

۱- نمودار تابع معین  $f$  با دامنه‌ی  $[-2, 4]$  و برد  $[0, 3]$  در شکل روبه‌رو داده شده است:

اولاً: نمودار تابع  $f(2x) + 1$  را رسم کنید.

ثانیاً: دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۲-  $m$  را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی  $mx^2 - 4x + 1 = 0$  سه برابر ریشه‌ی دیگر باشد. ( $m \neq 0$ )

۳- مقدار  $k$  را طوری پیدا کنید که باقیمانده‌ی تقسیم  $p(x) = x^3 - 2kx - 3$  بر  $x - 2$  مساوی یک باشد.

۴- تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  مفروض است.

اولاً: ثابت کنید تابع  $f$  معکوس پذیر است.

ثانیاً ضابطه‌ی تابع معکوس تابع  $f$ ،  $(f^{-1})$  را بنویسید.

ثالثاً: آیا دو تابع  $f \circ f^{-1}$  و  $f^{-1} \circ f$  مساویند؟ چرا؟

$$\frac{2\sin \alpha \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$$

۵- درستی رابطه‌ی روبه‌رو را ثابت کنید. ( $\alpha \neq 0$ )

۶- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x-2}{[x-2]}$  مفروض است. آیا  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  وجود دارد؟ چرا؟

۷- حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \sin \frac{1}{x-1}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

د)  $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$

۸- معادلات خطوط مجانب افقی و قائم تابع  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x+1}$  را در صورت وجود به دست آورید.

۹- مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ a \sin(x-2) + bx & x > 2 \end{cases}$  در  $x_0 = 2$  پیوسته باشد.

۱۰- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

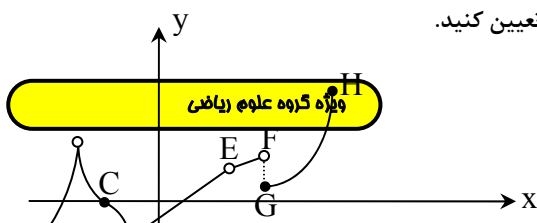
الف)  $y = \frac{(x^2 + 5x)^3}{\sqrt[3]{x}}$       ب)  $y = \sin^3(x^2 + x) + \cot(5x)$       ج)  $y = \arccos(\sqrt{x})$

۱۱- جدول تغییرات و نمودار تابع  $y = \frac{2x+1}{-x+1}$  را رسم کنید و مختصات مرکز تقارن تابع را تعیین کنید.

۱۲- مشتق پذیری تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$  را در  $x_0 = 0$  بررسی کنید.

۱۳- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع  $y = x^3 + 3x^2$  را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

۱۴- با توجه به نمودار  $f$  در شکل زیر، نقاط اکسترمم نسبی و مطلق و بحرانی تابع  $f$  را تعیین کنید.

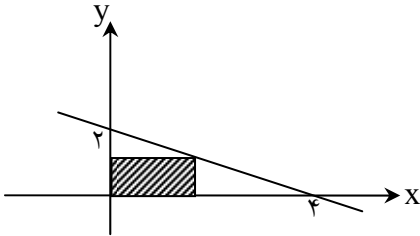




۱۵- جدول تغییرات و نمودار تابع  $y = \sqrt{3} \tan x - 1$  را در بازه  $[0, \pi]$  رسم کنید.

۱۶- مستطیلی به محورهای  $x$  و  $y$  و نمودار تابع با ضابطه  $y = \frac{4-x}{4}$  محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن

ماکزیمم شود؟



۱۷- ابتدا نمودار تابع  $f(x) = ||x-1|-2|$  را رسم کنید، سپس مقدار  $\int_{-2}^3 f(x) dx$  را محاسبه کنید.

**پاسف سوالات امتحانی هماهنگ کشوری - شهریورماه ۱۳۸۴**

-۱

$$-2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 3 \Rightarrow 1 \leq y+1 \leq 4$$

$$D = [-1, 2] \quad R = [1, 4]$$

-۲

$$\alpha = 3\beta \rightarrow \alpha + \beta = 4\beta \rightarrow \frac{4}{m} = 4\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{m}$$

$$m\left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m}\right) + 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{4}{m} = -1 \Rightarrow m = 3$$

-۳

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 1 \rightarrow (2)^k - 2k(2) - 3 = 1 \rightarrow k = 1$$

۴- اولاً:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$R_f = [0, \infty) \quad , \quad D_f = [1, \infty)$$

پس f یک به یک است و بنابراین معکوس پذیر است:

$$y = \sqrt{x - 1} \rightarrow y^2 + 1 = x \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$

ثانیاً:

ثالثاً: خیر: زیرا:

$$f^{-1} \text{ of } : D_{f^{-1} \text{ of }} = \left\{ x \in D_f \mid \overbrace{f(x) \in D_{f^{-1}}}^{\text{همواره صحیح}} \right\} = D_f$$

$$f \text{ of } f^{-1} : D_{f \text{ of } f^{-1}} = \left\{ x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_f \right\} = D_{f^{-1}} = R_f$$

$$f \text{ of } f^{-1} \neq f^{-1} \text{ of } \text{ پس } D_f \neq R_f = D_{f^{-1}} \quad \text{همواره صحیح}$$

چون:

-۵

$$\frac{\sin(\alpha + 2\alpha) + \sin(\alpha - 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha (2\cos 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha} = 2\cos 2\alpha - 1$$

۶- خیر، چون f برای  $x > 2$  و نزدیک به ۲ تعریف نشده، پس این حدود وجود ندارد.

$$D_f : [x - 2] \neq 0$$

$$[x - 2] = 0 \Rightarrow 0 \leq x - 2 < 1 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$\Rightarrow D_f = R - [2, 3) = (-\infty, 2) \cup [3, \infty)$$

۷- رفع ابهام می کنیم:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \sin \frac{1}{x-1} = 0 \times [-1, 1] = 0$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{5}{0 \times 4} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

د)  $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2+2x-x^2+2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}$  رفع ابهام می کنیم

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-x-x} = -2$

۸- برای  $x = -1$  حد وجود ندارد  $D = [0, \infty)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$  مجانب افقی

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty \Rightarrow x = 0$  مجانب قائم

۹-  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  شرط پیوستگی در  $x = 2$

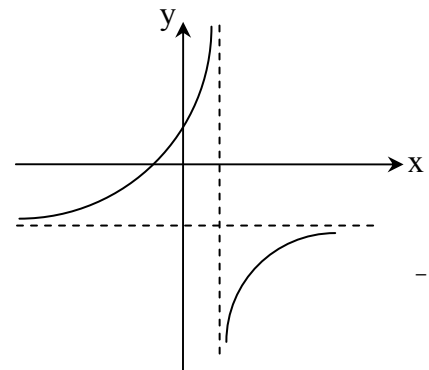
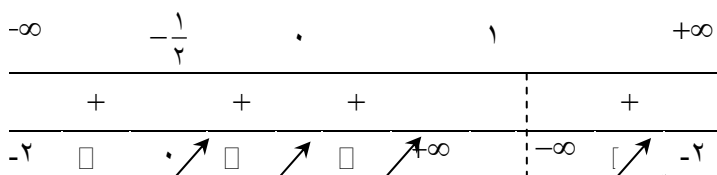
$a - 1 = -2 = 2b \Rightarrow a = -1, b = -1$

۱۰-  $y' = \frac{3(2x+5)(x^2+5x)^2 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x^2+5x)^2}{(\sqrt[3]{x})^2}$  الف

ب)  $y' = 3(2x+1) \sin^2(x^2+x) \cos(x^2+x) - 5(1+\cot^2(5x))$  ج)  $y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \quad 0 < x \leq 1$

۱۱- مرکز تقارن  $W \Big|_{-2}^1$   $y \rightarrow \infty \Rightarrow x = 1$  مجانب قائم  $y' = \frac{3}{(-x+1)^2} > 0$   $x \rightarrow \infty : y = -2$  مجانب افقی

$x = 0, y = 1, y = 0, x = -\frac{1}{2}$



$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sqrt{x+1} - 0}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+1}}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{x+1}}{x} = -1 \end{cases} \rightarrow$

چون مشتق چپ و راست  $f$  در صفر با هم برابر نیستند پس  $f$  مشتق پذیر نیست.

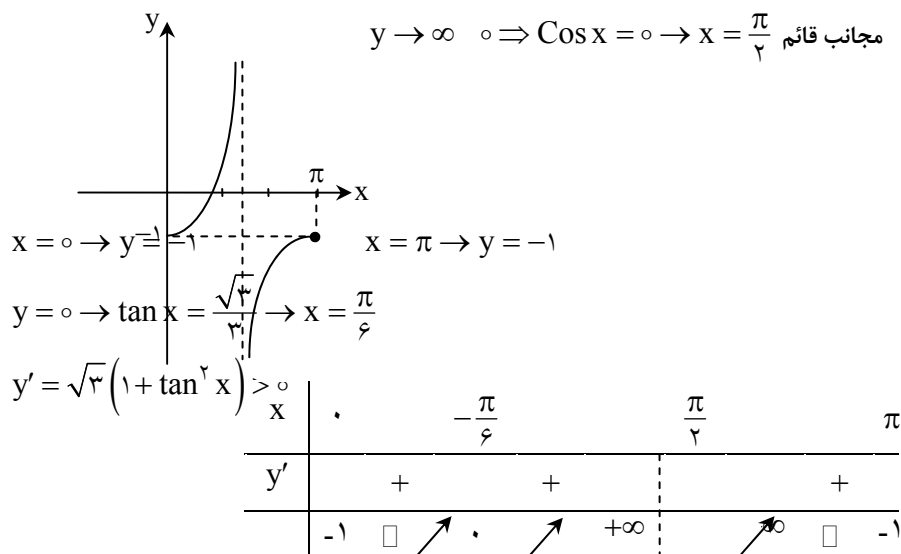
۱۳- نقطه‌ی عطف  $y' = 3x^2 + 6x \rightarrow y'' = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \rightarrow y = 2 \rightarrow (-1, 2)$

$m = -3 \Rightarrow y - 2 = -3(x + 1) \rightarrow y = -3x - 1$

۱۴-  $H$  و  $G$  و  $D$  و  $C$  بحرانی،  $D$  می نیمم مطلق،  $G$  و  $D$  می نیمم نسبی،  $H$  ماکسیمم مطلق، ماکسیمم نسبی ندارد.

-۱۵

$$y \rightarrow \infty \quad \circ \Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{مجانِب قائم}$$



$$-۱۶ \quad x, y = \frac{4-x}{2} \quad \text{مساحت} \quad S = x \left( \frac{4-x}{2} \right) = 2x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow S' = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2, \quad y = 1$$

-۱۷

$$x = 1 \rightarrow y = 2, \quad y = 0 \rightarrow |x - 1| = 2 \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = -2 \rightarrow y = 1$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = S_1 + S_2 = \frac{4 \times 2}{2} + \frac{1 \times 1}{2} = \frac{9}{2}$$

