

机械系统动力学 Rosenberg 嵌入法的扩展与解耦： 一阶约束与二阶约束的整合*

赵睿英¹ 余进¹ CHEN Y H² 冯艳丽³ 曹学鹏¹

(1. 长安大学公路养护设备国家工程实验室 西安 710065;

2. 佐治亚理工学院乔治·W·伍德拉夫机械工程学院 亚特兰大 美国 30332;

3. 西安航天精密机电研究所 西安 710199)

摘要：如何正确又有效地将非完整约束引入一直是机械系统动力学建模的重点和难点。传统的机械系统动力学建模方法（如：拉格朗日乘子法、Gibbs-Appell 方法和 Kane 方法）通过借助拉格朗日乘子、广义伪速度和伪加速度等辅助变量来建立系统的运动方程，这些方法正确，但步骤复杂、计算量大。相比而言，伯克利大学力学大师 Reinhardt M. Rosenberg 提出了一种完全不同的约束嵌入方法，该方法将约束嵌入到虚位移中，再借助基本方程来建立机械系统的动力学模型，可获得低维的机械系统动力学模型。与上述传统建模方法相比，Rosenberg 嵌入法简单、直观且无需辅助变量，弥补了其他约束嵌入建模方法在机械系统动力学中可能存在不适用问题（特别是非完整约束）。然而，该方法借助“嵌入”约束对系统降维，存在降维后的动力学模型耦合性较强，且后续解耦困难等问题。因此，论文创新地提出将约束的一阶与二阶形式进行整合的思想，对 Rosenberg 方法进行扩展和补充，建立完全解耦的机械系统动力学模型，并利用经由完全不同理念所推导出的 Udwadia-Kalaba 方程对扩展后的 Rosenberg 嵌入法进行理论验证，确认扩展后的方法正确、有效。其次，论文基于扩展后的 Rosenberg 嵌入法，建立了太空悬浮机器人和三轮全向移动机器人的动力学解析模型，通过与 Udwadia-Kalaba 方程建立模型的数值仿真结果相对比，完全验证了所建动力学模型的正确性，为机械系统动力学建模提供了一个具有实际应用价值的新方法。

关键词：机械系统；约束；动力学建模；Udwadia-Kalaba 方程

中图分类号：TP24

Extending and Decoupling of the Rosenberg Embedding Method for Mechanical System Dynamics: The Integration of the First-Order and the Second-Order Constraints

ZHAO Ruiying¹ YU Jin¹ CHEN Y H² FENG Yanli³ CAO Xuepeng¹

(1. National Engineering Laboratory for Highway Maintenance Equipment, Chang'an University, Xi'an, 710065;

2. The George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology,
Atlanta, 30332 USA;

3. Xi'an Aerospace Precision Electromechanical Institute, Xi'an 710199)

Abstract: The proper approach to identify the constraint force generated by the constraints is paramount and the key for modeling of the mechanical systems. The traditional dynamics modeling methods for the nonholonomic mechanical systems (e.g., Lagrange multipliers, Gibbs-Appell equation, and Kane equation) have to utilize the auxiliary variables to establish the motion equations (like Lagrange multipliers, generalized pseudo-velocity, and pseudo-acceleration). While, by embedding the nonholonomic constraints into the virtual displacements, Rosenberg proposed a novel approach to formulate the motion equation without the auxiliary variables

* 中国博士后科学基金第 14 批特别资助(2021T140585)、陕西省重点研发计划项目(2021ZDLGY09-02)和陕西省自然科学基金基础研究计划面上项目(2020JM-240)资助项目。

based on the fundamental equation. In contrast to the traditional methods, Rosenberg's approach is intuitive and the auxiliary variables free. It is applicable for both holonomic and nonholonomic mechanical systems and can be considered as a remediation for most of the existing constraint embedding methods. Due to "embedding" constraints into the modeling, the dimensions of the dynamics established by Rosenberg's approach are reduced, which may lead to the coupling issues for the following analysis and control. Hence, by virtue of the integration of the first order and the second order form of constraints, the paper creatively extends and supplements the Rosenberg embedding method to derive the uncoupled motion equation of the constrained mechanical systems. By the Udwadia-Kalaba equation, the extended Rosenberg's approach is theoretically verified. To demonstrate the application of the modeling procedures, the dynamics of a free-floating robot and a three-wheeled omnidirectional robot are constructed by the proposed approach. Through the numerical simulation of the illustrative examples, the established dynamics models are completely validated. The paper provides a solid theoretical basis for the future application of this extended Rosenberg embedding method.

Key words: mechanical system; constraint; dynamics modeling; Udwadia-Kalaba equation

0 前言

非完整机械系统是一类受到非完整运动约束的机械系统,广泛存在于诸多领域之中,如:轮式车辆^[1]、移动机器人^[2-3]和空间探索机械臂^[4-5]等。相较于完整约束,非完整约束具有较强的非线性,导致动力学建模问题复杂。传统的建模方法正确,有坚实的理论根基,但往往步骤繁复、计算量大,而某些非传统的简化方法由于缺乏严格理论证明,容易导致错误的模型^[6-8]。常见的传统非完整机械系统动力学建模方法有:Lagrange 乘子法、Hamilton 方法、Gibbs-Appell 方法以及 Kane 方法等。上述建模方法通过引入额外的辅助变量来描述受到约束的机械系统运动方程,有效解决了约束的非线性问题,但由于引入辅助变量,增加了系统的维度,加大了动力学模型的计算量。而约束嵌入方法是一种将约束方程“嵌入”到机械系统动力学建模过程中,并将嵌入后的系统视为“未受约束”的系统,以此建立动力学方程的方法。该方法避免了辅助变量的引入,简化了建模过程,得到了广泛的应用,如:文献[9]将速度约束嵌入到并联机械手的运动方程之中,表示出了该系统的一致性解析表达式。文献[10-12]均利用 Maggi 方程,将约束嵌入到基本方程,其中的文献[10]和[11]分别建立了双足溜冰机器人的动力学模型和球形移动机器人的动力学模型,而文献[12]则对步态训练机器人的动力学解析式进行了表达。

约束嵌入方法有多种实现形式,常见的有 Maggi 方程^[13-14]、Chaplygin 方程^[15-17]、Woronetz 方程^[18]等。Maggi 方程将系统约束嵌入到 Lagrange 基

本方程中,实现对建模过程的简化,但当约束为非完整约束时,往往需要定义新的系统变量,对系统进行建模。与 Maggi 方程相比,Chaplygin 方程和 Woronetz 方程将约束方程嵌入了系统能量方程,建立的机械系统动力学模型不包含未定乘子,但需要满足一些限制条件,如:Chaplygin 方程要求系统能量方程和约束方程不包含非独立的广义坐标变量。然而,HAMEL 对将约束方程直接嵌入到能量方程的建模方法提出了质疑,并指出了使用该方法可能得到错误的系统运动方程^[19]。基于此,ROSENBERG 对 HAMEL 提出的约束嵌入方法进行了研究,利用实例证明了该方法适用性的推论,认为该方法仅适用于完整约束系统^[20]。针对上述问题,ROSENBERG 提出了一种新的约束嵌入方法^[20],该方法将“一阶约束”方程,即约束条件的一次微分表达式嵌入到虚位移中,利用基本方程建立机械系统动力学模型。Rosenberg 嵌入法非常精简,对机械系统的限制条件少,具有一定的应用潜力。但该方法仍然存在一些限制,例如:不同自由度的动力学方程之间存在耦合,导致无法建立各个自由度的独立运动方程;缺乏对其正确性的理论证明,现有研究大多采用实例论证;缺乏具体的使用步骤,使得该方法的应用性不易体现。

因此,论文提出一个方法:引入“二阶约束”的概念,将“二阶约束”与 Rosenberg 嵌入法中原本的“一阶约束”整合使用,从而解决上述限制。在过去分析力学发展的过程中,“二阶约束”(即约束条件的二次微分表达式)还未引起学者们的广泛重视。很多传统动力学建模方法强调的是如何经由积分的方式,将“一阶约束”转化为“零阶约束”(即没有微分项次的表达式,也就是完整

约束)。而本研究发现,“二阶约束”与动态系统方程可以形成一组同质的微分方程式,能够使许多复杂操作成为可能。

论文主要研究内容包括以下四个方面:首先,对 Rosenberg 嵌入法的本质进行描述,利用分块矩阵表示约束嵌入后的机械系统动力学方程;其次,借助约束二阶形式,对 Rosenberg 嵌入法进行扩展,得到可后续易于解耦的机械系统动力学模型;然后,以 Udwadia-Kalaba 方程^[21-24]为验证平台,证明扩展后的 Rosenberg 嵌入法在约束相互独立时结果正确,可以被广泛应用于机械系统动力学建模,简化建模过程;最后,通过两个典型的非完整机械系统实例,对理论分析结果进行实例验证,并展示实际操作步骤。

1 Rosenberg 嵌入法

假如一个机械系统由 s 个质点或刚体组成,且可以通过广义坐标向量 $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ 来表示该系统在任意时间 t 的位移,则系统的广义速度向量为 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$,系统的广义加速度向量为 $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 。根据拉格朗日建模方法,在不受约束条件下的机械系统运动方程可表示为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0 \quad (1)$$

式中 $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n$ 为外力。 $T \in \mathbf{R}$ 为系统能量可表示为

$$T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}^T(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q}, t) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统的质量矩阵, $\mathbf{N}^T(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 为系统所受到的科氏力, $P(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n$ 则为系统势能。将式(2)代入式(1)进行化简可得

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) := -\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, t) - \dot{\mathbf{N}}^T(\mathbf{q}, t) + \frac{\partial T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (4)$$

若该系统受到 $l(l < n)$ 个非完整约束,其所受约束的 Pfaffian(即“一阶约束”)形式可表示为

$$\sum_{i=1}^n A_{ki}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + A_k(\mathbf{q}, t) = 0 (k=1, \dots, l) \quad (5)$$

式中 $A_{ki}(\cdot)$ 和 $A_k(\cdot)$ 满足 C^1 。由式(5),可知系统虚位移需满足

$$\sum_{i=1}^n A_{ki}(\mathbf{q}, t) \delta q_i = 0 (k=1, \dots, l) \quad (6)$$

式中 δq 为虚位移。为后续证明简洁,在不引起歧义的情况下将省略上述函数中的自变量。现可将式(6)表示为以下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,l+1} & A_{1,l+2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,l+1} & A_{2,l+2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l,l+1} & A_{l,l+2} & \cdots & A_{l,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_{l+1} \\ \delta q_{l+2} \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

假设 1: 机械系统的质量矩阵 $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}, t)$ 为对称正定矩阵。

假设 1 在过去很多机械系统动力学建模研究中,被默认为是肯定可以满足的,如:文献[25-26]在机械系统动力学建模过程中均认为质量矩阵是正定的。但机械系统的质量矩阵并不总是正定的,例如:为了描述复杂结构的机械系统运动,动力学建模过程可能引入局部坐标,使得系统的坐标个数超过系统自由度数,从而导致质量矩阵奇异^[27]。因此,论文将机械系统质量矩阵正定视为假设条件,该条件在绝大多数机械系统中均可满足。

假设 2: 机械系统的 l 个约束方程(5)之间相互独立。

若机械系统满足假设 1-2,则系统中有 l 个相互独立的广义坐标变量,将其重新排列在广义坐标向量 \mathbf{q} 的前列,即 $q_i (i=1, \dots, l)$ 相互独立。通过式(7)可将系统虚位移之间的关系表示为

$$\delta q_i = - \sum_{j=l+1}^n K_{ij} \delta q_j (i=1, \dots, l) \quad (8)$$

式中 $K_{ij}(\cdot)$ 为与 q_i 和 t 有关的函数且其满足下式关系

$$\begin{bmatrix} K_{1,l+1} & K_{1,l+2} & \cdots & K_{1,n} \\ K_{2,l+1} & K_{2,l+2} & \cdots & K_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{l,l+1} & K_{l,l+2} & \cdots & K_{l,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{1,l+1} & A_{1,l+2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,l+1} & A_{2,l+2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l,l+1} & A_{l,l+2} & \cdots & A_{l,n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

为简化表达, 可将上式写为

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \quad (10)$$

由于 $\text{Rank}(\mathbf{A}_1) = l$, 因此 \mathbf{A}_1^{-1} 存在。式(8)对系统虚位移进行了分块处理, 将 l 个独立的虚位移和其余虚位移变量分离出来。根据达朗贝尔原理^[28], 即系统约束力所做虚功总和为零, 得到系统基本方程为

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0 \quad (11)$$

将式(8)代入基础方程中有

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=l+1}^n \sum_{i=1}^l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) K_{ij} \delta q_j \\ & + \sum_{j=l+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

通过代入虚位移关系式, 上式中的独立虚位移的个数从 n 减少到了 $(n-l)$ 个, 系统的维度也从原来的 n 维, 减小到了 $(n-l)$ 维度。由于 $\delta q_j \neq 0$ 为独立的任意非零虚位移, 因此可以得到如下结果

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=l+1}^n \sum_{i=1}^l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) K_{ij} \\ & + \sum_{j=l+1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

为对上式进行化简, 现将矩阵进行分块处理,

令 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_{11} \in \mathbf{R}^{l \times l}$, $\mathbf{M}_{12} \in \mathbf{R}^{l \times (n-l)}$, $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^T$, $\mathbf{M}_{22} \in \mathbf{R}^{(n-l) \times (n-l)}$; $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T]^T$, $\mathbf{q}_1 \in \mathbf{R}^l$, $\mathbf{q}_2 \in \mathbf{R}^{(n-l)}$; $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T]^T$, $\mathbf{F}_1 \in \mathbf{R}^l$, $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^{(n-l)}$; $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1^T, \mathbf{Q}_2^T]^T$, $\mathbf{Q}_1 \in \mathbf{R}^l$, $\mathbf{Q}_2 \in \mathbf{R}^{(n-l)}$ 。则可将式(2)重写为

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{M}_{11} \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{M}_{12} \dot{\mathbf{q}}_2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{M}_{21} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ & + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{M}_{22} \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{N}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{N}_2^T \dot{\mathbf{q}}_2 + P \end{aligned} \quad (14)$$

将式(13)写为矩阵的形式有

$$\begin{aligned} & -\mathbf{K}^T \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_1} - \mathbf{Q}_1 \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_2} \\ & - \mathbf{Q}_2 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

将式(14)代入(15)进行化简后最终得到

$$\begin{aligned} & -\mathbf{K}^T (\mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_{21} \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ & - \mathbf{F}_2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)是利用 Rosenberg 嵌入法建立的机械系统动力学模型, 该模型无须任何辅助变量, 适用于完整和非完整约束系统。相较于基本方程式(11), 动力学模型(16)的维度从 n 减小到了 $(n-l)$, 可以看出利用 Rosenberg 嵌入法得到的动力学模型维度降低。降维后的模型由 $(n-l)$ 个非线性常微分方程组成, 与原模型(3)相比, 维度的降低大大提升了系统动力学分析的效率。但降维后的模型(16)中加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_1$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_2$ 相互耦合, 我们很难将其解耦, 为以后模型分析和基于模型的控制算法设计带来了困难。

2 理论基础

为后续对 Rosenberg 嵌入方法进行研究, 首先对 Udwadia-Kalaba 方程以及研究中需要用到相关数学引理进行介绍, 并对部分公式进行预处理。

2.1 Udwadia-Kalaba 方程

假设不受约束的机械系统动力学模型由式(3)表示, 当系统受到 l 个完整或非完整约束, 表示为 Pfaffian 形式如式(5)所示。对式(5)进行求导, 可得约束的二阶形式(即“二阶约束”)为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_{ki}(\mathbf{q}, t) \ddot{q}_i = & - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} A_{ki}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i - \frac{d}{dt} A_i(\mathbf{q}, t) \\ = & b_i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (17)$$

将其写为矩阵的形式为

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b} \quad (18)$$

式中 $\mathbf{A} = [A_{ki}]_{l \times n}$, $\mathbf{b} = [b_i]_{l \times 1}$ 。

假设 3: 对所有 $(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, 矩阵 \mathbf{A} 满足 $\text{Rank}(\mathbf{A}) \geq 1$ 。

假设 3 表示机械系统二阶约束方程(18)的解存在, 也表明从约束方程中至少可以求解出一组系统的加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 。为了约束方程有解, 机械系统需要满足假设 3 中 $\text{Rank}(\mathbf{A}) \geq 1$ 的条件。该假设条件在机械系统受到有效约束时均可满足, 即: 约束非空时, 约束矩阵 \mathbf{A} 的秩一定不小于 1。

定理 1^[21]: 假如系统满足假设 1 和 3, 则受到约束时的机械系统动力学方程可表示为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^c \quad (19)$$

式中 \mathbf{F}^c 为系统约束力, 可表示为

$$\mathbf{F}^c = \mathbf{M}^{1/2} (\mathbf{A} \mathbf{M}^{-1/2})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}) \quad (20)$$

定理 1 给出了 Udwadia-Kalaba 方程, 该方法建

立的模型无需辅助变量，该建模方法要求机械系统的约束条件满足假设 3，并且未对约束的独立性进行要求，可以作为 Rosenberg 方法验证的平台。

2.2 相关引理

为方便后续对 Rosenberg 嵌入扩展法的证明，先对需要使用到的几个数学引理进行介绍。

引理 1^[29]：将方阵 $W \in \mathbf{R}^{(m+k) \times (m+n)}$ 分为 2×2 个矩阵块，即 $W = \begin{bmatrix} D & O \\ G & H \end{bmatrix}$ ，其中 $D \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ， $O \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ， $G \in \mathbf{R}^{k \times m}$ ， $H \in \mathbf{R}^{k \times n}$ 。假设矩阵块 D 非奇异且 $H - GD^{-1}O$ 可逆，则 W^{-1} 存在且可表示为

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{O} \\ \hat{G} & \hat{H} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $\hat{D} := D^{-1} + D^{-1}O(H - GD^{-1}O)^{-1}GD^{-1}$ ， $\hat{O} := -D^{-1}O(H - GD^{-1}O)^{-1}$ ， $\hat{G} := -(H - GD^{-1}O)^{-1}GD^{-1}$ ， $\hat{H} := (H - GD^{-1}O)^{-1}$ 。

引理 2^[30]：若有矩阵 $\tilde{D} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $\tilde{U} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 、 $\tilde{O} \in \mathbf{R}^{p \times q}$ 、 $\tilde{V} \in \mathbf{R}^{q \times n}$ ，其中矩阵 \tilde{D} 非奇异，则满足下列关系

$$\begin{aligned} (\tilde{D} + \tilde{U}\tilde{O}\tilde{V})^{-1} &= \tilde{D}^{-1} - \tilde{D}^{-1}\tilde{U}(I + \tilde{O}\tilde{V}\tilde{D}^{-1}\tilde{U})^{-1}\tilde{O}\tilde{V}\tilde{D}^{-1} \\ &= \tilde{D}^{-1} - \tilde{D}^{-1}\tilde{U}\tilde{O}\tilde{V}(I + \tilde{D}^{-1}\tilde{U}\tilde{O}\tilde{V})^{-1}\tilde{D}^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

而由于

$$\begin{aligned} |I + \tilde{O}\tilde{V}\tilde{D}^{-1}\tilde{U}| &= |I + \tilde{D}^{-1}\tilde{U}\tilde{O}\tilde{V}| \\ &= |\tilde{D}^{-1}| |\tilde{D} + \tilde{U}\tilde{O}\tilde{V}| \neq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

因此 $(I + \tilde{O}\tilde{V}\tilde{D}^{-1}\tilde{U})^{-1}$ 存在。

引理 3^[31]：将方阵 $\bar{W} \in \mathbf{R}^{(m+l) \times (m+l)}$ 分为 2×2 个矩阵块，即 $\bar{W} = \begin{bmatrix} \bar{D} & \bar{O} \\ \bar{G} & \bar{H} \end{bmatrix}$ ，其中矩阵 $\bar{D} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ， $\bar{O} \in \mathbf{R}^{m \times l}$ ， $\bar{H} \in \mathbf{R}^{l \times l}$ ， $\bar{G} \in \mathbf{R}^{l \times m}$ 。若矩阵 \bar{D} 可逆，则

$$\det(\bar{W}) = \det(\bar{D})\det(\bar{H} - \bar{G}\bar{D}^{-1}\bar{O}) \quad (24)$$

以上为后续 Rosenberg 嵌入扩展法证明过程中需要使用到的引理，接下来借助上述引理对证明过程中需要使用到的公式进行预处理。

2.3 公式的预处理

本节对 Rosenberg 嵌入扩展法证明过程中需要使用的公式进行预处理。根据引理 3 可知，

$$\det(M) = \det(M_{11})\det(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}) \quad (25)$$

在满足假设 1 和 2 且 q_l 中的 l 个广义坐标变量相互独立的情况下，可知 M^{-1} 和 M_{11}^{-1} 存在，因此

$\det(M) \neq 0$ 且 $\det(M_{11}) \neq 0$ 。根据式(25)可推导得到 $\det(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}) \neq 0$ ，由此可知 $(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}$ 存在。根据引理 1，可求得 M^{-1} 为

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中 $\Gamma_1 = M_{11}^{-1} + M_{11}^{-1}M_{12}(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1} \times M_{21}M_{11}^{-1}$ ， $\Gamma_2 = -M_{11}^{-1}M_{12}(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}$ ， $\Gamma_3 = -(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}M_{21}M_{11}^{-1}$ ， $\Gamma_4 = (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}$ 。

利用式(26)可将 $AM^{-1}A^T$ 表示为

$$\begin{aligned} AM^{-1}A^T &= A_1M_{11}^{-1}A_1^T + (A_1M_{11}^{-1}M_{12} - A_2) \times \\ &\quad (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}(M_{21}M_{11}^{-1}A_1^T - A_2^T) \end{aligned} \quad (27)$$

由于矩阵 A_1 和矩阵 M_{11} 均为方阵且满秩，因此 $\text{Rank}(A_1M_{11}^{-1}A_1^T) = l$ ，即 $(A_1M_{11}^{-1}A_1^T)^{-1}$ 存在。将 $AM^{-1}A^T$ 按式(27)重新表示后，利用引理 2 可将 $(AM^{-1}A^T)^{-1}$ 展开写为

$$\begin{aligned} (AM^{-1}A^T)^{-1} &= (A_1M_{11}^{-1}A_1^T)^{-1} - (A_1^T)^{-1} \times \\ &\quad (M_{12} - M_{11}K)X^{-1}(M_{21} - K^T M_{11})A_1^{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $X := K^T M_{11}K - K^T M_{12} - M_{21}K + M_{22}$ 。而根据引理 2 可知

$$\begin{aligned} |I + (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}(M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} - M_{21}K - K^T M_{12} + K^T M_{11}K)| &= |(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}X| \\ &= |(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}| |X| \neq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

由于 $(M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}$ 存在，因此 $|X| \neq 0$ ，则 X^{-1} 存在。

同理，利用式(26)可将 $AM^{-1}F$ 表示为

$$\begin{aligned} AM^{-1}F &= A_1M_{11}^{-1}F_1 + (A_1M_{11}^{-1}M_{12} - A_2) \times \\ &\quad (M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})^{-1}(M_{21}M_{11}^{-1}F_1 - F_2) \end{aligned} \quad (30)$$

因此，根据式(28)和式(30)可得到

$$\begin{aligned} (AM^{-1}A^T)^{-1}AM^{-1}F &= A_1^{-T}(M_{12} - M_{11}K) \times \\ &\quad X^{-1}(M_{21}M_{11}^{-1} - K^T)F_1 - A_1^{-T}F_1 \end{aligned} \quad (31)$$

以上为后续证明过程中需要使用到的相关公式，随后针对扩展后的 Rosenberg 嵌入法给出定理。

3 Rosenberg 嵌入法研究

3.1 Rosenberg 嵌入法扩展

基于 Rosenberg 嵌入法得到的动力学模型(16), 虽然减小了动力学模型的维度, 建模过程无需辅助变量, 但该模型无法分别对机械系统的 n 个广义坐标变量进行解耦和求解。为解决上述问题, 本文借助约束方程的二阶形式对 Rosenberg 嵌入法进行扩展。

通过对约束方程(4)求导, 我们可以获得二阶约束方程(17)。并将二阶约束方程(17)和 Rosenberg 方法得到的模型(16)联立, 得到以下形式:

$$\begin{bmatrix} -K^T M_{11} + M_{21} & -K^T M_{12} + M_{22} \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K^T F_1 + F_2 \\ b \end{bmatrix} \quad (32)$$

由于二阶约束(17)中的加速度是线性的, 因此论文利用二阶约束对原 Rosenberg 嵌入法得到模型(16)进行解耦, 建立扩展后的机械系统动力学解耦模型。这种对约束进行高阶化的处理方法, 利用了二阶约束和系统动力学方程在数学上的一致性, 具有一定的通用性。

通过对式(32)求解, 可分别得到系统加速度 \ddot{q}_1 和 \ddot{q}_2 为

$$\ddot{q}_1 = A_1^{-1}b - KX^{-1}(F_2 + K^T M_{11} A_1^{-1}b - K^T F_1) + KX^{-1}M_{21} A_1^{-1}b \quad (33)$$

$$\ddot{q}_2 = X^{-1}(F_2 + K^T M_{11} A_1^{-1}b - K^T F_1 - M_{21} A_1^{-1}b) \quad (34)$$

由式(33)和(34)可得到扩展后的 Rosenberg 嵌入法的动力学方程。相较于扩展前的模型, 扩展后的模型对机械系统广义加速度进行了解耦, 有利于后续对系统模型进行分析和控制。

3.2 Rosenberg 嵌入扩展法验证

本节对利用扩展后的 Rosenberg 嵌入法获得的机械系统动力学模型进行研究, 并给出理论证明。

定理 2: 当机械系统式(3)受到约束式(5)时, 若系统满足假设 1 和 2, 则受到约束的该机械系统加速度可表示为式(33)和(34)。

证明:

加速度式(33)和(34)左乘系统质量矩阵 M 后, 可将系统动力学方程写为

$$M\ddot{q} = \begin{bmatrix} M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 \\ M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ K^T Z - K^T F_1 + F_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

式中

$$Z = M_{11}A_1^{-1}b - (M_{12} - M_{11}K)X^{-1} \times [(M_{21} - K^T M_{11})A_1^{-1}b + (M_{21}M_{11}^{-1} - K^T)F_1] \quad (36)$$

对式(35)进行整理后有

$$M\ddot{q} = F + \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} (A_1^{-T}Z - A_1^{-T}F_1) \quad (37)$$

根据预处理中的公式(28)和(31), 可将上式中的 $(A_1^{-T}Z - A_1^{-T}F_1)$ 重新写为

$$(A_1^{-T}Z - A_1^{-T}F_1) = (AM^{-1}A^T)^{-1}(b - AM^{-1}F) \quad (38)$$

则将式(38)代入式(37)后, Rosenberg 嵌入扩展法的动力学模型可表示为

$$M\ddot{q} = F + M^{1/2}(AM^{-1/2})^T \times (AM^{-1/2}(AM^{-1/2})^T)^{-1}(b - AM^{-1}F) \quad (39)$$

由于系统满足假设 2, 则质量矩阵 M 满秩、 $M = M^T$ 且矩阵 A 行满秩, 因此有 $\text{Rank}(AM^{-1/2}) = l$ 。根据文献[26], $AM^{-1/2}$ 满足行满秩条件, 因此有

$$(AM^{-1/2})^T (AM^{-1/2}(AM^{-1/2})^T)^{-1} = (AM^{-1/2})^+ \quad (40)$$

现将式(40)代入式(39), 则基于扩展后的 Rosenberg 嵌入法的加速度式(33)和(34), 可最终推导得到

$$M\ddot{q} = F + M^{1/2}(AM^{-1/2})^+(b - AM^{-1}F) \quad (41)$$

将式(41)与 Udwadia-Kalaba 方程式(19)进行比较, 可以看出两者一致。与其它建模方法相比, Udwadia-Kalaba 方程可以在不借助辅助变量的条件下, 建立受到约束条件下(完整或非完整约束)的机械系统动力学模型, 获得的模型为解析形式。由于 Udwadia-Kalaba 方程的正确性已在参考文献[18]得到了严格的证明, 因此可以表明当机械系统受到相互独立的约束时, 扩展后的 Rosenberg 嵌入法得到的加速度式(33)和(34)正确, 即定理 2 得证。

分别对 Rosenberg 嵌入法中降维后的模型和二阶约束模型进行求解, 表示出加速度式(33)和(34), 扩展后的 Rosenberg 嵌入法通过这种方式避免了直接求解高维的系统模型。相较于由 Udwadia-Kalaba 方程得到的模型(19), 当机械系统复杂度增加, 动

力学模型维度增高时, 扩展后的 Rosenberg 嵌入法计算量较小, 模型计算效率较高。根据 Rosenberg 嵌入扩展法的推导过程, 可将该方法的具体建模步骤归纳为图 1。

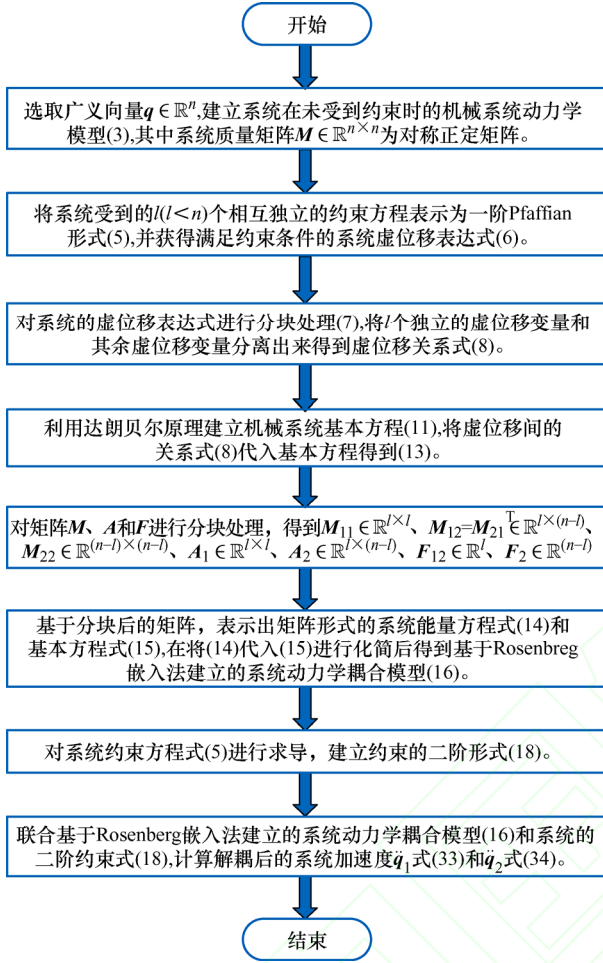


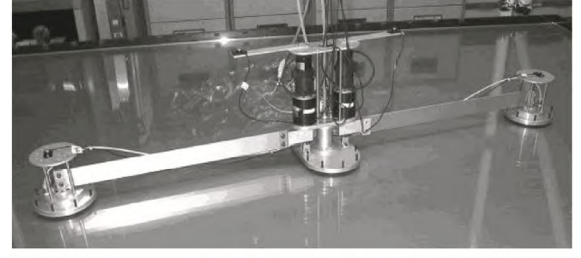
图 1 扩展后的 Rosenberg 嵌入法的建模流程图

4 验证实例

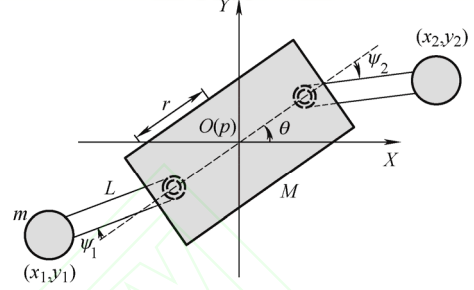
为了进一步验证 Rosenberg 嵌入扩展法的正确性, 论文分别选取了太空悬浮机器人和三轮全向移动机器人作为验证实例, 展示了扩展 Rosenberg 嵌入方法在不同维度的非完整约束系统中均可适用。

4.1 太空悬浮机器人实例

太空悬浮机器人^[33]具有相同的两个机械臂, 每个机械臂通过旋转接头与中心体相连接, 如图 2 所示。该机器人工作在悬浮载体上, 其系统需要满足角动量守恒, 该约束条件是一个非完整约束, 因此它是一个典型的非完整机械系统。本文将太空悬浮机器人的质量分别集中于机械臂的末端位置, 其主要参数和坐标变量如表 1 所示。



(a) 太空悬浮机器人



(b) 太空悬浮机器人结构简图

图 2 太空悬浮机器人

表 1 太空悬浮机器人的主要参数和坐标变量

符号	含义	单位
m_1	中心体的质量	kg
m_2	单个机械臂的质量	kg
I	中心体的惯性矩	kg · m ²
r	旋转接头到原点 O 的距离	m
L	单个机械臂的臂长	m
θ	中心体轴线与水平线之间夹角	rad
ψ_1	机械左臂与中心体轴线间夹角	rad
ψ_2	机械右臂与中心体轴线间夹角	rad

为描述机器人的运动, 选取广义坐标向量 $\mathbf{q} = [\theta, \psi_1, \psi_2]^T$, 机器人在未受到约束时的动力学模型可写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (42)$$

式中 $\mathbf{M} = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 矩阵各项分别为

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2m_2L^2 + 2m_2r^2 + 2m_2rL\cos\psi_1 + 2m_2rL\cos\psi_2 + I, \\ a_{12} &= -m_2rL\cos\psi_1 - m_2L^2, \\ a_{13} &= -m_2rL\cos\psi_2 - m_2L^2, \\ a_{21} &= a_{12}, \\ a_{22} &= m_2L^2, \\ a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= a_{13}, \\ a_{32} &= a_{23}, \\ a_{33} &= m_2L^2. \end{aligned} \quad \text{令}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_1 \dot{\theta} m_2 r L \sin \psi_1 - \dot{\theta}^2 m_2 r L \sin \psi_1 \\ \dot{\psi}_2 \dot{\theta} m_2 r L \sin \psi_2 - \dot{\theta}^2 m_2 r L \sin \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{F}_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

假设系统初始角动量为常数 C , 则机器人受到的角动量守恒约束方程可表示为

$$a_{11}(\psi_1, \psi_2)\dot{\theta} + a_{12}(\psi_1)\dot{\psi}_1 + a_{13}(\psi_2)\dot{\psi}_2 = C \quad (44)$$

对上式进行求导并整理为 $A\ddot{q} = b$ 矩阵形式, 则 $A = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]$, $b = 2\dot{\psi}_1\dot{\theta}m_2rL\sin\psi_1 + 2\dot{\psi}_2\dot{\theta} \times m_2rL\sin\psi_2 - \dot{\psi}_1^2m_2rL\sin\psi_1 - \dot{\psi}_2^2m_2rL\sin\psi_2$ 。

验证可知系统质量矩阵 M 满足假设 1, 约束方程(44)满足假设 2。现对矩阵 A 、 M 、 F 以及 \ddot{q} 进行分块处理有 $A_1 = a_{11}$, $A_2 = [a_{12}, a_{13}]$, $F_1 = \hat{F}_1$, $F_2 = [\hat{F}_2, \hat{F}_3]^T$, $\ddot{q}_1 = \theta$, $\ddot{q}_2 = [\ddot{\psi}_1, \ddot{\psi}_2]^T$, $M_{11} = a_{11}$, $M_{12} = [a_{12}, a_{13}] = M_{21}^T$, $M_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 。

4.1.1 Rosenberg 嵌入法

首先, 利用 Rosenberg 嵌入法对太空悬浮机器人进行动力学建模。将之前分块后的矩阵代入 Rosenberg 嵌入法式(16)中可求得

$$\ddot{q}_2 = \begin{bmatrix} (a_{13}^2\hat{F}_2 - a_{11}a_{33}\hat{F}_2 - a_{12}a_{13}\hat{F}_3)/Y \\ (-a_{12}a_{13}\hat{F}_2 + a_{12}^2\hat{F}_3 - a_{11}a_{22}\hat{F}_3)/Y \end{bmatrix} \quad (45)$$

式中 $Y := a_{12}^2a_{33} + a_{13}^2a_{22} - a_{11}a_{22}a_{33}$ 。在太空悬浮机器人系统中, 使用 Rosenberg 嵌入法仅能够求得两个机械臂的转动角加速度 $\ddot{\psi}_1$ 和 $\ddot{\psi}_2$ 的表达式, 无法得到中心体转动角加速度 $\ddot{\theta}$ 的表达式。

4.1.2 Udwadia-Kalaba 方法

接下来, 将矩阵 A 、 M 、 F 代入式(20)后, 可表示出太空悬浮机器人基于 Udwadia-Kalaba 方法的约束力 F^c 为

$$F^c = bA^T/a_{11} \quad (46)$$

求得约束力后, 根据式(19)可得到该系统的动力学模型为

$$M\ddot{q} = bA^T/a_{11} + F \quad (47)$$

4.1.3 Rosenberg 嵌入扩展法

随后, 利用扩展后的 Rosenberg 嵌入法来对该系统的动力学模型进行表示。在将分块后的矩阵代入解耦后的加速度 \ddot{q}_1 式(33)和 \ddot{q}_2 式(34)后有

$$\ddot{q}_1 = b/a_{11} + (a_{12}a_{33}\hat{F}_2 + a_{13}a_{22}\hat{F}_3)/Y \quad (48)$$

$$\ddot{q}_2 = \begin{bmatrix} (a_{13}^2\hat{F}_2 - a_{11}a_{33}\hat{F}_2 - a_{12}a_{13}\hat{F}_3)/Y \\ (-a_{12}a_{13}\hat{F}_2 + a_{12}^2\hat{F}_3 - a_{11}a_{22}\hat{F}_3)/Y \end{bmatrix} \quad (49)$$

根据式(48)和式(49)可得到基于 Rosenberg 嵌入扩展法的系统运动模型。

比较上述三种不同的建模方法可知, 除 Rosenberg 嵌入法无法求得加速度 $\ddot{\theta}$ 的表达式之外, 其余两种方法均可以对该系统中的 3 个广义坐标的加速度进行求解。为进一步对 Rosenberg 嵌入扩展

法和 Udwadia-Kalaba 方法进行比较, 现通过 MATLAB 对系统模型进行数值仿真。

取 $m_1=25$ kg, $m_2=5$ kg, $I=260.42$ kg·m², $r=4$ m, $\theta=\pi/36$ rad, $L=8$ m, $\psi_1=-\pi/6$ rad, $\psi_2=-\pi/6$ rad, $\omega_\theta=0.1$ rad/s, $\omega_{\psi_1}=-0.1$ rad/s, $\omega_{\psi_2}=-0.1$ rad/s。为区分两种方法的仿真结果, 给变量增加相应的上角标, 如: 使用 θ^U 和 θ^R 分别表示利用 Udwadia-Kalaba 方程和 Rosenberg 嵌入扩展法获得模型中的 θ 。令 $e_1 := \theta^U - \theta^R$ 、 $e_2 := \psi_1^U - \psi_1^R$ 、 $e_3 := \psi_2^U - \psi_2^R$ 、 $e_4 := \omega_\theta^U - \omega_\theta^R$ 、 $e_5 := \omega_{\psi_1}^U - \omega_{\psi_1}^R$ 、 $e_6 := \omega_{\psi_2}^U - \omega_{\psi_2}^R$ 。

基于 Rosenberg 嵌入扩展法可直接表示的太空悬浮机器人的两个机械臂以及中心体的角加速度随时间的变化关系如图 3 所示。图 4 则为该系统运动过程中两机械臂的总动量与中心体动量以及系统初始动量间的变化关系, 从图中可看出, 在给定的系统初始速度下, 中心体与两个机械臂的动量之和与系统初动量的值相等。而随着初始速度的增大, 三者间的变化关系整体呈现为斜平面, 说明太空悬浮机器人运动过程中始终保持了角动量守恒, 从侧面说明了 Rosenberg 嵌入扩展法对该系统的运动进行了正确的描述。

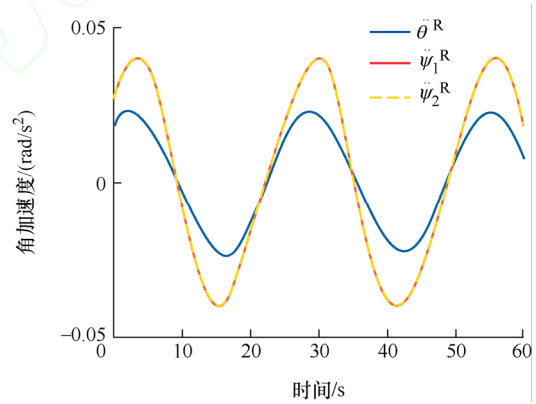


图 3 太空悬浮机器人的转动加速度随时间的变化关系

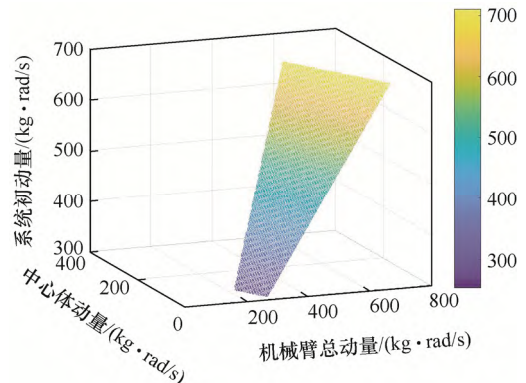


图 4 机器人的中心体与其两个机械臂间的动量变化关系

图 5 为 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中的角度变量 $[\theta, \psi_1, \psi_2]^T$ 和角度误差 e_1 、 e_2 和 e_3 随时间的变化情况，图 6 为这两种方法中的角速度 $[\omega_\theta, \omega_{\psi_1}, \omega_{\psi_2}]^T$ 以及角速度误差 e_4 、 e_5 和 e_6 随时间的变化情况。基于图 5b 和图 6b 可知，由 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 方法所建立的动力学模型，其角度仿真结果误差的数量级在 10^{-9} ，角速度仿真结果误差的数量级则在 10^{-10} 。因此，根据上述数值仿真结果可知：利用扩展后的 Rosenberg 嵌入法所得的动力学模型正确。

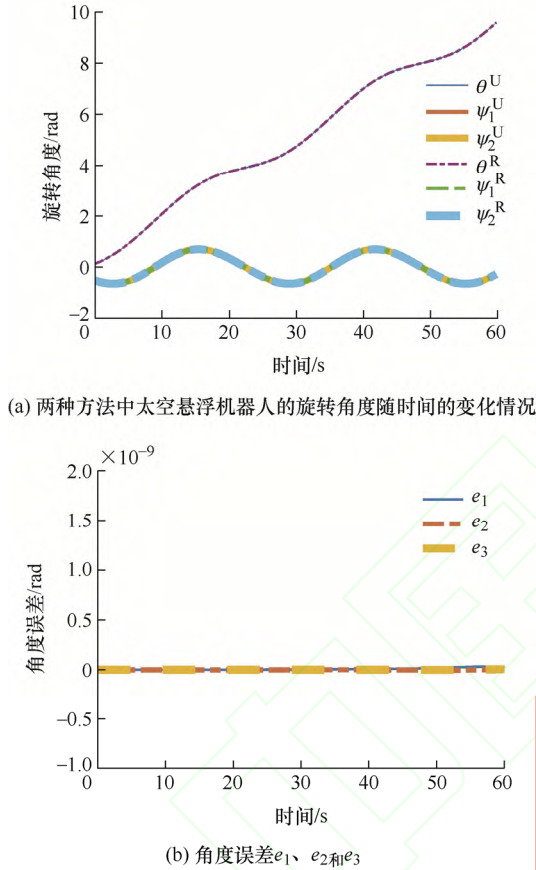
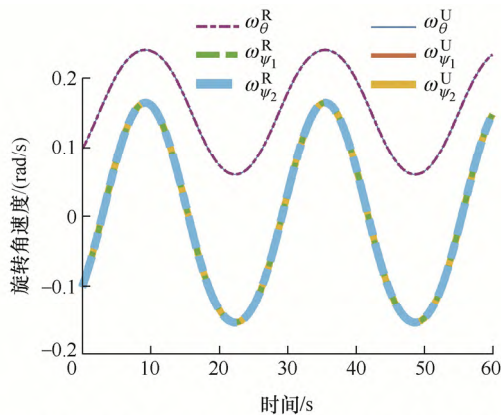
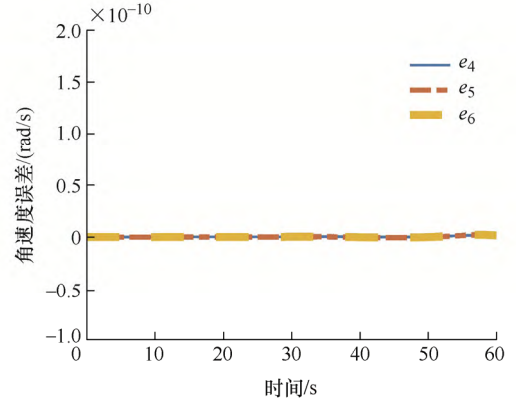


图 5 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中太空悬浮机器人的旋转角度及误差的变化曲线



(a) 两种方法中太空悬浮机器人的旋转角速度随时间的变化情况



(b) 角速度误差 e_4 、 e_5 和 e_6

图 6 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中太空悬浮机器人的旋转角速度及误差的变化曲线

另外，如图 7 所示，对利用 Rosenberg 嵌入扩展法建模的系统，在 MATLAB 中利用 ODE45 函数进行 60 s 数值仿真时，程序运行过程耗时约 1.721 s。在同样的求解条件下，基于 Udwadia-Kalaba 法进行建模的系统则需要约 12.899 s 来完成 60 s 仿真。因此，基于数值仿真用时的比较，对于太空悬浮机器人，使用 Rosenberg 嵌入扩展法相比于 Udwadia-Kalaba 方法在模型计算效率上得到了显著提高。

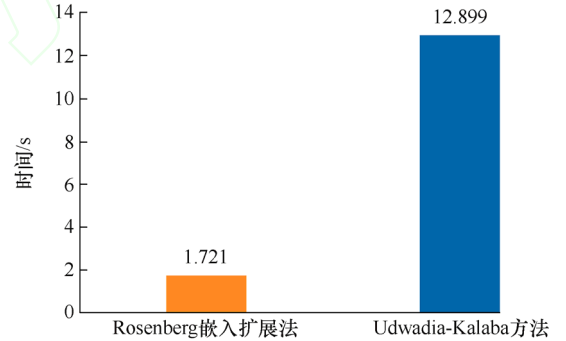


图 7 两种方法的仿真时间比较

4.2 三轮全向移动机器人实例

三轮全向移动机器人^[34]的三个轮子与中心体相切，其轮子特殊的结构能够使机器人沿着轮子的侧向进行移动，如图 8 所示。XY 坐标系为地面坐标系， $X_R Y_R$ 坐标系为固定于机器人中心体上的局部坐标系，轴与各个轮子之间的夹角分别为： $\alpha_1 = 60^\circ$ 、 $\alpha_2 = 180^\circ$ 、 $\alpha_3 = -60^\circ$ 。若该全向移动机器人运动时与地面间产生纯滚动接触，即轮子在与地面的接触点处的速度为 0，该约束为一个非完整约束，则该系统是一个典型的非完整机械系统。本文将点三轮全向移动机器人中心体的质量集中于中心点 $P(x, y)$ ，轮子的质量集中于轮心处，其主要参

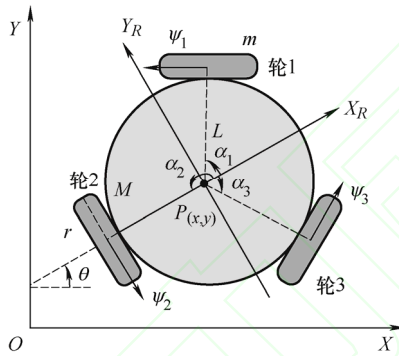
数和坐标变量如表 2 所示。

表 2 三轮全向移动机器人的主要参数和坐标变量

符号	含义	单位
m_1	单个轮子的质量	kg
m_2	中心体的质量	kg
I_1	单个轮子惯性矩	$\text{kg} \cdot \text{mm}^2$
I_2	中心体的惯性矩	$\text{kg} \cdot \text{mm}^2$
r	单个轮子的半径	mm
L	轮心到点 P 距离	mm
θ	轴 X_R 与 X 夹角	rad
ψ_1	轮 1 转动的角度	rad
ψ_2	轮 2 转动的角度	rad
ψ_3	轮 3 转动的角度	rad



(a) 三轮全向移动机器人



(b) 三轮全向移动机器人结构简图

图 8 三轮全向移动机器人

选取广义坐标向量 $\mathbf{q} = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, x, y, \theta]^T$ 用于描述该系统的运动, 设系统受到外力为 $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^6$, 则该机械系统在未受到约束时的动力学方程可写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (50)$$

式中 $\mathbf{F} = \mathbf{Q} := [\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T]^T$, $\mathbf{F}_1 \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^3$, $\mathbf{M} = \text{diag}(I_1, I_1, I_1, 3m_1 + m_2, 3m_1 + m_2, 3m_1 L^2 + I_2)$ 。机器人受到的纯滚动约束可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} \sin(\theta + \pi/3) - \dot{y} \cos(\theta + \pi/3) - \dot{\theta} L - \dot{\psi}_1 r = 0 \\ \dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta - \dot{\theta} L - \dot{\psi}_2 r = 0 \\ \dot{x} \sin(\theta - \pi/3) - \dot{y} \cos(\theta - \pi/3) - \dot{\theta} L - \dot{\psi}_3 r = 0 \end{cases} \quad (51)$$

将上式整理为 $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}$ 的矩阵形式有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -r & 0 & 0 & \sin(\theta + \pi/3) & -\cos(\theta + \pi/3) & -L \\ 0 & -r & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & -L \\ 0 & 0 & -r & \sin(\theta - \pi/3) & -\cos(\theta - \pi/3) & -L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta + \pi/3) - \dot{y}\dot{\theta} \sin(\theta + \pi/3) \\ \dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}\dot{\theta} \sin \theta \\ -\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta - \pi/3) - \dot{y}\dot{\theta} \sin(\theta - \pi/3) \end{bmatrix}.$$

通过验证可知系统质量矩阵 \mathbf{M} 满足假设 1, 约束方程(51)满足假设 2。现对矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{M} 以及 $\ddot{\mathbf{q}}$ 进行分块处理后有 $\mathbf{q}_1 = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]^T$, $\mathbf{q}_2 = [x, y, \theta]^T$, $\mathbf{A}_1 = \text{diag}(-r, -r, -r)$,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3), -\cos(\theta + \pi/3), -L \\ -\sin \theta, \cos \theta, -L \\ \sin(\theta - \pi/3), -\cos(\theta - \pi/3), -L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{11} = \text{diag}(I_1, I_1, I_1), \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{0}_{3 \times 3} = \mathbf{M}_{21},$$

$$\mathbf{M}_{22} = \text{diag}(3m_1 + m_2, 3m_1 + m_2, 3m_1 L^2 + I_2).$$

4.2.1 Rosenberg 嵌入法

首先, 通过 Rosenberg 嵌入法对三轮全向移动机器人进行动力学建模。将分块后的矩阵代入 Rosenberg 嵌入法式(16)中可得到

$$\frac{I_1}{r} \mathbf{A}_2^T \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{1}{r} \mathbf{A}_2^T \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (52)$$

式(52)中加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_1$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_2$ 相互耦合, 难以对其解耦, 因此, 利用 Rosenberg 嵌入法无法得到三轮全向移动机器人的加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_1$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_2$ 的表达式。

4.2.2 Udwadia-Kalaba 方法

接下来, 将矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{F} 代入式(20)后, 可表示出三轮全向移动机器人基于 Udwadia-Kalaba 方法的约束力 \mathbf{F}^c 为

$$\mathbf{F}^c = \tilde{\mathbf{S}}_1 \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{S}}_2 \mathbf{b} \quad (53)$$

式中, 矩阵 $\tilde{\mathbf{S}}_1 = [\sigma_{mn}]_{6 \times 6}$ ($m, n = 1, \dots, 6$), 其中各项分别为 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = r Y_4 Y_1^{-1} Y_2^{-1}$, $\sigma_{14} = 2r I_1 \times \sin(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{15} = -2r I_1 \cos(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{16} = \sigma_{26} = \sigma_{36} = -r L I_1 Y_2^{-1}$, $\sigma_{24} = -2r I_1 \sin \theta Y_1^{-1}$, $\sigma_{21} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = r^2 I_1 Y_3 Y_1^{-1} Y_2^{-1}$, $\sigma_{25} = 2r I_1 \cos \theta Y_1^{-1}$, $\sigma_{34} = 2r I_1 \sin(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{35} = -2r I_1 \cos(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{41} = 2r(3m_1 + m_2) \times \sin(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{42} = -2r(3m_1 + m_2) \sin \theta Y_1^{-1}$, $\sigma_{43} = 2r(3m_1 + m_2) \sin(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{44} = \sigma_{55} = -3I_1 Y_1^{-1}$, $\sigma_{51} = -2r(3m_1 + m_2) \cos(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{52} = 2r(3m_1 + m_2) \cos \theta Y_1^{-1}$, $\sigma_{53} = -2r(3m_1 + m_2) \times \cos(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\sigma_{45} = \sigma_{64} = \sigma_{54} = \sigma_{65} = \sigma_{46} = \sigma_{56} = 0$, $\sigma_{61} = \sigma_{62} = \sigma_{63} = -r L (I_2 + 3m_1 L^2) Y_2^{-1}$,

$\sigma_{66} = -3I_1 L^2 Y_2^{-1}$ 。矩阵 $\tilde{\mathbf{S}}_2 = [\hat{\sigma}_{mn}]_{6 \times 3}$ ($n=1,2,3$; $m=1,\dots,6$) 中各项分别为 $\hat{\sigma}_{11} = \hat{\sigma}_{22} = I_1 Y_4 Y_1^{-1} Y_2^{-1}$, $\hat{\sigma}_{33} = I_1 Y_5 Y_1^{-1} Y_2^{-1}$, $\hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{13} = \hat{\sigma}_{21} = \hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{31} = \hat{\sigma}_{32} = r I_1^2 Y_3 Y_1^{-1} Y_2^{-1}$, $\hat{\sigma}_{41} = 2I_1(3m_1 + m_2) \sin(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\sigma}_{42} = -2I_1(3m_1 + m_2) \sin \theta Y_1^{-1}$, $\hat{\sigma}_{43} = 2I_1(3m_1 + m_2) \times \sin(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\sigma}_{51} = -2I_1(3m_1 + m_2) Y_1^{-1} \times \cos(\theta + \pi/3)$, $\hat{\sigma}_{52} = 2I_1(3m_1 + m_2) \cos \theta Y_1^{-1}$, $\hat{\sigma}_{53} = -2I_1(3m_1 + m_2) \cos(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\sigma}_{61} = \hat{\sigma}_{62} = \hat{\sigma}_{63} = -I_1 L(I_2 + 3m_1 L^2)/Y_2$ 。

求得约束力后, 根据式(19)可得到该系统的运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{S}}_1 \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{S}}_2 \mathbf{b} + \mathbf{F} \quad (54)$$

4.2.3 Rosenberg 嵌入扩展法

将分块后的矩阵代入式(33)和(34)后, 可利用扩展后的 Rosenberg 嵌入法表示出系统加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_1$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_2$:

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 = (\tilde{\mathbf{R}}_1 \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{R}}_2 \mathbf{b}) / Y_1 Y_2 \quad (55)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_3 \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{R}}_4 \mathbf{b} \quad (56)$$

其中 $Y_1 = 3I_1 + 6m_1 r^2 + 2m_2 r^2$, $Y_2 = I_2 r^2 + 3m_1 L^2 r^2 + 3I_1 L^2$, 矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_1 = [\gamma_{ij}]_{3 \times 6}$ ($i=1,2,3; j=1,\dots,6$) 中各项分别为 $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 2Y_2 + L^2 Y_1$, $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{21} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = r^2 Y_3$, $\gamma_{14} = 2Y_2 r \times \sin(\theta + \pi/3)$, $\gamma_{15} = -2Y_2 r \cos(\theta + \pi/3)$, $\gamma_{16} = \gamma_{26} = \gamma_{36} = -r L Y_1$, $\gamma_{24} = -2Y_2 r \sin \theta$, $\gamma_{25} = 2Y_2 r \cos \theta$, $\gamma_{34} = 2Y_2 r \sin(\theta - \pi/3)$, $\gamma_{35} = -2Y_2 r \cos(\theta - \pi/3)$ 。矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_2 = [\bar{\gamma}_{kh}]_{3 \times 3}$ ($k, h=1,2,3$), 令 $Y_3 = 3m_1 L^2$, $2m_2 r Y_2 + r I_1 Y_3$, $Y_5 := -3m_1 r L^2 Y_1 - 2r I_1 Y_3 - r I_2 Y_1$, $\tilde{\mathbf{R}}_2$ 中各项分别为 $\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = Y_4$, $\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{13} = \bar{\gamma}_{21} = \bar{\gamma}_{23} = \bar{\gamma}_{31} = \bar{\gamma}_{32} = r \times I_1 Y_3$, $\bar{\gamma}_{33} = Y_5$ 。

式 (56) 中 $\tilde{\mathbf{R}}_3 = [\hat{\gamma}_{ij}]_{3 \times 6}$ ($i=1,2,3; j=1,\dots,6$) 且 $\hat{\gamma}_{11} = 2r \sin(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{12} = -2r \sin \theta Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{13} = 2r \sin(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{14} = \hat{\gamma}_{25} = 2r^2 Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{15} = \hat{\gamma}_{16} = \hat{\gamma}_{24} = \hat{\gamma}_{26} = \hat{\gamma}_{34} = \hat{\gamma}_{35} = 0$, $\hat{\gamma}_{36} = r^2 Y_2^{-1}$, $\hat{\gamma}_{21} = -2r \cos(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{22} = 2r \cos \theta Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{23} = -2r \cos(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\hat{\gamma}_{31} = \hat{\gamma}_{32} = \hat{\gamma}_{33} = -r L \times Y_2^{-1}$ 。矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_4 = [\bar{\gamma}_{kh}]_{3 \times 3}$ ($k, h=1,2,3$) 各项分别为 $\bar{\gamma}_{11} = 2I_1 \sin(\theta + \pi/3) Y_1^{-1}$, $\bar{\gamma}_{12} = -2I_1 \sin \theta Y_1^{-1}$, $\bar{\gamma}_{13} = 2I_1 \sin(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\bar{\gamma}_{21} = -2I_1 \cos(\theta + \pi/3) \times Y_1^{-1}$, $\bar{\gamma}_{22} = 2I_1 \cos \theta Y_1^{-1}$, $\bar{\gamma}_{23} = -2I_1 \cos(\theta - \pi/3) Y_1^{-1}$, $\bar{\gamma}_{31} = \bar{\gamma}_{32} = \bar{\gamma}_{33} = -I_1 L Y_2^{-1}$ 。根据式(55)和式(56)可得

到基于扩展后的 Rosenberg 嵌入法的系统动力学模型。

比较上述三种不同的建模方法可知, 基于 Rosenberg 嵌入法无法对系统加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_1$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_2$ 进行解耦, 而另外的两种方法则能够对系统中选取的所有广义坐标的加速度进行求解。为进一步对 Rosenberg 嵌入扩展法和 Udwadia-Kalaba 方法进行比较, 现通过 MATLAB 对系统模型进行数值仿真。

取 $m_1 = 0.2 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $I_1 = 80 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$, $I_2 = 2080 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$, $r = 20 \text{ mm}$, $L = 40 \text{ mm}$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 1 \text{ rad}$, $\theta = \pi/6 \text{ rad}$, $x = y = 1 \text{ rad/s}$, $\omega_{\psi_1} = \omega_{\psi_2} = 1 \text{ rad/s}$, $\omega_{\psi_3} = 2 \text{ rad/s}$, $v_x = -6.667 \text{ mm/s}$, $v_y = -11.547 \text{ mm/s}$, $\omega_\theta = -0.667 \text{ rad/s}$ 。若系统受到的外力为 $\mathbf{Q} = [0.25, 0, 0, 0, 0, 0]^T$, 令 $e_7 := v_x^U - v_x^R$, $e_8 := v_y^U - v_y^R$, $e_9 := \omega_\theta^U - \omega_\theta^R$, $e_{10} := x^U - x^R$, $e_{11} := y^U - y^R$ 。

基于 Rosenberg 嵌入扩展法可直接表示的三轮全向移动机器人的三个轮子的角加速度随时间的变化关系如图 9 所示。该机器人在 X、Y 轴方向上的移动加速度变化情况如图 10 所示, 其中心体的转动角加速度随时间的变化则如图 11 所示。

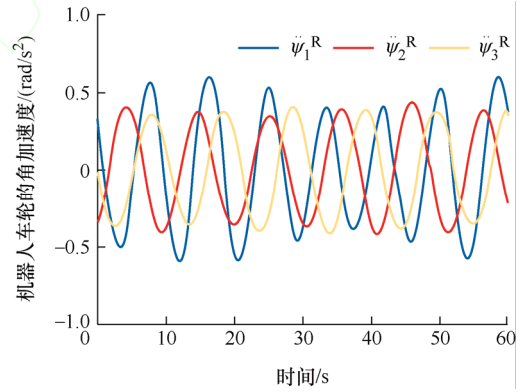


图 9 三个轮子的转动角加速度随时间的变化关系

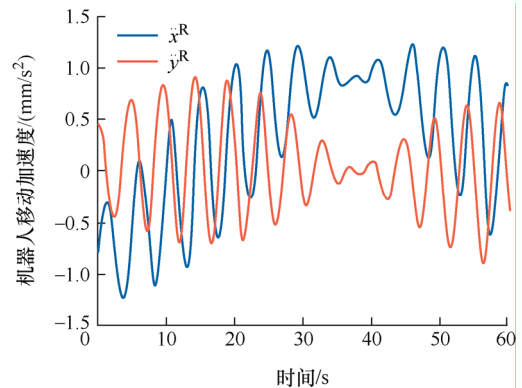


图 10 机器人的移动加速度随时间的变化关系

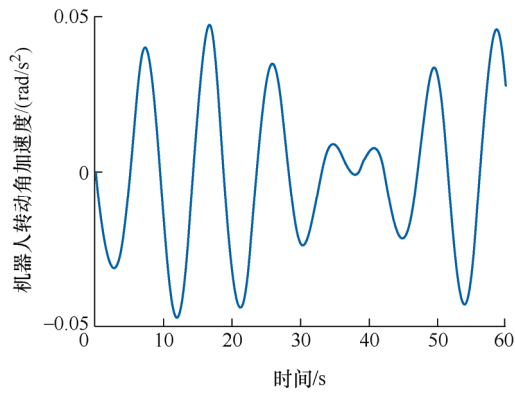
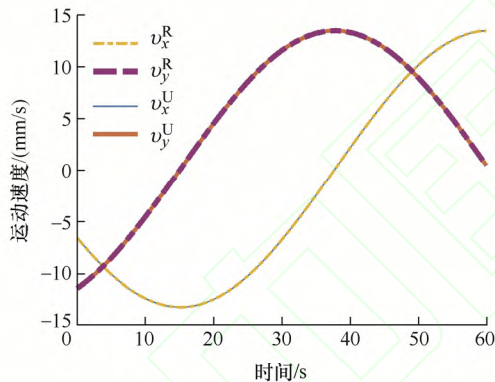


图 11 机器人的转动加速度随时间的变化关系

现对比 Rosenberg 嵌入扩展法和 Udwadia-Kalaba 法这两种方法对三轮全向移动机器人的建模效果,图 12 展示了这两种方法下该机器人的运动速度以及速度误差 e_7 和 e_8 随时间的变化情况,图 13 则展示了该机器人的转动速度以及转动速度误差 e_9 随时间的变化情况。从图 12b 和 13b 中可以看出,这两种方法中的三轮全向移动机器人在地面坐标系上的移动速度的误差和转动速度的误差的数量级分别为 10^{-8} 和 10^{-9} 。



(a) 两种方法中三轮全向移动机器人的运动速度随时间的变化情况

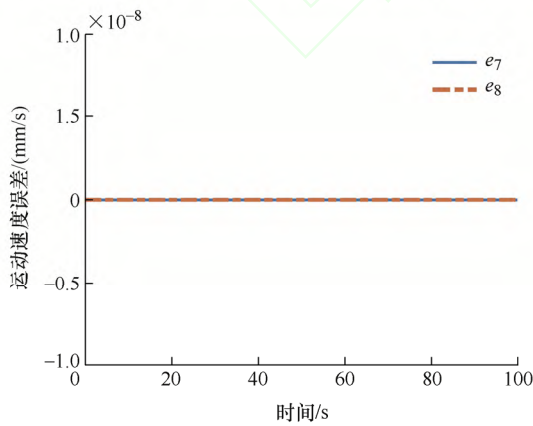
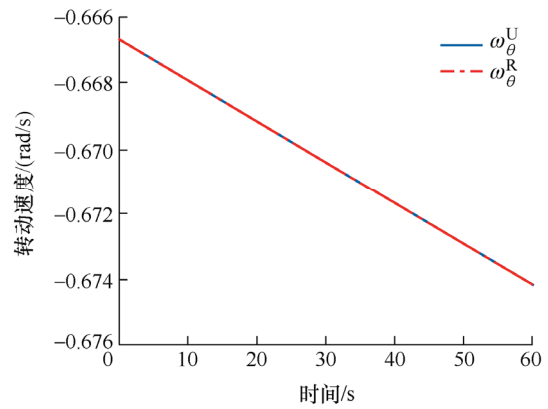
(b) 运动速度误差 e_7 和 e_8

图 12 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中三轮全向移动机器人的运动速度及误差的变化曲线



(a) 两种方法中三轮全向移动机器人的转动速度随时间的变化情况

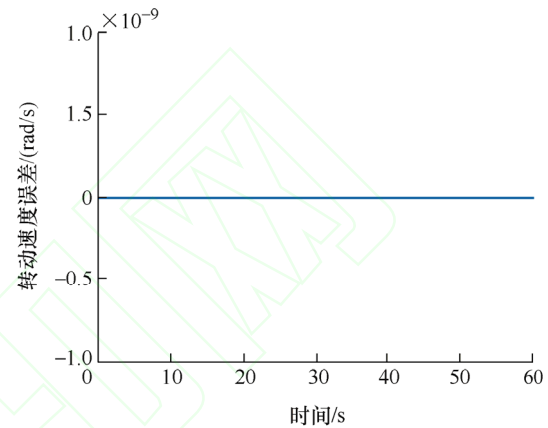
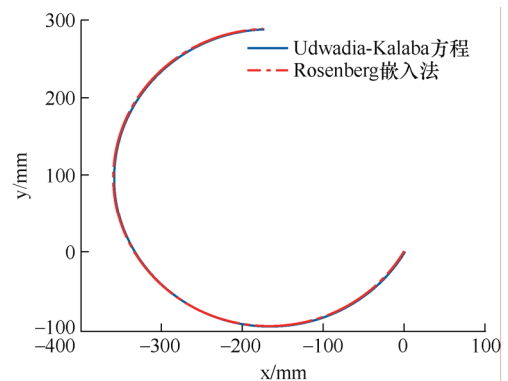
(b) 转动速度误差 e_9

图 13 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中三轮全向移动机器人的转动速度及误差的变化曲线

图 14 则为 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中的运动轨迹 $[x, y]^T$ 以及轨迹误差 e_{10} 和 e_{11} 随时间的变化情况。从图 14b 中可以看出,两种方法中在 x 和 y 方向上的位移仿真结果误差的数量级为 10^{-7} 。因此,基于上述仿真结果,可认为三轮全向移动机器人使用扩展后的 Rosenberg 嵌入法所得的动力学模型正确。



(a) 两种方法中三轮全向移动机器人的运动轨迹

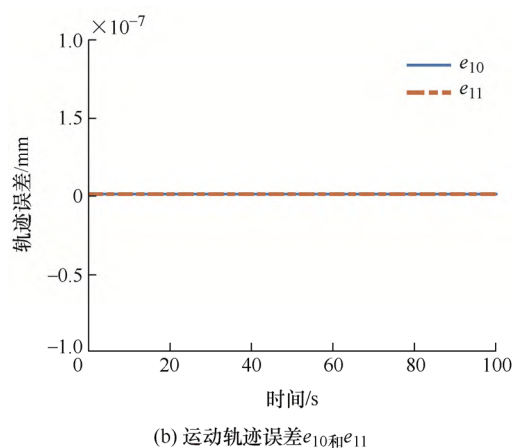


图 14 Rosenberg 嵌入扩展法与 Udwadia-Kalaba 法中三轮全向移动机器人的运动轨迹及误差的变化曲线

另外, 如图 15 所示, 对利用 Rosenberg 嵌入扩展法建模的系统, 在 MATLAB 中利用 ODE45 函数进行 60 s 数值仿真时, 程序运行过程耗时约 10.037 s。在同样的求解条件下, 基于 Udwadia-Kalaba 法进行建模的系统则需要约 45.111 s 来完成 60 s 仿真。因此, 对于三轮全向移动机器人, 使用 Rosenberg 嵌入扩展法相比于 Udwadia-Kalaba 方法在模型计算效率上得到了显著提高。

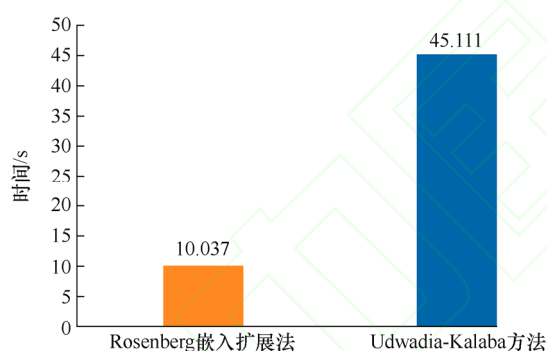


图 15 两种方法的仿真时间比较

5 结论

(1) 通过数学推导介绍了 Rosenberg 嵌入法, 利用约束方程的二阶形式对原有的 Rosenberg 嵌入法进行扩展, 给出了机械系统在受到完整或非完整约束时, 通过 Rosenberg 嵌入扩展法得到的动力学模型。扩展后的 Rosenberg 嵌入法可以处理非完整机械系统动力学建模问题, 避免了建模过程中引入辅助变量, 会增加模型计算量的问题, 还解决了原方法中模型不易解耦的问题。

(2) 通过将扩展后的 Rosenberg 嵌入法与 Udwadia-Kalaba 方程进行对比, 证明了机械系统在

满足假设 1 和 2 的情况下, 扩展后的 Rosenberg 嵌入法正确。相较于 Udwadia-Kalaba 方程, 该方法对系统模型进行降维处理, 计算效率较高, 适用于结构复杂的机械系统动力学建模。

(3) 以太空悬浮机器人和轮式机器人两个典型的非完整机械系统为实例, 分别利用 Rosenberg 嵌入法、Rosenberg 嵌入扩展法和 Udwadia-Kalaba 方法对系统进行动力学建模, 通过对比建立的解析模型和数值仿真结果, 验证了 Rosenberg 嵌入扩展法的正确性。

参 考 文 献

- [1] 李运华, 何刘宇, 杨丽曼. 非完整约束多轴驱动车辆的路径跟踪控制[J]. 机械工程学报, 2014, 50(5): 33-41.
LI Yunhua, HE Liuyu, YANG Liman. Path-following control of nonholonomic constraint multi-axle drive vehicle[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(5): 33-41.
- [2] 战强, 李伟. 球形移动机器人的研究进展与发展趋势[J]. 机械工程学报, 2019, 55(9): 1-17.
ZHAN Qiang, LI Wei. Research progress and development trend of spherical mobile robots[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(9): 1-17.
- [3] 王宗义, 李艳东, 朱玲. 非完整移动机器人的双自适应神经滑模控制[J]. 机械工程学报, 2010, 46(23): 16-22.
WANG Zongyi, LI Yandong, ZHU Ling. Dual adaptive neural sliding mode control of nonholonomic mobile robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(23): 16-22.
- [4] 戈新生, 孙鹏伟. 自由漂浮空间机械臂非完整运动规划的粒子群优化算法[J]. 机械工程学报, 2007, 43(4): 34-38.
GE Xinsheng, SUN Pengwei. Particle swarm optimization algorithm for non-holonomic motion planning of free-floating space manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(4): 34-38.
- [5] 史也. 空间机器人自主捕获目标的轨迹规划与控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
SHI Ye. Research on trajectory planning and control of space robot for autonomous capturing target[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology University, 2013.
- [6] UDWADIA F E, WANICHANON T. Hamel's paradox and the foundations of analytical dynamics[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(3): 1253-1265.
- [7] CHEN Y H. Hamel paradox and Rosenberg conjecture in analytical dynamics[J]. Journal of Applied Mechanics,

- 2013, 80(4): 041001-1-041001-8.
- [8] 赵韩, 赵晓敏, 姜建满. 基于 Udwadia-Kalaba 理论 Hamel 嵌入法研究[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(06): 696-707.
- ZHAO Han, ZHAO Xiaomin, JIANG Jianman. Study on Hamel embedding method based on Udwadia-Kalaba theory[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(06): 696-707.
- [9] NIGATU H, HO C Y, KIM D. On the structural constraint and motion of 3-prs parallel kinematic machines[C]//Proceedings of the ASME 2021 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American : Mechanisms and Robotics Conference, 2021, V08AT08A032.
- [10] 徐子力, 吕恬生, 宋立博, 等. 双足溜冰机器人动力学[J]. 上海交通大学学报, 2007, (08): 1282-1286+1291.
- XU Zili, LÜ Tiansheng, SONG Libo, et al. Dynamic analysis of biped ice-skater robot of passive wheel type[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2007, (08): 1282-1286+1291.
- [11] 刘卫刚. 环境探测球形机器人动力学建模及仿真[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2010.
- LIU Weigang. Dynamic modeling and simulation of spherical robots for environment exploration[D]. Xian: Xidian University, 2010.
- [12] NOORANI M R S. Hybrid dynamical model of a gait training robot: using maggi's method for constrained motions[C]//Proceedings of the 2018 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics. Tehran: RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics, 2018, 183-188.
- [13] MAGGI G A. Principi della teoria matematica del movimento dei corpi: corso di meccanica razionale[M]. Italia: Ulrico Hoepli, 1896.
- MAGGI G A. Principles of the mathematical theory of the movement of bodies: rational mechanics course[M]. Italy: Ulrico Hoepli, 1896.
- [14] MAGGI G A. Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica applicabili ai sistemi anolonomi[J]. Rendiconti Della Regia Accademia Dei Lincei, 1901, 5: 287-291.
- MAGGI G A. On some new forms of the equations of dynamics applicable to nonholonomic systems[J]. Accounts of Regia Accademia Dei Lincei, 1901, 5: 287-291.
- [15] CHAPLYGIN S A. On a ball's rolling on a horizontal plane[J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 7(2): 131-48.
- [16] CHAPLYGIN S A. On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane[J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2002, 7(2): 119-30.
- [17] BORISOV A V, MAMAEV I S. The rolling body motion of a rigid body on a plane and a sphere[J]. Regular and Chaotic Dynamic, 2003, 7(2): 177-200.
- [18] WORONETZ P V. Equations of motion of a rigid body rolling along a stationary surface without slipping[D]. Kiev: Proc of Kiev University, 1903.
- [19] HAMEL G. Theoretische mechanik: eine einheitliche einföhrung in die gesamte Mechanik[M]. New York: Springer, 1949.
- HAMEL G. Theoretical mechanics: a unified introduction to all mechanics[M]. New York: Springer, 1949.
- [20] ROSENBERG R. Analytical dynamics[M]. New York: Plenum Press, 1977.
- [21] UDWADIA F E, KALABA R E. Analytical dynamics: a new approach[M]. Cambridge: University Press, 2007.
- [22] 张新荣, 孟为来. 基于虚位移分解与伺服轨迹约束的机械系统跟踪控制[J]. 机械工程学报, 2015, 51(3): 45-50.
- ZHANG Xinrong, MENG Weilai. Trajectory tracking control of mechanical systems based on virtual displacement decomposition and servo constraint following[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(3): 45-50.
- [23] ZHAO X, CHEN Y H, ZHAO H, et al. Udwadia-Kalaba equation for constrained mechanical systems: formulation and applications[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(06): 11-24.
- [24] ZHAO H, ZHEN S, CHEN Y H. Dynamic modeling and simulation of multi-body systems using the Udwadia-Kalaba theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(05): 839-850.
- [25] GINSBERG J. Engineering dynamics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [26] SPONG M W, HUTCHINSON S, VIDYASAGAR M. Robot modeling and control[M]. New York: Wiley, 2006.
- [27] UDWADIA F E, PHOHOMSIRI P. Explicit equations of motion for constrained mechanical systems with singular mass matrices and applications to multi-body dynamics[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2006, 462(2071): 2097-2117.
- [28] PARS L A. A treatise on analytical dynamics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1965.

- [29] LU T T, SHIOU S H. Inverses of 2×2 block matrices[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43(1-2): 119-129.
- [30] HENDERSON H V, SEARLE S R. On deriving the inverse of a sum of matrices[J]. Siam Review, 1981, 23(1): 53-60.
- [31] 王力梅, 郭莉琴, 邵海琴, 等. 分块矩阵的行列式[J]. 四川兵工学报, 2011, 32(11): 149-150.
WANG Limei, GUO Liqin, SHAO Haiqin, et al. The determinant of the chunk matrix[J]. Sichuan Journal of Military Engineering, 2011, 32(11): 149-150.
- [32] MURRAY-LASSO M A. Alternative methods of calculation of the pseudo inverse of a non full-rank matrix[J]. Journal of Applied Research and Technology, 2008, 6(3): 170-183.
- [33] MURRAY R M, LI Z, SASTRY S S, et al. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. Florida: CRC Press, 1994.
- [34] SIEGWART R, NOURBAKHSH I R, SCARAMUZZA D. Introduction to autonomous mobile robots[M]. Cambridge: MIT Press, 2011.

作者简介: 赵睿英, 女, 1985 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为机器人动力学建模与智能控制、工程机械集群控制。

E-mail: ruiying.zhao@chd.edu.cn

曹学鹏(通信作者), 男, 1982 年出生, 博士, 副教授, 主要研究方向为机电系统的动力学建模与控制、环境感知及轨迹规划。