bzgl. deren Attribute.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Saxer, W. (1955), S. 23 f.

In der Abbildung sind ebenfalls die Ausscheidewahrscheinlichkeiten  $\alpha_{x+t}$  und  $\beta_{x+t}$  angegeben aus der Hauptgesamtheit als  $x + t$ .Jähriger auszuscheiden. Demzufolge liegen zwei Ausscheideursachen vor und die Ausscheidewahrscheinlichkeit der Hauptgesamtheit zerfällt in zwei Komponenten  $\alpha_{x+t} + \beta_{x+t}$ , welche unbekannt sind, denn die Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden in aller Regel nur auf einen Ausscheidgrund untersucht. Man geht davon aus, dass die Hauptgesamtheit eine zusammengesetzte Ordnung bzgl. der Ordnungen der einzelnen Attribute ist. Betrachtet man nun den Abbau der Hauptgesamtheit separat bzgl. eines jeden einzelnen Attributs, so stellen diese einfache Ausscheideordnungen dar. Diese Ausscheidewahrscheinlichkeiten sind dann bekannt und werden als die **partiellen bzw. unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten**<sup>270</sup> bezeichnet. Ziel ist es,  $\alpha_{x+t}$  und  $\beta_{x+t}$  aus den partiellen Wahrscheinlichkeiten  $\ast \alpha_{x+t}$  und  $\ast \beta_{x+t}$  abzuleiten. Die durchgestrichenen Attribute, in der folgenden Abbildung, sollen

<sup>268</sup> Beschreibung bzw. Modellierung analog zu siehe Saxer, W. (1955), S. 23 ff.

<sup>269</sup> Der rechte obere Index gibt die Attribute wieder. Eine leere Menge deutet darauf hin, dass  $l_{x+t}$  die beobachtete Attribute verloren hat.

<sup>270</sup> Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 363 oder Heubeck, K. (2005), S. 10.

darauf hindeuten, dass die Hauptgesamtheit lediglich jeweils nach einem Attribut beobachtet worden ist.

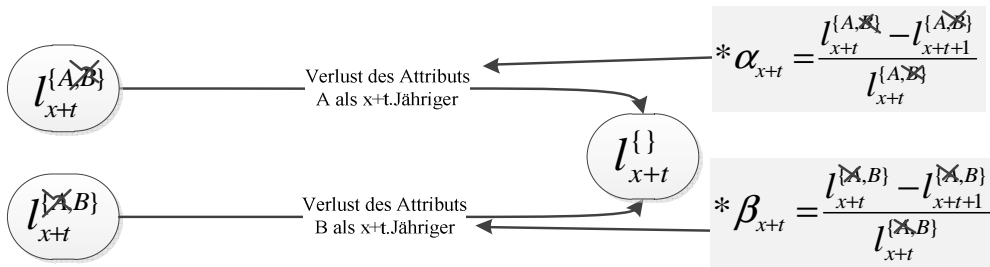


Abbildung 29: Modellbetrachtung: Unabhängige Wahrscheinlichkeiten.

Modell 2. Separate Betrachtung der Hauptgesamtheit für jedes gegebene Attribut.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Saxer, W. (1955), S. 23 f.

Demzufolge erhält man die Überlebensfunktion mittels den partiellen Wahrscheinlichkeiten durch  $l_{x+t+1}^{A,B} = l_{x+t}^{A,B} \cdot (1 - * \alpha_{x+t}) \cdot (1 - * \beta_{x+t})$ . Die Überlebensfunktion enthält einen Korrekturterm  $* \alpha_{x+t} \cdot * \beta_{x+t}$ , da ansonsten die Personen die beide Attribute innerhalb eines Jahres verlieren doppelt gerechnet worden wären. Saxer, W. beschreibt, dass die partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten die innere Struktur besser widerspiegeln, da bspw.  $\alpha_{x+t}$  und  $\beta_{x+t}$  recht zufälliger Natur sein können. Ebenso können die Nebengesamtheiten nicht immer weiter beobachtet werden. Im Folgenden sollen die Zusammenhänge der Ausscheidewahrscheinlichkeiten beschrieben werden. Der Zusammenhang lässt sich visuell wie folgt darstellen

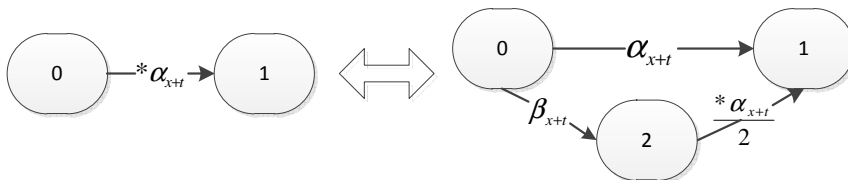


Abbildung 30: Visueller Zusammenhang zwischen den ab- und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten.

Für unterjährige gleichverteilte Wahrscheinlichkeiten.

Quelle: Eigene Darstellung.

Unter der Annahme der Gleichverteilung des Verlustes des Attributs für unterjährige Zeitpunkte ergibt sich, dass die Personen die das Attribut verlieren (linkes Modell 0-auf-1) und denen die zuerst das andere- und dann das beobachtete Attribut verlieren (rechte Modell 0-auf-1-plus-0-auf-2-auf-1) der folgende Zusammenhang.

$$\begin{array}{c}
 \text{partielle} \\
 \text{Ausscheide-} \\
 \text{wahrscheinlichkeit} \\
 \underbrace{* \alpha_{x+t}}_{1.} = \underbrace{\alpha_{x+t}}_{2.} + \underbrace{\beta_{x+t} \cdot \frac{* \alpha_{x+t}}{2}}_{\substack{\text{Personen die zuerst das} \\ \text{Attribut B und dann} \\ \text{(im gleichen Jahr)} \\ \text{Attribut A verlieren}}} \underbrace{=}_{\substack{\text{auflösen nach} \\ * \alpha_{x+t}}} \underbrace{\frac{\alpha_{x+t}}{1 - \frac{\beta_{x+t}}{2}}}_{3.} \underbrace{\approx}_{\substack{\text{Näherungswerte} \\ \text{unter Annahme} \\ \text{für kleine } \alpha \wedge \beta}} \underbrace{\alpha_{x+t} \cdot \left(1 + \frac{\beta_{x+t}}{2}\right)}_{4.}
 \end{array}$$

Der zweite Ausdruck ist linear in  $\alpha_{x+t}$  und  $\beta_{x+t}$ , und kann direkt aufgelöst werden.<sup>271</sup>

$$\alpha_{x+t} = \frac{* \alpha_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{* \beta_{x+t}}{2}\right)}{1 - \frac{* \alpha_{x+t} \cdot * \beta_{x+t}}{4}} \approx * \alpha_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{* \beta_{x+t}}{2}\right) \wedge \beta_{x+t} = \frac{* \beta_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{* \alpha_{x+t}}{2}\right)}{1 - \frac{* \alpha_{x+t} \cdot * \beta_{x+t}}{4}} \approx * \beta_{x+t} \cdot \left(1 - \frac{* \alpha_{x+t}}{2}\right).^{272}$$

Saxer, W. beschreibt ebenso die Darstellung mit drei Attributen und betont, dass eine Verallgemeinerung auf  $m$  Attribute analog erfolgt.<sup>273</sup> Die Abbildung 31 visualisiert den Prozess für  $m$  Attribute. Dabei werden zuerst die partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten gewonnen, aus welchen dann die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten abgeleitet werden.

### Alternativansatz:

Die Näherungsformel gilt nur für „kleine“ Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Unabhängig von der Größe der Ausscheidewahrscheinlichkeit könnte man die Abgänge aufteilen mit ihren relativen Anteil zu der Summe alle Abgänge. Es ergibt sich dann folgende abhängige Ausscheidewahrscheinlichkeit (für 2 Abgänge)

$$\alpha_{x+t} = (1 - (1 - * \alpha_{x+t}) \cdot (1 - * \beta_{x+t})) \cdot \frac{* \alpha_{x+t}}{* \alpha_{x+t} + * \beta_{x+t}} = * \alpha_{x+t} + * \beta_{x+t} - * \alpha_{x+t} \cdot * \beta_{x+t} \cdot \frac{* \alpha_{x+t}}{* \alpha_{x+t} + * \beta_{x+t}}.$$

Analog für mehrere Ausscheidegründe.

<sup>271</sup> Zur Lösung wird jeweils der zweite Ausdruck für die partiellen Wahrscheinlichkeiten  $* \alpha$  und  $* \beta$  nach den abhängigen Wahrscheinlichkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  aufgelöst, folglich erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

<sup>272</sup> Bspw., fasst man die Gleichung  $* \alpha = \alpha \cdot (1 - \beta/2)^{-1}$  gleich als Funktion  $f(\beta)$  auf und berechnet die ersten beiden Glieder der Taylorreihe mit Entwicklungsstelle  $\beta = 0$  und bricht dann ab (da die weiteren Glieder  $\approx 0$  sind, für relative kleine  $\alpha \wedge \beta$ ), so ergibt sich die Approximation durch

$$f(\beta) \approx \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \beta^k = f(0) \cdot \beta^0 + f'(0) \cdot \beta^1 = \alpha \cdot 1 + 1/2 \cdot \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (1 + \beta/2). \text{ Analog verfährt man}$$

mit  $f(\beta) = \alpha = * \alpha - \beta \cdot * \alpha / 2$ ,  $f(\beta) \approx f(0) \cdot \beta^0 + f'(0) \cdot \beta^1 = * \alpha + (- * \alpha / 2) \cdot \beta = * \alpha \cdot (1 - \beta/2)$ . Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 364.

<sup>273</sup> Vgl. Saxer, W. (1955), S. 26 f.

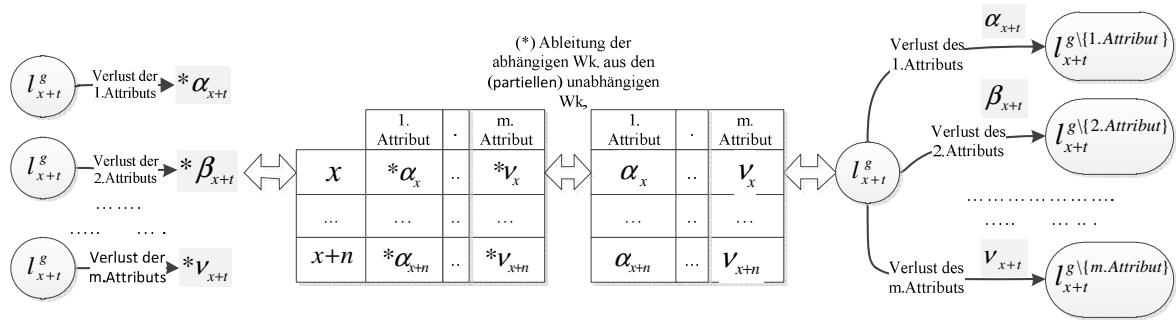


Abbildung 31: Prozess zur Vorgehensweise zur Ableitung der abhängigen- aus den partiellen Wahrscheinlichkeiten.

Der Index g stellt die Grundgesamtheit dar und somit die Menge alle Attribute  $g=\{1., \dots, n.\text{Attribut}\}$ .

Quelle: Eigene Darstellung.

```

void function Ableitung_der_abh_Wk( n, m, unabh(n)×(m), abh(n)×(m) )
input: Altersbereich und Anzahl der Attribute (1.-u. 2. Dimension der Datenmatrizen,
Datenmatrix der partiellen-(bereits definiert) u. abhängigen Wk.(deklariert),
    for i=0 to n-1
        for j=0 to m-1
            definition: tempVar = 1
            for k=0 to m-1
                tempVar -= if( k != j ) then unabh[i][k] / 2
            abh[i][j] = unabh[i][j] · tempVar

```

Abbildung 32: Algorithmus zur Ableitung der abhängigen Wahrscheinlichkeiten (siehe (\*) in Abb.).

Quelle: Eigene Darstellung.

## Anhang C – Lösungsvorschläge für Ausgleichsverfahren

### Der Whittaker-Henderson-Schätzer - Modellierung mit Matrizendarstellung

Kakies, P. / et.al. geben eine Modellierung in Form eines linearen Gleichungssystems (LGS) an, um die realitätsnahen Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu erhalten.<sup>274</sup> Für die

$|Q^{roh}| = n + 1$  Beobachtungen sind folgende Matrizen bzw. Vektoren gegeben/gesucht:

- $Q_{(n+1) \times (1)}^i = \{q_x^i\}_{x \in AB}$  mit  $AB = [x_0, \dots, x_n]$ ,  $|AB| = n + 1$  bzw.  $|AB| = n$ .
- $W_{(n+1) \times (n+1)}$  sei die Diagonalmatrix der Gewichte  $w_{(n+1) \times (1)}$ .
- $K_{(n-m+1) \times (n+1)}$  sei die Matrix der  $m^{\text{ten}}$  Differenzen.

<sup>274</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 92 f. Die Notation und Modellierung sind übernommen worden. Wie im Kapitel 4 werden die ausgeglichenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit „ausg“ bezeichnet. Die endgültigen Wahrscheinlichkeiten der 2. Ordnung unterliegen dann ggf. noch Modifizierungen durch Extrapolationen an den Rändern.

Die Matrix  $K_{(n-m+1) \times (n+1)}$  lässt sich wie folgt beschreiben: Für jede Zeile gilt, dass ab dem Hauptdiagonalelement die  $m+1$  Binomialkoeffizienten mit alternierenden Vorzeichen folgen. Die restlichen Werte werden null gesetzt.

```
void function Erzeugung_von_K( n , m , K(n-m)×(n) )
input: Anzahl der Beobachtungen, Ordnung der Differenzbildung, Matrix der der mten
       Differenzen (anfänglich Null)
for j=0 to n-m-1
    for i=0 to n-1
        if( K[j][i] ist Hauptdiagonalelement) then
            for s=0 to m
                
$$K_{[j][i+s]} = (-1)^s \cdot \binom{m}{s}$$

```

Abbildung 33: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix K.

Quelle: Eigene Darstellung.

```
void function Erzeugung_von_W( n , W(n)×(n) , w(n)×(1) )
input: Anzahl der Beobachtungen, Matrix W (anfängliche Null), Vektor der Gewichte
for j=0 to n-1
    for i=0 to n-1
        if( W[j][i] ist Hauptdiagonalelement) then
            W[j][i] = w[j]
```

Abbildung 34: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix W.

Quelle: Eigene Darstellung.

Das Minimierungsproblem aus (4.2.1.) lässt sich dann wie folgt modellieren:

$$(Q_{(n+1) \times (1)}^{ausg} - Q_{(n+1) \times (1)}^{roh})^T \cdot W_{(n+1) \times (n+1)} \cdot (Q_{(n+1) \times (1)}^{ausg} - Q_{(n+1) \times (1)}^{roh}) + \\ g \cdot (K_{(n-m+1) \times (n+1)} \cdot Q_{(n+1) \times (1)}^{ausg})^T \cdot K_{(n-m+1) \times (n+1)} \cdot Q_{(n+1) \times (1)}^{ausg} \rightarrow Min !$$

Dieser Ausdruck wird genau dann minimal wenn gilt:

$$Q_{(n+1) \times (1)}^{ausg} = (W_{(n+1) \times (n+1)} + g \cdot K_{(n-m+1) \times (n+1)}^T \cdot K_{(n-m+1) \times (n+1)})^{-1} \cdot W_{(n+1) \times (n+1)} \cdot Q_{(n+1) \times (1)}^{roh} \quad .^{275}$$

Zur Lösung dieses LGS's benötigt man Matrixoperationen. Software Pakete bieten fertige Funktionen an, um Matrizen zu transponieren, zu invertieren oder auch zu multiplizieren. Der meiste Arbeitsaufwand fällt durch den Bau der Matrizen an. Mit den gegebenen

<sup>275</sup> Kakies, P. / et.al. verweisen zur Herleitung dieses LGS auf „T.N.E. Greville, Moving-Weighted-Average Smoothing, Extended to the Extremities of the data I, Theory, Scand. Actuarial J., 1981.“

Algorithmen zur Erzeugung von  $W_{(n+1) \times (n+1)}$  und  $K_{(n-m+1) \times (n+1)}$ , und den benötigten Matrixoperationen lassen sich Lösungen in Excel, Java, C/C++, R oder Octave umsetzen.

### Der Whittaker-Henderson-Schätzer - Lösung mittels Octave<sup>276</sup>

Das Beispiel in der Abbildung 11 soll noch auf verschiedene Differenzordnungen analysiert werden. Die Funktionen in den Abbildungen 33 und 34 können nahezu eins-zu-eins übernommen werden. Die folgende Abbildung soll die Unterschiede bzgl. der Anwendung verschiedener Differenzenordnungen verdeutlichen.

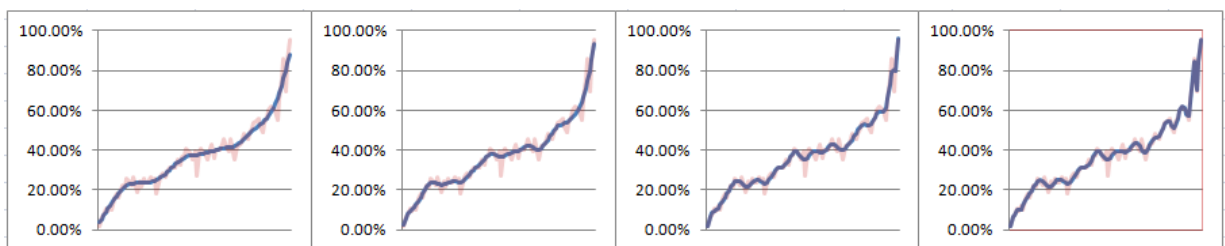


Abbildung 35: Beispiel: Whittaker-Henderson-Verfahren-Steigende Differenzordnungen.

Gegeben  $Q_{(n+1) \times (1)}^{roh} = \{q_x^{roh}\}_{x \in AB}$  mit  $|Q^{roh}| = 91$ . Auswirkungen auf dem Henderson-Ausgleich mit gleichverteilten Gewichten,  $g = 1$  und steigendem  $m = 2, 5, 10, 20$  (von rechts nach links). Aufbauend auf dem Beispiel des Kapitels 4.2.1. ergeben sich die vier folgenden Verläufe der ausgeglichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten (blaue Kurve). Mit jeweils der Kurve der rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten (rote transparente Kurve). Für diese Analyse wird deutlich, dass mit wachsendem  $m$  die spezifische Struktur der rohen Werte besser approximiert wird. Die Darstellung wurde mittels Excel visualisiert und mittels Octave berechnet. Das Ein- u. Auslesen erfolgte über den Funktionen `d1mread()` und `csvwrite()`. Für die Berechnung standen, neben den o.g. Funktionen, `inv()` und `transpose()` zur Verfügung.

Quelle: Eigene Darstellung.

### Ausgleichende Splines – Lösungsmodellierung mit Umsetzung in Octave

Der folgende Ansatz stammt von Reinsch, C.H.<sup>277</sup> und wird analog nach Wolfsdorf, K. bzw. Kakies, P. / et.al. modelliert.<sup>278</sup> Aufbauend auf Kapitel 4.3.2. ergibt sich die Folgende

#### **Algorithmus-Skizze:**

➔ **Gegeben** seien die die rohen Daten  $Q_{(n+1) \times (1)}^{roh} = \{q_x^{roh}\}_{x \in AB}$  und ein monoton angeordneter Altersbereich als Menge der Knoten.<sup>279</sup>  $v_i$  bezeichne die Standardabweichung von  $q_i$  und es sei ein Anpassungswert  $A \geq 0$  (welcher vom Aktuar zu

<sup>276</sup> Octave ist eine abgeleitete Skriptsprache von Matlab und überwiegend kompatibel mit dieser. Octave ist eine freie Software zur numerischen Lösung mathematischer Probleme.

<sup>277</sup> Siehe Int[6].

<sup>278</sup> Vgl. Wolfsdorf, K. (1986), S. 90 ff.

<sup>279</sup> Parametrische Splines finden Anwendung, falls sich die Knoten nicht monoton anordnen lassen.



wählen ist) vorgegeben, mit  $A \in [|Q^{roh}| - \sqrt{2 \cdot |Q^{roh}|}, \dots, |Q^{roh}| + \sqrt{2 \cdot |Q^{roh}|}]$ .<sup>280</sup>  $A$  erlaubt es dem Aktuar, das Ausmaß der Glätte zu kontrollieren.

→ **Gesucht** ist eine zweimalstetig differenzierbare Funktion  $f$ , so dass

$$\int_{AB} f''(x) dx \rightarrow \text{Min!} \text{ unter der Nebenbedingung } \sum_{i=0}^n \left( \frac{f(x_0 + i, a_k) - q_i^{roh}}{v_i} \right)^2 \leq A. \text{ Das}$$

Problem wird durch Standardmethoden der Variationsrechnung transformiert in

$$\text{folgendes Problem } \int_{AB} f''(x) dx + \lambda \cdot \left[ \sum_{i=0}^n \left( \frac{f(x_0 + i, a_k) - q_i^{roh}}{v_i} \right)^2 + s^2 - A \right] \rightarrow \text{Min! mit } s$$

als Hilfsvariable und  $\lambda$  als Lagrange Parameter. Man erhält als Lösung (zugehörige Euler-Lagrange Differenzialgleichung (DG))  $f(x) = a_i + b_i \cdot (x - (x_0 + i)) + c_i \cdot (x - (x_0 + i))^2 + d_i \cdot (x - (x_0 + i))^3$  für  $i = 0, \dots, n-1$  und falls  $x_0 + i \leq x < x_0 + i+1$  ein

kubischer Spline ist. Die Koeffizienten bestimmen sich dabei wie folgt  $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3}$

$\wedge b_i = a_{i+1} - a_i - c_i - d_i \wedge c_0 = c_n = 0$ . Mit den Koeffizienten  $a = \{a_i\}_{i \in [0, \dots, n]}$   $\wedge c = \{c_i\}_{i \in [1, \dots, n-1]}$  lassen sich  $b = \{b_i\}_{i \in [0, \dots, n-1]}$   $\wedge d = \{d_i\}_{i \in [0, \dots, n-1]}$  bestimmen.

→ Die **Lösung** (1.Step: Bestimmungsgleichungen aus der Euler-DG) der Koeffizienten  $a \wedge c$  erfolgt durch folgende GS'e (mit Dimensionenangabe)

$$c_{(n-1) \times (1)} = (L_{(n+1) \times (n-1)}^T \cdot W_{(n+1) \times (n+1)}^2 \cdot L_{(n+1) \times (n-1)} + \lambda \cdot T_{(n-1) \times (n-1)})^{-1} \cdot \lambda \cdot L_{(n+1) \times (n-1)}^T \cdot Q_{(n+1) \times (1)}^{roh} \wedge$$

$$a_{(n+1) \times (1)} = Q_{(n+1) \times (1)}^{roh} - \lambda^{-1} \cdot W_{(n+1) \times (n+1)}^2 \cdot L_{(n+1) \times (n-1)} \cdot c_{(n-1) \times (1)}. \text{ Mit } \lambda \neq 0 \wedge s = 0. \text{ Die Matrix } W_{(n+1) \times (n+1)}$$

mit den Gewichten  $v_i$  ergibt sich analog zur voran genannten Lösungsbeschreibung des Henderson-Verfahrens ( $\rightarrow$  Erzeugung\_von\_ $W(n+1, W_{(n+1) \times (n+1)} \cdot v_{(n+1) \times (1)})$ ). Die Matrizen  $L_{(n+1) \times (n-1)} \wedge T_{(n-1) \times (n-1)}$  sind Tridiagonalmatrizen (lediglich abhängig von  $n$ ), die durch folgende Algorithmen ermittelt werden können.

<sup>280</sup> Angenommen wird die Poissonverteilung, dann ergibt sich für eine Altersklasse, dass  $v_x = \sqrt{\text{var}(\frac{1}{l_x} \cdot \sum_{i=1}^{l_x} q_x)} = \sqrt{\frac{1}{l_x^2} \cdot \sum_{i=1}^{l_x} \text{var}(q_x)} = \sqrt{\frac{l_x \cdot q_x}{l_x^2}} = \sqrt{\frac{q_x}{l_x}}$  bzw.  $v_x = \sqrt{\frac{q_x \cdot (1 - q_x)}{l_x}}$  für Annahme der Binomialverteilung. Vgl. Kakies, P. / et.al.(1985), S.116 und Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 82. Für die mathematische Modellierung ist  $n$  der Index des letzten Alters  $x_n$ . Es ergibt sich, dass (mit  $x_0$ )  $|Q_{(n+1) \times (1)}^{roh}| = n + 1$  ist. Für die allgemeinen Algorithmen und für die Umsetzung in Octave  $|Q^{roh}| = \text{size}(Q^{roh}, 1) = n$ . Bemerkung: Der Arrayindex in Octave beginnt bei Eins.

```

void function Erzeugung_von_L(n, L(n)×(n-2))
input: Anzahl der Beobachtungen, vordefinierte Matrix L(n)×(n-2) (anfänglich Null)

for j=0 to n-1
    for i=0 to n-3
        if(L[j][i] ist Hauptdiagonalelement) then L[j][i] = (-2)
        if(Index ist im Array-Range) then L[j-1][i] = 1 ∧ L[j+1][i] = 1

```

Abbildung 36: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix L.

Die Hauptdiagonalelemente werden -2 gesetzt. Die Elemente über/unter den Hauptdiagonalelementen werden 1 gesetzt. Die letzte Zuweisung ist dabei so zu verstehen, dass das/die „Out of Bounce“-Element(e) weggelassen werden.

Quelle: Eigene Darstellung.

```

void function Erzeugung_von_T(n, T(n)×(n))
input: Anzahl der Beobachtungen, vordefinierte Matrix T(n)×(n) (anfänglich Null)

for j=0 to n-1
    for i=0 to n-1
        if(L[j][i] ist Hauptdiagonalelement) then L[j][i] = 4/3
        if(Index ist im Array-Range) then L[j-1][i] = 1 ∧ L[j+1][i] = 1/3

```

Abbildung 37: Algorithmus zur Erzeugung der Matrix T.

Die Hauptdiagonalelemente werden 4/3 gesetzt. Die Elemente über/unter den Hauptdiagonalelementen werden 1/3 gesetzt.

Quelle: Eigene Darstellung.

→ Die (**Lösung 2.Step**) Bestimmung des Lagrange-Parameters  $\lambda$  erfolgt über  $G(\lambda) = \|a\| = \sqrt{a^T \cdot a} = \sqrt{A}$  mit  $a_{(n+1) \times (1)} = W_{(n+1) \times (n+1)} \cdot L_{(n+1) \times (n-1)} \cdot (L_{(n+1) \times (n-1)}^T \cdot W_{(n+1) \times (n+1)}^2 \cdot L_{(n+1) \times (n-1)} + \lambda \cdot T_{(n-1) \times (n-1)})^{-1} \cdot L_{(n+1) \times (n-1)}^T \cdot Q_{(n+1) \times (1)}^{roh}$  mit Skalarprodukt  $\|a\| = \sqrt{a^T \cdot a}$  mit Spaltenvektor  $a$ . Die Funktion  $G(\lambda), \lambda \geq 0$ , stellt eine konvexe und monoton fallende Funktion dar ( $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(\lambda) = 0$ ). Bei der Umsetzung in Octave erhält  $G(\lambda, Q^{roh})$  die Parameter Lambda und die rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

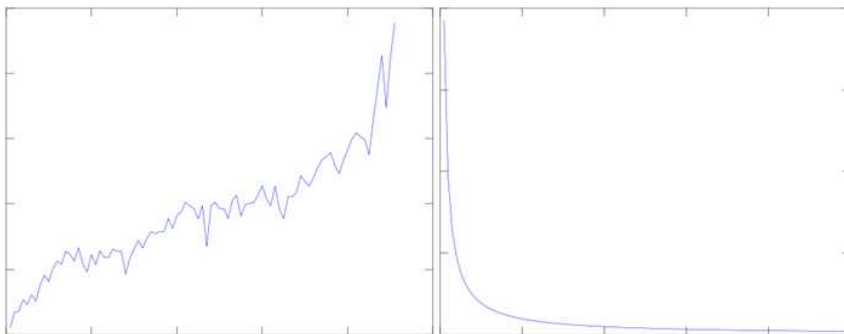


Abbildung 38: Beispiel: Rohe Werte und zugehörige Funktion zur Bestimmung des Lagrange-Parameter.

Links:  $Q_{(n+1) \times (1)}^{roh}$ . Rechts:  $G(\lambda, Q^{roh})$  für  $\lambda = 1, \dots, 100$ . Für die Gewichte wurde angenommen:

$$\nu_x = \sqrt{q_x^{roh}} / 1000.$$

Quelle: Eigene Darstellung.

- Für ein  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$  mit  $G(\lambda_0) > \sqrt{A}$  ergibt sich, dass  $G(\lambda_0)$  genau dann minimal wird, wenn  $G(\lambda_0)^2 = A$ .<sup>281</sup> Die Lösung wird iterativ mittels des Newtonverfahrens erlangt. Bei der Umsetzung in Octave wird auf die Funktion *fsolve()* zurückgegriffen, um  $\lambda_0$  zu ermitteln →  $\lambda_0 = [\lambda_0] = \text{fsolve} (@(\lambda_0) (G(\lambda_0, Q^{roh})^2 - A), [0])$ .<sup>282</sup> Mit  $\lambda_0$  und den Matrizen lassen sich die Koeffizienten  $a \wedge c$  und daraus wiederum  $b \wedge d$  ermitteln. Das methodische Vorgehen bei der Umsetzung in Octave (**Koeffizientenermittlung**) erfolgte dabei wie folgt: **1.** Ermittlung von  $c = \{c_i\}_{i \in [1, \dots, n-1]}$  und  $a = \{a_i\}_{i \in [0, \dots, n]}$  gemäß den o.g. Bestimmungsgleichungen →  $c_{(n-1) \times (1)} = C(\lambda_0, Q^{roh}) \wedge a_{(n+1) \times (1)} = A(\lambda_0, Q^{roh})$ . **2.** Hinzufügen der Randkoeffizienten  $c_0 = c_n = 0$  →  $cc_{(n+1) \times (1)} = CC(c_{(n-1) \times (1)})$ . **3.** Ermittlung von  $d = \{d_i\}_{i \in [0, \dots, n-1]}$  →  $d_{(n) \times (1)} = D(cc_{(n+1) \times (1)})$  und anschließende Ermittlung von  $b = \{b_i\}_{i \in [0, \dots, n-1]}$  →  $b_{(n) \times (1)} = D(a_{(n+1) \times (1)}, cc_{(n+1) \times (1)}, d_{(n) \times (1)})$ .
- Die ausgeglichenen Werte  $\{q_x^{ausg}\}_{x \in AB}$  ergeben sich dann durch  $q_{x_0+i}^{ausg} = a_i, i = 0, \dots, n-1$  und  $q_{x_0+n}^{ausg} = a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$ .<sup>283</sup> Wobei wiederum gilt  $q_{x_0+n}^{ausg} = a_n = a_{n-1} + (b_{n-1} = a_n - a_{n-1} - c_{n-1} - d_{n-1}) + c_{n-1} + d_{n-1}$ .
- Für den **vorzugebenen Anpassungswert**  $A$  muss gelten  $A \in \overbrace{[0, \dots, G(0)^2]}^{\text{Anpassung} \leftarrow A \rightarrow \text{Glätte}}$ , da man ansonsten eine Gerade erhält.<sup>284</sup>  $G(0)$  hängt von  $Q^{roh}$ ,  $|Q^{roh}|$  und von den Gewichten ab, so dass Kakies, P. / et.al. keine präzise Angaben über  $A$  treffen bzw. machen. Das Intervall, welches von Wolfsdorf, K. (bzw. Reinsch, C.H.) angegeben wird  $A \in [|Q^{roh}| - \sqrt{2 \cdot |Q^{roh}|}, \dots, |Q^{roh}| + \sqrt{2 \cdot |Q^{roh}|}]$  basiert auf dem Zentralen Schwankungsintervall (Drei-Sigma-Regel). Betrachtet man die Chi-Quadrat-verteilte Statistik

<sup>281</sup> Für ein  $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ , mit  $G(\lambda_0) < \sqrt{A}$  ergibt sich eine Gerade. Kakies, P. / et.al. beschreiben den Newton-Iterationsalgorithmus mittels der Vorschrift  $\lambda_{i+1} = \lambda_i \cdot (G(\lambda_i) - \sqrt{A}) / G'(\lambda_i), i = 0, 1, \dots$ . Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 114 ff.

<sup>282</sup> Über *help* „Funktion“ lässt sich eine Funktionsbeschreibung in der Kommandozeile ausgeben. Mit *fsolve*(@ (zu verändernder Funktionsparameter) Funktion(Parameter), [Startwert]).

<sup>283</sup> Vgl. Kakies, P. / et.al. (1985), S. 116.

<sup>284</sup> Für  $A = 0$  erhält man die Interpolation mittels kubischer Splines. Diese hat zum Ziel, die vorgegebenen Punkte (für die Aufgabenstellung die rohen Daten) mittels einer „glatten“ Kurve zu verbinden. Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), Kapitel 10. Oder Vgl. Int[6], S. 170 (Formulation).

$$\sum_{i=0}^n \frac{\overbrace{(f(x_0+i, a_k) - q_i^{roh})^2}^{\approx (Z(0,1))^2}}{q_i^{roh} / l_i} = \chi_N^2, \text{ so gilt für } N \rightarrow \infty, \text{ dass } \chi_N^2 \sim N(N, 2 \cdot N).^{285} \text{ Folglich}$$

ergibt sich das Intervall  $[n+1 - \sqrt{2 \cdot (n+1)}, \dots, n+1 + \sqrt{2 \cdot (n+1)}]$  (für  $N = n+1$ ).

```
function Ausgleichende_Splines(  $Q^{roh}$ , A )           return a
input: Vektor der rohen Ausscheidewahrscheinlichkeiten, Anpassungswert
n      = |  $Q^{roh}$  |
 $\lambda_0$  = solve(  $G(\lambda, Q^{roh})^2 - A = 0$  )
c      = C(  $\lambda_0, Q^{roh}$  )
a      = A(  $\lambda_0, Q^{roh}, c$  )
```

Abbildung 39: Algorithmus für Ausgleichende Splines.

Zur Umsetzung wurden auf die vordefinierten Funktionen *size()*, *fsolve()*, *inv()*, *transpose()* zugegriffen. Ferner ergeben sich die Funktion *C()* und *A()* aus den Bestimmungsgleichungen, welche wiederum auf die Funktionen zur Erstellung der Matrizen zugreifen. Die Gewichte können bzw. müssen dann über ihre individuelle Funktion verändert werden.

Quelle: Eigene Darstellung.

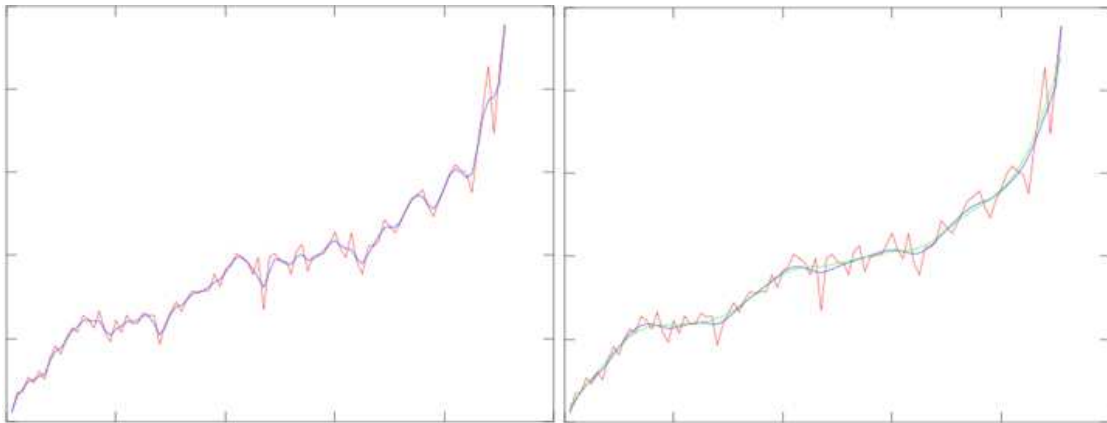


Abbildung 40: Beispiel: Spline-Ausgleich mit verschiedenen Anpassungswert.

**Fortführung des Beispiels.**  $Q^{roh}$  (jeweils rote Kurve). Aus dem Bsp. ergibt sich, dass  $G(0, Q^{roh})^2 = 1611.5$  (mit  $v_x = \sqrt{q_x^{roh}/1000}$ )  $\Rightarrow A \in [0, \dots, 1611]$  bzw. für die zweite Bedingung ist  $A$  wie folgt zu wählen  $A \in [78, \dots, 104]$ . Links: Spline-Ausgleich (blaue Kurve) mit  $A = 104$ . Rechts: Spline-Ausgleich (blaue Kurve) mit  $A = 200$  und Henderson-Ausgleich (grüne Kurve) mit gleichverteilten Gewichten,  $g = 1$  und  $m = 2$ .

Für das vorherige Beispiel zeigt sich, setzt man bspw.  $g = 0.2$  und  $m = 3$  (Henderson-Ausgleich), so ergibt sich ein sehr ähnlicher Verlauf zum Spline-Ausgleich mit  $A = 200$  (für das Beispiel).

<sup>285</sup> Vgl. Beichelt, F.E. / et.al. (2003), S. 43 und 250. Für ZV  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  gilt  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$ .

➔ Für die **Wahl der Gewichte** der NB  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{w_i} \cdot (f(x_0 + i, a_k) - q_i^{roh})^2 \leq A$  ergibt sich

$w_i = v_i^2$  nach dem Ansatz von Reinsch.<sup>286</sup> Für die Wahl der Gewichte  $w_i$  gilt: Für große  $w_i$  ergibt sich eine Splinefunktion nahe den rohen Werten, hingegen für kleine  $w_i$  der Ausgleich (im Sinne ausgleichende Gerade) besser ist. Zur Modifikation der Gewichte sind die Elemente der Hauptdiagonalen von  $W$  mit  $1/w_i$  zu belegen.<sup>287</sup>

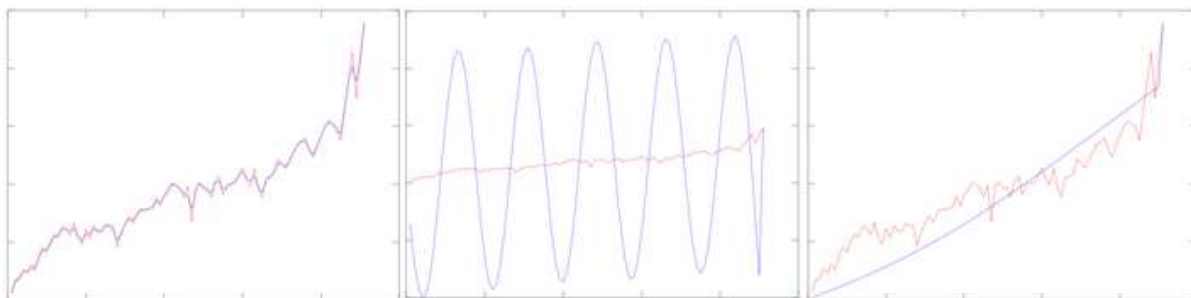


Abbildung 41: Beispiel: Spline-Ausgleich mit verschiedenen Gewichten.

**Fortführung des Beispiels.**  $Q^{roh}$  (jeweils rote Kurve). Spline-Ausgleich (jeweils blaue Kurve) mit  $A = 200$ . Links: Mit Gewichten  $w_i = 100$ . Mitte: Mit Gewichten  $w_i = 1$ . Rechts: Mit Gewichten  $w_i = 0.001$ .

In der Praxis kann ein Aktuar interaktiv mit dem Computerdisplay den passenden Anpassungswert und die passenden Gewichte finden. Ebenfalls lässt sich auf Erfahrungswerte zurückgreifen (für ähnliche Verläufe der rohen Werte).<sup>288</sup>

## Anhang D – Computerbasierte Lösungen ausgewählter Probleme

Die Algorithmen wurden mit Octave und/oder mit Microsoft Visual Studio 2010 C++ erstellt (mit der Datenstruktur Array). Der Pseudocode ist so dargestellt, dass er (fast) eins-zu-eins in Octave (Matlab), Java, C oder VBA umgesetzt werden kann. Alternativ können einige Algorithmen auch in Excel ohne VBA gut umgesetzt werden.<sup>289</sup>

<sup>286</sup> Vgl. Int[6].

<sup>287</sup> Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), S. 275.

<sup>288</sup> Vgl. Engeln-Müllges, G. / Reutter, F. (1991), S. 275.

<sup>289</sup> Es wird nicht der Anspruch erhoben, dass die individuellen Lösungsvorschläge für die jeweiligen einzelnen Probleme am Ende ein komplettes Programm darstellen. Ein Aktuar muss für jedes einzelne Problem eine bestmögliche (Software-)Lösung finden. So kann für Ausgleichsverfahren bspw. Excel oder Octave mit dem Solver, Matrixoperationen, etc. und der leichten Handhabung eine bestmögliche Lösung darstellen. Hingegen für große Datensätze aus denen relative Häufigkeiten gewonnen werden sollen Datenbankenstrukturen geeigneter sein können.

**Allgemeine Beschreibung des Codes:** Einrückungen geben den Gültigkeitsbereich einer Schleife oder Bedingung an. Der Arrayindex fängt bei null an zu zählen.

```

void function life_table( x , ω , q(ω+1)×1 , table(ω+1)×(m) , m )
input: (Anfangs-)Alter, Endalter, Vektor der Sterblichkeiten, Matrix der Sterbetafel
       (Altersbereich als 1.- und Anzahl der Elemente m als 2.Dimension), m
definition: elements(m)×(1) = { x , 100000 · kpx( 0 , x , q(ω+1)×1 , 1 ) , qx · 100000 · kpx
                               ( 0 , x , q(ω+1)×1 , 1 ) , qx , life_expectancy( x , ω , q(ω+1)×1 ) }

for i = 0 to m - 1
    table[x][i] = elements[i]

if( x < ω ) then life_table( x+1 , ω , q(ω+1)×1 , table(ω+1)×(m) , m )

```

Abbildung 42: Rekursiver Algorithmus zur Erzeugung einer Sterbetafel mit gegebenen Sterblichkeiten.  
Quelle: Eigene Darstellung.

Das Anfangsalter ist 0 zu setzen. Der Vektor bzw. die Menge elements<sub>(m)×(1)</sub> richtet sich nach den Elementen der Abbildung 7 inklusive der Lebenserwartung. Die Menge m kann auch auf weitere Elemente erweitert werden.

```

function life_expectancy( x , ω , q(ω+1)×1 ) return ex , Lebenserwartung eines x-Jährigen
input: Alter, Endalter, Vektor der Sterblichkeiten
definition: ex = 0.5
for k = 1 to ω
    ex += k · kpx( x , x+k , q(ω+1)×1 ) · qx+k

```

Abbildung 43: Algorithmus zur Erzeugung der verbleibenden Lebenserwartung eines x-Jährigen.  
Quelle: Eigene Darstellung.

```

function kpx( x , x+k , q(ω+1)×1 , Π ) return Π = P( x.Jähriger → x+k.Jähriger )
input: Alter, zu erreichendes Alter, Vektor der Sterblichkeiten, vorgegebener
       Startwert zur Produktbildung (meistens, anfänglich Eins)
for x to x+k-1
    Π = Π · (1 - qx)

```

Abbildung 44: Algorithmus zur Erzeugung des Wahrscheinlichkeitsproduktes als x-Jähriger das x+k.Lebensjahr zu erreichen.  
Quelle: Eigene Darstellung.<sup>290</sup>

<sup>290</sup> Ausgangspunkt der Funktionen ist, dass der Index des Arrays  $q_{(\omega+1) \times 1}$  dem Alter entspricht.  $q_{x+k}$  stellt ebenfalls eine Funktion dar, und zwar die Abfrage nach dem  $x+k$ .Element bzw.  $q_{x+k}$  an der Stelle  $q[x+k]$ .

```

void function Diagonalisierung(  $P_{(\omega+1) \times (n+1+m)}$ ,  $G_{(\omega+1) \times (n+1)}$  )
input: Datenmatrizen  $P_{(\omega+1) \times (n+1+m)}$  (Perioden-) und  $G_{(\omega+1) \times (n+1)}$  (Generationenbetrachtung,
anfänglich Null), mit jeweils den Dimensionen Altersbereich kreuzt Perioden-
betrachtung inkl. Extrapolation bzw. Generationenbetrachtung
    for i=1 to n+1
        for j=1 to  $\omega+1$ 
            if(  $i+j-2 < n+1+m$  ) then  $G_{[i-1][j-1]} = P_{[i-1][i+j-2]}$ 

```

Abbildung 45: Algorithmus zur Diagonalisierung.

Für die Generationen gemäß Abbildung 23. Ferner wird die Trendfortschreibung benötigt, um vollständige Generationenwerte zu erhalten. Die erste Spalte der Matrix  $P$  (Beobachtungsjahr  $t_0$ ) entspricht somit dem ersten zu betrachtenden Generationenjahr.

Quelle: Eigene Darstellung.

## Anhang E – Inhalt der beigelegten CD

Die CD enthält alle in dieser Arbeit verwendeten Abbildungen und Lösungen. Desweiteren ist die Masterarbeit in Form eines PDF-Dokuments hinterlegt. Die CD-ROM ist in folgende Ordner unterteilt:

### Abbildungen:

- ➔ Sämtliche Abbildungen sind in diesem Verzeichnis hinterlegt, entweder als Microsoft Office Excel-Arbeitsblatt, als Visio-Zeichnung oder als Word Dokument. Die Excel Dateien enthalten auch die Beispielsberechnungen, falls diese in Excel erstellt worden sind.

### Berechnungen:

- ➔ Der Ordner enthält alle Beispielsberechnungen nach Themen geordnet. Wobei jedes Thema wiederum unterteilt ist in Lösungen mittels Octave (Dateityp: „Script/Funcion (.m)“), Excel und/oder SPSS (Dateityp: SPSS-Data-Dokument (.sav), SPO-Datei (.spo)).

### Masterarbeit:

- ➔ Dieses Verzeichnis enthält die Masterarbeit in digitaler Form als PDF-Datei.