

Freie wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science in Wirtschaftsmathematik

**ANWENDUNGEN DER FUZZY OPTIMIERUNG, MODELLIERUNG  
UND PROGRAMMIERUNG**

**Bachelorarbeit**

im Fachbereich Wirtschaftswissenschaften II

im Studiengang Wirtschaftsmathematik

der Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

vorgelegt von:	Gorden Pfitzmann
Matrikelnr.:	s0518012
Erstbetreuer:	Prof. Dr. Friedrich Hartl
Zweitbetreuer:	Prof. Dr. Ekkehard Schneider
Abgabetermin:	10. Dezember 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>III</b>
<b>Symbolverzeichnis .....</b>	<b>IV</b>
<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>V</b>
<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>VI</b>
<b>1 Einleitung .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen der Fuzzy Set Theorie.....</b>	<b>4</b>
<b>3 Erwartungswertbildung für die Aggregation .....</b>	<b>9</b>
3.1 Statistische Erwartungswertbildung für die Prognose mit Fuzzy Zahlen .....	9
3.2 Fuzzy Delphi Methode für die Prognose .....	10
3.3 Fuzzy Erwartungswertbildung mit dem Fuzzy Erwartungswert .....	12
3.4 Der Kompromiss .....	14
3.5 Zusammenfassung der vorgestellten Methoden .....	15
<b>4 Das deterministische Investitionsmodell .....</b>	<b>16</b>
<b>5 Zugehörigkeitsfunktionen über weiche Restriktionen/Modellierung flexibler Restriktionsgrenzen.....</b>	<b>21</b>
<b>6 Fuzzy lineare Programmierungsmodelle mit weichen Restriktionen.....</b>	<b>25</b>
6.1 Parametrische Programmierung .....	25
6.2 Nutzenbewertung des unscharfen Zielwerts.....	28
6.3 Die Kompromisslösung .....	30
6.3.1 Die Kompromisslösung mit linearen Zugehörigkeitsfunktionen .....	31
6.3.2 Die Kompromisslösung mit stückweisen linearen Zugehörigkeitsfunktionen.....	33
6.4 Interactive fuzzy linear programming algorithm (IFLP).....	37
<b>7 Fuzzy lineare Vektoroptimierungsmodelle mit weichen Restriktionen .....</b>	<b>39</b>
<b>8 Fuzzy LP Modelle mit unscharfen Koeffizienten für die Restriktionen.....</b>	<b>45</b>
8.1 Mittels des Erweiterungsprinzip .....	45

8.2 Ohne das Erweiterungsprinzip.....	53
8.3 Vergleich: Ohne das Erweiterungsprinzip vs. Mittels des Erweiterungsprinzip.....	58
8.4 Interactive fuzzy linear programming algorithm II (IFLP II).....	58
<b>9 Fazit .....</b>	<b>60</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>62</b>
<b>Anhang A - Inhalt der beigefügten CD.....</b>	<b>63</b>
<b>Anhang B - Aufbau der Java Methode für stückweise lineare Funktionen.....</b>	<b>64</b>
<b>Anhang C - Der IFLP Algorithmus mit Excel .....</b>	<b>66</b>

**Abkürzungsverzeichnis**

bzgl.	- bezüglich
bzw.	- beziehungsweise
Def.	- Definition
ET	- Entscheidungsträger
FEW	- Fuzzy Erwartungswert
ff	- fort folgend
GE	- Geldeinheiten
i.a.	- im Allgemeinen
IFLP	- Interactive fuzzy linear programming
i.H.v.	- in Höhe von
LP Modelle	- Lineare Programmierungsmodelle
MOLPAL	- Multiobjective linear programming based on aspiration levels
NNB	- Nichtnegativitätsbedingungen
o.g.	- oben genannte(n)
u.B.d.R.	- unter Beachtung der Restriktionen

## Symbolverzeichnis

$\wedge$	- Konjunktion
$\vee$	- Disjunktion
$\forall$	- Allquantor
$A, B, C$	- unscharfe Mengen
$A_i = (A_{i1}, \dots, A_{in}), C = (C_1, \dots, C_n)$	- reell wertige Vektoren mit unscharfen Koeffizienten für $i = 1, \dots, m_1; m_1 \in N$ .
$c = (c_1, \dots, c_n), a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}),$ $x = (x_1, \dots, x_n)$	- reell wertige Vektoren (ab Kapitel 5)
$\exists$	- Existenzquantor
$i, j, h,$	- Index
Max!	- Maximum
$\tilde{\max}$	- maximaler unscharfer Zielwert
$N$	- Menge der natürlichen Zahlen
$\Re$	- Menge der reellen Zahlen
$ x $	- Anzahl der Elemente von x
$\tilde{z}$	- unscharfer Zielwert
$[a, b]$	- abgeschlossenes Intervall
$]a, b]$	- linksoffenes Intervall
$[a, b[$	- rechtsoffenes Intervall
$]a, b[$	- offenes Intervall

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Taxonomie.....	2
Abbildung 2: Fuzzy Menge aus dem Bsp. 2.1.....	5
Abbildung 3: $Z = (E_1, \dots, E_8)^T \times (x_1, \dots, x_{140}) \xrightarrow{f \text{ nach Def. 2.7}} f_{A_h}(x_i) \in [0,1]$ . ....	14
Abbildung 4: Lösung des Modells 4.1. ....	19
Abbildung 5: Stückweise lineare Funktionen.....	24
Abbildung 6: Funktionsgleichung. ....	28
Abbildung 7: Zugehörigkeitsfunktionen (1) $f_{z,\alpha}(x)$ ; (2) $f_{z,\theta}(x)$ ; (3) $f_{z,d_z}(x)$ ; (4) $f(x)$ ....	30
Abbildung 8: Lösung des Modells 6.3.1. ....	32
Abbildung 9: Stützstellen und $\beta_1, \beta_2$ für $L_{t=0}$ . ....	34
Abbildung 10: Stützstellen und $\beta_1, \beta_2$ für $A_{t=1}$ . ....	34
Abbildung 11: Stützstellen und $\beta_1, \beta_2$ für $A_{t=2}$ . ....	34
Abbildung 12: Stützstellen und $\beta_1, \beta_2$ für $L_{t=T}$ . ....	34
Abbildung 13: Lösung des Modells 6.3.2. ....	36
Abbildung 14: $\beta_1$ für $L_{t=0}$ . ....	42
Abbildung 15: $\beta_1$ für $A_{t=1}$ . ....	42
Abbildung 16: $\beta_1 \wedge \beta_2$ für $A_{t=2}$ . ....	42
Abbildung 17: $\beta_1$ für $A_{t=3}$ . ....	42
Abbildung 18: $\beta_1$ für $z_2$ . ....	42
Abbildung 19: $\beta_1$ für $z_1$ . ....	42
Abbildung 20: Lösung des Modells 7.2. ....	43
Abbildung 21: Lösung des Modells 8.1.4. ....	50
Abbildung 22: $f_z(x)$ mit $(z_u; \mathcal{E}) \wedge (z_o; \mathcal{I})$ . ....	51
Abbildung 23: $f_{B_i}$ für $A_{t=2}$ . ....	51
Abbildung 24: Lösung des Modells 8.1.6. ....	51
Abbildung 25: Lösung des Modells 8.2.1. ....	54
Abbildung 26: Modell 8.2.2 Teil 1 von 2. ....	56
Abbildung 27: Modell 8.2.2 Teil 2 von 2. ....	56

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Schätzungen $D_i$ der Experten $E_i$ für $i = 1, \dots, 8$ . ....	11
Tabelle 2: Angaben für den benötigten Zusatzstoff, Absatzmengen und Zahlungsreihen.....	18
Tabelle 3: Lösungsinterpretation des Modells 4.1. ....	20
Tabelle 4: Ergebnistabelle der parametrischen Programmierung. ....	27
Tabelle 5: Lösungen von $z_1(x_1^{**}), z_1(x_1^*), z_1(x_2^{**}), z_1(x_2^*), z_2(x_1^{**}), z_2(x_1^*), z_2(x_2^{**}), z_2(x_2^*)$ .....	41
Tabelle 6: Lösungen für das MOLPAL Verfahren mit Anspruchsniveaus. ....	44
Tabelle 7: Lösungen für die Iterationsschritte $r = 2, \dots, 6$ . ....	52
Tabelle 8: Lösungen für die Zielwerte unter Einbeziehung von verschiedenen $\alpha$ -Niveaus....	57

## 1 Einleitung

Die Fuzzy Set Theorie wurde von Lotfi A. Zadeh in den sechziger Jahren an der Universität Berkeley in Kalifornien entwickelt. Das Wort „fuzzy“ [fAzi] kommt aus dem Englischen und wird mit „unscharf“ übersetzt. Der Autor Traeger bringt einen Vergleich mit einem flauschigen, fusseligen Wollpullover, der keine exakte, scharfe Kante hat, wie unscharfe Mengen keine exakte Begrenzung haben.<sup>1</sup> In der klassischen Mengenlehre gilt das Zweitwertigkeitsprinzip der Zugehörigkeit, bei der unscharfen Logik werden Zwischenstufen definiert. So ist bspw. bei einer Problembeschreibung in der Praxis nicht immer mit Sicherheit zu sagen, ob die Information zu einer betrachteten Teilmenge gehört oder nicht. In diesem Falle sind bei der Problembeschreibung Zwischenwerte für „falsch“ und „wahr“ bzw. 0 und 1 zu definieren.<sup>2</sup>

In der Entscheidungstheorie unterscheidet man zwischen Entscheidungen unter Sicherheit (deterministische Modelle, mit bekannten Umweltzuständen), unter Unsicherheit bei Risiko (stochastische Modelle, den Umweltzuständen kann eine Wahrscheinlichkeit beigemessen werden) und unter Unsicherheit bei Ungewissheit (Umweltzuständen kann keine Wahrscheinlichkeit beigemessen werden).<sup>3</sup> Realitätsnahe Probleme sind meistens nicht deterministisch und ungenaue Umweltbedingungen sind eher „fuzziness“ als „randomness“<sup>4</sup>, somit sind in vielen Fällen Wahrscheinlichkeiten nicht das geeignete Beschreibungsmittel für Unschärfe und Ungenauigkeit. Diese Lücke füllt die Fuzzy Set Theorie. Sie findet zahlreiche Anwendungen in Operations Research, Controlling von Maschinen und Fertigungsprozessen, Wirtschaftswissenschaften, Statistik, künstliche Intelligenz, Expertensysteme, etc..<sup>5</sup> In Operations Research wurde die Fuzzy Set Theorie an vielen Anwendungen der Optimierung angewandt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Methoden von Fuzzy linearen Programmierungsmodellen und mit ihren Anwendungen anhand des Investitionsmodells von Kruschwitz. Ein traditionelles lineares Programmierungsmodell (LP Modell) ist

---

<sup>1</sup> Vgl. Traeger, D. (1994), Einleitung und Motivation.

<sup>2</sup> Vgl. Huber, F. (2002), S. 3.

<sup>3</sup> Vgl. Wiese, H. (2002), S. 2.

<sup>4</sup> Vgl. Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 127. (fuzziness rather than randomness - eher Unschärfe als Zufälligkeit)

<sup>5</sup> Vgl. Lai, Y. J / Hwang, C. L. (1992), Preface (Vorwort).



folgendermaßen definiert:  $z(x) = cx \rightarrow \text{Max!}$  u.B.d.R.  $g_i(x) = a_i x \leq b_i$  für  $i = 1, \dots, m_1$ ,  $m_1 + 1, \dots, m \wedge x \geq 0$  mit den reell wertigen Vektoren  $c = (c_1, \dots, c_n) \wedge a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \wedge x = (x_1, \dots, x_n)$ . Die folgende Abbildung 1 zeigt welche Methoden Anwendung finden, falls die zugehörigen Koeffizienten  $b_i \xrightarrow{\text{Fuzzy}} B_i$  oder  $a_i \xrightarrow{\text{Fuzzy}} A_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$  für  $i = 1, \dots, m_1$  unscharf modelliert werden. Der unscharfe Dateninput wird durch eine Fuzzy Menge mit einer Zugehörigkeitsfunktion durch das subjektive Empfinden eines Entscheidungsträgers (ET) beschrieben. Somit spielt der ET die wichtigste Rolle unter Nutzung der Fuzzy Set Theorie. Die in der Abbildung 1 aufgezählten Koeffizienten sind in den meisten Anwendungen, aufgrund unvollständiger Informationen, unscharf gegeben. Für Investitionsmodelle sind bspw. zukünftige Zahlungen, zukünftige „hohe“ Absatzmengen usw. nicht exakt vorsehbar. In der Theorie wird zwischen zwei Arten von „fuzziness“ unterschieden: 1. Intrinistische Unschärfe: Sie taucht vor allem in Verbindung mit der natürlichen Sprache auf, wie bspw. „hoher“ Absatz. 2. Informationelle Unschärfe: Sie liegt vor, wenn das Ergebnis nicht exakt prognostizierbar ist, aufgrund dessen, dass man die Informationen nicht zu einem Gesamturteil aggregieren kann.<sup>6</sup>

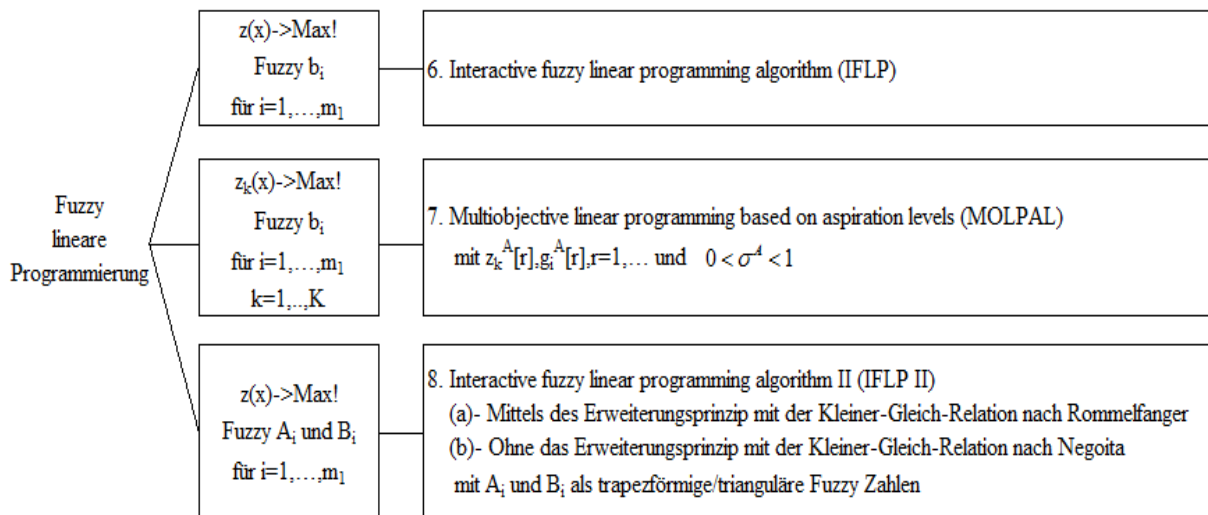


Abbildung 1: Taxonomie.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Lai, Y. J / Hwang, C. L. (1992), S. 6.

<sup>6</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 4 und Wolf, J. (1988), S. 157.

Ziel der Arbeit ist es, einen Einblick in die Fuzzy Set Theorie in Verbindung mit LP Modellen zu erlangen. Es soll systematisch untersucht werden, wie wirkungsvoll unscharf beschriebene Informationen in einem linearen Investitionsmodell mit einfließen können.

Die mathematischen Grundlagen der Fuzzy Set Theorie werden im zweiten Kapitel erläutert. Dabei werden notwendige Definitionen erbracht, diese werden ggf. mit Beispielen und Abbildungen visualisiert. Das dritte Kapitel stellt die Fuzzy Delphi Methode und die Fuzzy Erwartungswertbildung anhand eines Anwendungsbeispiels vor. Die beiden Methoden, welche mit denselben unscharfen Informationen arbeiten, werden miteinander verglichen und es wird eine Möglichkeit des Kompromisses zwischen ihnen aufgezeigt. Dieses Kapitel bietet somit eine Einführung im Umgang mit der Fuzzy Set Theorie und dient der sachlichen Aggregation und der Prognose.

Das anschließende Kapitel umfasst das deterministische Investitionsmodell mit einem ausführlichen Anwendungsbeispiel. Es werden Kritikpunkte geäußert und auch die Möglichkeiten des „Unscharfmachens“ erläutert.

Im fünften Kapitel werden die „weichen“ Restriktionen modelliert und verschiedene Typen von Zugehörigkeitsfunktionen vorgestellt und bzgl. der Zugehörigkeitsfunktionen Präferenzen gesetzt. In den folgenden Kapiteln 6, 7 und 8 werden verschiedene Methoden vorgestellt, um unscharfe Informationen ins deterministische Investitionsmodell einzuarbeiten. In Kapitel 6 werden die Restriktionsgrenzen  $b_i$  mittels parametrischer Programmierung unscharf modelliert. Darauf folgt die Nutzenbewertung des unscharfen Zielwertes mit dem symmetrischen und dem nichtsymmetrischen Ansatz. Anschließend wird eine Kompromisslösung zwischen der parametrischen Programmierung und der Nutzenbewertung des unscharfen Zielwertes vorgestellt, um rechentechnische Schwierigkeiten zu minimieren. Bei der Kompromisslösung werden zwei Anwendungsbeispiele betrachtet: Das deterministische Investitionsmodell wird mittels weicher Restriktionen erweitert. Dabei werden die Anwendungsbeispiele einmal mit linearen- und einmal mit stückweise linearen Zugehörigkeitsfunktionen betrachtet. Zum Abschluss des sechsten Kapitels wird der „Interactive fuzzy linear programming algorithm (IFLP)“ vorgestellt. Er stellt somit eine Zusammenfassung der im Kapitel 6 vorgestellten Methoden dar. Das siebte Kapitel beschäftigt sich mit unscharfen Vektoroptimierungsmodellen. Der Algorithmus „Multiobjective linear programming based on

aspiration levels (MOLPAL)“ wird vorgestellt. Dazu werden für das deterministische Investitionsmodell weiche Restriktionen, ein weiteres Ziel und Anspruchsniveaus angenommen. Im achten Kapitel werden erstmals auch die Koeffizienten unscharf modelliert. Dabei wird im Abschnitt 8.1 auf das Erweiterungsprinzip zurück gegriffen und der Abschnitt 8.2 kommt ohne das Erweiterungsprinzip aus. Der unscharfe Dateninput ist in beiden Anwendungsbeispielen des achten Kapitels gleich. Somit werden die beiden Methoden im Abschnitt 8.3 miteinander verglichen und Vorteile und Nachteile erläutert. Zum Ende des achten Kapitels wird der Algorithmus „Interactive fuzzy linear programming algorithm II (IFLP II)“ vorgestellt. Dem ET wird analog zu dem vorangegangenen Algorithmen IFLP und MOLPAL ein Interaktives Verfahren zur Verfügung gestellt. Zum Abschluss der Arbeit wird eine Zusammenfassung der beschriebenen Methoden vorgenommen und eine persönliche Einschätzung zur Anwendbarkeit gegeben. Ferner wird ein Ausblick hinsichtlich verschiedener Aspekte zum weiteren Ausbau mit der Fuzzy Set Theorie gegeben, die in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden sind.

## 2 Grundlagen der Fuzzy Set Theorie

Im folgenden Kapitel werden notwendige Definitionen erbracht.<sup>7</sup>

### **Definition 2.1:**

Sei eine Grundmenge  $G$  gegeben, dann nennt man

$A = \{(x; f(x)) | x \in G\}$  mit der Abbildung  $f_A : G \rightarrow [0,1]$

eine **Fuzzy Menge** in  $G$  oder eine unscharfe Menge auf  $G$ .<sup>8</sup>

### Bemerkung zu 2.1:

Die Abbildung  $f$  wird als **Zugehörigkeitsfunktion** der Fuzzy Menge bezeichnet, die jedem Element  $x \in G$  den Zugehörigkeitsgrad  $f(x)$  aus dem Intervall  $[0,1]$  zuordnet.

---

<sup>7</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), Kapitel 1 und Hubert, F. (2002), Unterkapitel 1.1 und Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), Kapitel 2.

<sup>8</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 8.

Beispiel zu 2.1:

Um Absatzmengen  $x \in \{x_1, \dots, x_{10}\}$  zu klassifizieren, werden sie mit einer Fuzzy Menge „realistisch-eintreffender Tagesabsatz“ durch einen ET beschrieben durch  $A = \{(1;1), (2;1), (3;0,9), (4;0,8), (5;0,6), (6;0,5), (7;0,2), (8;0,1), (9;0), (10;0)\}$ .

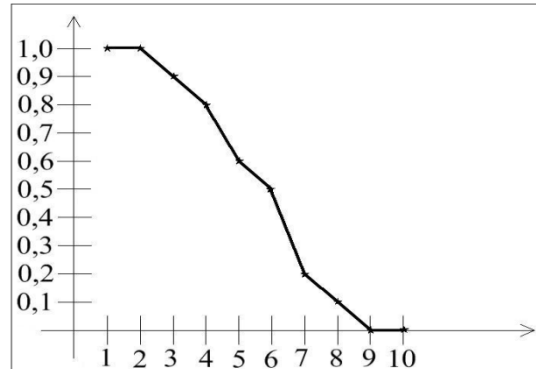


Abbildung 2: Fuzzy Menge aus dem Bsp. 2.1. Der Graph besteht jedoch nur aus den in A zusammengefassten isolierten Punkten. Die Verbindungslinien dienen nur der Veranschaulichung.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Rommelfanger, H. (1988), S. 8.

**Definition 2.2:**

$\exists x_1 \in G$  mit  $f(x_1) = 1$  und  $\forall x \in G \setminus \{x_1\}$  gilt  $f(x) = 0$ , so heißt die Fuzzy Menge auch **Singleton**. Notation:  $B = \{(x;1)\}$ .

**Definition 2.3:**

Der **Support** einer Fuzzy Menge A heißt  $S(A) = \{x \in G \mid f(x) > 0\}$  und die **Toleranz** heißt  $T(A) = \{x \in G \mid f(x) = 1\}$ .

Beispiel zu 2.3:

Der Support und die Toleranz aus dem Bsp. 2.1 sind

$$S(A) = \{(1;1), (2;1), (3;0,9), (4;0,8), (5;0,6), (6;0,5), (7;0,2), (8;0,1)\}.$$

$$T(A) = \{(1;1), (2;1)\}.$$

**Definition 2.4:**

Die **Höhe** von A ist  $H(A) = \sup_{x \in G} f_A(x)$ . A heißt **normalisiert**, wenn  $H(A) = \sup_{x \in G} f_A(x) = 1$ , sonst subnormal.

Bemerkung zu 2.4:

Eine Subnormale Fuzzy Menge C kann durch Division mit  $\sup_{x \in G} f_C(x)$  normalisiert werden.

**Definition 2.5:** Zwei unscharfe Mengen  $A, B \in G$  seien gegeben.

- i) Menge aller unscharfen Mengen von  $G$  ist die Fuzzy Potenzmenge  $P(G)$ .
- ii) Für  $A, B \in P(G)$  gilt: Inklusion:  $A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x), A \subset B \Leftrightarrow f_A < f_B \forall x \in G$ .

**Definition 2.6:**  $A$  sei eine unscharfe Menge,  $A$  heißt **konvex** wenn  $f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(f_A(x_1), f_A(x_2)) \forall x_1, x_2 \in G \wedge \forall \lambda \in [0,1]$  gilt.

Eine Fuzzy Menge  $A$  ist konvex, wenn alle ihre  $\alpha$ -Niveau-Mengen konvex sind. Ist  $A$  konvex so ist ihr Komplement  $A^c$  **konkav**.

**Definition 2.7:**  $A$  sei eine unscharfe, konvexe, normalisierte Menge. Eine Abbildung der reellen Zahlen auf  $A$ ,  $f_A : \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$  mit

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & z = x \\ \frac{x-m_1}{z-m_1} & x \in [m_1, z[ \quad m_1 < z \\ \frac{-x+m_2}{-z+m_2} & x \in ]z, m_2] \quad z < m_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt dann dreiecksförmige **Fuzzy Zahl** in  $\mathfrak{R}$ . Notation:

$$D = (z; m_1; m_2).^9$$

$f_A$  ist stückweise linear. Der Kern  $x = z$  ist einzigster Gipfelpunkt. Ist  $z - m_1 = m_2 - z = c \Rightarrow (z; c)$  ist eine symmetrische dreiecksförmige Fuzzy Zahl. Existieren zwei Zahlen  $z_1 < z_2$ , sodass  $f_A(z_1) = f_A(z_2) = 1$ , so bezeichnet man  $A$  als **Fuzzy Intervall** oder **Trapezförmige Fuzzy Zahl**. Notation:  $I = (z_1; z_2; m_1; m_2)$ .

---

<sup>9</sup> Vgl. Hubert, F. (2002), S. 9.

**Definition 2.8:**  $A$  sei eine unscharfe Menge und  $\alpha \in [0,1]$  eine reelle Zahl, dann bezeichnet man  $A_\alpha = \{x \in G \mid f(x) \geq \alpha\}$  als  $\alpha$ -**Niveau-Menge** von  $A$ .

Bemerkung zu 2.8: Wenn Gleichheit ausgeschlossen wird, bezeichnet man  $A_\alpha = \{x \in G \mid f(x) > \alpha\}$  als strenge  $\alpha$ -Niveau-Menge.

**Definition 2.9:** Zwei unscharfe Mengen  $A, B$  auf  $G$  sind gegeben.

i). **Durchschnitt**  $A \cap B$  mit  $f_{A \cap B} = \text{Min}\{f_A(x), f_B(x)\}, x \in G$ .

ii). **Vereinigung**  $A \cup B$  mit  $f_{A \cup B} = \text{Max}\{f_A(x), f_B(x)\}, x \in G$ .

**Definition 2.10:** Eine Funktion  $L: [0, +\infty[ \rightarrow [0,1]$  heißt Referenzfunktion von Fuzzy Zahlen, wenn gilt  $L(0) = 1 \wedge L$  ist nicht steigend in  $[0, +\infty[$ . Eine Fuzzy Zahl  $A$  heißt **L-R Fuzzy Zahl**, wenn sich ihre Zugehörigkeitsfunktion darstellen lässt als

$$f_A = \begin{cases} L\left(\frac{z-x}{\alpha}\right) \\ R\left(\frac{x-z}{\beta}\right) \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} x \leq z \wedge \alpha > 0 \\ x > z \wedge \beta > 0 \end{cases}$$

mit geeigneten Referenzfunktionen  $L$  und  $R$ .

Die in Def. 2.7 vorgestellte Fuzzy Zahl ist ebenso eine L-R Fuzzy Zahl mit der Referenzfunktion  $R(u) = L(u) = \text{Max}(0; 1-u)$ ; Notation:  $D_{LR} = (z; \alpha, \beta)$ ,  $\alpha$  wird als linke und  $\beta$  als rechte Spannweite von  $D_{LR}$  bezeichnet. Für  $x \in [m_1, z[$  und  $m_1 < z; (\alpha = z - m_1) > 0$  gilt:

$$L(u) = \text{Max}\left(0; 1 - \left(\frac{z-x}{\alpha}\right)\right) \stackrel{\alpha=z-m_1}{\Leftrightarrow} \text{Max}\left(0; 1 - \left(\frac{z-x}{z-m_1}\right)\right) = \text{Max}\left(0; \frac{z-m_1-z+x}{z-m_1}\right) = \text{Max}\left(0; \frac{x-m_1}{z-m_1}\right) = \frac{x-m_1}{z-m_1}.$$

Für  $x \in ]z, m_2]$  und  $z < m_2; (\beta = m_2 - z) > 0$  gilt:

$$R(u) = \text{Max}\left(0; 1 - \left(\frac{x-z}{\beta}\right)\right) \stackrel{\beta=m_2-z}{\Leftrightarrow} \text{Max}\left(0; 1 - \left(\frac{x-z}{m_2-z}\right)\right) = \text{Max}\left(0; \frac{m_2-z-x+z}{m_2-z}\right) = \text{Max}\left(0; \frac{m_2-x}{m_2-z}\right) = \frac{-x+m_2}{-z+m_2}.$$

Durch Nachrechnen lässt sich nachvollziehen, dass für  $x = z$  stets der Zugehörigkeitsgrad von 1 gilt. Für zwei Fuzzy Zahlen des gleichen L-R-Typs gelten die **erweiterten Operationen**:

$$\begin{aligned}
(z_1; \alpha_1; \beta_1)_{LR} + (z_2; \alpha_2; \beta_2)_{RL} &= (z_1 + z_2; \alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2)_{LR} \\
(z_1; \alpha_1; \beta_1)_{LR} - (z_2; \alpha_2; \beta_2)_{RL} &= (z_1 - z_2; \alpha_1 + \beta_2; \beta_1 + \alpha_2)_{LR} \\
x_0 * (z; \alpha; \beta)_{LR} &= (x_0 * z; x_0 * \alpha; x_0 * \beta)_{LR} \quad \text{für } x_0 > 0, x_0 \in \mathfrak{R}. \\
x_0 * (z; \alpha; \beta)_{LR} &= (x_0 * z; -x_0 * \beta; -x_0 * \alpha)_{RL} \quad \text{für } x_0 < 0, x_0 \in \mathfrak{R}.
\end{aligned}$$

Nach dem gleichen Prinzip werden die erweiterten Operationen für die trapezförmigen Fuzzy Zahlen  $I_{LR} = (z_1; z_2; \alpha; \beta)$  ausgeführt. Mit dem Erweiterungsprinzip lassen sich arithmetische Operationen auf unscharfe Mengen ausführen. Jedoch existiert in der Praxis auch eine Fülle von Schwierigkeiten bei der Anwendung des Erweiterungsprinzips, welche abhängig von der Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen sind. Als problemlos eignen sich die unscharfen Maximum- bzw. Minimum Funktionen und die Verwendung von L-R-Fuzzy Zahlen bzw. Intervallen und ihre voran genannten Operationen. Die Multiplikation zwischen zwei Fuzzy Zahlen bzw. Intervallen lässt sich nur approximativ bestimmen.<sup>10</sup> Jedoch sind für die folgenden Vermögensendwertmodelle die genannten algebraische Operationen „+“, „-“ und die Multiplikation mit einem Skalar ausreichend.

**Satz 2.11:**

Für zwei Fuzzy Zahlen  $A, B \wedge y \in \mathfrak{R}^+, \alpha \in [0,1]$  gilt:

$$S_\alpha(A + B) = S_\alpha(A) + S_\alpha(B) \wedge S_\alpha(y * A) = y * S_\alpha(A).$$

**Definition 2.12:**

Eine zweistellige Fuzzy Relation heißt

$$R: G_1 \times G_2 \xrightarrow{f_R} [0,1].$$

Bemerkung zu 2.12:

$f_R$  stellt die Zugehörigkeitsfunktion von  $R$  da. Wobei  $G_1 \times G_2$  das kartesische Produkt von klassischen Mengen darstellt.<sup>11</sup>

---

<sup>10</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 134.

<sup>11</sup> Vgl. Hubert, F. (2002), S. 31.

### 3 Erwartungswertbildung für die Aggregation

Die Prognose ist ein Fundament für Produktionsaktivitäten. Für unscharfe Daten, welche von einer kurzfristigen wechselnden Umgebung stammen, eignet sich die Fuzzy Logik.<sup>12</sup> Dieses Kapitel stellt Varianten für die sachliche Aggregation vor und minimiert rechentechnische Schwierigkeiten für Folge Modelle.<sup>13</sup>

#### 3.1 Statistische Erwartungswertbildung für die Prognose mit Fuzzy Zahlen

Für nachfolgende Definitionen und Beispiele sei  $|n| = \text{endlich} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge r_i \in \mathfrak{R}$ , die  $i^{\text{te}}$  Prognose,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definition 3.1.1:**

$$r_{ave} = \frac{r_1 + \dots + r_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n}$$

ist der statistische Erwartungswert bei gleichgewichteten Prognosen  $r_i$ .

Eine Anzahl von  $n$  dreiecksförmigen Fuzzy Zahlen (Def. 2.7) sei gegeben.

**Definition 3.1.2:**

Der statistische Erwartungswert von dreiecksförmigen Fuzzy Zahlen lautet

$$\begin{aligned} D_{ave} &= \frac{D_1 + \dots + D_n}{n} = \frac{(z^{(1)}; m_1^{(1)}, m_2^{(1)}) + \dots + (z^{(n)}; m_1^{(n)}, m_2^{(n)})}{n} \\ &= (z_{ave}; m_{1,ave}; m_{2,ave}) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{(i)}; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_1^{(i)}; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_2^{(i)} \right). \end{aligned}$$

**Definition 3.1.3:**

Die Differenz zweier Fuzzy Zahlen lautet (hier  $D_{ave}$  und  $D_i$ )

$$V_i = D_{ave} - D_i = (z_{ave} - z^{(i)}; m_{1,ave} - m_1^{(i)}; m_{2,ave} - m_2^{(i)}).$$

<sup>12</sup> Vgl. Bojadziev, G. / Bojadziev, M. (2007), S. 61.

<sup>13</sup> Vgl. Kruschwitz, L. (1995), S. 291.



„Die Defuzzifizierung ist die Umsetzung eines unscharfen Sachverhaltes in konkrete Zahlen und Werte.“<sup>14</sup> Aufgabe der Def. 3.1.2 ist die Defuzzifizierung. Dabei wird zuerst die Defuzzifizierungsmethode gewählt und dann die Ergebnisse ermittelt. Die Anzahl der Methoden sind vielseitig (bspw. Maximummethode, Schwerpunktmethod, Höhenmethode) und auch die Ergebnisse sind nicht identisch. Die Wahl der Methode liegt beim ET und hängt von einem befriedigenden Ergebnis ab.

### 3.2 Fuzzy Delphi Methode für die Prognose<sup>15</sup>

Eine Methode, die auf subjektive Einschätzung von Personen stützt, ist ein qualitatives Prognoseverfahren.<sup>16</sup> Die Fuzzy Delphi Methode ist eine mehrstufige, systematische Schätzmethode, welche verwendet wird, um Fehleinschätzungen von Experten zu vermeiden. Dreiecksförmige Fuzzy Zahlen eignen sich sehr gut für die Schätzungen der Ereignisse; wobei  $z^{(i)}$  den plausibelsten,  $m_1^{(i)}$  den kleinsten und  $m_2^{(i)}$  den größten Wert darstellt. Die Ereignisse umfassen Wissenschaft, Technologie und Wirtschaft. Die Fuzzy Delphi Methode vereint Meinungen und Ansichten und wurde von Kaufmann und Gupta erstmals 1988 vorgestellt. Sie besteht aus den folgenden vier Schritten:

1. Schritt: Experte  $E_i$  schätzt mögliche Realisationen  $(z^{(i)}; m_1^{(i)}; m_2^{(i)})$  von Ereignissen.
2. Schritt: Der Erwartungswert (Def. 3.1.2) wird gebildet. Die Differenz (Def. 3.1.3)  $V_i$  wird zur Nachprüfung zum Experten  $E_i$  zurück geschickt.
3. Schritt: Der Experte  $E_i$  präsentiert neue Schätzwerte. Der 2. Schritt wird solange ausgeführt, bis man sukzessiv zwei Werten nahe ist und die Schätzung akzeptiert.
4. Schritt: Falls man zur Erkenntnis neuer Information kommt, werden die Schritte 2 und 3 wieder aufgerollt.

#### Anwendungsbeispiel      Fuzzy Delphi Methode

8 Experten sollen die Absatzmengen eines Produktes in Geldeinheiten (GE) der ersten Periode schätzen.

---

<sup>14</sup> Traeger, D. H. (1994), S. 102.

<sup>15</sup> Vgl. Bojadziev, G. / Bojadziev, M. (2007), S. 71.

<sup>16</sup> Vgl. Kruschwitz, L. (2005), S. 17.

		plausibelster	minimalster	maximalster				
$E_i$	$D_i$	Absatz= $z^{(i)}$	Absatz= $m_1^{(i)}$	Absatz= $m_2^{(i)}$	$V_i$	$z_{ave}-z^{(i)}$	$m_{1,ave}-m_1^{(i)}$	$m_{2,ave}-m_2^{(i)}$
$E_1$	$D_1$	395	365	418	$V_1$	-5	5	2
$E_2$	$D_2$	391	379	414	$V_2$	-1	-9	6
$E_3$	$D_3$	398	383	427	$V_3$	-8	-13	-7
$E_4$	$D_4$	360	350	370	$V_4$	30	20	50
$E_5$	$D_5$	400	379	489	$V_5$	-10	-9	-69
$E_6$	$D_6$	396	374	422	$V_6$	-6	-4	-2
$E_7$	$D_7$	385	369	408	$V_7$	5	1	12
$E_8$	$D_8$	395	361	412	$V_8$	-5	9	8

Tabelle 1: Schätzungen  $D_i$  der Experten  $E_i$  für  $i = 1, \dots, 8$ .

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Bojadziev, G. / Bojadziev, M. (2007), S. 88.

Durch die Def. 3.1.2 und die Tabelle 1 erhält man den statistischen Erwartungswert von dreiecksförmigen Fuzzy Zahlen:

$$D_{ave} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z^{(i)}; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_1^{(i)}; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_2^{(i)} \right) = (390; 370; 420).$$

#### Interpretation der Lösung:

Ist der Manager mit dem Durchschnitt nicht zufrieden, werden die Differenzen an den jeweiligen Experten zur Nachprüfung zurück geschickt. Die Schritte 2 und 3 können solange wiederholt werden, bis der Manager mit dem Durchschnittswert und den Differenzen zufrieden ist. Ist der Manager mit dem ersten Durchschnittswert  $D_{ave}$  zufrieden, sind die Werte folgendermaßen zu interpretieren: Die Absatzmenge der ersten Periode eines Produktes hat ein Intervall von [370,420]. Wobei der Absatz i.H.v. 390 GE den höchsten Zugehörigkeitsgrad (höchste Realisation) hat.

Möchte man einigen Experten eine stärkere Gewichtung geben, so sind Gewichte im Erwartungswert miteinzubeziehen. Die Wahl des Mittelwertes ist eine Variante der Defuzzifizierung, die in dieser Situation am sinnvollsten erscheint. Weitere

Durchschnittswertbildung sind bspw.  $G_{ave} = \frac{2z_1 + m_1 + m_2}{4}$  oder  $H_{ave} = \frac{4z_1 + m_1 + m_2}{6}$ .

Liegt der Maximum Wert einer Fuzzy Zahl nahe dem Zentrum, dann ist eine zusätzliche Gewichtung von  $z_i$  überflüssig. Die Durchschnittswertbildung lässt sich auch auf trapezförmige Fuzzy Zahlen erweitern. Weitere Anwendungen für „Fuzzy Averaging“ (Fuzzy Erwartungswertbildung) sind bspw. „Fuzzy Project Evaluation and Review

Technique (PERT)”, „Fuzzy Critical Path Method (CPM)” und „Fuzzy Averaging for Decision Making”.<sup>17</sup>

### Schlussfolgerung:

Für ungewisse Daten, die prognostiziert werden müssen und keine Wahrscheinlichkeiten vorliegen, eignet sich die Fuzzy Delphi Methode. Für die Schätzungen nutzen die Experten ihre individuelle Kompetenzen und ihre Subjektivität. Die Fuzzy Delphi Methode bietet ein nützliches Instrumentarium für effektives Planen.

### 3.3 Fuzzy Erwartungswertbildung mit dem Fuzzy Erwartungswert

Die bis hierhin gezeigte Erwartungswertbildung entspricht dem des statistischen arithmetischen Mittels. Der repräsentativste Zugehörigkeitsgrad einer Fuzzy Menge wird durch Bildung des Fuzzy Erwartungswertes (*FEW*) erreicht.<sup>18</sup>

**Definition 3.3:**  $FEW = \sup\{x_i; \min(f_{A_1}(x_i), \dots, f_{A_m}(x_i))\} \mid x_i \in G_1 \cup \dots \cup G_m; i = 1, \dots, k$   
 $\wedge |m| = \text{endliche Anzahl aller Grundmengen } G$   
 $\wedge |k| = \text{endliche Anzahl der Elemente } G_1 \cup \dots \cup G_m.$

heißt Fuzzy-Erwartungswert *FEW*.

### Anwendungsbeispiel *FEW*

Zur Veranschaulichung werden aus dem Anwendungsbeispiel „Fuzzy Delphi Methode“ die Fuzzy Zahlen  $D_i$  von  $E_i$ , für  $i = 1, 2$  betrachtet. Für  $D_1 = \{395; 365; 418\}$  und  $D_2 = \{391; 379; 414\}$  erhält man die Grundmenge  $G_1 = \{365, \dots, 418\}$  und  $G_2 = \{379, \dots, 414\}$ , welche die Absatzmengen repräsentieren. Die Zugehörigkeitsgrade  $f_{A_i}(x)$  für  $\forall x \in G_i$  ergeben sich durch die Def. 2.7. Jedoch gilt für die Berechnung von  $f_{A_i}(x)$  das  $m_1^{(i)} = m_1^{(i)} - 1 \wedge m_2^{(i)} = m_2^{(i)} + 1$  ist. Das hat den Hintergrund, dass  $m_1^{(i)} \wedge m_2^{(i)}$  auch eine Realisierungschance haben soll. Nach Def. 2.1 ergeben sich die beiden Fuzzy Mengen:

<sup>17</sup> Vgl. Bojadziev, G. / Bojadziev, M. (2007), Chapter 3.

<sup>18</sup> Vgl. Tizhooh, H. R. (1998), S. 78.

$$A_1 = \{(365; \frac{1}{31}), (366; \frac{2}{31}), \dots, (394; \frac{30}{31}), (395; 1), (396; \frac{23}{24}), (397; \frac{22}{24}), \dots, (418; \frac{1}{24})\}$$

$$A_2 = \{(379; \frac{1}{13}), (380; \frac{2}{13}), \dots, (390; \frac{12}{13}), (391; 1), (392; \frac{23}{24}), (393; \frac{22}{24}), \dots, (414; \frac{1}{24})\}$$

$$\begin{aligned} FEW &= \sup\{x_i; \min(f_{A_1}; f_{A_2})\} \\ &= \sup\{\min((365; \frac{1}{31}), (365; 0)), \dots, \min((391; \frac{27}{31}), (391; 1)), \min((392; \frac{28}{31}), \\ &\quad (392; \frac{23}{24})), \min((393; \frac{29}{31}), (393; \frac{22}{24})), \dots, \min((418; \frac{1}{24}), (418; 0))\} = (393; \frac{22}{24}). \end{aligned}$$

Dementsprechend hat der Absatz von 393 die höchste Realisierung zwischen den Experten  $E_1$  und  $E_2$ . Eine weitere Anwendung des *FEW* ist die Fuzzy-Bildverbesserung. Aber es gibt auch Beispiele, in denen der *FEW* schlechter als das arithmetische Mittel abschneidet. Ursache dafür ist die zu schwache Sensitivität auf Populationsdichte der Zahlenmengen. Deshalb wurden alternative Methoden zur Erwartungswertbildung entwickelt.<sup>19</sup>

Ein Beispiel für ein schlechtes Abschneiden des *FEW* ergibt sich bereits, wenn man den *FEW* für die Experten 1 bis 8 bildet. Existiert ein einziger geschätzter Absatz bzw.

$x_1 \in G_1 \cup \dots \cup G_m \wedge x_1 \notin G_1 \wedge \dots \wedge G_m \xRightarrow{\text{nach Def. 2.9 \wedge 3.3}} (x_1; f_{A_h}(x_1) = 0) \in FEW$  für ein  $h \in \{1, \dots, m\}$ .  $\exists$  zu jedem  $x_i \in G_1 \cup \dots \cup G_m$  ein  $f_{A_1}(x_i) = 0 \vee \dots \vee f_{A_m}(x_i) = 0 \Rightarrow x_i \notin G_1 \wedge \dots \wedge G_m \Rightarrow FEW = 0$ . Dies wiederum hat keine Aussagekraft und ist nicht realitätskonform. Für das beschriebene Anwendungsbeispiel ergibt sich ein *FEW* von Null. Diese Aussage ist realitätsfremd. Die folgende Veranschaulichung ist dabei so zu interpretieren, dass die schwarzen Felder einen Zugehörigkeitsgrad aufweisen.

---

<sup>19</sup> Vgl. Tizhooh, H. R. (1998), S.79 f.



Abbildung 3:  $\blacksquare Z = (E_1, \dots, E_8)^T \times (x_1, \dots, x_{140}) \xrightarrow{f \text{ nach Def. 2.7}} f_{A_h}(x_i) \in [0,1]$ .

Quelle: Eigene Darstellung.

Angemerkt sei, dass der ET die ersten Schätzungen der Experten  $E_1, \dots, E_8$  akzeptiert hat. Jedoch sollte der 2. und 3. Schritt der Fuzzy Delphi Methode bei der Wahl des *FEW* Anwendung finden, damit die Ausreißer (hier  $E_4$ ) ihre Schätzungen erneut überarbeiten können.

### 3.4 Der Kompromiss

Ein Vorschlag zum Kompromiss zwischen den vorgestellten Methoden könnte bspw. der statistische Durchschnitt der Zugehörigkeitsgrade sein. Dafür wird beim *FEW* der Min-Operator mit  $f_{A_i}^{E(x)}(x_i)$  ausgetauscht.

**Definition 3.4.1:** Der Durchschnitt der Zugehörigkeitsgrade für  $x_i, i = 1, \dots, k$ .

$$f_{A_i}^{E(x)}(x_i) = \frac{\sum_{h=1}^m f_{A_h}(x_i)}{m}.$$

$$FEW^{(2)} = \sup\{x_i; ((f_{A_1}(x_i) + \dots + f_{A_m}(x_i))/m)\} \quad x_i \in G_1 \cup \dots \cup G_m; i = 1, \dots, k.$$

Um „sinnvolle“ Repräsentanten zu erhalten und aufgrund dessen, dass ein Zufriedenheitsgrad nahe 0 nicht akzeptabel ist, geht der ET folgendermaßen vor: Aus der Fuzzy Menge der  $A_{f_{A_i}^{E(x)}(x_i)}$  entschließt sich der ET ein  $\alpha$ -Cut für  $\alpha \geq 0,1$  anzuwenden (Def. 2.8). Vorher wird die Fuzzy Menge normalisiert (Def. 2.4). Das daraus resultierende Intervall ist  $[356, \dots, 436]$ , wobei  $z = 395$  den Gipfelpunkt darstellt. Das Risiko, dass ein  $x_i$  mit  $f_{A_i}^{E(x)}(x_i) < 0,1$  der Wahre ist, nimmt der ET in Kauf.

Um einen Kompromiss für den Absatz mit dem höchsten Realisierungsgrad zu erlangen, kann man nach Belieben Gewichtungen mit einbeziehen, z.B. die Anwendung der Hurwicz-Regel mit einem Optimismusparameter  $\gamma$ .

**Definition 3.4.2:** Die Hurwicz-Regel besagt: Multipliziere die höchsten Auszahlungen einer Zeile mit  $\gamma \in [0,1]$  und die niedrigsten Auszahlungen mit  $(1-\gamma)$ , darauf folgt die Aufsummierung der Auszahlungen.<sup>20</sup>

Der ET könnte sich bspw. für  $\gamma=0,65$  für den *FEW* aufgrund der vorliegenden Daten entscheiden.

$$\max_{S \in S} = \{ \gamma * z \in D_{ave} + (z \in A_{f_{A_i}^{E(x)}(x_i)}) * (1-\gamma) \} \text{ für } S = \{ z \in A_{f_{A_i}^{E(x)}(x_i)}; z \in D_{ave} \}.$$

$$\rightarrow \max_{S \in S} = \{ 0,65 * 390 + 0,35 * 395 \} = 391,75$$

### 3.5 Zusammenfassung der vorgestellten Methoden

Die statistische Erwartungswertbildung auf Fuzzy Zahlen brachte ein Intervall von [370,...,420] mit dem Gipfelpunkt 390. Die Berechnung des *FEW* brachte kein zufriedenes Ergebnis, jedoch hätten unter Fortsetzung der Schritte 2 und 3 der Fuzzy Delphi Methode Ausreißer sukzessiv ausgemerzt werden können. Möchte ein Experte trotz allem seine Schätzungen nicht abändern, obwohl sie hohe Differenzen zum Durchschnitt aufweisen, dann können die Durchschnitte der Zugehörigkeitsgrade für jedes  $x_i$  bzw.

$f_{A_i}^{E(x)}(x_i)$  ermittelt werden. Somit fallen Ausreißer nicht mehr so stark ins Gewicht.

Jedoch sollte der ET ein  $\alpha$ -Niveau festlegen und nur Werte akzeptieren, die die Bedingung nach Def. 2.8 erfüllen. Mit einem  $\alpha$ -Niveau von 0,1 wurde ein Intervall von [356,...,436] mit dem Gipfelpunkt 395 erlangt. Mit den beiden Intervallen lassen sich zwei Fuzzy Zahlen ermitteln:

---

<sup>20</sup> Vgl. Wiese, H. (2002), S. 19.

Man setzt den Gipfelpunkt  $z_p = (p(z \in A_{f_{A_i}^{E(x)}(x_i)}; z \in D_{ave}), 1)$ , die linke Spannweite  $m_{1,p} = (p(m_{1,ave}; m_{1,f_{A_i}^{E(x)}(x_i)}); 0)$  und die rechte Spannweite  $m_{2,p} = (p(m_{2,ave}; m_{2,f_{A_i}^{E(x)}(x_i)}); 0)$  für  $p = \max \vee p = \min$ .

Dabei bedeutet  $p = \min$  die pessimistische und  $p = \max$  die optimistische Variante. Für das Beispiel lautet die pessimistische Variante  $D_{\min} = (390; 356; 420)$  und die optimistische Variante  $D_{\max} = (395; 370; 436)$ .

#### 4 Das deterministische Investitionsmodell

**Definition 4.1:** Ein Vermögensendwertmodell<sup>21</sup> sei folgendermaßen definiert

$$z(x) = \sum_{j=1}^n z_{T,j} x_j \rightarrow \text{Max!}$$

u.B.d.R.

$$L_{t=0} : \quad AG + \sum_{j=1}^n z_{0,j} x_j \geq 0$$

$$L_{t=1, \dots, T-1} : \quad \sum_{j=1}^n z_{t,j} x_j \geq 0$$

$$A_{t=1, \dots, T \wedge w=1, \dots, W} : \quad \sum_{j=1}^n k_{t,w,j} x_j \leq N_{t,w}$$

$$B_{t=1, \dots, T \wedge v=1, \dots, V} : \quad \sum_{j=1}^n l_{t,j,v} x_j \leq Q_{t,v}$$

$$NNB_{j=1, \dots, n} : \quad x_j \geq 0$$

Indizes:

- Index der Investitionsobjekte ( $j = 1, \dots, n$ ).
- Periodenindex ( $t = 1, \dots, T$ ).
- Produktionsfaktoren ( $v = 1, \dots, V$ ).

---

<sup>21</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 7 ff.

- Index der Erzeugnisse ( $w = 1, \dots, W$ ).

Variablen: - Multiplikator  $x_j$  und Zielwert  $z$ .

Die Zielfunktion  $z(x)$  setzt sich aus der Summe der Ein- und Auszahlungen der letzten Periode  $T$  eines  $j^{\text{ten}}$  Investitionsprojektes, multipliziert mit  $x_j$  dem Multiplikationsniveau, zusammen.  $L_{t=0}$  steht für die nullte Liquiditätsbedingung, wobei AG der Anfangsgeldbestand ist und die Liquiditätsbedingungen der Folgeperioden sind  $L_{t=1, \dots, T-1}$ .  $A_{t=1, \dots, T \wedge w=1, \dots, W}$  steht für die Absatzbedingung der herstellbaren Erzeugnisse ( $w = 1, \dots, W$ ),  $k_{t,w,j}$  ist die Menge der hergestellten Erzeugnisse eines Produktes  $w$  in der Periode  $t$ , des Investitionsprojekt  $j$ .  $N_{t,w}$  ist die Nachfrage des Erzeugnisses  $w$  in der Periode  $t$ . Die Beschaffungsrestriktionen sind  $B_{t=1, \dots, T \wedge v=1, \dots, V}$  und  $l_{t,j,v}$  ist die Menge der benötigten Produktionsfaktoren ( $v = 1, \dots, V$ ) in der Periode  $t$  für das Investitionsprojekt  $j$ .  $Q_{t,v}$  ist die Menge der Produktionsfaktoren  $v$ , die in der Periode  $t$  höchstens zur Verfügung steht.

Modellaggregation<sup>22</sup>: Es ist eine Aggregation der Daten notwendig, um die Problematik des Informationsaufwandes zu bewältigen.

Zeitliche Aggregation: Zusammenfassen von mehrere Teilperioden zu einer Modellperiode.

Sachliche Aggregation: Zusammenfassen von mehreren Variablen oder Konstanten zu einer einzigen im Modell.

### **Anwendungsbeispiel**      Deterministisches Investitionsmodell

Um ein realistisches Investitionsmodell vorzuführen bzw. aufzuzeigen, wird ein bereits existierendes Modell von Jochen Wolf verwendet.<sup>23</sup>

Um das Modell von Wolf den heutigen Verhältnissen anzupassen, wurde der Zinssatz für die Finanzinvestitionen herabgesetzt und auch Finanzierungsmöglichkeiten mit eingebaut.

---

<sup>22</sup> Vgl. Kruschwitz, L. (2005), S. 291.

<sup>23</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 11 f.



Der ET hat die Modellaggregation bereits vorgenommen, damit das Modell nicht vom Umfang her „explodiert“.

Vier Maschinen (Investitionsobjekte) I, II, III und IV stehen zur Herstellung eines Produktes zur Verfügung. Der dafür benötigte Grundstoff sei unbegrenzt verfügbar, jedoch benötigen die Maschinen I und II einen begrenzt zur Verfügung stehenden Zusatzstoff. Der AG beträgt 5100 GE. Zusätzlich sind noch 2000 GE durch Kreditfinanzierung möglich. Ebenso stehen dem Investor beliebige Beträge zu (gleichlautenden) Zinskosten zur Verfügung und es ist möglich, für den kompletten Planungszeitraum Finanzinvestitionen zu einem Zinssatz von (gleichlaufend) zu 5 % durchzuführen.

t \ j	I	II	III	IV	$Q_{t,v}$	t \ j	I	II	III	IV	$N_{t,w}$	t \ j	I	II	III	IV
1	4	3	0	0	30	1	70	15	30	20	390	0	-1000	-400	-500	-500
2	3	4	0	0	30	2	50	20	0	5	250	1	500	-100	400	300
3	3	10	0	0	30	3	50	70	30	25	330	2	400	-150	-200	50
												3	320	860	400	250

Tabelle 2: Angaben für den benötigten Zusatzstoff, Absatzmengen und Zahlungsreihen.  
Quelle: Wolf, J. (1988), S. 12.

Alle Projekte bzw. Maschinen sind beliebig teilbar und untereinander vollkommen unabhängig.<sup>24</sup> Die maximal mögliche Kreditfinanzierung (8,5% Zinseszins) sieht folgendermaßen aus:  $c_{t=0} = 2000$  GE  $\wedge$   $c_T = -2554,58$  GE. Für die beliebig zur Verfügung stehenden Beträge jeder Periode fallen Zinskosten i.H.v. 9% an.

Aus der Def. 4.1 und aus der Tabelle 2 ergibt sich das folgende Modell:

#### Modell 4.1:

$$L_{t=T} : z(x) = 320x_1 + 860x_2 + 400x_3 + 250x_4 + 105x_7 - 109x_{10} - 2554,58x_{11} \rightarrow \text{Max!}$$

u.B.d.R.

$$L_{t=0} : 1000x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 500x_4 + 100x_5 - 100x_8 - 2000x_8 - 5100 \leq 0$$

$$L_{t=1} : -500x_1 + 100x_2 - 400x_3 - 300x_4 - 105x_5 + 100x_6 + 109x_8 - 100x_9 \leq 0$$

$$L_{t=2} : -400x_1 + 150x_2 + 200x_3 - 50x_4 - 105x_6 + 100x_7 + 109x_9 - 100x_{10} \leq 0$$

$$A_{t=1} : 70x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 - 390 \leq 0$$

<sup>24</sup> Vgl. Kruschwitz, L. (2005), S. 255 und Wolf, J. (1988), S. 11.

$$A_{t=2} : 50x_1 + 20x_2 + 5x_4 - 250 \leq 0$$

$$A_{t=3} : 50x_1 + 70x_2 + 30x_3 + 25x_4 - 330 \leq 0$$

$$B_{t=1} : 4x_1 + 3x_2 - 30 \leq 0$$

$$B_{t=2} : 3x_1 + 4x_2 - 30 \leq 0$$

$$B_{t=3} : 3x_1 + 10x_2 - 30 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geq 0 \wedge x_{11} \leq 1$$

„Eine effektive Lösung praktischer Optimierungsaufgaben ist ohne Computer nicht möglich.“<sup>25</sup> Alle Lösungen werden mit Einsatz des Solvers von Microsoft Excel illustriert. Ein Vorteile des Solvers ist die schnelle, einfache Handhabung. Der Solver lässt sich als Add-In für Microsoft Excel kostenlos implementieren. Die Nachteile des Solvers bestehen unter anderem darin, dass man nur eine mögliche Lösung erhält, gelegentlich liefert der Solver falsche Näherungswerte und scheitert ggf. bei überdimensionalen Aufgaben (bspw. bei hohen Anzahlen von Variablen und Restriktionen).

#### Lösung des Modells 4.1:<sup>26</sup>

Variablen	Werte	Zielfunktion	
$x_1 =$	4,37499999832723	$z: = 320 * x_1 + 860 * x_2 + 400 * x_3 + 250 * x_4 + 105 * x_7 - 109 * x_{10} - 2554,58 * x_{11}$	=6695,90625
$x_2 =$	1,5		
$x_3 =$	0	<b>u.B.d.R.</b>	
$x_4 =$	0,250000003345547	$L_{t=0} = 1000 * x_1 + 400 * x_2 + 500 * x_3 + 500 * x_4 + 100 * x_5 - 100 * x_8 - 2000 * x_{11} - 5100$	=0
$x_5 =$	0	$L_{t=1} = -500 * x_1 + 100 * x_2 - 400 * x_3 - 300 * x_4 - 105 * x_5 + 100 * x_6 + 109 * x_8 - 100 * x_9$	=0
$x_6 =$	21,1250000016928	$L_{t=2} = -400 * x_1 + 150 * x_2 + 200 * x_3 - 50 * x_4 - 105 * x_6 + 100 * x_7 + 109 * x_9 - 100 * x_{10}$	=0
$x_7 =$	37,5562499967591	$A_{t=1} = 70 * x_1 + 15 * x_2 + 30 * x_3 + 20 * x_4 - 390$	=-56,25
$x_8 =$	0	$A_{t=2} = 50 * x_1 + 20 * x_2 + 5 * x_4 - 250$	=0
$x_9 =$	0	$A_{t=3} = 50 * x_1 + 70 * x_2 + 30 * x_3 + 25 * x_4 - 330$	=0
$x_{10} =$	0	$B_{t=1} = 4 * x_1 + 3 * x_2 - 30$	=-8
$x_{11} =$	0	$B_{t=2} = 3 * x_1 + 4 * x_2 - 30$	=-10,875
		$B_{t=3} = 3 * x_1 + 10 * x_2 - 30$	=-1,875

Abbildung 4: Lösung des Modells 4.1.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Wolf, J. (1988), S. 13.

<sup>25</sup> Benker, H. (2007), S. 287. Benker gibt eine detaillierte Anleitung zur Implementierung und Anwendung des Solvers von Excel an. Alternativen zum Solver sind CONOPT, EASY-OPT, LINDO, LINGO, usw..

<sup>26</sup> Siehe Thesis Modell 4.1, Datenträger.

### Interpretation der Lösung des Modells 4.1:

t	0	1	2	3
Basiszahlung	5100	0	0	0
4,375-mal Projekt 1	-4375	2187,5	1750	1400
1,5-mal Projekt 2	-600	-150	-225	1290
0,25-mal Projekt 4	-125	75	12,5	62,5
21,125-mal Projekt 6		-2112,5	2218,125	
37,55625-mal Projekt 7			-3755,63	3943,40625
Endvermögen	0	0	0	6695,90625

Tabelle 3: Lösungsinterpretation des Modells 4.1.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Kruschwitz, L. (2005), S. 258.

Dementsprechend wird das Projekt  $x_3$ , die Finanzinvestition  $x_5$  und Finanzierungsmöglichkeiten nicht durchgeführt, um den Vermögensendwert zu maximieren.

### Kritische Würdigung des Modells 4.1:

Die Prämissen und die Informationsbeschaffungen verursacht Probleme, denn der Beschaffungsbereich bezieht sich lediglich auf ein einstufiges Investitionsmodell. Aber in der Praxis werden überwiegend mehrstufige Modelle eingesetzt (bspw. im Maschinenbau). Die Absatzbedingungen bzw. die maximalen Absatzmengen weisen nur einen Repräsentanten auf, allerdings kann ein Unternehmen durch Marketinginstrumente den Absatz beeinflussen. Der Investitions- und Finanzierungsbereich arbeitet mit prognostizierten Daten (bspw. der Zinssatz), welche ein Maß an Unsicherheit mitbringen. Eine Vielzahl weiterer Kritiken findet man in der Lektüre.<sup>27</sup> Um den vorgetragenen Kritikpunkten Rechnung tragen zu können, bietet sich die Einbeziehung der Fuzzy Set Theorie bei der Modellierung des Investitionsproblems an.

Zum Beispiel gilt für das Anwendungsbeispiel 4.1: Rechnet der ET mit einem Zinssatz von 7% für die beliebig zur Verfügung stehenden Beträge jeder Periode, dann erreicht er einen Zielwert von 6701,95 GE.<sup>28</sup>

Um das Modell 4.1 zu erweitern bzw. um mehr Informationen einfließen zu lassen, ist der Prozess der **Fuzzifizierung** notwendig. Fuzzifizierung bedeutet, einen Sachverhalt unscharf zu beschreiben, indem man erst die unscharfe Menge (bzw. die Grundmenge)

<sup>27</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 14 f und Kruschwitz, L. (2005), S. 286 f.

<sup>28</sup> Siehe Thesis Modell 4.1 dynamisch, Datenträger.

festlegt, dann die Zugehörigkeitsfunktion ermittelt und abschließend die Zugehörigkeitsgrade ermittelt.<sup>29</sup>

Ein ET kann vage Vorstellungen über Absatzmengen haben (siehe Bsp. 2.1). Eine Möglichkeit vage Informationen ins Modell einfließen zu lassen, ist die Aufweichung der scharfen Restriktionsgrenzen.<sup>30</sup>

Aber auch die Koeffizienten der Restriktionen oder die der Zielfunktion können unscharf beschrieben werden. Ein Vorteil der unscharfen Modellierung ist, dass ein ET mehrere Repräsentanten aus einem Intervall wählen kann.

## 5 Zugehörigkeitsfunktionen über weiche Restriktionen/Modellierung flexibler Restriktionsgrenzen

Für folgende Definitionen und Modelle sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Definition 5.1:** Die weiche Restriktion oder Nebenbedingung (auch soft constraint genannt) lautet:

$$g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = a_i x \leq_{\approx} b_i; b_i + d_i$$

für  $i = 1, \dots, m_1$ .

Bemerkung zu 5.1: Die Ordnungsrelation „ $\leq_{\approx}$ “ bedeutet dabei „überschreite möglichst nicht  $b_i$ , bleibe aber auf jeden Fall kleiner oder gleich  $b_i + d_i$ “.<sup>31</sup>

Auf dem Intervall der weichen Restriktionsgrenzen  $[b_i, b_i + d_i]$  kann der ET eine Zugehörigkeitsfunktion  $f_i(g_i)$  definieren (Def. 2.1), die seine Präferenzen ausdrückt.

---

<sup>29</sup> Vgl. Traeger, D. H. (1994), S. 80.

<sup>30</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 17.

<sup>31</sup> Rommelfanger, H. (1988), S. 166.

Für  $f_i : \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$  gilt:<sup>32</sup>

$$f_i(g_i) = \begin{cases} 1 & g_i \leq b_i \\ \in [0,1] & b_i < g_i \leq b_i + d_i \\ 0 & b_i + d_i < g_i \\ \text{ist monoton fallend} & b_i \leq g_i \leq b_i + d_i \end{cases} \quad \text{für}$$

Für die weichen Restriktionen existiert eine endliche Menge  $m_1$  von Fuzzy Mengen (Def. 2.1). Nur der Support (Def. 2.3) jeder Fuzzy Menge wird in Betracht gezogen. Die Aggregation erfolgt mittels der Def. 2.9i).

Die **Menge der zulässigen Lösungen**<sup>33</sup> eines Fuzzy LP Modells bezeichnet man als

$$x_u = \bigcap_{i=1}^{m_1} \{ (x \in G \mid f_i(g_i(x)) > 0) \} \xrightarrow{\text{Für } i=1, \dots, m_1. \text{ Gilt } \forall f_i \text{ das } f_i(g_i) > 0 \text{ für } g_i < b_i + d_i \wedge f_i(g_i) = 0 \text{ für } g_i \geq b_i + d_i} \rightarrow$$

$$x_u = \{ x \in \mathfrak{R}_+^n \mid \begin{aligned} &g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n < b_i + d_i && \text{für } i = 1, \dots, m_1 \\ &g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i && \text{für } i = m_1 + 1, \dots, m \\ &x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \}$$

Um den Verlauf von  $f_i(g_i)$  am effektivsten zu ermitteln, muss ein ET wissen, wie viele Informationen er über das Intervall  $[b_i, b_i + d_i]$  besitzt.

**Definition 5.2:**

Die **Lineare Zugehörigkeitsfunktion** lautet:

$$f_i(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } g_i \leq b_i \\ 1 - \frac{g_i - b_i}{d_i} & \text{für } b_i < g_i < b_i + d_i \\ 0 & \text{für } b_i + d_i \leq g_i \end{cases}$$

Der Zufriedenheitsgrad fällt im Intervall  $[b_i, b_i + d_i]$  linear ab. Das Heranziehen ausschließlich linearer Zugehörigkeitsfunktionen gibt die in der Wirklichkeit existierenden Abhängigkeiten nicht sachgenau wieder. Sie werden deshalb angenommen, weil die Anwendung des Simplexverfahrens dadurch möglich wird und aufgrund eines

<sup>32</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 167.

<sup>33</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 175 f. Zur weiteren Modellierung einer vollständigen/effizienten Lösung wird auf die Literatur verwiesen.

Informationsmangels des ET's, da ein ET nur wenige Informationen über das Intervall  $[b_i, b_i + d_i]$  besitzt.<sup>34</sup>

**Definition 5.3:** Eine weitere Möglichkeit  $f_i(g_i)$  zu charakterisieren bietet die **konkave Zugehörigkeitsfunktion**. Dabei wird  $f_i(g_i) \in [b_i, b_i + d_i]$  einer konkaven Zugehörigkeitsfunktion zugeordnet.

Nach Rommelfanger geben konkave Zugehörigkeitsfunktionen sehr gut das Zufriedenheitsempfinden eines ET's wieder, da  $f_i(g_i)$  umso mehr abnimmt, je mehr die Grenze  $b_i$  überschritten wird.<sup>35</sup>

Kennt der ET nur weniger bzw. nicht alle Punkte für  $f_i(g_i) \in [b_i, b_i + d_i]$ , so ist die konkave Zugehörigkeitsfunktion nicht anwendbar. Desweiteren führt sie zu einem nichtlinearen Optimierungsmodell. Nach Rommelfanger eignen sich stückweise lineare Funktionen, die dann einen linearen Polygonzug ergeben.

**Satz 5.4:** Jede stetige und reell wertige Funktion auf  $[b_i, b_i + d_i]$  lässt sich durch eine stückweise lineare Funktion approximieren.

Beweis zu 5.4: Weierstraßsche Approximationssatz:

Es gibt zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Polynom  $p(x)$ , sodass

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \text{ gilt, } \forall x \in [b_i, b_i + d_i].^{36}$$

Bemerkung zu 5.4: Die Kenntnis des kompletten Verlaufs von  $f_i(g_i)$  nach Def. 5.3 ist nicht notwendig. Durch den Satz 5.4. und durch stückweise lineare Funktionen werden die restlichen Werte ergänzt. Je feiner dabei die Unterteilung der Intervalle ist, desto genauer ist die Approximation. Der Informationsstand des ET's kann dadurch genau ausgeformt werden.<sup>37</sup>

---

<sup>34</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 168 und Wolf, J. (1988), S. 25 / S. 42.

<sup>35</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 169.

<sup>36</sup> Vgl. Naas, J. / Tutschke, W. (1986), S. 50 ff.

<sup>37</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 45 f.

Beispiel zu 5.4:

Ein ET kann zu vier Werten  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [b_i, b_i + d_i]$  die jeweiligen Zugehörigkeitsgrade zuordnen, die sein subjektives Empfinden ausdrücken  $\rightarrow f(x_1) = 1 \wedge f(x_2) = 0,8 \wedge f(x_3) = 0,2 \wedge f(x_4) = 0$ .

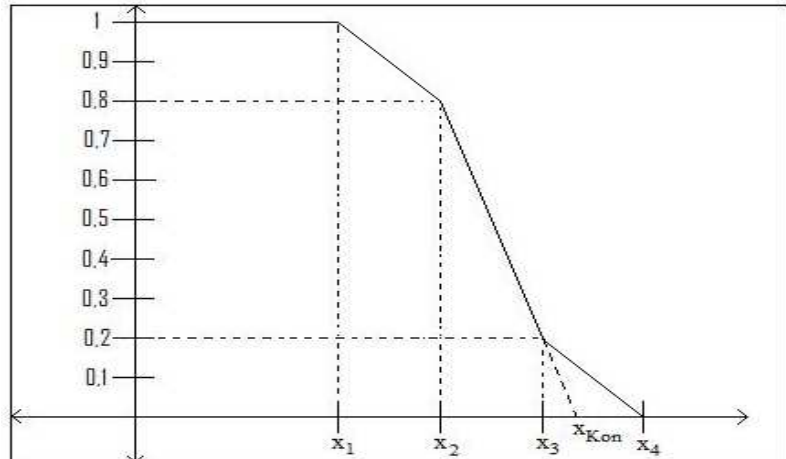


Abbildung 5: Stückweise lineare Funktionen.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Rommelfanger, H. (1988), S. 198.

Durch die vier gegebenen Punkte  $P_1 = (x_1; 1)$ ,  $P_2 = (x_2; 0,8)$ ,  $P_3 = (x_3; 0,2)$  und  $P_4 = (x_4; 0)$  lassen sich die Zugehörigkeitsfunktionen  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  berechnen.<sup>38</sup>

Alle stückweise linearen Funktionsgleichungen werden in Form einer Java Methode demonstriert.<sup>39</sup>

Angemerkt sei, dass der Polygonzug von  $P_1 = (x_1; 1)$  bis  $P_4 = (x_4; 0)$  nicht die Eigenschaft der Konkavität erfüllt. Konkavität kann dadurch erreicht werden, dass man das Intervall  $[x_1, x_4]$  auf  $[x_1, x_{Kon}]$  kürzt.

<sup>38</sup> Vgl. Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 155 ff.

<sup>39</sup> Siehe Anhang B.

**Definition 5.5:** Eine Zugehörigkeitsfunktion, die durch stückweise lineare Funktionen beschrieben wird, lautet:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } b_i = x_1 \geq x \\ \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 & \text{für } x_1 < x \leq x_2 \\ \beta_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} x + y_2 - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} x_2 & \text{für } x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \\ \beta_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} x + y_{n-1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} x_{n-1} & \text{für } x_{n-1} < x \leq x_n \\ 0 & \text{für } x < x_n = b_i + d_i \end{cases}$$

## 6 Fuzzy lineare Programmierungsmodelle mit weichen Restriktionen

Das traditionelle LP Modell, wie bspw. Modell 4.1, hat eine exakte Lösung aufgrund des scharfen Dateninputs. Eine nachträglich erweiterte Optimierung oder Analyse kann durch unscharfe Restriktionen erfolgen.

### 6.1 Parametrische Programmierung

**Definition 6.1.1:** Ein Fuzzy LP Modell<sup>40</sup>, welches weiche Restriktionen enthält, lautet

$$z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \tilde{Max}!$$

u.B.d.R.

$$x_L = \begin{cases} g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq_{\approx} b_i; b_i + d_i & \text{für } i = 1, \dots, m_1 \\ g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i & \text{für } i = m_1 + 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

---

<sup>40</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 174 f.



Es gilt:  $z \rightarrow \text{Max!} \Leftrightarrow (-1) * z \rightarrow \text{Min!}$ . Der ET sei in der Lage, für die weichen Restriktionen für das Intervall  $[b_i, b_i + d_i]$  eine Zugehörigkeitsfunktion in Form von Def. 5.2 zu bestimmen. Für jede weiche Restriktion  $i = 1, \dots, m_1$  existiert nun eine Fuzzy Menge (Def. 2.1), welche die Alternativen  $x \in [b_i, b_i + d_i]$  darstellt.

Ein ET sei in der Lage für die Restriktionen die maximale Toleranz festzulegen. Mittels parametrischer Programmierung<sup>41</sup> erhält man das folgende Modell:

**Definition 6.1.2:**  $z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \text{Max!}$

u.B.d.R.

$$\begin{aligned} g_i(x) &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i + \theta * d_i; & \text{für } i = 1, \dots, m_1 \\ g_i(x) &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i & \text{für } i = m_1 + 1, \dots, m \\ x_1, \dots, x_n &\geq 0 \wedge d_1, \dots, d_{m_1} > 0 \wedge \theta \in [0, 1] \end{aligned}$$

Nach Verdegay und Chanas ist das Modell 6.1.1 unter Einbeziehung linearer Zugehörigkeitsfunktionen  $\Leftrightarrow$  Modell 6.1.2, unter Nutzung des Konzept der  $\alpha$ -Niveau-Mengen (Def. 2.8) für  $\alpha = 1 - \theta$ .

#### Anwendungsbeispiel Parametrische Programmierung

Der ET entscheidet sich, dass Modell 4.1 in Form von Toleranzen zu erweitern, die er den Restriktionen gewährt. Dabei legt er folgende Toleranzen  $d_i$  fest:  $d_{L_{t=0}} = 400 \wedge d_{A_{t=1}} = 30 \wedge d_{A_{t=2}} = 30 \wedge d_{A_{t=3}} = 40$ . Auch Jochen Wolf arbeitet mit diesen Toleranzen weiter, jedoch ergibt sich eine andere Lösung für diese Arbeit. Das liegt erstens darin begründet, dass er zusätzliche Toleranzen auf die Beschaffungsrestriktionen festlegt, zweitens gewährt Wolf seinem Modell keine Finanzierungsmöglichkeiten und drittens wurde der Zinssatz für die Finanzinvestitionen herabgesetzt.

Im dritten Kapitel wurde aufgezeigt, wie ein ET zur einer Toleranz von 30 Einheiten bei der ersten Absatzbedingung  $A_{t=1}$  kommen kann. Für die erste Liquiditätsbedingung und für die drei Absatzbedingungen ergeben sich folgende Restriktionen:

---

<sup>41</sup> Vgl. Lai, Y. J / Hwang, C. L. (1992), S. 132.

$$L_{t=0} : 1000x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 500x_4 + 100x_5 \leq_{\approx} 5100 + \theta * 400$$

$$A_{t=1} : 70x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 \leq_{\approx} 390 + \theta * 30$$

$$A_{t=2} : 50x_1 + 20x_2 + 5x_4 \leq_{\approx} 250 + \theta * 30$$

$$A_{t=3} : 50x_1 + 70x_2 + 30x_3 + 25x_4 \leq_{\approx} 330 + \theta * 40$$

$$\theta \in [0,1]$$

Die Zugehörigkeitsfunktionen der weichen Restriktionen werden mit Def. 5.2 ermittelt. Das **Modell 6.1.2** setzt sich zusammen aus dem Modell 4.1 und den o.g. weichen Restriktionen (bereits existierende Restriktionen des Modells 4.1 werden überschrieben).

### Lösung des Modells 6.1.2:<sup>42</sup>

$\alpha$	$\theta$	$z(x^*)$	$L_{t=0}$	$A_{t=1}$	$A_{t=2}$	$A_{t=3}$
1,00	0,00	6695,91	5100,00	333,75	250,00	330,00
0,90	0,10	6751,21	5140,00	336,78	253,00	334,00
0,80	0,20	6806,50	5180,00	339,81	256,00	338,00
0,70	0,30	6861,80	5220,00	342,84	259,00	342,00
0,60	0,40	6916,54	5260,00	347,36	262,00	346,00
0,50	0,50	6970,86	5300,00	353,00	265,00	350,00
0,40	0,60	7028,17	5340,00	358,63	268,00	354,00
0,30	0,70	7079,49	5380,00	364,27	271,00	358,00
0,20	0,80	7133,80	5420,00	369,91	274,00	362,00
0,10	0,90	7188,12	5460,00	375,54	277,00	366,00
0,00	1,00	7242,43	5500,00	381,18	280,00	370,00

Tabelle 4: Ergebnistabelle der parametrischen Programmierung.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 140.

Interpretation des Modells 6.1.2: Die optimale Lösung  $\tilde{z}(x^*)$  ist unscharf gegeben. Dabei drückt  $\alpha = 1 - \theta$  die Zufriedenheit des ET's bzgl. der Restriktionsgrenzen aus, die möglichst nicht überschritten werden sollen.  $\theta$  drückt die Zufriedenheit bzgl. eines größtmöglichen Zielwertes aus. Die Ergebnistabelle gibt die tatsächlichen Kapazitäten wieder, welche unter dem jeweiligen  $\theta$ -Niveau angenommen werden. Die Ergebnisse können nun dem ET vorgelegt und ein subjektiver, optimaler Zielwert gewählt werden. Im folgenden Abschnitt wird eine optimale Entscheidung zwischen  $\alpha \wedge \theta$  vorgestellt.

<sup>42</sup> Siehe Thesis Modell 6.2.1, Datenträger.

## 6.2 Nutzenbewertung des unscharfen Zielwerts

In der Literatur wird zwischen dem symmetrischen und nichtsymmetrischen Ansatz unterschieden. Hwang / Lai stellen zwei Methoden des symmetrischen Ansatzes vor. Beim symmetrischen Ansatz von Werner ist es dem ET nicht möglich, aufgrund fehlender Informationen, einen Zielwert anzugeben. Bei Zimmermanns Ansatz wird ein Zielwert  $z(x^*)$  aus der Tabelle 4 und eine Toleranz  $d_z \in [0, z(x^*) - z_u]$  vom ET vorgegeben. Der optimale Zielwert liegt somit im Intervall  $[z(x^*) - d_z, z(x^*)]$ . In beiden Ansätzen wird  $f_{z,\theta}(x)$  mit einer linearen Zugehörigkeitsfunktion beschrieben. Der nichtsymmetrische Ansatz charakterisiert sich dadurch, dass  $f_{z,\theta}(x)$  mit einer stückweisen linearen Zugehörigkeitsfunktion beschrieben wird.<sup>43</sup>

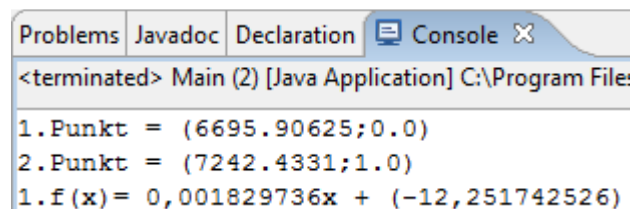
Werners Ansatz: Dem ET ist es nicht möglich, aus der Tabelle 4 einen Zielwert anzugeben, der sein subjektives Zufriedenheitsempfinden ausdrückt. Um eine Nutzenbewertung des unscharfen Zielwertes durchzuführen, wird das Modell 6.1.2 erweitert. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen:

Auf  $z$  wird eine unscharfe Menge mit einer linearen Zugehörigkeitsfunktion definiert.

1.  $z_o \rightarrow \text{Max! u.B.d.R. } g_i(x) = a_i x \leq b_i + d_i$  für  $i = 1, \dots, m \wedge$  für  $i = m_1 + 1, \dots, m$  ist  $d_i = 0$ .
2.  $z_u \rightarrow \text{Max! u.B.d.R. } g_i(x) = a_i x \leq b_i$  für  $i = 1, \dots, m$ .

Aus der Tabelle 4 lässt sich ablesen, dass  $z_o(x) = 7242,43$  mit  $\theta = 1$  und  $z_u(x) = 6695,91$  mit  $\theta = 0$  ist. Die Vorschrift der linearen Zugehörigkeitsfunktion  $f_{z,\theta}(x)$  gemäß der Def. 5.2 (siehe unten links) und die errechnete Funktionsgleichung gemäß der Methode 5.4 (siehe unten rechts) lautet:

$$f_{z,\theta}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq z_o \\ \frac{x - z_u}{z_o - z_u} & z_u \leq x < z_o \\ 0 & x < z_u \end{cases}$$



```

Problems Javadoc Declaration Console
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File
1. Punkt = (6695.90625; 0.0)
2. Punkt = (7242.4331; 1.0)
1. f(x) = 0,001829736x + (-12,251742526)
  
```

Abbildung 6: Funktionsgleichung.

<sup>43</sup> Vgl. Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 87 ff und Rommelfanger, H. (1988), S. 182 f.

Interpretation der unscharfen Zielwerte:

$z_o$  ist der Zielwert, der bei maximaler Auslastung der Restriktionen plus deren Toleranzen erreicht wird;  $z_u$  erfolgt ohne Toleranzen. Die Zugehörigkeitsgrade  $f_{z,\theta}(x)$  drücken jedoch nicht das Zufriedenheitsempfinden des ET's bzgl. der Restriktionsgrenzen aus, da Toleranzen möglichst nicht überschritten werden sollen. Wird in der Ergebnistabelle  $\theta$  mit  $\alpha = 1 - \theta$  ersetzt, so lässt sich analog zu  $f_{z,\theta}(x)$  die lineare Zugehörigkeitsfunktion  $f_{z,\alpha}(x)$  berechnen, die das Zufriedenheitsempfinden des ET's bzgl. der Restriktionsgrenzen wiedergeben.

Die Aggregation erfolgt mittels der Max-Min-Komposition:

$$f_{optimum}(x^*) = \text{Max}\{\text{Min}(f_{z,\theta}(x), f_{z,\alpha}(x))\}, x \in x_L. \quad ^{44}$$

Sowohl eine grafische Lösung der Aggregation als auch eine Max-Min-Komposition ist möglich. Gemäß  $f_{optimum}(x^*)$  lässt sich nun die optimale Lösung  $z(x^*)$  bestimmen:

$$f_{optimum}(6970,85448) = 0,50.$$

$$\text{Berechnung: } f_{z,\theta}(x^*) = f_{z,\alpha}(x^*) \Leftrightarrow$$

$$0,001829736 * x^* - 12,251742526 = -0,001829736 * x^* + 13,251742526 \Leftrightarrow$$

$$0,003659472 * x^* = 25,50348506 \Leftrightarrow x^* = 6969,170706.$$

Die minimale Abweichung (zur Lösung des Modells 6.3.1) ist auf Rundungsfehler zurückzuführen. In der Abbildung 7 bildet  $x_2$  den Schnittpunkt für den symmetrischen Ansatz nach Werner. In der „und“-Verknüpfung kommt sehr gut zur Geltung, dass die Restriktionen und das Ziel hier gleich behandelt werden.  $x_1$  bildet den Schnittpunkt für den symmetrischen Ansatz nach Zimmermann und  $x_3$  den Schnittpunkt für den nichtsymmetrischen Ansatz.

---

<sup>44</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 184 und Wolf, J. (1988), S. 32 f.

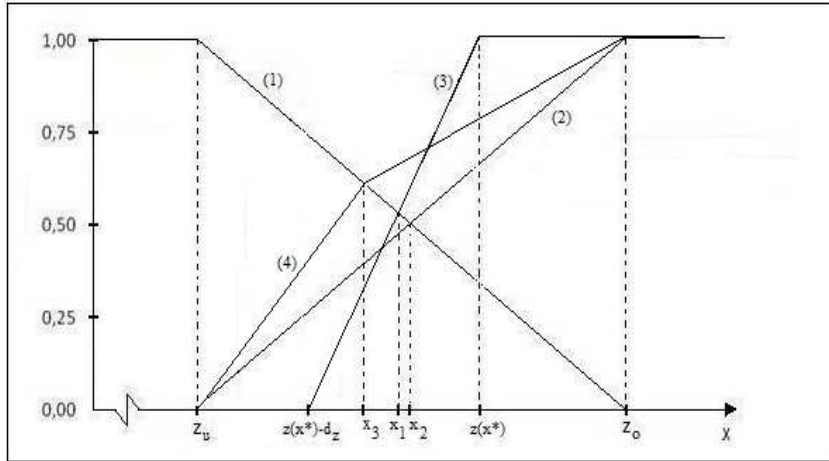


Abbildung 7: Zugehörigkeitsfunktionen (1)  $f_{z,\alpha}(x)$ ; (2)  $f_{z,\theta}(x)$ ; (3)  $f_{z,d_z}(x)$ , (4)  $f(x)$  durch Def. 5.5.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Rommelfanger, H. (1988), S. 184 und Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (2002), S. 129.

Die lineare Zugehörigkeitsfunktion  $f_{z,d_z}(x)$ , für den symmetrischen Ansatz nach Zimmermann, wird mit den Stützstellen  $((z(x^*) - d_z); 0) \wedge (z(x^*); 1)$  bestimmt.

### 6.3 Die Kompromisslösung

Die im Unterabschnitt 6.1 und 6.2 gezeigten Methoden zur Gewinnung von  $z(x^*)$  sind sehr rechenaufwändig und es liegt nahe, eine direkte Methode anzuwenden. Der ET verfolgt folgendes Ziel:

$$\underset{x \in X_u}{\text{Max}}(z(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)) \xrightarrow{\text{Mehrzieloptimierungsmodell}} \underset{x \in X_u}{\text{Max}}(f_{z,\theta}(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x))$$

Für die Aggregation des Mehrzieloptimierungsmodells schlagen Rommelfanger et.al. den Minimum-Operator vor, aufgrund dessen, dass die Zugehörigkeitsfunktionen nicht kardinal messbar sind. Die maximierende Gesamtbefriedigung  $\sigma(x)$  eines ET stellt sich als  $\sigma(x) = \underset{x \in X_u}{\text{Max}} \text{Min}(f_{z,\theta}(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x))$  dar. Eine Vielzahl weiterer Operatoren stehen zur Verfügung. Der Operator  $\sigma(x)$  nimmt eine pessimistische Stellung ein, da er keine Kompensationsmöglichkeiten einräumt. Jedoch empfiehlt auch Wolf den Operator  $\sigma(x)$ , da das nichtlineare Optimierungsproblem äquivalent zu einem linearen Optimierungsproblem ist.

### 6.3.1 Die Kompromisslösung mit linearen Zugehörigkeitsfunktionen

**Satz 6.3.1:** Unter der Voraussetzung, dass die Menge der Lösung nicht leer ist, gilt nach Negoita/Sularia (1976, S.6):<sup>45</sup>

$$\left( \begin{array}{l} \sigma \rightarrow \text{Max!} \\ \text{u.B.d.R.} \\ \sigma \leq f_{z,\theta}(x) \\ \sigma \leq f_i(x) \quad \forall i = 1, \dots, m_1 \\ 0 \leq \sigma \leq 1, x \in x_u \end{array} \right) \Leftrightarrow \sigma(x) = \underset{x \in x_u}{\text{Max}} \{ \text{Min}(f_{z,\theta}(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)) \}.$$

Unter Verwendung der linearen Zugehörigkeitsfunktionen (Def. 5.2) und des Investitionsmodells 4.1 ergibt sich das Kompromissmodell:

**Definition 6.3.1:**  $\sigma \rightarrow \text{Max!}$

u..B.d.R.

$$\begin{array}{ll} L_{t=T} : & \sigma^* (z_o - z_u) - \sum_{j=1}^n z_{T,j} x_j \leq -z_u \\ L_{t=0} : & \sigma^* d_{L_{t=0}} + \sum_{j=1}^n z_{0,j} x_j \leq AG + d_{L_{t=0}} \\ L_{t=1, \dots, T-1} : & \sigma^* d_{L_{t=1, \dots, T-1}} + \sum_{j=1}^n z_{t,j} x_j \leq d_{L_{t=1, \dots, T-1}} \\ A_{t=1, \dots, T \wedge w=1, \dots, W} : & \sigma^* d_{A_{t=1, \dots, T \wedge w=1, \dots, W}} + \sum_{j=1}^n k_{t,w,j} x_j \leq N_{t,w} + d_{A_{t=1, \dots, T \wedge w=1, \dots, W}} \\ B_{t=1, \dots, T \wedge v=1, \dots, V} : & \sigma^* d_{B_{t=1, \dots, T \wedge v=1, \dots, V}} + \sum_{j=1}^n l_{t,j,v} x_j \leq Q_{t,v} + d_{B_{t=1, \dots, T \wedge v=1, \dots, V}} \\ NNB_{j=1, \dots, n} : & x_j \geq 0 \end{array}$$

### Anwendungsbeispiel      Kompromisslösung mit linearen Zugehörigkeitsfunktionen

Der ET kann sich nicht auf einen Zielwert aus der Tabelle 4 festlegen. Die Nutzenbewertung erfolgt durch den symmetrischen Ansatz nach Werner. Aus dem Modell 6.1.2, den vorangegangenen Abschnitt und der Definition 6.3.1 lässt sich die Kompromisslösung folgendermaßen darstellen:

---

<sup>45</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 187.

**Modell 6.3.1:**  $\sigma \rightarrow \text{Max!}$

u.B.d.R.

$$L_{t=T} : 546,52685 * \sigma - 320x_1 - 860x_2 - 400x_3 - 250x_4 - 105x_7 + 109x_8 + 2554,58x_{11} + 6695,90625 \leq 0$$

$$L_{t=0} : 400 * \sigma + 1000x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 500x_4 + 100x_5 - 100x_8 - 2000x_8 - 5500 \leq 0$$

$$L_{t=1} : -500x_1 + 100x_2 - 400x_3 - 300x_4 - 105x_5 + 100x_6 + 109x_8 - 100x_9 \leq 0$$

$$L_{t=2} : -400x_1 + 150x_2 + 200x_3 - 50x_4 - 105x_6 + 100x_7 + 109x_9 - 100x_{10} \leq 0$$

$$A_{t=1} : 30 * \sigma + 70x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 - 420 \leq 0$$

$$A_{t=2} : 30 * \sigma + 50x_1 + 20x_2 + 5x_4 - 280 \leq 0$$

$$A_{t=3} : 40 * \sigma + 50x_1 + 70x_2 + 30x_3 + 25x_4 - 370 \leq 0$$

$$B_{t=1} : 4x_1 + 3x_2 - 30 \leq 0$$

$$B_{t=2} : 3x_1 + 4x_2 - 30 \leq 0$$

$$B_{t=3} : 3x_1 + 10x_2 - 30 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geq 0 \wedge x_{11} \leq 1$$

**Lösung des Modells 6.3.1:**<sup>46</sup>

Variablen	Werte	Zielfunktion	
$x_1 =$	4,63261740762655	$z = 320 * x_1 + 860 * x_2 + 400 * x_3 + 250 * x_4 + 105 * x_7 - 109 * x_{10} - 2554,58 * x_{11}$	=6970,01468
$x_2 =$	1,61021477771203	<b>u.B.d.R.</b>	
$x_3 =$	0	$L_{t=T} = 546,52685 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6695,90625$	=0
$x_4 =$	0,223689986817724	$L_{t=0} = 400 * \sigma + 1000 * x_1 + 400 * x_2 + 500 * x_3 + 500 * x_4 + 100 * x_5 - 100 * x_8 - 2000 * x_{11} - 5500$	=0
$x_5 =$	0	$L_{t=1} = -500 * x_1 + 100 * x_2 - 400 * x_3 - 300 * x_4 - 105 * x_5 + 100 * x_6 + 109 * x_8 - 100 * x_9$	=0
$x_6 =$	21,2520244583493	$L_{t=2} = -400 * x_1 + 150 * x_2 + 200 * x_3 - 50 * x_4 - 105 * x_6 + 100 * x_7 + 109 * x_9 - 100 * x_{10}$	=0
$x_7 =$	38,5416181386137	$A_{t=1} = 30 * \sigma + 70 * x_1 + 15 * x_2 + 30 * x_3 + 20 * x_4 - 420$	=-52,04338
$x_8 =$	0,89166767204097	$A_{t=2} = 30 * \sigma + 50 * x_1 + 20 * x_2 + 5 * x_4 - 280$	=0
$x_9 =$	0	$A_{t=3} = 40 * \sigma + 50 * x_1 + 70 * x_2 + 30 * x_3 + 25 * x_4 - 370$	=0
$x_{10} =$	0	$B_{t=1} = 4 * x_1 + 3 * x_2 - 30$	=-6,63889
$x_{11} =$	0	$B_{t=2} = 3 * x_1 + 4 * x_2 - 30$	=-9,66129
$\sigma$	0,501546137709669	$B_{t=3} = 3 * x_1 + 10 * x_2 - 30$	=0

Abbildung 8: Lösung des Modells 6.3.1.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Wolf, J. (1988), S. 40.

### Interpretation der Lösung des Modells 6.3.1:

Die Vorteile der Kompromisslösung liegen darin, dass scharfe sowie auch unscharfe Restriktionen eingearbeitet werden können. Der Rechenaufwand ist nur gering größer als beim deterministischen Modell. Desweiteren wird die parametrische Programmierung mittels des symmetrischen Ansatzes bewertet. Somit können dem ET Zwischenschritte bei

<sup>46</sup> Siehe Theses Modell 6.3.1, Datenträger

der Entscheidungsfindung erspart werden. Bei den Restriktionen, die Null determinieren, werden die maximal möglichen Überschreitungen zu 50,16% in Anspruch genommen. Das bedeutet, dass die Toleranzen  $d_i$  der weichen Restriktionsgrenzen  $b_i + d_i$  zu  $b_i + d_i * \sigma$  zum Tragen kommen. Rommelfanger zeigt, dass die Wahl anderer Zugehörigkeitsfunktionen wie bspw. hyperbolische Funktionen keine Vorteile bringen, da die Ergebnisse nur geringfügig abweichen und sie das Modell verkomplizieren.

### 6.3.2 Die Kompromisslösung mit stückweisen linearen Zugehörigkeitsfunktionen

Um das Zufriedenheitsempfinden des ET's genau auszudrücken, werden die linearen Zugehörigkeitsfunktionen mit stückweise linearen Funktionen ersetzt. Dabei muss der entstandene Polygonzug die Eigenschaft der Konkavität aufweisen, um den Satz 6.3.2 anwenden zu können. Liegen dem ET mehrere Informationen zugrunde, kann er Zugehörigkeitsgrade auf dem Intervall einzelner weicher Restriktionsgrenzen oder für unscharfe Zielwerte zuordnen.

Dafür muss der ET eine endliche Menge  $K = \{(x^k; f(x^k))\}$  von Stützstellen  $(x^k; f(x^k))$ ,  $k = 1, \dots, K; k \in N$  angeben, die sein Zufriedenheitsempfinden ausdrücken. Gegeben sind bereits die Stützstellen  $(x^1; f(x^1))$  und  $(x^K; f(x^K))$ .

**Satz 6.3.2:** Gegeben ist die stückweise lineare, nicht negative Funktion der Form Def. 5.5, die stetig und konkav ist. Für jedes  $g_i(x) \in [b_i, b_i + d_i]$  bzw.

$z(x) \in [z_u, z_o]$  gilt:<sup>47</sup>

$$\sigma \leq f_i(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma \leq \beta_1(x) \\ \sigma \leq \beta_2(x) \\ \dots \\ \sigma \leq \beta_{n-1}(x) \end{cases} \quad \text{für } i = 1, \dots, m_1, (z, \theta).$$

---

<sup>47</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 195. Ein Beweis dieses Satzes findet man unter Rommelfanger, H. (1983), S. 51.



## Anwendungsbeispiel Kompromisslösung mit stückweise linearen Zugehörigkeitsfunktionen

Zum Beispiel könnte sich der ET entscheiden für  $L_{t=0}$  5250 GE mit  $f_{L_{t=0}} = 0,9$  zu bewerten. Auch  $A_{t=1}, A_{t=2} \wedge L_{t=T}$  wird vom ET durch zusätzliche Stützstellen bewertet. Aus dem Modell 6.3.1 und dem Abschnitt 6.3.2 lässt sich die Kompromisslösung folgendermaßen darstellen: Die Zugehörigkeitsfunktionen für die vier weichen Restriktionen und die der Zielfunktion werden nun mit Hilfe von Stützstellen mit stückweise linearen Funktionen beschrieben. Der ET legt unter Voraussetzung der Konkavität folgende Stützstellen fest, die sein Zufriedenheitsempfinden ausdrücken:

Problems	Javadoc	Declaration	Console
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program Files			
1. Punkt = (5100.0;1.0)			
2. Punkt = (5250.0;0.9)			
3. Punkt = (5500.0;0.0)			
1. f(x) = -0,000666667x + (4,400000000)			
2. f(x) = -0,003600000x + (19,800000000)			

Abbildung 9: Stützstellen und  $\beta_1, \beta_2$  für  $L_{t=0}$ .

Problems	Javadoc	Declaration	Console
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File			
1. Punkt = (390.0;1.0)			
2. Punkt = (400.0;0.85)			
3. Punkt = (420.0;0.0)			
1. f(x) = -0,015000000x + (6,850000000)			
2. f(x) = -0,042500000x + (17,850000000)			

Abbildung 10: Stützstellen und  $\beta_1, \beta_2$  für  $A_{t=1}$ .

Problems	Javadoc	Declaration	Console
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File			
1. Punkt = (250.0;1.0)			
2. Punkt = (265.0;0.75)			
3. Punkt = (280.0;0.0)			
1. f(x) = -0,016666667x + (5,166666667)			
2. f(x) = -0,050000000x + (14,000000000)			

Abbildung 11: Stützstellen und  $\beta_1, \beta_2$  für  $A_{t=2}$ .

Problems	Javadoc	Declaration	Console
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File			
1. Punkt = (6695.90625;0.0)			
2. Punkt = (7020.0;0.75)			
3. Punkt = (7242.4331;1.0)			
1. f(x) = 0,002314145x + (-15,495299393)			
2. f(x) = 0,001123933x + (-7,140012772)			

Abbildung 12: Stützstellen und  $\beta_1, \beta_2$  für  $L_{t=T}$ .

### Umwandlung von stückweisen linearen Funktionen zu Restriktionen:

$$L_{t=T} : z(x) = 320x_1 + 860x_2 + 400x_3 + 250x_4 + 105x_7 - 109x_{10} - 2554,58x_{11} \leq 6695,90625; 7242,4331$$

$$f_{z,\theta}(x) = \begin{cases} \beta_1 = 0,002314145 * z(x) - 15,495299393 & \text{für } 6695,90625 \leq z(x) < 7020 \\ \beta_2 = 0,001123933 * z(x) - 7,140012772 & \text{für } 7020 \leq z(x) \leq 7242,4331 \end{cases}$$

$$L_{t=T}^{(1)} : \sigma \leq \beta_1 = 0,002314145 * z(x) - 15,495299393 \Leftrightarrow 432,1250397 * \sigma \leq z(x) - 6695,90625 \Leftrightarrow 432,1250397 * \sigma - 320x_1 - 860x_2 - 400x_3 - 250x_4 - 105x_7 + 109x_{10} + 2554,58x_{11} \leq -6695,90625$$

$$L_{t=T}^{(2)} : \sigma \leq \beta_2 = 0,001123933 * z(x) - 7,140012772 \Leftrightarrow 889,732751 * \sigma \leq z(x) - 6352,707608 \Leftrightarrow 889,732751 * \sigma - 320x_1 - 860x_2 - 400x_3 - 250x_4 - 105x_7 + 109x_{10} + 2554,58x_{11} \leq -6352,702306$$

$$L_{t=0} : g_{L_{t=0}}(x) = 1000x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 500x_4 + 100x_5 - 100x_8 - 2000x_{11} \leq_{\approx} 5100; 5500$$

$$f_{L_{t=0}}(x) = \begin{cases} \beta_1 = -0,000666667 * g_{L_{t=0}}(x) + 4,4 \\ \beta_2 = -0,0036 * g_{L_{t=0}}(x) + 19,8 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 5100 \leq g_{L_{t=0}}(x) < 5250 \\ 5250 \leq g_{L_{t=0}}(x) \leq 5500 \end{cases}$$

$$L_{t=0}^{(1)} : \sigma \leq \beta_1 = -0,000666667 * g_{L_{t=0}}(x) + 4,4 \Leftrightarrow 1500 * \sigma \leq -g_{L_{t=0}}(x) + 6600 \Leftrightarrow 1500 * \sigma + 1000x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 500x_4 + 100x_5 - 100x_8 - 2000x_{11} \leq 6600$$

$$L_{t=0}^{(2)} : \sigma \leq \beta_2 = -0,0036 * g_{L_{t=0}}(x) + 19,8 \Leftrightarrow 277,7777778 * \sigma \leq -g_{L_{t=0}}(x) + 5500 \Leftrightarrow 277,7777778 * \sigma + 1000x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 500x_4 + 100x_5 - 100x_8 - 2000x_{11} \leq 5500$$

$$\text{Für } A_{t=1} : g_{A_{t=1}}(x) : 70x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 \leq_{\approx} 390; 420$$

$$f_{A_{t=1}}(x) = \begin{cases} \beta_1 = -0,015 * g_{A_{t=1}}(x) + 6,85 \\ \beta_2 = -0,0425 * g_{A_{t=1}}(x) + 17,85 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 390 \leq g_{A_{t=1}}(x) < 400 \\ 400 \leq g_{A_{t=1}}(x) \leq 420 \end{cases}$$

$$A_{t=1}^{(1)} : \sigma \leq \beta_1 = -0,015 * g_{A_{t=1}}(x) + 6,85 \Leftrightarrow 66,6666667 * \sigma \leq -g_{A_{t=1}}(x) + 456,6666667 \Leftrightarrow 66,6666667 * \sigma + 70x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 \leq 456,6666667$$

$$A_{t=1}^{(2)} : \sigma \leq \beta_2 = -0,0425 * g_{A_{t=1}}(x) + 17,85 \Leftrightarrow 23,52941176 * \sigma \leq -g_{A_{t=1}}(x) + 420 \Leftrightarrow 23,52941176 * \sigma + 70x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 \leq 420$$

$$\text{Für } A_{t=2} : g_{A_{t=2}}(x) : 50x_1 + 20x_2 + 5x_4 \leq_{\approx} 250; 280$$

$$f_{A_{t=2}}(x) = \begin{cases} \beta_1 = -0,0166667 * g_{A_{t=2}}(x) + 5,1666666 \\ \beta_2 = -0,05 * x + 14 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 250 \leq g_{A_{t=2}}(x) < 265 \\ 265 \leq g_{A_{t=2}}(x) \leq 280 \end{cases}$$

$$A_{t=2}^{(1)} : \sigma \leq \beta_1 = -0,0166667 * g_{A_{t=2}}(x) + 5,1666666 \Leftrightarrow 60 * \sigma \leq -g_{A_{t=2}}(x) + 310 \Leftrightarrow 60 * \sigma + 50x_1 + 20x_2 + 5x_4 \leq 310$$

$$A_{t=2}^{(2)} : \sigma \leq \beta_2 = -0,05 * g_{A_{t=2}}(x) + 14 \Leftrightarrow 20 * \sigma \leq -g_{A_{t=2}}(x) + 280 \Leftrightarrow 20 * \sigma + 50x_1 + 20x_2 + 5x_4 \leq 280$$

Aus dem Modell 6.3.1, den Restriktionen  $L_{t=T}^{(i)}, L_{t=0}^{(i)}, A_{t=1}^{(i)} \wedge A_{t=2}^{(i)}$  für  $i=1,2$  und gemäß dem Satz 6.3.1 und 6.3.2 ergibt sich das **Modell 6.3.2**. Für  $A_{t=3}$  kann der ET keine weiteren Stützstellen angeben, deshalb bleibt es bei dieser Restriktion bei einer linearen Zugehörigkeitsfunktion.

### Lösung des Modells 6.3.2:<sup>48</sup>

Variablen	Werte	Zielfunktion	
$x_1$	4,7209885326473	$z = 320 \cdot x_1 + 860 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 + 250 \cdot x_4 + 105 \cdot x_7 - 109 \cdot x_{10} - 2554,58 \cdot x_{11}$	6982,20974
$x_2$	1,5349808877455	<b>u.B.d.R.</b>	
$x_3$	0	$L_{t=T}^{(1)} = 432,1250397 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6695,90625$	=0
$x_4$	0	$L_{t=T}^{(2)} = 889,732751 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6352,70236$	=-40,01692
$x_5$	0	$L_{t=0}^{(1)} = 1500 \cdot \sigma + 1000 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 500 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 6600$	=-290,21938
$x_6$	21,862622659492	$L_{t=0}^{(2)} = 277,777778 \cdot \sigma + 1000 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 500 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5500$	=0
$x_7$	39,5372365914375	$L_{t=1} = -500 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 300 \cdot x_4 - 105 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 109 \cdot x_8 - 100 \cdot x_9$	=0
$x_8$	0,190219372476153	$L_{t=2} = -400 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 - 50 \cdot x_4 - 105 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 109 \cdot x_9 - 100 \cdot x_{10}$	=0
$x_9$	0	$A_{t=1}^{(1)} = 66,666667 \cdot \sigma + 70 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 - 456,666667$	=-59,0029
$x_{10}$	0	$A_{t=1}^{(2)} = 23,52941176 \cdot \sigma + 70 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 - 420$	=-50,91673
$x_{11}$	0	$A_{t=2}^{(1)} = 60 \cdot \sigma + 50 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 - 310$	=-3,49809
$\sigma$	0,662547780636245	$A_{t=2}^{(2)} = 20 \cdot \sigma + 50 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 - 280$	=0
		$A_{t=3} = 40 \cdot \sigma + 50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 25 \cdot x_4 - 370$	=0
		$B_{t=1} = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 30$	=-6,5111
		$B_{t=2} = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 30$	=-9,69711
		$B_{t=3} = 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 30$	=-0,48723

Abbildung 13: Lösung des Modells 6.3.2.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Rommelfanger, H. (1988), S. 194 f und dem Modell 6.3.1.

### Interpretation der Lösung des Modells 6.3.2:

Ein Nachteil der Kompromisslösung mit stückweisen linearen Zugehörigkeitsfunktionen ist der große Rechenaufwand. Im Gegensatz zu den linearen Zugehörigkeitsfunktionen vermehrt sich hier die Anzahl der Restriktionen. Wird jedoch eine Zugehörigkeitsfunktion durch stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktionen beschrieben, so gibt der ET eine Anzahl von Stützstellen bzw. Punkten an. Die Anzahl einer weichen Restriktion ergibt sich durch die Anzahl der vom ET festgelegten Stützstellen minus eins. Wird die unscharfe Menge einer weichen Restriktion durch eine lineare Funktion beschrieben, dann vermehrt sich die Anzahl der Restriktion nicht. Jedoch lässt sich das Zufriedenheitsempfinden des ET's sehr gut durch konkave stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktionen beschreiben; erstens können dadurch Anspruchsniveaus gesetzt werden und zweitens nimmt das Niveau umso mehr ab, je mehr die Grenze  $b_i$  überschritten wird. Bei den Restriktionen, die Null determinieren, werden die maximal möglichen Überschreitungen zu 66,26% in Anspruch genommen. Der Zielwert ist geringfügig größer als beim Modell 6.3.1. Das liegt an den vom ET festgelegten Stützstellen, die einen höheren  $\sigma$ -Wert liefern und somit ein höherer Zielwert erreicht wird.

<sup>48</sup> Siehe Thesis Modell 6.3.2, Datenträger.

Nachträglich kann auch das Zielanspruchsniveau erhöht werden, indem man bspw. das Zielanspruchsniveau auf (7050;0,75) erhöht. Die Konkavität muss in jedem Falle erhalten bleiben. Ist das nicht der Fall und will ein ET an seinem Anspruchsniveau festhalten, so schlägt Rommelfanger vor, die Konkavitätseigenschaft dadurch zu erreichen, dass das Toleranzintervall verkleinert bzw. verkürzt wird.

#### 6.4 Interactive fuzzy linear programming algorithm (IFLP)

Die bis hierher vorgestellten Methoden sollen nun zu einem Algorithmus zusammengefasst werden. Der Algorithmus IFLP wird in der Literatur auch als Mensch-Maschine-Verfahren oder als interaktiver Prozess bezeichnet.<sup>49</sup> In Anlehnung an Lai / Hwang, Rommelfanger und den bis hierher vorgestellten Methoden dieser Arbeit, wird speziell für diese Arbeit ein IFLP-Algorithmus gebaut.<sup>50</sup> Als Lösungsmethode wird stets Standardsoftware verwendet. Für diese Arbeit wird der Solver von Microsoft Excel herangezogen.

1. Schritt: Lösen des deterministischen Investitionsmodells 4.1. Die optimale Lösung  $z(x^*)$  und die Auslastung der Restriktionen werden dem ET vorgelegt.

→ Ist  $x^*$  für den ET befriedigend / akzeptabel?

→ Ja: Stopp.

→ Nein: Gehe zum 2. Schritt.

2. Schritt: Für die  $i^{te}$  Restriktion ist eine Verkleinerung/Vergrößerung der Restriktionsgrenze möglich oder nötig. Verkleinerung von  $b_i$  : Start. Vergrößerung von  $b_i$  erfolgt durch Ermittlung von  $d_i$  durch bspw. Methoden des 3. Kapitels. Anschließend wird das Modell 6.1.2 gelöst und die Ergebnisse dem ET präsentiert (Veranschaulichung durch Tabelle 4).

→ Ist ein befriedigender / akzeptabler Zielwert  $z(x^*)$  für den ET gegeben?

→ Ja: Stopp.

→ Ja: Gehe zum 4. Schritt.

→ Nein: Gehe zum 2. Schritt (Festlegen neuer Werte).

→ Nein: Gehe zum 3. Schritt.

<sup>49</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 209 und Wolf, J. (1988), S. 46.

<sup>50</sup> Vgl. Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 136 ff und Rommelfanger, H. (1988), Kapitel B.

3. Schritt: Ermittlung des maximalen und minimalen Zielwertes. Der symmetrische Ansatz von Werner findet Anwendung (Abschnitt 6.2). Die Kompromisslösung wird nach dem Modell 6.3.1 ermittelt.

→ Ist die Lösung für den ET befriedigend / akzeptabel?

→ Ja: Stopp.

→ Nein: Gehe zum 2. Schritt (Festlegen neuer Werte).

→ Nein: Gehe zum 4. Schritt.

→ Nein: Gehe zum 5. Schritt.

4. Schritt: Der ET legt einen Zielwert  $z(x^*)$  unter Angabe einer Toleranz  $d_z$  fest. Der symmetrische Ansatz von Zimmermann findet Anwendung (Abschnitt 6.2).

→ Ist die Lösung für den ET befriedigend / akzeptabel?

→ Ja: Stopp.

→ Nein: Gehe zum 3. Schritt.

→ Nein: Gehe zum 4. Schritt (Festlegen neuer Werte).

→ Nein: Gehe zum 5. Schritt.

5. Schritt: Der ET ordnet ausgewählten Zugehörigkeitsfunktionen  $f_i$  und  $f_{z,\theta}$  der  $i^{te}$  Restriktion und die der Zielfunktion Zugehörigkeitsgrade zu, die sein Zufriedenheitsempfinden ausdrücken. Die Kompromisslösung wird nach dem Abschnitt 6.3.2 ermittelt.

→ Ist die Lösung für den ET befriedigend / akzeptabel?

→ Ja: Stopp.

→ Nein: Gehe zum 2. Schritt (Festlegen neuer Werte).

→ Nein: Gehe zum 5. Schritt (Festlegen neuer Werte).

Setzt man die Anwendungsbeispiele der bis hierher vorgestellten Methoden zusammen, so lässt sich der IFLP Algorithmus erkennen.<sup>51</sup>

---

<sup>51</sup> Siehe IFLP, Datenträger. Die Excel Datei gibt eine Anleitung und Problemlösung des IFLP-Algorithmus. Im Anhang C wird auf die einzelnen Excel Sheets eingegangen.

## 7 Fuzzy lineare Vektoroptimierungsmodelle mit weichen Restriktionen

**Definition 7.1:** Ein Fuzzy Vektoroptimierungsmodell<sup>52</sup>, welches weiche Restriktionen enthält, lautet

$$z_k(x) = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \rightarrow \text{Max!} \quad \text{für } k = 1, \dots, K$$

$$\text{u.B.d.R.} \quad x_L$$

Analog zu dem sechsten Kapitel erhält man das Mehrzieloptimierungsproblem  $\text{Max}_{x \in x_u}(z_1(x), \dots, z_K(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x))$ . Rommelfanger schlägt vor, die einzelnen Zielwerte  $z_k$  durch Nutzenwerte  $f_{z_k}(z_k)$  abzubilden. Im Abschnitt 6.2 wurde bereits auf  $z$  eine unscharfe Menge definiert, die mit einer linearen- oder einer stückweise linearen Zugehörigkeitsfunktion beschrieben werden kann. Die zwei Stützstellen  $f_{z_k}(z_k) = 1$  für  $z_k \geq z_k^o \wedge f_{z_k}(z_k) = 0$  für  $z_k < z_k^u$  gilt es zu ermitteln:

$x_k^{**}$  ist die optimale Lösung von  $z_k$  unter maximaler Auslastung der Restriktionen plus Toleranzen, dann ist  $z_k^o = z_k(x_k^{**})$  das Optimum von der Zielfunktion  $z_k$ .

$x_k^*$  sei die optimale Lösung von  $z_k$  unter maximaler Auslastung der Restriktionen ohne Toleranzen, dann ist  $z_k^u = \text{Min}(z_k(x_k^*), \dots, z_k(x_K^*), z_k(x_k^{**}), \dots, z_k(x_K^{**}))$  der minimale Zielwert einer Zielfunktion  $z_k$ . Um den Lösungsraum nicht vorzeitig einzuengen schlägt Rommelfanger vor, den minimalen Zielwert zu wählen, der sich einstellt, wenn eines der anderen Ziele das Maximum erreicht.

Auf den ermittelten Intervallen  $[z_k^u, z_k^o]$  lässt sich jeweils eine Zugehörigkeitsfunktion  $f_{z_k}(x)$  ermitteln (Def. 5.2 oder Def. 5.5), die das Zufriedenheitsempfinden des ET's ausdrückt.

---

<sup>52</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 201 f.

$$\underset{x \in X_u}{\text{Max}}(z_1(x), \dots, z_K(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)) \xrightarrow{\text{durch Bildung von } f_{z_k}(x)} \underset{x \in X_u}{\text{Max}}(f_{z_1}(x), \dots, f_{z_K}(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)).$$

„Nach dem symmetrischen Ansatz sind unscharfe Ziele und unscharfe Restriktionen gleich zu behandeln.“<sup>53</sup> Rommelfanger empfiehlt auch in diesem Fall die Anwendung des

Minimum-Operators. Das daraus resultierende Optimierungssystem lautet:

$$\underset{x \in X_u}{\text{MaxMin}}(f_{z_1}(x), \dots, f_{z_K}(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)). \text{ Auch hier findet der Satz 6.3.1 und der Satz}$$

6.3.2 Anwendung, ersetzt man  $f_{z,\theta}(x)$  mit  $f_{z_k}(x), k = 1, \dots, K$ .

### Multiobjective linear programming based on aspiration levels (MOLPAL)

1. Der ET legt einen kritischen  $\sigma^A$ -Wert fest ( $0 < \sigma^A < 1$ ), der allen Anspruchsniveaus  $z_k^A[r] \in ]z_k^u, z_k^o[$  bzw.  $g_i^A[r] \in [b_i, b_i + d_i[$  als Zugehörigkeitswert zuzuordnen ist. Er drückt damit, aus nur Lösungen zu akzeptieren, für die gilt:  $z_k(x) \geq z_k^A[r] \forall k = 1, \dots, K$  und  $g_i(x) \leq g_i^A[r] \forall i = 1, \dots, m_1; r = 1, \dots$ .

2. Ermitteln von konkaven, stetigen Zugehörigkeitsfunktionen  $f_{z_k}(x) \wedge f_i(x)$ .

3.  $\underset{x \in X_u}{\text{MaxMin}}(f_{z_1}(x), \dots, f_{z_K}(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x)) \xrightarrow{\text{Satz 6.3.1} \wedge \text{Satz 6.3.2}} \text{LP Modell.}$

4. I).  $\sigma \geq \sigma^A \Rightarrow$  Lösung  $x^r$  wird akzeptiert.

II).  $\sigma > \sigma^A \Rightarrow$  Verbesserung von mindestens einem Ziel  $k$  oder einer Ressource  $i$  ist möglich, da eine Lösung  $x$  existiert, sodass

$$\sigma \geq \sigma^A \wedge (z_k(x) > z_k(x^r) \vee g_i(x) < g_i(x^r)).$$

$$\rightarrow \text{Festlegen von: } z_k^A[r+1] > z_k(x^r) \vee g_i^A[r+1] < g_i(x^r).$$

Anspruchsniveaus dürfen nicht verschlechtert werden!

III).  $\sigma < \sigma^A \Rightarrow$  Verschlechterung von mindestens einem Ziel  $k$  oder einer Ressource  $i$  ist nötig, da keine andere Lösung  $x$  existiert, die dem LP Modell genügt.

$$\rightarrow \text{Minimieren von: } z_k^A[r+1] < z_k(x^r) \vee g_i^A[r+1] > g_i(x^r).$$

Anspruchsniveaus dürfen nicht verbessert werden!

5. Iterationsverfahren ist für  $r = 2, 3, \dots$  solange durchzuführen, bis eine Lösung akzeptabel ist ( $r = \text{endlich}$ ).

---

<sup>53</sup> Rommelfanger, H. (1988), S. 208.

## Anwendungsbeispiel MOLPAL

Mit festgelegten Daten vom ET wird in dem interaktiven Mensch-Maschine-Verfahren der erste Lösungsvorschlag ermittelt.

Es wird ein weiteres Ziel ins Modell 6.3.1 eingebaut. Angemerkt sei, dass Investitionsmodelle laut Def. 4.1 nur eine Zielfunktion aufweisen. Um jedoch das Verfahren MOLPAL zu demonstrieren, wurde eine zweite Zielfunktion erdacht. Bspw. könnte jedes Investitionsobjekt einen Überschuss ( $\neq GE$ ) abwerfen. Der Überschuss sei folgendermaßen definiert:

Der Überschuss, welcher abhängig ist von der Anzahl der Durchführungen, würde bereits vom ET kumuliert und wird in der Periode  $T=3$  fällig. Der Überschuss für die Investitionsobjekte  $j = I \wedge II \wedge III \wedge IV$  spiegelt sich in  $z_2$  wieder.

$$\begin{pmatrix} z_1(x) = 320x_1 + 860x_2 + 400x_3 + 250x_4 + 105x_7 - 2554,58x_8 \\ z_2(x) = 25x_1 + 10x_2 + 60x_3 + 60x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Max!}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$z_1(x)$	$z_2(x)$
$x_1^{**}$	4,92147	1,52356	0	0,69110	0	21,05387	39,85264	3,76440	0	0	0	7242,43310	179,73822
$x_2^{**}$	0,00000	0,00000	0	14,80000	0	23,69000	32,27450	19,00000	0	0	0	7088,82250	888,00000
$x_1^*$	4,37500	1,50000	0	0,25000	0	21,12500	37,55625	0,00000	0	0	0	6695,90625	139,37500
$x_2^*$	0,00000	0,00000	0	13,20000	0	23,25000	31,01250	15,00000	0	0	0	6556,31250	792,00000

Tabelle 5: Lösungen von  $z_1(x_1^{**}), z_1(x_1^*), z_1(x_2^{**}), z_1(x_2^*), z_2(x_1^{**}), z_2(x_1^*), z_2(x_2^{**}), z_2(x_2^*)$ .<sup>54</sup>

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung am MOLPAL-Algorithmus (Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 209 ff.).

Vorerst wird das Modell 6.1.2 betrachtet und  $z_k^o \wedge z_k^u$  ermittelt. Es ergeben sich für  $z_1^o = z_1(x_1^{**}) = 7242,4331 \wedge z_1^u = 6556,3125$  und für  $z_2^o = z_2(x_2^{**}) = 888 \wedge z_2^u = 139,375$ . Somit kommt für  $z_1$  nur ein Wert aus dem Intervall  $[6556,3125; 7242,4331]$  und für die Zielfunktion  $z_2$  nur ein Wert aus dem Intervall  $[139,375; 888]$  in Betracht.

Im 1. Schritt setzt man  $z_k^A[1] = z_k^A, k=1,2.$  und  $g_i^A[1] = g_i^A \forall i = L_{t=0}, A_{t=1}, A_{t=2}, A_{t=3} \wedge r=1.$

Der ET legt folgende Daten fest:  $\sigma^A = 0,5 \wedge z_1^A[1] = 6899,3728 \wedge z_2^A[1] = 500 \wedge g_{L_{t=0}}^A[1] = 5300 \wedge g_{A_{t=1}}^A[1] = 405 \wedge g_{A_{t=2}}^A[1] = 270 \wedge g_{A_{t=3}}^A[1] = 350.$  Falls ein ET keine Anspruchsniveaus

<sup>54</sup> Siehe Thesis Modell 7.1, Datenträger.



festlegen kann, so empfiehlt Rommelfanger die Intervallmitten zu wählen (

$$z_1^A[1] = \frac{z_1'' + z_1^o}{2} = 6899,3728).$$

Im 2. Schritt werden die Zugehörigkeitsfunktionen ermittelt. Dabei sind die Zugehörigkeitsfunktionen für  $L_{t=0}, A_{t=1}$  und  $A_{t=3}$  einfache, lineare Funktionen, die bereits im Modell 6.3.1 angewandt wurden. Die Zugehörigkeitsfunktionen für  $A_{t=2}, z_1$  und  $z_2$  sind äquivalent zum Abschnitt 6.3.1 / 6.3.2 aufzustellen.

```

Problems Javadoc Declaration Console X
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File
1. Punkt = (5100.0;1.0)
2. Punkt = (5500.0;0.0)
1. f(x) = -0,0025000000x + (13,7500000000)

```

Abbildung 14:  $\beta_1$  für  $L_{t=0}$ .

```

Problems Javadoc Declaration Console X
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File
1. Punkt = (390.0;1.0)
2. Punkt = (420.0;0.0)
1. f(x) = -0,0333333333x + (14,0000000000)

```

Abbildung 15:  $\beta_1$  für  $A_{t=2}$ .

```

Problems Javadoc Declaration Console X
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program File
1. Punkt = (250.0;1.0)
2. Punkt = (270.0;0.5)
3. Punkt = (280.0;0.0)
1. f(x) = -0,0250000000x + (7,2500000000)
2. f(x) = -0,0500000000x + (14,0000000000)

```

Abbildung 16:  $\beta_1 \wedge \beta_2$  für  $A_{t=2}$ .

```

Problems Javadoc Declaration Console X
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program Files\
1. Punkt = (330.0;1.0)
2. Punkt = (370.0;0.0)
1. f(x) = -0,0250000000x + (9,2500000000)

```

Abbildung 17:  $\beta_1$  für  $A_{t=3}$ .

```

Problems Javadoc Declaration Console X
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program Fi
1. Punkt = (139.357;0.0)
2. Punkt = (500.0;0.5)
3. Punkt = (888.0;1.0)
1. f(x) = 0,001386413x + (-0,193206301)
2. f(x) = 0,001288660x + (-0,144329897)

```

Abbildung 18:  $\beta_1$  für  $z_2$ .

```

Problems Javadoc Declaration Console X
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program Fi
1. Punkt = (6556.3125;0.0)
2. Punkt = (7242.4331;1.0)
1. f(x) = 0,001457470x + (-9,555626955)

```

Abbildung 19:  $\beta_1$  für  $z_1$ .

Falls stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktionen nicht die Eigenschaft der Konkavität erfüllen, sind die relevanten Intervalle zu kürzen.

Im 3. Schritt wird aus den gegebenen Informationen und den harten Restriktionen des Modells 6.3.1 das **Modell 7.2** erstellt.

## Lösung des Modells 7.2:<sup>55</sup>

Variablen	Werte	Zielfunktion	
$x_1 =$	3,50420082906265	$z_1:$	6904,96005
$x_2 =$	0	$z_2:$	506,31916
$x_3 =$	0	<b>u.B.d.R.</b>	
$x_4 =$	6,97856898016258	$L_{t=T}^{(z1)} = 686,120469 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6556,3125$	=0
$x_5 =$	0	$L_{t=T}^{(z2)} = 721,2857929 \cdot \sigma - 25 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 - 60 \cdot x_3 - 60 \cdot x_4 + 139,35696$	=-0,44562
$x_6 =$	19,9622160964665	$L_{t=T}^{(z2)} = 775,9998758 \cdot \sigma - 25 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 - 60 \cdot x_3 - 60 \cdot x_4 + 111,9999822$	=0
$x_7 =$	38,4664147076217	$L_{t=0} = 400 \cdot \sigma + 1000 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 500 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5500$	=0
$x_8 =$	16,9674265957197	$L_{t=1} = -500 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 300 \cdot x_4 - 105 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 109 \cdot x_8 - 100 \cdot x_9$	=0
$x_9 =$	0	$L_{t=2} = -400 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 - 50 \cdot x_4 - 105 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 109 \cdot x_9 - 100 \cdot x_{10}$	=0
$x_{10} =$	0	$A_{t=1} = 30 \cdot \sigma + 70 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 - 420$	=-19,89026
$x_{11} =$	0	$A_{t=2}^{(1)} = 40 \cdot \sigma + 50 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 - 290$	=-59,57138
$\sigma$	0,508143351070077	$A_{t=2}^{(2)} = 20 \cdot \sigma + 50 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 - 280$	=-59,73425
		$A_{t=3} = 40 \cdot \sigma + 50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 25 \cdot x_4 - 370$	=0
		$B_{t=1} = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 30$	=-15,9832
		$B_{t=2} = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 30$	=-19,4874
		$B_{t=3} = 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 30$	=-19,4874

Abbildung 20: Lösung des Modells 7.2.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an das Modell 6.3.1 und dem MOLPAL-Algorithmus.

### Interpretation der Lösung des Modells 7.2:

Der ET akzeptiert die Lösung  $x^*$ , denn alle weichen Restriktionen und die beiden Zielfunktionen erfüllen die Kriterien der Anspruchsniveaus:  $\sigma = 0,5081 \geq \sigma^A = 0,5 \wedge$

$$z_1(x^*) = 6904,96 \geq z_1^A[1] = 6899,37 \wedge z_2(x^*) = 506,32 \geq z_2^A[1] = 500 \wedge$$

$$g_{L_{t=0}}^A[1] = 5300 \geq g_{L_{t=0}}(x^*) = 5296,74 \wedge g_{A_{t=1}}^A[1] = 450 \geq g_{A_{t=1}}(x^*) = 384,87 \wedge$$

$$g_{A_{t=2}}^A[1] = 270 \geq g_{A_{t=2}}(x^*) = 210,10 \wedge g_{A_{t=3}}^A[1] = 350 \geq g_{A_{t=3}}(x^*) = 349,67.$$

Die kleine Differenz  $0,5081 - \sigma^A = 0,00814$  lässt vermuten, dass eine große Verbesserung eines Zielwertes oder eine Ressourceneinsparung kaum möglich ist. Um den Iterationsschritt vorzuführen bzw. fortzuführen, wurden Verbesserungsversuche vorgenommen (siehe Tabelle 6.). Die Iterationsschritte  $r = 1, 2, 3$  wurden unabhängig für die erste und für die zweite Zielfunktion, sowie für die Liquiditätsbedingung  $t = 0 \wedge r = 1, 2$ , betrachtet. Es wurden stets lineare Zugehörigkeitsfunktionen in Betracht gezogen (Stützstellen:  $(z_k^A[r] \text{ bzw. } g_i^A[r]; 0,5)$ ;  $(z^o \text{ bzw. } b_i; 1)$ ,  $r = 1, 2, 3$ ).

<sup>55</sup> Siehe Thesis Modell 7.2, Datenträger.

k bzw. i	r	$z_k^A[r]$ bzw. $g_i^A[r]$	$\sigma$	$z_1(x^r)$	$z_2(x^r)$	Restriktion:
1	1	6899,37	0,50814	6904,96	506,32	$=686,120469 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6556,3125$
1	2	6906	0,50359	6908,42	502,79	$=672,8660055 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6569,565001$
1	3	6910	0,50081	6910,53	500,62	$=664,866209 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6577,566989$
2	1	500	0,50814	506,32	6904,96	$=775,9998758 \cdot \sigma - 25 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 - 60 \cdot x_3 - 60 \cdot x_4 + 111,9999822$
2	2	515	0,50547	519,08	6903,13	$=745,9997628 \cdot \sigma - 25 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 - 60 \cdot x_3 - 60 \cdot x_4 + 141,9999545$
2	3	545	0,50004	545,02	6899,4	$=685,9999753 \cdot \sigma - 25 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 - 60 \cdot x_3 - 60 \cdot x_4 + 201,9999925$
$L_{t=0}$	1	5300	0,50814	506,32	6904,96	$=400 \cdot \sigma + 1000 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 500 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5500$
$L_{t=0}$	2	5290	0,50402	503,12	6902,13	$=389,999937 \cdot \sigma + 1000 \cdot x_1 + 400 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 500 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5489,999064$

Tabelle 6: Lösungen für das MOLPAL Verfahren mit Anspruchsniveaus.<sup>56</sup>

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an das Modell 7.2 und den MOLPAL-Algorithmus.

Lösungsinterpretation der Tabelle 6: Für die erste Zielfunktion  $z_1$ :

$\xrightarrow{r=1} z_1^A[1] = 6899,37$  mit der Lösung  $\sigma = 0,50814 \wedge z_1(x^{r=1}) = 6904,96$ .

$\xrightarrow{r=2} z_1^A[2] = 6906 > z_1(x^{r=1})$  mit der Lösung  $\sigma = 0,50359 \wedge z_1(x^{r=2}) = 6908,42$ .

$\xrightarrow{r=3} z_1^A[3] = 6910 > z_1(x^{r=2})$  mit der Lösung  $\sigma = 0,5008 \wedge z_1(x)$   
 $= 6910,53$ . Stopp.

Es gilt analog für  $z_2 \wedge L_{t=0}$ . Die Iterationsschritte sind dabei unabhängig zu betrachten (Ausgangspunkt ist stets das Modell 7.2). So wurde bspw. die Restriktion  $r = 2 \wedge z_1$  mit der dementsprechenden Restriktion des Modells 7.2 ausgetauscht. Die Intervalle der linearen Zugehörigkeitsfunktionen wurden verkürzt, damit die Konkavitätseigenschaft besteht. „Die Verkleinerung des Überschreitungsintervalls hat dabei keinerlei Einfluss auf die gesuchte Kompromisslösung, da nur Lösungen mit  $\sigma \geq \sigma^A$  den gesetzten Anspruchsniveaus genügen und somit als Lösungen akzeptabel sind.“<sup>57</sup> Ein ET sollte sich nach dem vierten Schritt von MOLPAL Prioritäten setzen und ein einziges Ziel bzw. eine einzige Ressourceneinsparung optimieren bzw. minimieren. Genügt das Ziel  $z_2$  einem Anspruchsniveau von 500 Einheiten, so lässt sich das Ziel  $z_1$  noch auf 6910,53 GE erhöhen. Die in der Tabelle 6 aufgeführten Lösungen genügen jeweils (einzeln betrachtet) den Kriterien der Anspruchsniveaus. Die Iterationsschritte sind endlich; führt man bspw. den Iterationsschritt für  $r = 3 \wedge L_{t=0}$  fort mit  $g_{L_{t=0}}^A[3] = 5285$ , so genügen nicht alle Kriterien den Anspruchsniveaus und die Lösung muss folglich verworfen werden.

<sup>56</sup> Siehe Thesis Modell 7.3, Datenträger.

<sup>57</sup> Rommelfanger, H. (1988), S. 197.

Das Verfahren MOLPAL ist ein wirkungsvolles Instrumentarium zur Lösung von Problemen. Die Vorteile liegen darin, dass die Festlegung der Obergrenzen  $b_i + d_i$  vorerst ohne Bedenken erfolgen kann, da das Anspruchsniveau ausschlaggebend ist für die optimale Kompromisslösung. Die Restriktionsunter- und Obergrenzen bleiben auch unverändert, somit erfolgt das aufwändige Festlegen der Grenzen nur einmal. Die Anspruchsniveaus lassen sich nach jedem Iterationsschritt anpassen. Das MOLPAL Verfahren unterstützt den ET in einem hohen Maße bei der Entscheidungsfindung, da nach jedem Iterationsschritt sukzessiv neue Informationen ins Modell einfließen.<sup>58</sup>

## 8 Fuzzy LP Modelle mit unscharfen Koeffizienten für die Restriktionen

Angeknüpft an die vorherigen Kapitel wird versucht, die Kritikpunkte des deterministischen Modells weiter zu minimieren, indem man unscharfe Koeffizienten mit ins Modell einbezieht und dem ET erlaubt mehrere Repräsentanten zu wählen. Dies hat den großen Vorteil, dass man Planungsdaten, die erst in der Zukunft realisiert werden, besser beschreiben kann. Insbesondere lassen sich die Liquiditätsbedingungen, Absatzbedingungen und Beschaffungsrestriktionen für Folgeperioden durch mehrere Repräsentanten sachadäquater modellieren.

### 8.1 Mittels des Erweiterungsprinzip

Jeder Koeffizient lässt sich durch eine Fuzzy Menge (Def. 2.1) darstellen. Für die  $j^{te}$  Variable und  $i^{te}$  Restriktion erhält man:  $A_{ij} = \{(x; f_{A_{ij}}(x)) | x \in \mathfrak{R}\}$ .

**Definition 8.1.1:** Ein Fuzzy LP Modell<sup>59</sup>, welches unscharfe Koeffizienten für die Restriktionen enthält, lautet

$$z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \tilde{Max}!$$

---

<sup>58</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 46 f und Rommelfanger, H. (1988), S. 220 f.

<sup>59</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 223 f.

u.B.d.R.

$$x_M = \begin{cases} g_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n \leq B_i & \text{für } i = 1, \dots, m_1 \\ g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i & \text{für } i = m_1 + 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$A_{ij} \wedge B_i, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m_1$  sind Fuzzy Intervalle bzw. Fuzzy Zahlen (Def. 2.7). Alle Koeffizienten sind vom gleichen L-R Typ  $Max(0; 1-u)$ . Somit finden die Notationen und die erweiterten Operationen aus Def. 2.10 Anwendung. Auf die Notation der Referenzfunktion wird verzichtet; ebenso auf die Verwendung von unterschiedlichen Referenzfunktionen, da sie im Allgemeinen recht aufwändig sind.

Interpretation der Koeffizienten  $A_{ij} \wedge B_i$ :

$B_i$ : Die Fuzzy Restriktionen, für  $i = 1, \dots, m_1$ , aus dem Modell 6.1.1 ordnet  $b_i \xrightarrow{f_i(x)} 1 \wedge b_i + d_i \xrightarrow{f_i(x)} 0$  zu. Für  $x \in [b_i, b_i + d_i]$  gilt es  $f_i(x)$  zu ermitteln. Für die folgenden Anwendungen sollen stets lineare Zugehörigkeitsfunktionen in Betracht gezogen werden. Es wird eine Fuzzy Zahl  $B_i = (b_i; \alpha_i; \beta_i)$  mit dem Gipfelpunkt  $b_i$  erlangt, mit der linken Spannweite  $\alpha_i = 0$  und rechte Spannweite  $\beta_i = d_i$ . Die Zugehörigkeitsfunktion ergibt sich wie folgt:

$$f_{B_i}(x) = \begin{cases} 0 & x < b_i \\ Max(0; 1 - (\frac{x - b_i}{d_i})) & \text{für } x \geq b_i \end{cases}$$

$A_{ij}$ : Alle Koeffizienten  $A_{ij}$  werden als trapezförmige Fuzzy Intervalle mit den Referenzfunktionen  $R(u) = L(u) = Max(0; 1-u)$  definiert. Für jede Restriktion  $i = 1, \dots, m_1$  gilt:

$$A_i(x) = A_{i1}x_1 + \dots + A_{in}x_n = (a_{i1}^u; a_{i1}^o; \alpha_{i1}^u; \alpha_{i1}^o)x_1 + \dots + (a_{in}^u; a_{in}^o; \alpha_{in}^u; \alpha_{in}^o)x_n \xrightarrow{Def. 2.10}$$

$$A_i(x) = (\sum_{j=1}^n a_{ij}^u x_j; \sum_{j=1}^n a_{ij}^o x_j; \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^u x_j; \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^o x_j) = (a_i^u(x); a_i^o(x); \alpha_i^u(x); \alpha_i^o(x)).$$

$$f_{A_i}(x) = \begin{cases} \text{Max}(0; 1 - (\frac{a_i^u - x}{\alpha_i^u})) & x < a_i^u \\ 1 & a_i^u \leq x \leq a_i^o \\ \text{Max}(0; 1 - (\frac{x - a_i^o}{\alpha_i^o})) & a_i^o < x \end{cases}$$

Um den Support  $S(A_{ij})$  von jedem Koeffizienten abzugrenzen, schlägt Rommelfanger vor, dass der ET eine Größe  $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$  wählt, für die gilt:  $f_{A_{ij}}(x) \geq \varepsilon$ . Der ET hält somit nur Werte aus dem Intervall  $[a_{ij}^{u,\varepsilon}, a_{ij}^{o,\varepsilon}]$  für praktisch relevant. Die Ermittlung der Spannweiten ist folgendermaßen definiert:  $\alpha_{ij}^u = \frac{a_{ij}^u - a_{ij}^{u,\varepsilon}}{1 - \varepsilon} \wedge \alpha_{ij}^o = \frac{a_{ij}^{o,\varepsilon} - a_{ij}^o}{1 - \varepsilon}$ .

Für jedes  $\varepsilon \in [0,1]$  lassen sich gemäß Satz 2.11 die  $\alpha$ -Niveau-Mengen zu einem linearen Ausdruck  $S_\varepsilon(A_i(x))$  umformen.<sup>60</sup>

### Kleiner-Gleich-Relationen / Transformation unscharfer in scharfe Restriktionen

Die Restriktionen  $g_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n \leq B_i$  lassen sich mit der Teilmengenbeziehung auf Fuzzy Restriktionen  $A_i(x) \subseteq D_i$  übertragen. Für die Menge der Quantitäten  $x \in ]-\infty, b_i]$ , die zur Verfügung stehen, erhält man den Zugehörigkeitsgrad 1.

$$\text{Für } D_i \text{ gilt: } f_{D_i}(x) = \begin{cases} 1 & x < b_i \\ f_{B_i}(x) & x \geq b_i \end{cases}$$

Für die  $\alpha$ -Niveau-Mengen gilt:  $A_i(x) \subseteq D_i \Leftrightarrow A_{i,\alpha}(x) \subseteq D_{i,\alpha} \quad \forall \alpha \in [0,1]$ .<sup>61</sup>

Rommelfanger beschreibt mehrere Kleiner-Gleich-Relationen, jedoch weisen diese Mängel auf. Angesichts dessen wird die Kleiner-Gleich-Relation nach Rommelfanger benutzt, die zu einem Mehrzieloptimierungssystem führt.<sup>62</sup>

Die sichere Grenze  $b_i$  jeder Restriktion  $g_i(x)$  soll möglichst nicht überschritten werden und wird bewertet mit  $f_{D_i}(a_i^o(x)) = 1$ , für einen ET gilt  $f_{D_i}(a_i^o(x))$  zu

<sup>60</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 227.

<sup>61</sup> Ebenda, S. 230.

<sup>62</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 229 ff.

maximieren. Es kann jedoch sinnvoll sein  $a_i^o > b_i$  zuzulassen, um einen Gesamtoptimismus zu erreichen. Für eine Fuzzy Zahl  $B_i$  und  $A_i$  gilt die Relation:

$$A_i(x) \leq_R B_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_{ij}^o + \alpha_{ij}^{o,\varepsilon}) x_j \leq b_i + \beta_i^\varepsilon \\ f_{D_i}(\sum_{j=1}^n a_{ij}^o x_j) = f_{D_i}((a_{i1}^o, \dots, a_{in}^o)(x)) \rightarrow \text{Max!} \end{cases}$$

für jede Restriktion  $i = 1, \dots, m_1 \wedge \varepsilon \in ]0, 1[ \wedge$  die Anzahl der Variablen  $j = 1, \dots, n$ .

Es wird ein Mehrzieloptimierungssystem erlangt. Das Modell 8.1.2 stellt sich folgendermaßen dar.

**Definition 8.1.2:** Ein LP Fuzzy Mehrzieloptimierungsmodell<sup>63</sup>, welches unscharfe Koeffizienten für die Restriktionen enthält, lautet

$$\begin{pmatrix} z(x) \\ f_i(x) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Max!} \quad \text{für } i = 1, \dots, m_1$$

u.B.d.R.

$$x_R = \begin{cases} g_i(x) = (a_{i1}^o + \alpha_{i1}^{o,\varepsilon})x_1 + \dots + (a_{in}^o + \alpha_{in}^{o,\varepsilon})x_n \leq b_i + \beta_i^\varepsilon & \text{für } i = 1, \dots, m_1 \\ g_i(x) = a_i x \leq b_i & \text{für } i = m_1 + 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Um eine Kompromisslösung für lineare oder stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktionen zu ermitteln, wird analog zum Kapitel 6 vorgegangen. Die Nutzenbewertung der Zielfunktion erfolgt nach dem gleichen Prinzip des Abschnitts 6.2.

Die Orientierungswerte der Zugehörigkeitsfunktion  $f_z(x)$  werden dabei folgendermaßen definiert:

1.  $z_o \rightarrow \text{Max!}$   
 $x \in x_R$
2.  $z_u \rightarrow \text{Max!}$  u.B.d.R.  $x_{R2} = \{x_R \wedge g_i(x) = a_{i1}^o x_1 + \dots + a_{in}^o x_n \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, m_1\}$ .  
 $x \in x_{R2}$

---

<sup>63</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 241 f.

Analog zum Kapitel 6 sollte der ET auch hier ein Anspruchsniveau  $z^A \in ]z_u, z_o[$  mit  $\sigma^A \in ]\varepsilon, 1[$  wählen; die Punkte  $(z_u; \varepsilon), (z^A; \sigma^A), (z_o; 1)$  bilden somit den linearen Polygonzug.

Man erhält das Mehrzieloptimierungssystem  $\underset{x \in x_R}{\text{Max Min}}(f_z(x), f_1(x), \dots, f_{m_1}(x))$ , welches äquivalent ist zum Modell 8.1.3:<sup>64</sup>

**Definition 8.1.3:**  $\sigma \rightarrow \text{Max!}$   
u.B.d.R.

$$\begin{aligned} \sigma &\leq f_z(x) \\ \sigma &\leq f_i(x) \quad \forall i = 1, \dots, m_1. \\ 0 &\leq \sigma \leq 1, x \in x_R \end{aligned}$$

**Anwendungsbeispiel** Mit unscharfen Koeffizienten für die Restriktionen mittels des Erweiterungsprinzip

Der ET legt für das Modell 4.1 unscharfe Koeffizienten fest, die mittels Fuzzy Intervalle bzw. Fuzzy Zahlen (Def. 2.7) beschrieben werden. Die Angaben basieren auf dem Niveau  $\varepsilon = 0,5 \rightarrow A_{ij} = (a_{ij}^u; a_{ij}^o; \alpha_{ij}^{u,\varepsilon}; \alpha_{ij}^{o,\varepsilon}) \wedge B_i = (b_i; 0; \beta_i^\varepsilon)$ . Der ET hält somit nur Werte  $f_{A_{ij}}(x) \geq \varepsilon \wedge f_{B_i}(x) \geq \varepsilon$  für praktisch relevant.

Für  $i = 1 = L_{t=0}, i = 2 = L_{t=1}, i = 3 = L_{t=2}, i = 4 = A_{t=1}, i = 5 = A_{t=2}, i = 6 = A_{t=3}$ .

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1003; -997; 10; 9) \quad \wedge A_{12} = (-402; -398; 7; 6) \quad \wedge A_{13} = (-500; -500; 5; 5) \quad \wedge A_{14} = (-501; -500; 3; 4) \\ A_{21} &= (498; 501; 4; 3) \quad \wedge A_{22} = (-100; -97; 5; 6) \quad \wedge A_{23} = (398; 401; 3; 4) \quad \wedge A_{24} = (299; 301; 2; 2) \\ A_{31} &= (395; 408; 6; 5) \quad \wedge A_{32} = (-152; -147; 4; 1) \quad \wedge A_{33} = (-204; -199; 3; 4) \quad \wedge A_{34} = (48; 51; 3; 2) \\ A_{41} &= (68; 72; 3; 2) \quad \wedge A_{42} = (14; 16; 2; 2) \quad \wedge A_{43} = (29; 32; 2; 1) \quad \wedge A_{44} = (20; 20; 1; 1) \\ A_{51} &= (47; 51; 2; 3) \quad \wedge A_{52} = (20; 22; 3; 1) \quad \wedge A_{54} = (5; 5; 1; 1) \\ A_{61} &= (48; 54; 1; 1) \quad \wedge A_{62} = (69; 73; 3; 1) \quad \wedge A_{63} = (27; 32; 2; 2) \quad \wedge A_{64} = (23; 26; 2; 2) \\ B_1 &= (5100; 0; 200) \quad \wedge B_4 = (390; 0; 15) \quad \wedge B_5 = (250; 0; 15) \quad \wedge B_6 = (330; 0; 20) \end{aligned}$$

<sup>64</sup> Nach den Sätzen 6.3.1 und 6.3.2. Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 242.



Für die restlichen Koeffizienten des Modells 4.1 kann der ET scharfe Koeffizienten angeben. Jeder scharfe Koeffizient lässt sich unscharf beschreiben mittels

$$f_{A_{ij}}(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x = a_{ij} \\ \text{sonst} \end{matrix} \wedge f_{B_i}(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x = b_i \\ \text{sonst} \end{matrix}.$$

$z_o \wedge z_u$  wird benötigt, um die Zugehörigkeitsfunktion  $f_z(x)$  zu ermitteln. Anschließend wird mittels des Modells 8.1.2, des Modells 4.1 und der voran genannten Daten das **Modell 8.1.4** aufgestellt.

### Lösung des Modells 8.1.4.<sup>65</sup>

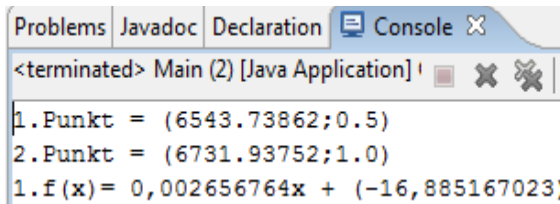
Variablen	Werte	Zielfunktion	$z_u$	$z_o$
$x_1 =$	4,379258	$z = 320 \cdot x_1 + 860 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 + 250 \cdot x_4 + 105 \cdot x_7 - 109 \cdot x_{10} - 2554,58 \cdot x_{11}$	=6543,73862	=6731,93752
$x_2 =$	1,089385	<b>u.B.d.R.</b>		
$x_3 =$	0	$L_{t=0} = 1003 \cdot x_1 + 402 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 501 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5100$	=0	
$x_4 =$	0,538264	$L_{t=0}^{(E)} = 1013 \cdot x_1 + 409 \cdot x_2 + 505 \cdot x_3 + 504 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5300$	=-146,96692	=0
$x_5 =$	0	$L_{t=1} = -498 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 - 398 \cdot x_3 - 299 \cdot x_4 - 105 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 109 \cdot x_8 - 100 \cdot x_9$	=-24,04049	
$x_6 =$	22,08832	$L_{t=1}^{(E)} = -494 \cdot x_1 + 105 \cdot x_2 - 395 \cdot x_3 - 297 \cdot x_4 - 105 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 109 \cdot x_8 - 100 \cdot x_9$	=0	=0
$x_7 =$	38,77083	$L_{t=2} = -395 \cdot x_1 + 152 \cdot x_2 + 204 \cdot x_3 - 48 \cdot x_4 - 105 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 109 \cdot x_9 - 100 \cdot x_{10}$	=-32,24789	
$x_8 =$	0	$L_{t=2}^{(E)} = -389 \cdot x_1 + 156 \cdot x_2 + 207 \cdot x_3 - 45 \cdot x_4 - 105 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 109 \cdot x_9 - 100 \cdot x_{10}$	=0	=0
$x_9 =$	0	$A_{t=1} = 72 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 32 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 - 390$	=-46,49791	
$x_{10} =$	0	$A_{t=1}^{(E)} = 74 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 33 \cdot x_3 + 21 \cdot x_4 - 405$	=-50,02236	=-46,34069
$x_{11} =$	0	$A_{t=2} = 51 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 - 250$	=0	
$x_1 = (\varepsilon)$	4,299397	$A_{t=2}^{(E)} = 54 \cdot x_1 + 23 \cdot x_2 + 6 \cdot x_4 - 265$	=-0,23457	=0
$x_2 = (\varepsilon)$	1,190559	$A_{t=3} = 54 \cdot x_1 + 73 \cdot x_2 + 32 \cdot x_3 + 26 \cdot x_4 - 330$	=0	
$x_3 = (\varepsilon)$	0	$A_{t=3}^{(E)} = 55 \cdot x_1 + 74 \cdot x_2 + 34 \cdot x_3 + 28 \cdot x_4 - 350$	=-13,45483	=0
$x_4 = (\varepsilon)$	0,908276	$B_{t=1} = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 30$	=-9,21481	=-9,23073
$x_5 = (\varepsilon)$	0	$B_{t=2} = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 30$	=-12,50468	=-12,33957
$x_6 = (\varepsilon)$	22,68651	$B_{t=3} = 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 30$	=-5,96837	=-5,19621
$x_7 = (\varepsilon)$	39,09695			
$x_8 = (\varepsilon)$	0			
$x_9 = (\varepsilon)$	0			
$x_{10} = (\varepsilon)$	0			
$x_{11} = (\varepsilon)$	0			

Abbildung 21: Lösung des Modells 8.1.4.

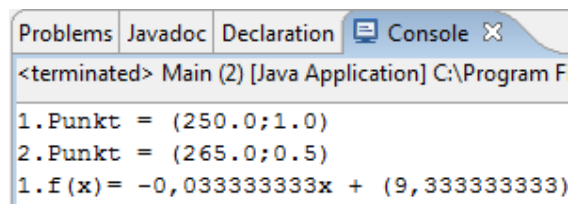
Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Rommelfanger, H. (1988), S. 241 ff.

$z_u = 6543,73862 \wedge z_o = 6731,93752$ . Die linearen Zugehörigkeitsfunktionen für  $f_z(x) \wedge A_{t=2}$  werden mittels der Methode 5.4, mit den Punkten ( $z_u = 6543,73862$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ), ( $z_o = 6731,93752; 1$ )  $\wedge$  ( $b_i = 250; 1$ ), ( $b_i + d_i^\varepsilon = 5300; \varepsilon = 0,5$ ) ermittelt.

<sup>65</sup> Siehe Thesis Modell 8.1.4, Datenträger und für  $z_o$ : Thesis Modell 8.1.5, Datenträger.



```
<terminated> Main (2) [Java Application]
1. Punkt = (6543.73862;0.5)
2. Punkt = (6731.93752;1.0)
1.f(x) = 0,002656764x + (-16,885167023)
```

Abbildung 22:  $f_z(x)$  mit  $(z_u; \varepsilon) \wedge (z_o; 1)$ .


```
<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program F
1. Punkt = (250.0;1.0)
2. Punkt = (265.0;0.5)
1.f(x) = -0,033333333x + (9,333333333)
```

Abbildung 23:  $f_{B_i}$  für  $A_{t=2}$ .

Die restlichen Zugehörigkeitsfunktionen  $f_{B_i}$  für  $i = L_{t=0}, A_{t=1}, A_{t=3}$  werden vom dem Modell 7.2 übernommen. Mit den benötigten Zugehörigkeitsfunktionen, der Definition 8.1.3 und dem Modell 8.1.4 erlangt man das **Modell 8.1.6**.

### Lösung des Modells 8.1.6:<sup>66</sup>

Variablen Werte		Zielfunktion	
$x_1 =$	4,32667972073483	$= 320 \cdot x_1 + 860 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 + 250 \cdot x_4 + 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} - 2554,58 \cdot x_{11}$	6653,183
$x_2 =$	1,16856695227777	<b>u.B.d.R.</b>	
$x_3 =$	0	$L_{t=3} = 376,3977531 \cdot \sigma - 320 \cdot x_1 - 860 \cdot x_2 - 400 \cdot x_3 - 250 \cdot x_4 - 105 \cdot x_7 + 109 \cdot x_{10} + 2554,58 \cdot x_{11} + 6355,53893$	=0
$x_4 =$	0,747042529655116	$L_{t=0} = 400 \cdot \sigma + 1003 \cdot x_1 + 402 \cdot x_2 + 500 \cdot x_3 + 501 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5500$	=0
$x_5 =$	0	$L_{t=0}^{(6)} = 1013 \cdot x_1 + 409 \cdot x_2 + 505 \cdot x_3 + 504 \cdot x_4 + 100 \cdot x_5 - 100 \cdot x_8 - 2000 \cdot x_{11} - 5300$	=-62,62012
$x_6 =$	22,3655188336141	$L_{t=1} = -498 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 - 398 \cdot x_3 - 299 \cdot x_4 - 105 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 109 \cdot x_8 - 100 \cdot x_9$	=-24,64364
$x_7 =$	38,8277835817447	$L_{t=1}^{(6)} = -494 \cdot x_1 + 105 \cdot x_2 - 395 \cdot x_3 - 297 \cdot x_4 - 105 \cdot x_5 + 100 \cdot x_6 + 109 \cdot x_8 - 100 \cdot x_9$	=0
$x_8 =$	0	$L_{t=2} = -395 \cdot x_1 + 152 \cdot x_2 + 204 \cdot x_3 - 48 \cdot x_4 - 105 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 109 \cdot x_9 - 100 \cdot x_{10}$	=-32,87547
$x_9 =$	0	$L_{t=2}^{(6)} = -389 \cdot x_1 + 156 \cdot x_2 + 207 \cdot x_3 - 45 \cdot x_4 - 105 \cdot x_6 + 100 \cdot x_7 + 109 \cdot x_9 - 100 \cdot x_{10}$	=0
$x_{10} =$	0	$A_{t=1} = 30 \cdot \sigma + 72 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 32 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 - 420$	=-51,11804
$x_{11} =$	0	$A_{t=1}^{(6)} = 74 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 33 \cdot x_3 + 21 \cdot x_4 - 405$	=-48,1036
$\sigma$	0,790770044825231	$A_{t=2} = 30 \cdot \sigma + 51 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 - 280$	=-6,14255
		$A_{t=2}^{(6)} = 54 \cdot x_1 + 23 \cdot x_2 + 6 \cdot x_4 - 265$	=0
		$A_{t=3} = 40 \cdot \sigma + 54 \cdot x_1 + 73 \cdot x_2 + 32 \cdot x_3 + 26 \cdot x_4 - 370$	=0
		$A_{t=3}^{(6)} = 55 \cdot x_1 + 74 \cdot x_2 + 34 \cdot x_3 + 28 \cdot x_4 - 350$	=-4,64147
		$B_{t=1} = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 30$	=-9,18758
		$B_{t=2} = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 30$	=-12,34569
		$B_{t=3} = 3 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 30$	=-5,33429

Abbildung 24: Lösung des Modells 8.1.6.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an das Modell 8.1.3.

### Interpretation der Lösung des Modells 8.1.6:

Der optimale Zielwert wird erreicht bei  $z(x^*) = 6653,18$  mit einem Zugehörigkeitsgrad von  $\sigma = 0,7907$ . Der ET hat von vornherein nur Zugehörigkeitsgrade für  $\varepsilon \geq 0,5$  festgelegt. Aufgrund dessen, dass er keinen priorisierten Zielwert vorgibt, strebt er eine Kompromisslösung mit einer linearen Zugehörigkeitsfunktion für  $f_z(x)$  an.

<sup>66</sup> Siehe Thesis Modell 8.1.6, Datenträger.

Nun lässt sich der Zielwert noch erhöhen, indem der ET bspw. einen niedrigeren  $\sigma^A$ -Wert zulässt und die Lösung akzeptiert. Folglich setzt er den kritischen  $\sigma^A$ -Wert bei 0,75 an. Anschließend wird analog zum MOLPAL Verfahren das erste Anspruchsniveau gesetzt:  $z^A[1] = 6670$  für  $\sigma^A = 0,75$ . Die daraus resultierende konkave Zugehörigkeitsfunktion lautet:  $\beta_1 = 0,004036326 * z(x) - 26,172292013$  für  $6608,062 \leq z(x) \leq 6731,93$ . Das Intervall wird von unten abgeschnitten, damit die Konkavität Eigenschaft besteht. Die Restriktion  $L_{t=3}$  des Modells 8.1.6 wird mit der Restriktion  $\sigma \leq \beta_1$  überschrieben. Es ergibt sich folgender Zielwert  $z(x^{r=1}) = 6671,35$  mit  $\sigma^{r=1} = 0,756$ . Die Lösung genügt dem Anspruchsniveau und wird folglich akzeptiert. Da  $\sigma^{r=1} - \sigma^A$  sehr gering ist, ist eine weitere Erhöhung des Anspruchsniveaus nur mit geringen Chancen verbunden und sollte in kleinen Schritten erfolgen. Unter Einbehaltung des kritischen Wertes  $\sigma^A = 0,75$  setzt der ET die Iteration für  $r = 2, \dots$  fort und gelangt zu folgenden Ergebnissen:<sup>67</sup>

r	$z^A[r]$	$\sigma \leq \beta_1 \Leftrightarrow \sigma - \beta_1 \leq 0 \Leftrightarrow \sigma - mx - n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma}{m} - x + \frac{n}{m} \leq 0$	$z(x^r)$	$\sigma^r$
1	6670	$=247,5700578 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6484,18686$	$=6671,35058$	$=0,756$
2	6671	$=243,7500655 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6488,187053$	$=6672,10905$	$=0,75455$
3	6672	$=239,7500845 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6492,187561$	$=6672,78242$	$=0,75326$
4	6673	$=235,750086 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6496,187605$	$=6673,46257$	$=0,75196$
5	6674	$=231,7500863 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6500,187616$	$=6674,1499$	$=0,75064$
6	6675	$=227,7500707 * \sigma - 320 * x_1 - 860 * x_2 - 400 * x_3 - 250 * x_4 - 105 * x_7 + 109 * x_{10} + 2554,58 * x_{11} + 6504,187174$	$=6674,84424$	$=0,74931$

Tabelle 7: Lösungen für die Iterationsschritte  $r = 2, \dots, 6$ .

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung am MOLPAL-Algorithmus.

Die Tabelle 7 ist so zu interpretieren, dass analog zum Iterationsschritt  $r = 1$  die folgenden Iterationsschritte durchgeführt worden sind. Für jeden Iterationsschritt wurden die linearen Zugehörigkeitsfunktion mit den Stützstellen  $(z^A[r]; 0,75), (6731,93752; 1)$  ermittelt und in das Restriktionssystem für  $L_{t=0}$  übernommen. Aus der Tabelle 7 lässt sich ablesen, dass der optimale Zielwert, der dem Anspruchsniveau genügt, bei  $z(x^{r=5}) = 6674,15$  erreicht wird.

<sup>67</sup> Siehe Thesis Modell 8.1.6, Datenträger.

## 8.2 Ohne das Erweiterungsprinzip

Die Methode des Abschnitts 8.1 arbeitete mittels des Erweiterungsprinzips. Der folgende Abschnitt kommt ohne Heranziehung des Erweiterungsprinzips aus. Wolf stellt eine Methode der Kleiner-Gleich-Relation vor, die Negoita et.al entwickelten. Dabei werden die Restriktionen mit unscharfen Koeffizienten in scharfe Restriktionen transformiert, indem man die Teilmengenbeziehung (Def. 2.5.ii) zwischen unscharfen Mengen nutzt. Der ET legt eine Menge  $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \alpha_{1, \dots, p} \in [0,1], p \in N$  fest. Durch  $p$  scharfe Restriktionen werden dann die unscharfen Restriktionen ersetzt. Sind die unscharfen Koeffizienten der Zugehörigkeitsfunktionen konvex, so bildet jedes  $\alpha$ -Niveau ein Koeffizientenintervall. Die unscharfen Koeffizienten werden durch eingipflige Fuzzy-Zahlen (Def. 2.7) beschrieben. Es gilt ( für  $A_{ij} = (a_{ij}; \alpha_{ij}; \beta_{ij})$  und  $B_i = (b_i; \alpha_i; \beta_i)$  ) :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_i A_{ij} x_j \subseteq_{\alpha} B_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n [(\alpha_i a_{ij} - \alpha_i \alpha_{ij}), (\alpha_i a_{ij} + \alpha_i \beta_{ij})] x_j \subseteq [\alpha_i b_i, (\alpha_i b_i + \alpha_i \beta_i)] \rightarrow$$

Transformation in einelementige Koeffizienten:

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_i a_{ij} - \alpha_i \alpha_{ij}) x_j \geq \alpha_i b_i \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^n (\alpha_i a_{ij} + \alpha_i \beta_{ij}) x_j \leq \alpha_i b_i + \alpha_i \beta_i. {}^{68}$$

### Anwendungsbeispiel

Mit unscharfen Koeffizienten für die Restriktionen ohne das Erweiterungsprinzip

Auch Wolf arbeitet mit dieser Methode. Das für diese Arbeit entstandene Modell weist Unterschiede bzgl. der Finanzierungsmöglichkeiten und des Dateninputs auf. Der ET legt  $\alpha$ -Niveau-Mengen, in Form von Intervallen für die Koeffizienten der Restriktionen des Modells 4.1, fest. Der Dateninput ist dabei äquivalent zu dem des Modells 8.1.4. Durch die oben genannte Teilmengenbeziehung verdoppelt sich jede unscharfe Restriktion. Wolf schlägt vor, vorerst nur das mittlere  $\alpha$ -Niveau  $\alpha=0,5$  zu berücksichtigen, welches das Zufriedenheitsempfinden  $\sigma$  ausdrückt. Desweiteren sollen keine Einlagen erfolgen, höchstens Entnahmen i.H.v. 1000 GE für die Planungsperioden.

---

<sup>68</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 49 f.

Für  $i = 1u.2 = L_{t=0}, i = 3u.4 = L_{t=1}, i = 5u.6 = L_{t=2}, i = 7u.8 = A_{t=1}, i = 9u.10 = A_{t=2}, i = 1u.2 = A_{t=3}$ .

$$A_{11} = [-1013, -989] \wedge A_{12} = [-409, -392] \wedge A_{13} = [-505, -495] \wedge A_{14} = [-504, -496]$$

$$A_{21} = [494, 504] \wedge A_{22} = [-105, -91] \wedge A_{23} = [395, 405] \wedge A_{24} = [297, 303]$$

$$A_{31} = [389, 413] \wedge A_{32} = [-156, -146] \wedge A_{33} = [-207, -195] \wedge A_{34} = [45, 53]$$

$$A_{41} = [65, 74] \wedge A_{42} = [12, 18] \wedge A_{43} = [27, 33] \wedge A_{44} = [19, 21]$$

$$A_{51} = [45, 54] \wedge A_{52} = [17, 23] \wedge A_{54} = [4, 6]$$

$$A_{61} = [47, 55] \wedge A_{62} = [66, 74] \wedge A_{63} = [25, 34] \wedge A_{64} = [21, 28]$$

$$B_1 = [5000, 5300] \wedge B_2 = [-1000, 0] \wedge B_3 = [-1000, 0] \wedge B_4 = [300, 405]$$

$$\wedge B_5 = [150, 265] \wedge B_6 = [200, 350]$$

Aus dem Modell 4.1 und den Intervallen für die  $\alpha$ -Niveau-Mengen für  $\alpha = 0,5$  ergibt sich das Modell 8.2.1.

### Lösung des Modells 8.2.1:<sup>69</sup>

Variablen	Werte		Zielfunktion	
$x_1 =$	4,29939778207	z:	$= 320 * x_1 + 860 * x_2 + 400 * x_3 + 250 * x_4 + 105 * x_7 - 109 * x_{10} - 2554,58 * x_{11}$	$= 6731,93752146$
$x_2 =$	1,19055920800391		<b>u.B.d.R.</b>	
$x_3 =$	0	$L_{t=0}$	$= 988 * x_1 + 392 * x_2 + 495 * x_3 + 496 * x_4 + 100 * x_5 - 100 * x_8 - 2000 * x_{11} - 5100$	$= 65,00933747$
$x_4 =$	0,908276449780737	$L_{t=0}$	$= 1013 * x_1 + 409 * x_2 + 505 * x_3 + 504 * x_4 + 100 * x_5 - 100 * x_8 - 2000 * x_{11} - 5300$	$= 0$
$x_5 =$	0	$L_{t=1}$	$= -504 * x_1 + 91 * x_2 - 405 * x_3 - 303 * x_4 - 105 * x_5 + 100 * x_6 + 109 * x_8 - 100 * x_9 + 1000$	$= 934,88853454$
$x_6 =$	22,6865189308705	$L_{t=1}$	$= -494 * x_1 + 105 * x_2 - 395 * x_3 - 297 * x_4 - 105 * x_5 + 100 * x_6 + 109 * x_8 - 100 * x_9$	$= 0$
$x_7 =$	39,0969542827771	$L_{t=2}$	$= -413 * x_1 + 146 * x_2 + 195 * x_3 - 53 * x_4 - 105 * x_6 + 100 * x_7 + 109 * x_9 - 100 * x_{10} + 1000$	$= 877,64264969$
$x_8 =$	0	$L_{t=2}$	$= -389 * x_1 + 156 * x_2 + 207 * x_3 - 45 * x_4 - 105 * x_6 + 100 * x_7 + 109 * x_9 - 100 * x_{10}$	$= 0$
$x_9 =$	0	$A_{t=1}$	$= 65 * x_1 + 12 * x_2 + 27 * x_3 + 19 * x_4 - 300$	$= 11,00481843$
$x_{10} =$	0	$A_{t=1}$	$= 74 * x_1 + 18 * x_2 + 33 * x_3 + 21 * x_4 - 405$	$= -46,3455119$
$x_{11} =$	0	$A_{t=2}$	$= 45 * x_1 + 17 * x_2 + 4 * x_4 - 150$	$= 67,3455119$
		$A_{t=2}$	$= 54 * x_1 + 23 * x_2 + 6 * x_4 - 265$	$= 0$
		$A_{t=3}$	$= 47 * x_1 + 66 * x_2 + 25 * x_3 + 21 * x_4 - 200$	$= 99,72240883$
		$A_{t=3}$	$= 55 * x_1 + 74 * x_2 + 34 * x_3 + 28 * x_4 - 350$	$= 0$
		$B_{t=1}$	$= 4 * x_1 + 3 * x_2 - 30$	$= -9,23073132$
		$B_{t=2}$	$= 3 * x_1 + 4 * x_2 - 30$	$= -12,33956987$
		$B_{t=3}$	$= 3 * x_1 + 10 * x_2 - 30$	$= -5,19621463$

Abbildung 25: Lösung des Modells 8.2.1.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Wolf, J. (1988), S. 57.

### Interpretation der Lösung des Modells 8.2.1:

Diese Lösung ist äquivalent zu der des Modells 8.1.4 für  $z_o$ . In beiden Modellen werden die oberen Intervallgrenzen, aufgrund des gleichen Dateninputs auf dem 0,5 Niveau, determiniert. Der Nachteil des Modells 8.2.1 ist, dass keine Mindestabsatzmengen oder maximale Geldentnahmen fixiert werden. Somit werden die unteren Intervallgrenzen stets größer gewählt und die linken Äste der Zugehörigkeitsfunktionen generell auf dem Niveau

<sup>69</sup> Siehe Thesis Modell 8.2.1, Datenträger.

1 festgelegt. Bei der Liquiditätsrestriktion der ersten und der zweiten Periode wurde eine Entnahme i.H.v. 1000 GE definiert, damit ein zulässiger Lösungsraum geschaffen wird und damit alle Restriktionen nach der Transformation der Kleiner-Gleich-Relation erfüllt werden.<sup>70</sup>

In Falle  $\sum_{j=1}^n [a_j, b_j] x_j \subseteq [c_j] \rightarrow \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq c_j \wedge \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq c_j$  kann folgendermaßen vorgegangen werden  $\sum_{j=1}^n [a_j, b_j] x_j \subseteq [c_j] \rightarrow \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq c_j$ .

Im nächsten Schritt werden für die unscharfen Restriktionen, die im Optimum zum Tragen gekommen sind, weitere  $\alpha$ -Niveaus in Betracht gezogen. Der Ansatz von Negoita et.al, wo von Beginn an vier  $\alpha$ -Niveaus ( $\alpha = 0, \alpha = 0,25, \alpha = 0,5$  und  $\alpha = 0,75$ ) festgelegt werden, wird abgelehnt und der Vorschlag von Wolf angenommen. Wolf schlägt vor, zuerst das Modell auf dem 0,5-Niveau zu lösen und dann weitere Niveaus in Betracht zu ziehen, ansonsten vermehrt sich die Menge der Restriktionen extrem.<sup>71</sup>

Die Anzahl  $m$  der Restriktionen eines Modells ergibt sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & |R_1| + |R_{scharf}| = \text{Anzahl der Restriktion} \xrightarrow{\substack{R_1 \text{ wird fuzzifiziert mittels} \\ \text{unscharfer Koeffizienten} \\ \text{für das mittlere } \alpha\text{-Niveau}}} 2 * |R_1| + |R_{scharf}| \\
 & \xrightarrow{\substack{\text{boolean optimum=} \\ \text{Restriktion kommt im} \\ \text{Optimum zum Tragen;} \\ |R_1| = |R_{true}| + |R_{false}|}} 2 * |R_{true}| + 2 * |R_{false}| + |R_{scharf}| \\
 & \xrightarrow{\substack{|M| \text{ sei die Anzahl der} \\ \alpha\text{-Niveaus die auf } R_{true} \\ \text{in Betracht gezogen werden}}} m = 2 * (|M| * |R_{true}| + |R_{false}|) + |R_{scharf}|.
 \end{aligned}$$

NNB wurden nicht berücksichtigt.

Folgende Restriktionen kommen im Optimum zum Tragen:  $L_{t=0}, L_{t=1}, L_{t=2}, A_{t=2} \wedge A_{t=3}$ .

Demzufolge ergibt sich für das Modell 8.2.2 folgende Anzahl der Restriktionen:

$m = 2 * (4 * 5 + 1) + 3 = 45$ , für die vier Niveaus  $\alpha = 0; \alpha = 0,25; \alpha = 0,5 \wedge \alpha = 0,75$ .

<sup>70</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 62.

<sup>71</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 51 f und Rommelfanger, H. (1988), S. 229.

## Modell 8.2.2:

		$C_{i1}$		$C_{i2}$		$C_{i3}$		$C_{i4}$		$C_{i5}$		$C_{i6}$	
$L_{i=0}$	0,75	[992,5; 1008]	$x_1+$	[395; 405,5]	$x_2+$	[497,5; 502,5]	$x_3+$	[498 ;502,5]	$x_4+$	[100; 100]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,50	[988; 1013]	$x_1+$	[392; 409]	$x_2+$	[495; 505]	$x_3+$	[496 ;504]	$x_4+$	[100; 100]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,25	[983,5; 1018]	$x_1+$	[389; 412,5]	$x_2+$	[492,5; 507,5]	$x_3+$	[494 ;505,5]	$x_4+$	[100; 100]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,00	[979; 1023]	$x_1+$	[386; 416]	$x_2+$	[490; 510]	$x_3+$	[492 ;507]	$x_4+$	[100; 100]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
$L_{i=1}$	0,75	[-502,5 ; -496]	$x_1+$	[94; 102,5]	$x_2+$	[-403 ; -396,5]	$x_3+$	[-302 ; -298]	$x_4+$	[-105 ; -105]	$x_5+$	[100; 100]	$x_6+$
	0,50	[-504 ; -494]	$x_1+$	[91; 105]	$x_2+$	[-405 ; -395]	$x_3+$	[-303 ; -297]	$x_4+$	[-105 ; -105]	$x_5+$	[100; 100]	$x_6+$
	0,25	[-505,5 ; -492]	$x_1+$	[88; 107,5]	$x_2+$	[-407 ; -393,5]	$x_3+$	[-304 ; -296]	$x_4+$	[-105 ; -105]	$x_5+$	[100; 100]	$x_6+$
	0,00	[-507 ; -490]	$x_1+$	[85; 110]	$x_2+$	[-409 ; -392]	$x_3+$	[-305 ; -295]	$x_4+$	[-105 ; -105]	$x_5+$	[100; 100]	$x_6+$
$L_{i=2}$	0,75	[-410,5 ; -392]	$x_1+$	[146,5 ; 154]	$x_2+$	[197; 205,5]	$x_3+$	[-52 ; -46,5]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[-105 ; -105]	$x_6+$
	0,50	[-413 ; -389]	$x_1+$	[146; 156]	$x_2+$	[195; 207]	$x_3+$	[-53 ; -45]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[-105 ; -105]	$x_6+$
	0,25	[-415,5 ; -386]	$x_1+$	[145,5; 158]	$x_2+$	[193; 208,5]	$x_3+$	[-54 ; -43,5]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[-105 ; -105]	$x_6+$
	0,00	[-418 ; -383]	$x_1+$	[145; 160]	$x_2+$	[191; 210]	$x_3+$	[-55 ; -42]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[-105 ; -105]	$x_6+$
$A_{i=2}$	0,75	[46; 52,5]	$x_1+$	[18,5; 22,5]	$x_2+$	[0; 0]	$x_3+$	[4,5 ; 5,5]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,50	[45; 54]	$x_1+$	[17; 23]	$x_2+$	[0; 0]	$x_3+$	[4 ; 6]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,25	[44; 55,5]	$x_1+$	[15,5; 23,5]	$x_2+$	[0; 0]	$x_3+$	[3,5 ; 6,5]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,00	[43; 57,00]	$x_1+$	[14; 24]	$x_2+$	[0; 0]	$x_3+$	[3 ; 7]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
$A_{i=3}$	0,75	[47,5; 54,5]	$x_1+$	[67,5; 73,5]	$x_2+$	[26; 33]	$x_3+$	[22 ; 27]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,50	[47; 55]	$x_1+$	[66; 74]	$x_2+$	[25; 34]	$x_3+$	[21 ; 28]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,25	[46,5; 55,5]	$x_1+$	[64,5; 74,5]	$x_2+$	[24; 35]	$x_3+$	[20 ; 29]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$
	0,00	[46; 56]	$x_1+$	[63; 75]	$x_2+$	[23; 36]	$x_3+$	[19 ; 30]	$x_4+$	[0; 0]	$x_5+$	[0; 0]	$x_6+$

Abbildung 26: Modell 8.2.2 Teil 1 von 2.

$C_{i7}$	$C_{i8}$	$C_{i9}$	$C_{i10}$	$C_{i11}$		$B_i$					
[0; 0]	$x_7 +$	[-100 ; -100]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[-2000 ; -2000]	$x_{11}$	$\subseteq$	[4800; 5200]
[0; 0]	$x_7 +$	[-100 ; -100]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[-2000 ; -2000]	$x_{11}$	$\subseteq$	[4500; 5300]
[0; 0]	$x_7 +$	[-100 ; -100]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[-2000 ; -2000]	$x_{11}$	$\subseteq$	[4200; 5400]
[0; 0]	$x_7 +$	[-100 ; -100]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[-2000 ; -2000]	$x_{11}$	$\subseteq$	[3900; 5500]
[0; 0]	$x_7 +$	[109; 109]	$x_8$	[-100 ; -100]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[0; 0]	$x_7 +$	[109; 109]	$x_8$	[-100 ; -100]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[0; 0]	$x_7 +$	[109; 109]	$x_8$	[-100 ; -100]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[0; 0]	$x_7 +$	[109; 109]	$x_8$	[-100 ; -100]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[100; 100]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[109; 109]	$x_9 +$	[-100 ; -100]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[100; 100]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[109; 109]	$x_9 +$	[-100 ; -100]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[100; 100]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[109; 109]	$x_9 +$	[-100 ; -100]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[100; 100]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[109; 109]	$x_9 +$	[-100 ; -100]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[-1000; 0]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[175; 257,5]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[150; 265]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[125; 272,5]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[100; 280]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[220; 340]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[200; 350]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[180; 360]
[0; 0]	$x_7 +$	[0; 0]	$x_8$	[0; 0]	$x_9 +$	[0; 0]	$x_{10} +$	[0; 0]	$x_{11}$	$\subseteq$	[160; 370]

Abbildung 27: Modell 8.2.2 Teil 2 von 2.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Wolf, J. (1988), S. 60.



### Lösung und Interpretation des Modells 8.2.2:<sup>72</sup>

Das Modell 8.2.2 lässt sich gemäß der Teilmengenbeziehung wieder in scharfe Restriktionen transformieren.

$\alpha$	$z(x)$	6576,97	6576,97	6607,69	6607,69	6638,41	6669,13	6669,46	6669,46	6700,70	6731,94	6761,67	6792,78	6853,30
0,00000000		X	X					X		X		X		X
0,25000000		X		X	X			X	X			X	X	
0,50000000		X		X		X		X	X	X	X			
0,75000000		X	X	X	X	X	X							

Tabelle 8: Lösungen für die Zielwerte unter Einbeziehung von verschiedenen  $\alpha$ -Niveaus.

Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an das Modell 8.2.2.

Die Tabelle 8 gibt die Zielwerte  $z(x)$ , die unter Einbeziehung der jeweiligen  $\alpha$ -Niveaus erreicht werden, an. Dabei lässt sich folgende Struktur erkennen: Umso unschärfer die eingehenden Informationen sind, desto größer ist der Zielwert. Die Begründung liegt darin, dass die Koeffizienten größere Intervalle aufweisen und die oberen Intervallgrenzen determiniert werden. Wird für ein  $\alpha$ -Niveau ein weiteres hinzugenommen zur Lösung des Modells, dann verkleinert sich im Allgemeinen der Zielwert  $z(x)$  aufgrund der zunehmenden Informationen. Im Allgemeinen verkleinert sich die Menge der zulässigen Lösungen bei Hinzunahmen weiterer Restriktionen, dabei gilt im Allgemeinen: Ist  $\alpha^{(1)}$  schärfer als  $\alpha^{(2)}$ , dann folgt daraus  $z(x)^{(\alpha \wedge \alpha^{(2)})} \geq z(x)^{(\alpha \wedge \alpha^{(1)})}$ . Die optimalen Lösungen der Modelle aus Kapitel 8 umfassten überwiegend die Investitionsobjekte I, II und IV und die Finanzinvestitionsobjekte VI und VII. Daraus ist abzuleiten, dass die unscharfen Informationen bedenkenlos mit ins Modell einfließen können. Durch zusätzliche unscharfe Informationen kann sich aber auch eine völlig andere aufgebaute Optimallösung ergeben. Deshalb sollten zusätzliche Informationen äußerst sorgfältig bestimmt werden und nur mit ins Modell einfließen, wenn die Informationen wirklich vorliegen. Stehen keine weiteren Informationen zur Verfügung, dann ist stets das gleiche Intervall auf alle  $\alpha$ -Niveaus zu verwenden.<sup>73</sup>

<sup>72</sup> Siehe Thesis Modell 8.2.2, Datenträger.

<sup>73</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 62.



### 8.3 Vergleich: Ohne das Erweiterungsprinzip vs. Mittels des Erweiterungsprinzip

Der Ansatz von Negoita et.al. mit den vier  $\alpha$ -Niveaus ist fraglich, denn die niedrigen  $\alpha$ -Niveaus weisen eine sehr geringe Realisierungschance auf. Ein ET wird i.d.R. erstens solche Realisierungschancen nicht akzeptieren und zweitens wird es ihm auch schwer fallen, solche Daten zu ermitteln bzw. festzulegen. Nun lassen sich nach Belieben viele  $\alpha$ -Niveaus heranziehen, jedoch wächst dann das Modell umso mehr an. Zur Lösung von Modellen (bspw. im Modell 8.2.2) kann eine leistungsfähige Computer-Software entwickelt werden, dadurch wird der große Rechenaufwand entkräftet.

Die Einbringung des Erweiterungsprinzips zur Lösung von Fuzzy LP Modellen hat den großen Vorteil, dass der  $\sigma$ -Wert dem ET wichtige Informationen übermittelt, zum Einen über die Zufriedenheit der Gesamtlösung und zum Anderen über das Zufriedenheitsempfinden über die einzelnen unscharfen Restriktionsgrenzen.

Beide Ansätze können zum gleichen Ergebnis führen. Ebenso lassen sich durch den Mensch-Maschine Prozess Fehlentscheidungen des ET's korrigieren. In beiden Varianten wurde stets der Minimum –Operator zur Aggregation herangezogen, denn durch den Interaktiven Prozess kann der ET seine Ergebnisse im Einklang bringen.

### 8.4 Interactive fuzzy linear programming algorithm II (IFLP II)

Die beiden Methoden können nun im interaktiven Mensch-Maschine Verfahren zu einem Algorithmus zusammengefasst werden. Analog zu den Algorithmen IFLP und MOLPAL dient der Algorithmus IFLP II dem ET als sukzessive Lösungsfindung. In Anlehnung an Lai / Hwang, Wolf, Rommelfanger und den bis hierher vorgestellten Methoden des Kapitel 8 wird ein IFLP II Algorithmus gebaut.<sup>74</sup> Dabei soll unterschieden werden zwischen einer Lösung mit dem Erweiterungsprinzip (a) und ohne dem Erweiterungsprinzip (b).

1. Schritt: (a) Festlegen eines Schwellenwertes  $\varepsilon$  und der Koeffizienten  $A_{ij} \wedge B_i$  der Form  $A_{ij} = (a_{ij}^u; a_{ij}^o; \alpha_{ij}^{u,\varepsilon}; \alpha_{ij}^{o,\varepsilon}) \wedge B_i = (b_i; 0; \beta_i^\varepsilon)$ , sowie dem Ermitteln von  $z_u \wedge z_o$  gemäß des Abschnitts 8.1. Unter Angabe der Stützstellen  $(z_u; \varepsilon), (z_o; 1) \wedge (b_i; 1), (b_i + d_i; \varepsilon)$  für

---

<sup>74</sup> Vgl. Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 146 ff und Wolf, J. (1988), Abschnitt 3.2 und Rommelfanger, H. (1988), S. 254 ff.

$i = 1, \dots, m_1$  werden die linearen Zugehörigkeitsfunktionen ermittelt. Die Kompromisslösung wird mittels des Modells 8.1.3 ermittelt.

(b)  $\alpha = 0,5$ . Festlegen der Intervallen für die  $\alpha$  – Niveau-Mengen. Ermitteln des Modells zur Lösung gemäß des Abschnitts 8.2.

→ Ist die Lösung  $x^*$  für den ET befriedigend/akzeptabel?

→ Ja: Stopp.

→ Nein: Gehe zum 2. Schritt.

2. Schritt: (a) Für  $r = 1$ . Der ET legt einen kritischen Wert  $\sigma^A \in ]\varepsilon, 1[$  fest, der allen Anspruchsniveaus als Zugehörigkeitsgrad zugeordnet wird. Der ET legt ein Anspruchsniveau  $z^A[r] \vee g_i^A[r]$  mit  $z_u(x^*) < z^A[r] < z_o(x^*) \vee b_i < g_i^A[r] < b_i + d_i$  fest. Unter Angabe der Stützstellen  $(z_u; \varepsilon), (z^A[r]; \sigma^A), (z_o; 1) \vee (b_i; 1), (g_i^A[r]; \sigma^A), (b_i + d_i; \varepsilon)$  wird die stückweise lineare Zugehörigkeitsfunktion ermittelt. Die Kompromisslösung wird mittels des Modells 8.1.3 ermittelt.

(b) Der ET legt weitere Intervalle für die  $\alpha$  – Niveau-Mengen für  $\alpha \in [0, 1]$  fest. Ermitteln der Lösung gemäß des Abschnitts 8.2.

→ Ist die Lösung für den ET befriedigend/akzeptabel?

→ Ja: Stopp.

→ Nein: (a) Setze  $r = r + 1$ . Gehe zum 2. Schritt.

→ Nein: (b) Gehe zum 2. Schritt.

→ Nein: Gehe zum 1. Schritt.

## 9 Fazit

Die vorgegangenen Methoden zeigen, dass es möglich ist, unscharfe Daten mit in einem deterministischen Investitionsmodell einfließen zu lassen und dieses auch zu sinnvollen Ergebnissen führen kann. Dem ET wird gestattet, mehrere Repräsentanten zu wählen, was für ihn eine Erleichterung darstellt. Unter Einbeziehung der Fuzzy Set Theorie lassen sich Entscheidungsprobleme sachadäquat modellieren. Die Algorithmen IFLP, IFLP II und MOLPAL gestatten dem ET hohe Flexibilität bzgl. des Dateninputs und seiner subjektiven Präferenzen. Dadurch wird auch der pessimistische Max-Min-Operator entkräftet und es obliegt dem ET, welche Lösung akzeptabel ist oder wie viele Informationen er ins Modell einfließen lässt. Der Nachteil eines eventuellen hohen Rechenaufwandes wird entkräftet, indem zum Einen die o.g. Algorithmen eine sukzessive Lösungsfindung bieten und zum Anderen heutzutage leistungsfähige Standardsoftware zur Verfügung.

Ein ET sollte jedoch nur die Daten ins Modell einfließen lassen, die ihm auch bekannt sind bzw. die ihm vorliegen. LP Modelle sollten immer nur mit größter Vorsicht aufgestellt werden, um Fehler zu vermeiden und auch um eine aussagefähige Lösung zu erhalten. Die o.g. Algorithmen bieten in der Hinsicht ein flexibles Instrumentarium. Der ET kann alle Möglichkeiten eines Wertebereichs in Erwägung ziehen. Das interaktive Verfahren ist für den ET ein Lernprozess über das Modell. Er lernt die Wichtigkeit der Faktoren im Modell kennen und erkennt gute Lösungen.

Im dritten Kapitel wurde aufgezeigt, dass der Fuzzy Erwartungswert schlechter abschneiden kann als die statistische Durchschnittswertbildung für Fuzzy Zahlen, aufgrund der Sensitivität auf Populationsdichten. Die statistische Erwartungswertbildung ist lediglich ein Ermittlungsverfahren statistischen Ursprungs, welches ein subjektives aggregiertes Maß darstellt. Die entscheidende und wichtigste Rolle spielt der ET. Dies wird sehr gut daran deutlich, dass er die Anzahl der Iterationsschritte der Fuzzy Delphi Methode und die Entscheidung bzgl. des Kompromisses festlegt.

Weitere Untersuchungen mit der Fuzzy Set Theorie bieten bspw. die Kombination mit neuronalen Netzwerken, Expertensysteme, usw.. Festzuhalten ist: "Fuzzy kann überall dort eingesetzt werden, wo nicht exakte Daten angegeben werden können."<sup>75</sup>

Auch die Koeffizienten der Zielfunktion lassen sich unscharf modellieren. Für Investitionsmodelle eignet sich die  $\alpha$ -Niveau-bezogene Paarbildung, welche von Wolf / Hanuscheck / Rommelfanger entwickelt wurde. Für LP Modelle mit Fuzzy-Zielen findet der Algorithmus „Fuzzy linear programming based on aspiration levels“ Anwendung.<sup>76</sup> Wolf geht auch darauf ein, die Variablen unscharf zu modellieren. Er erläutert, dass die unscharfe Modellierung der Variablen möglich ist, aber aufgrund der immensen Rechenschwierigkeiten praktisch wenig Sinn macht. Wolf erklärt auch, dass es mit dem Erweiterungsprinzip möglich ist, wahrscheinlichkeitstheoretische und Fuzzy-Elemente miteinander zu kombinieren. Desweiteren lassen sich Kapitalwertmodelle mit dem Erweiterungsprinzip lösen. Jedoch fällt dort dasselbe Fazit wie bei der Modellierung unscharfer Variablen, da sich die Multiplikation zwischen Fuzzy Zahlen nur approximativ bestimmen lässt.<sup>77</sup> Einen Ausblick auf weitere Anwendungen bieten Lai / Hwang. Sie präsentieren eine umfangreiche Liste von Optimierungsanwendungen unter Einbeziehung der Fuzzy Set Theorie. Dabei untersuchen sie neben den Fuzzy LP Modellen, Fuzzy nichtlineare Modelle, Fuzzy Integer Modelle, usw..<sup>78</sup>

Die Frage nach der Effektivität und wie wirkungsvoll die Fuzzy Set Theorie bei Investitionsmodellen mit einbezogen werden kann, ist zu beantworten mit: Der Entscheidungsprozess eines Investitionsmodells kann unter Nutzung der Fuzzy Set Theorie besser beschrieben und gelöst werden. Unpräzises, vages und unscharfes Wissen kann explizit in ein Investitionsmodell einbezogen und mathematisch abgebildet werden. Ein ET wird die in der Praxis benötigten Investitionsmodelle stets so genau wie möglich abbilden müssen, um fehlerhafte Modellierungen realer Probleme zu verhindern.

---

<sup>75</sup> Traeger, D. (1994), S. 165.

<sup>76</sup> Vgl. Rommelfanger, H. (1988), S. 245 ff.

<sup>77</sup> Vgl. Wolf, J. (1988), S. 150 ff.

<sup>78</sup> Vgl. Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992), S. 9.

## Literaturverzeichnis

**Benker, H. (2007):** Wirtschaftsmathematik – Problemlösungen mit Excel, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1.Auflage, 2007.

**Bojadziev, G. / Bojadziev, M. (2007):** Fuzzy Logic for Business Finance, and Management, Singapore, 2<sup>nd</sup> Edition, 2007.

**Hubert, F. (2002):** Fuzzy Methoden in der Wirtschaftsmathematik, Eine Einführung, Verlag Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1. Auflage, 2002.

**Kahlert, J. (1995):** Fuzzy Control für Ingenieure, Analyse, Synthese und Optimierung von Fuzzy-Regelungssystemen, Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1995.

**Kruschwitz, L. (2005):** Investitionsrechnung, R.Oldenbourg Verlag, München / Wien, 10. Auflage, 2005.

**Lai, Y. J. / Hwang, C. L. (1992):** Fuzzy Mathematical Programming, Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1992.

**Naas, J. / Tutschke, W. (1986):** Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik, Akademie-Verlag Berlin, 1986.

**Rommelfanger, H. (1988):** Entscheiden bei Unschärfe, Fuzzy Decision Support-Systeme, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1988.

**Tizhooh, H. R. (1998):** Fuzzy-Bildverarbeitung, Einführung in Theorie und Praxis, Springer-Verlag, 1998.

**Traeger, D. H. (1994):** Einführung in die Fuzzy-Logik, B.G. Teubner Stuttgart , 2. Auflage, 1994.

**Wiese, H. (2002):** Entscheidungs- und Spieltheorie, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2002.

**Wolf, J. (1988):** Lineare Fuzzy-Modelle zur Unterstützung der Investitionsrechnung, Modellierung und Lösung von Investitionsproblemen mittels der Theorie unscharfer Mengen, Verlag Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main, 1988.

## **Anhang A - Inhalt der beigefügten CD**

Die CD enthält alle in dieser Arbeit verwendeten Tabellen, Abbildungen und Lösungen. Desweiteren ist die Bachelorarbeit in Form eines PDF-Dokuments hinterlegt. Die CD-ROM ist in folgende Ordner unterteilt:

<u>Abbildungen:</u>	Sämtliche Abbildungen sind in diesem Verzeichnis hinterlegt, entweder als Microsoft Excel Datei oder als JPEG-Bilddatei.
<u>Bachelorarbeit:</u>	Dieses Verzeichnis enthält die Bachelorarbeit in digitaler Form als PDF-Datei.
<u>IFLP:</u>	Dieser Ordner beinhaltet das Excel Sheet IFLP, welches im Anhang erläutert wird.
<u>Java:</u>	Der Ordner enthält das Java Projekt des entwickelten Programms zur Berechnung von stückweisen linearen Funktionen. Ebenso ist eine PDF-Datei enthalten, die den Quellcode der Methode 4.5 enthält.
<u>Kapitel:</u>	In diesem Verzeichnis befinden sich alle Lösungen in Form von Microsoft Excel Dateien, die in dieser Arbeit vorgestellt wurden.
<u>MOLPAL:</u>	Dieser Ordner beinhaltet das Excel Sheet MOLPAL, welches wie das Excel Sheet IFLP aufgebaut ist.
<u>Tabellen:</u>	Dieser Ordner beinhaltet alle Tabellen (Microsoft Excel Dateien), die in dieser Arbeit präsentiert wurden.

## Anhang B - Aufbau der Java Methode für stückweise lineare Funktionen

Die Idee und die Umsetzung der Java-Methode zur Lösung von stückweisen linearen Zugehörigkeitsfunktionen soll hier erläutert werden.

Idee: Die Punkte werden in Form einer Matrix geschrieben. Die Spaltendimension ist somit stets 2, wobei die x-Werte in der ersten Spalte und die y-Werte in der zweiten Spalte stehen. Die Zeilendimension ergibt aus der Anzahl der Punkte. Für eine endliche Anzahl  $K = |(x^k; f(x^k))|$  von Stützstellen  $(x^k; f(x^k)), k = 1, \dots, K; k \in N$ , erhält man eine  $K \times 2$  Matrix = Punktematrix.

$$\text{Punktematrix} = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ \dots & \dots \\ x^K & y^K \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} [00] & [01] \\ \dots & \dots \\ [K0] & [K1] \end{pmatrix} = \text{Darstellung in Arrayform.}$$

In Java lässt sich das Konzept einer Matrixstruktur, durch einen zweidimensionalen Array, darstellen. Zur Abbildung einer Fließkommazahl wird der Datentyp double verwendet. Der Index eines Arrays fängt bei 0 an.

Gegeben seien  $P_i = (x_i; y_i), i = 1, \dots, K$ ; Punkte.

Die Berechnung von  $\beta_j, j = 1, \dots, K - 1$ ; erfolgt in Form einer Methode.

### Methode 5.4:

```
double[][] Punktematrix = new double[K][2]; //  $(1, \dots, K)^T \times (x, y)$ 
double[] m = new double [K-1]
double[] n = new double [K-1]

for (int z = 0; z < K-1; z++)
{
     $m_z = \frac{y_{z+1} - y_z}{x_{z+1} - x_z};$ 
     $n_z = y_z - m * x_z;$ 
    Ausgabe("  $\beta_{z+1} = "$  +  $m_z$  + "x" + " +  $n_z$  );
}
```

Die lineare Funktionsvorschrift lautet  $y = mx + n$ ; für die Steigung gilt  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  und

für die Ordinate  $n = y_1 - m * x_1$ .

The screenshot shows a Java IDE console window with the following output:

```

<terminated> Main (2) [Java Application] C:\Program Fi
1. Punkt = (100.0;1.0)
2. Punkt = (200.0;3.0)
3. Punkt = (300.0;4.0)
1. f (x) = 0,020000000x + (-1,000000000)
2. f (x) = 0,010000000x + (1,000000000)
Output.
  
```

Red arrows point from the output to explanatory text:

- Three arrows point from the three coordinate pairs to the text: **Stützstellen bzw. Punkte (K=3)**
- Two arrows point from the two linear equations to the text: **Funktionsgleichungen (Anzahl =K-1=2)**



## Anhang C - Der IFLP Algorithmus mit Excel

Der im 6. Kapitel vorgestellte IFLP Algorithmus wird, in einer Excel Datei, anhand von drei Excel Sheets dargestellt. Ziel ist es eine Problemlösung vorzuzeigen, die dem Anwender ein dynamisches und flexibles Instrumentarium bietet. Die Dateneingabe des Modells erfolgt dabei nur einmal.

Parametrische Programmierung: Das 1. Excel Sheet bietet eine Anleitung für den 1.- und den 2. Schritt vom IFLP Algorithmus.

**Anleitung**

**Zufriedenheitsgrad**

**Lösungstabelle**

**Inputmatrix**

**Zielwert**

**Lösungsmatrix**

Ansicht: Excel Sheet Parametrische Programmierung.

Kompromisslösung: Das zweite Excel Sheet übernimmt das Restriktionssystem vom ersten Excel Sheet. Ebenso wird der minimale- und der maximale Zielwert für die symmetrische Kompromisslösung nach Werner übernommen. Eine Anleitung für den 3.- und 4. Schritt des IFLP Algorithmus ist gegeben.

**Anleitung**

**Zufriedenheitsgrad**

**Zielwert**

**$z_b$  und  $z_o$**

Ansicht: Excel Sheet Kompromisslösung.

Kompromisslösung mit Anspruchsniveau: Das dritte Excel Sheet übernimmt, analog zum 2. Excel Sheet, das Restriktionssystem vom ersten Excel Sheet. Eine Anleitung für den 5. Schritt des IFLP Algorithmus ist gegeben.

The image shows a screenshot of an Excel spreadsheet titled 'Schritt 5 des IFLP Algorithmus'. It contains several tables and sections. The 'Anleitung' section provides instructions. The 'einzugebene Stützstellen' section contains a table with columns for 'x1' through 'x100'. The 'Zugehörigkeitsfunktionen' section contains a table with columns for 'x1' through 'x100'. The 'Zufriedenheitsgrad' section contains a table with columns for 'x1' through 'x100'. The 'Zielwert' section contains a table with columns for 'x1' through 'x100'. Red circles and arrows highlight specific areas, including the 'Anleitung' section and the 'Zugehörigkeitsfunktionen' table.

Ansicht: Excel Sheet Kompromisslösung mit Anspruchsniveau.

Der Dateninput erfolgt stets über die blauen Felder. In den grauen Feldern werden die Lösungen übernommen. Für jedes Excel Sheet sind die Solver Lösungen durchzuführen (die Voreinstellung sind bereits durchgeführt). Änderungen im Restriktionssystem sind stets vom Excel Sheet parametrische Programmierung auszuführen.