Universidade Federal de Santa Maria

SEDES SAPIENTIÆ

1960

UFVJM

1953

SAPIENTIA ET LIBERTAS

Regressão linear com múltiplas variáveis – RESUMO

Hypothesis: $h_\theta(x) = \theta^T x = \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$

Parameters: $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$

Cost function:

$$J(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Gradient descent:

Repeat $\{$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \ldots, \theta_n)$$

$\}$ (simultaneously update for every $j = 0, \ldots, n$)

Reconhecimento de padrões e aprendizagem computacional

Regressão Logística


capim_
capim_amargoso 0.26
buva 0.58
capim_amargoso 0.54
buva 0.66
buva 0.28
buva 0.48
buva

Regressão Logística

$h_\theta(x)$ at 0.5:

If $h_\theta(x) \geq 0.5$, predict "y = 1"

If $h_\theta(x) < 0.5$, predict "y = 0"

Regressão Logística

Classification: y = 0 or 1

$h_\theta(x)$ can be > 1 or < 0

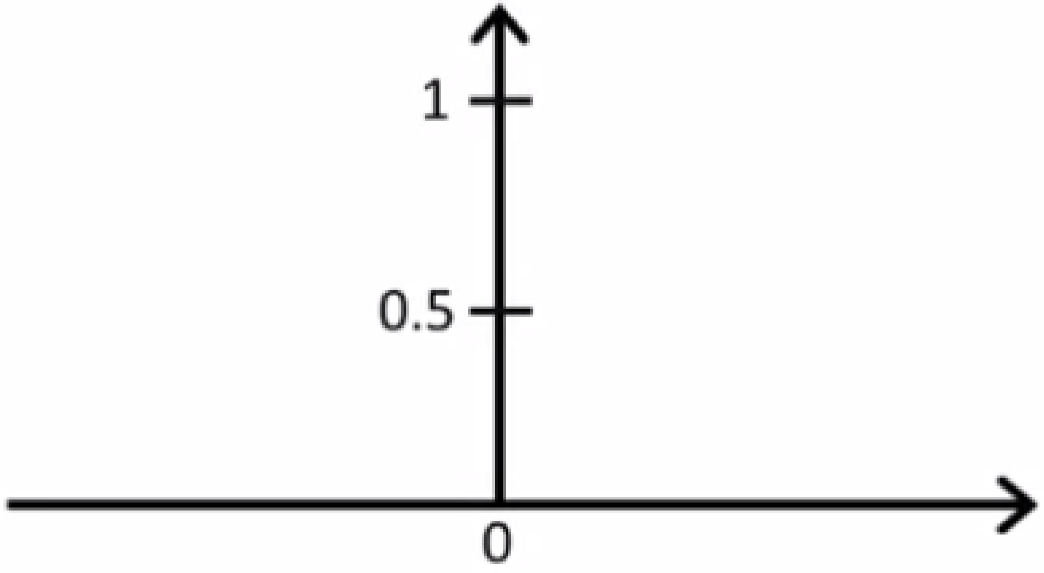
Logistic Regression: $0 \leq h_\theta(x) \leq 1$

Regressão Logística – Representação das hipóteses

Logistic Regression: $0 \leq h_\theta(x) \leq 1$

$$h_\theta(x) = \quad \theta^T x$$

Função sigmoide ou
Função logística



Regressão Logística – Representação das hipóteses

$h_\theta(x) =$ *Probabilidade estimada de y=1 com “x” de entrada*

Exemplo:

If $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{Reflectância NIR} \end{bmatrix}$

$$h_\theta(x) = 0.7$$

Probabilidade de y=1, dado “x”, parametrizado por θ

Regressão Logística – Representação das hipóteses

Suponha que desejamos prever, a partir de dados "x" sobre uma planta, seja Buva (y=1) ou não (y=0).

Nosso classificador de regressão logística gera, para uma planta específica:

$$h\theta(x) = P(\, y=1|x;\theta) = 0{,}7$$

Estimamos que haja 70% de chance de essa planta ser Buva. Qual deve ser nossa estimativa para P(y=0|x;i), a probabilidade da planta NÃO ser Buva?

a) $P(\,e = 0 \mid x\,;\,i\,) = 0{,}3$

b) $P(\,e = 0 \mid x\,;\,\theta\,) = 0{,}7$

c) $P(\,e = 0 \mid x\,;\,\theta\,) = 0{,}7^2$

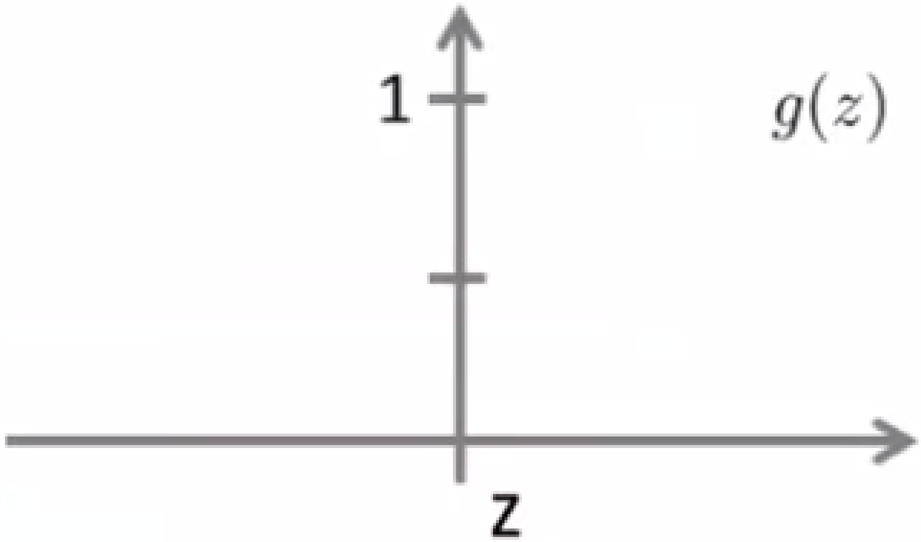
d) $P(\,e = 0 \mid x\,;\,i\,) = 0{,}3 \times 0{,}7$

Regressão Logística – Limite de decisão

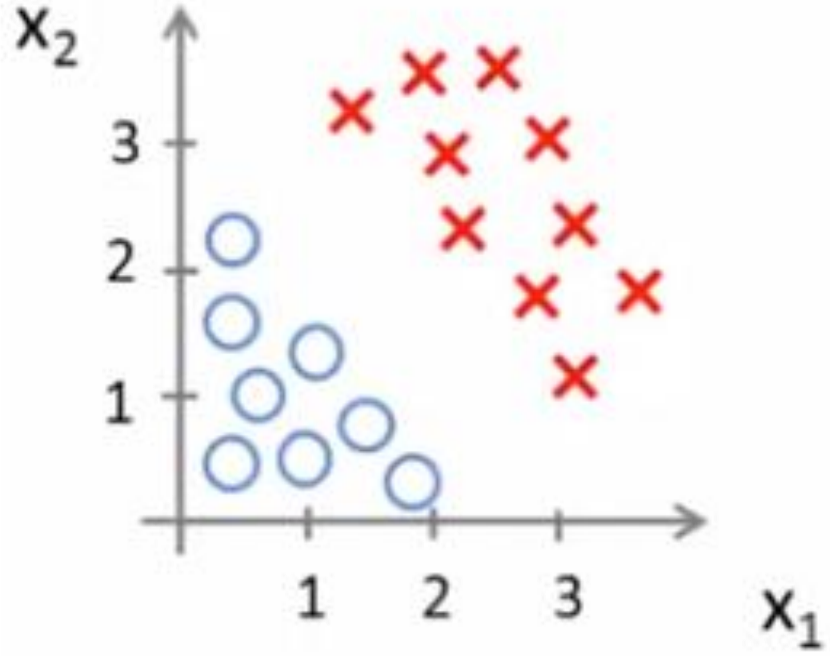
Logistic regression

$$h_\theta(x) = g(\theta^T x)$$

$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$



Regressão Logística – Limite de decisão

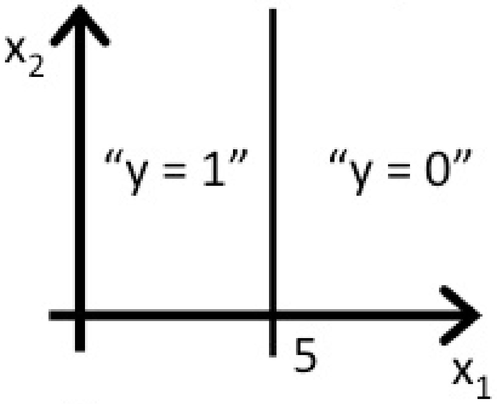


$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2)$$

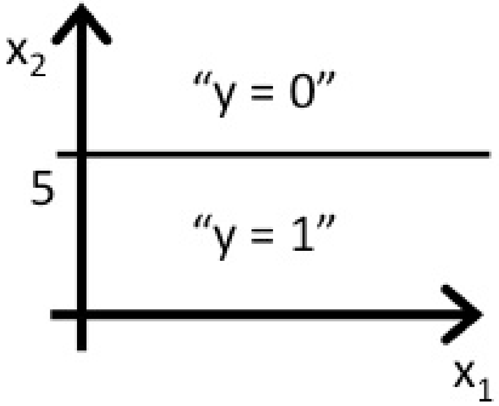
Regressão Logística – Representação das hipóteses

Considere uma regressão logística com duas variáveis x1 e x2. $\theta_0 = 5$, $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = 0$

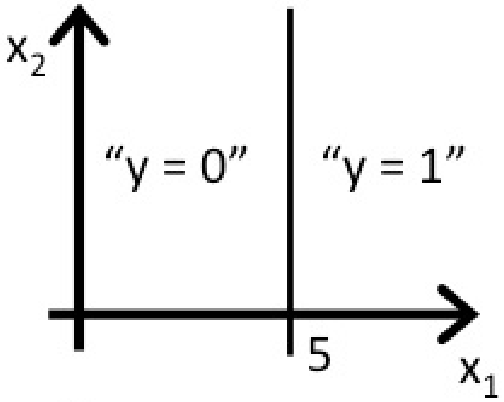
a)



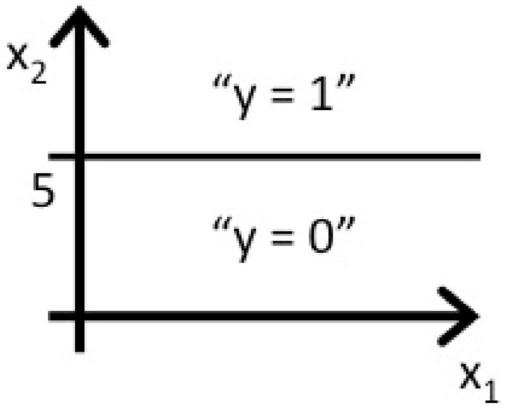
b)



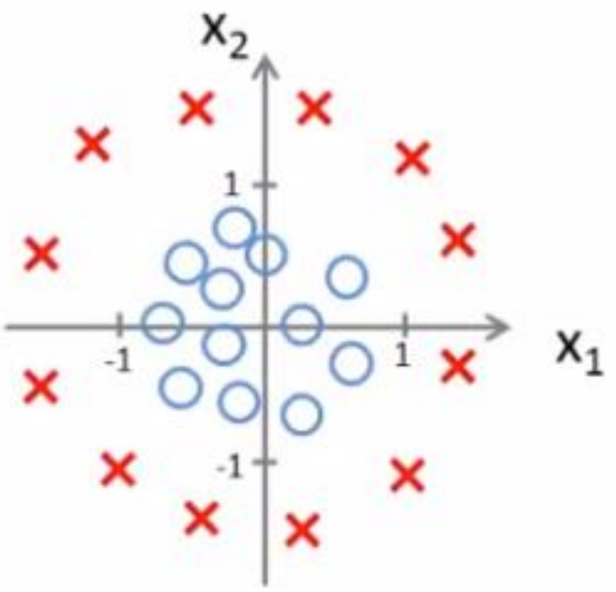
c)



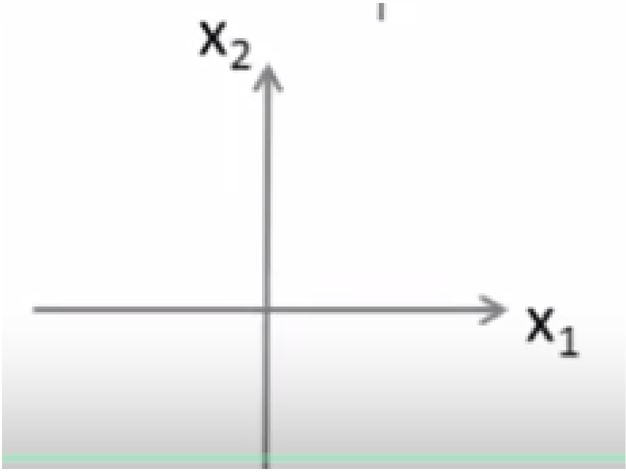
d)



Regressão Logística – Limite de decisão



$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_2^2)$$



$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_1^2 x_2 + \theta_5 x_1^2 x_2^2 + \theta_6 x_1^3 x_2 + \ldots)$$

Regressão Logística – Função de custo

Training set: $\{(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \cdots, (x^{(m)}, y^{(m)})\}$

m examples $\quad x \in \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_0 = 1, y \in \{0, 1\}$

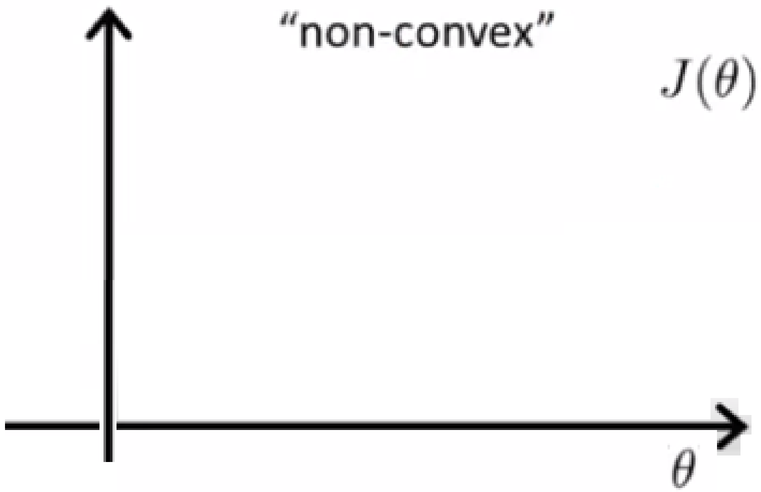
$$h_\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}$$

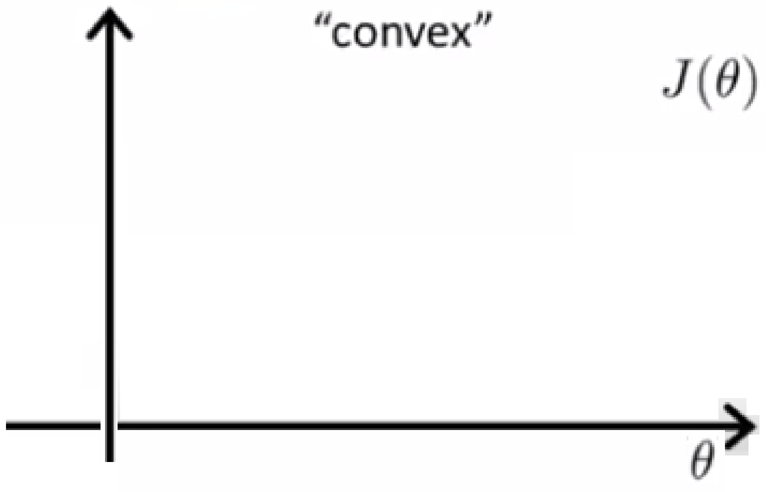
How to choose parameters θ ?

Regressão Logística – Função de custo

Linear regression: $J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$

$$\mathrm{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)}) = \frac{1}{2} \left(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)^2$$

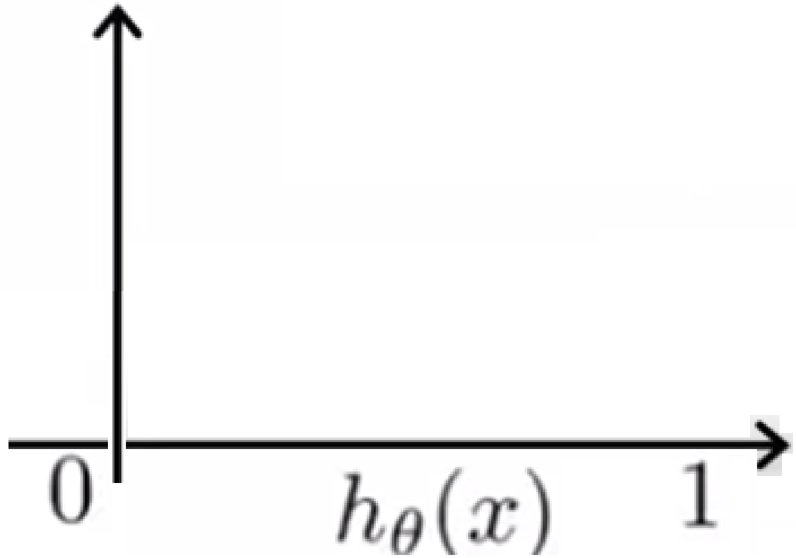




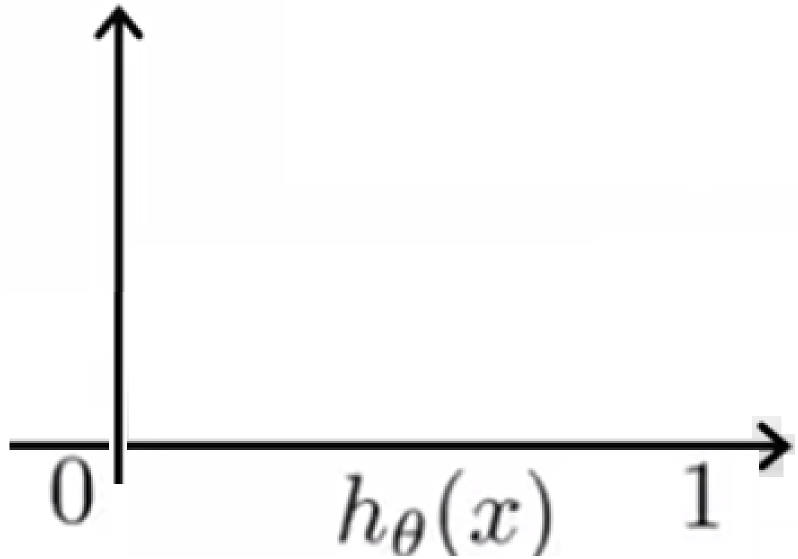
Regressão Logística – Função de custo

$$\mathrm{Cost}(h_\theta(x), y) = \begin{cases} -\log(h_\theta(x)) & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Se y=1:



Se y=0:



Regressão Logística – Função de custo

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)})$$

$$\mathrm{Cost}(h_\theta(x), y) = \begin{cases} -\log(h_\theta(x)) & \text{if } y = 1 \\ -\log(1 - h_\theta(x)) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Note: $y = 0$ or 1 always

Regressão Logística – Função de custo

$$J(\theta) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Cost}(h_\theta(x^{(i)}), y^{(i)})$$
$$= -\frac{1}{m}[\sum_{i=1}^{m} y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log (1 - h_\theta(x^{(i)}))]$$

To fit parameters θ :

$$\min_\theta J(\theta)$$

To make a prediction given new x:

Output $h_\theta(x) = \frac{1}{1+e^{-\theta^T x}}$

Regressão Logística – Gradiente descedente

Gradient Descent

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}[\sum_{i=1}^{m} y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log (1 - h_\theta(x^{(i)}))]$$

Want $\min_\theta J(\theta)$:

Repeat $\{$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta)$$

$\}$ (simultaneously update all θ_j)

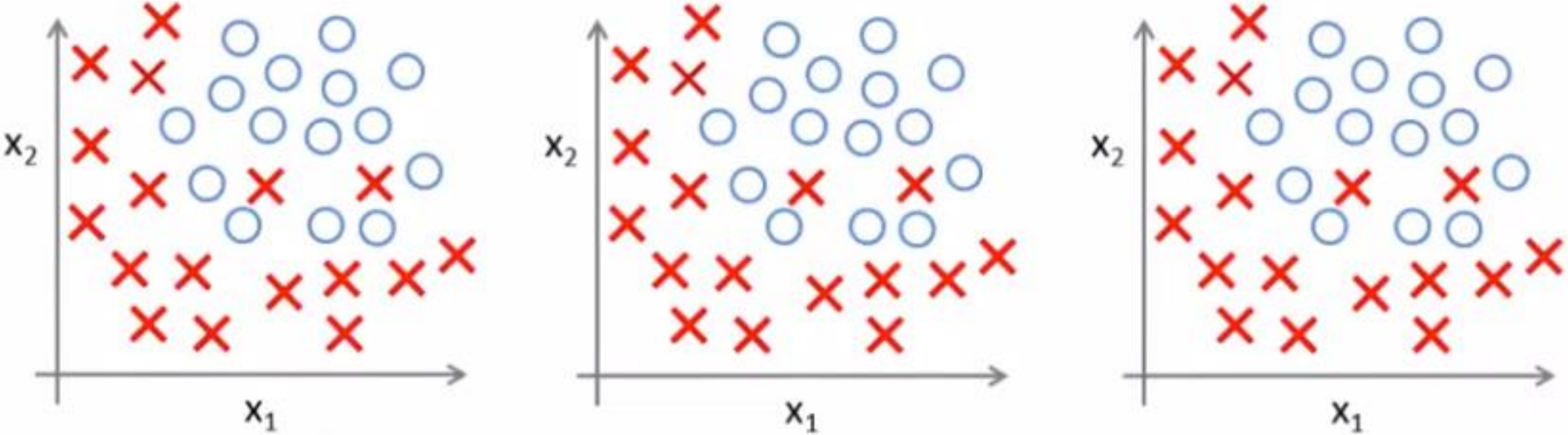
O problema do Overfitting

$\theta_0 + \theta_1 x$ $\quad$ $\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$ $\quad$ $\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4$

Então, overfitting é:

O problema do Overfitting

Example: Logistic regression



$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2)$$

(g = sigmoid function)

$$g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1^2 + \theta_4 x_2^2 + \theta_5 x_1 x_2)$$

$$g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + \theta_3 x_1^2 x_2 + \theta_4 x_1^2 x_2^2 + \theta_5 x_1^2 x_2^3 + \theta_6 x_1^3 x_2 + \dots)$$

O problema do Overfitting

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

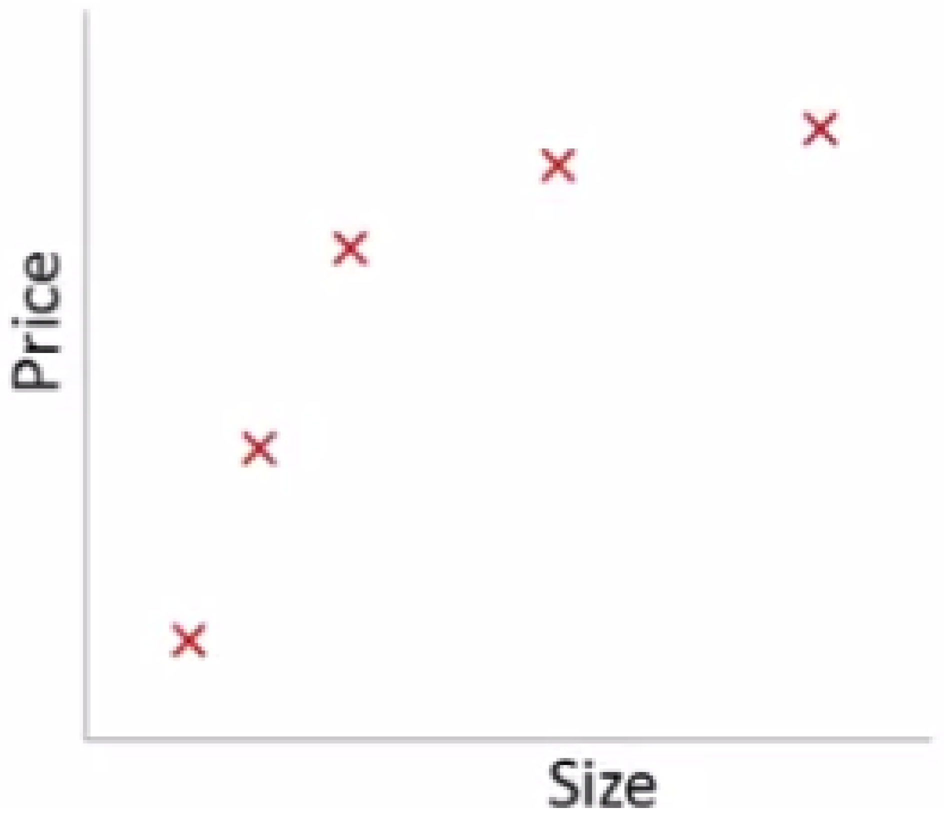
$x_4 =$

$x_5 =$

$x_6 =$

$\vdots$

x_{100}



O problema do Overfitting

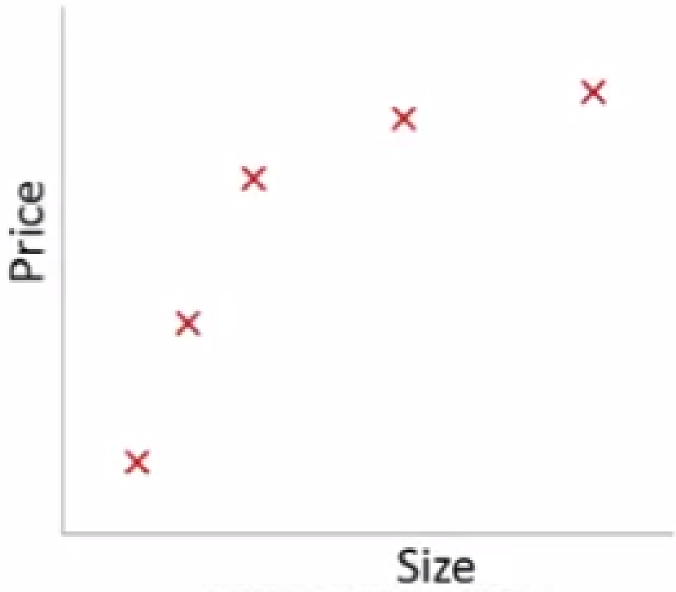
1- Reduzir o número de variáveis

- Selecionar manualmente quais variáveis entrar;
- Usar algum algoritmo de seleção de variáveis.

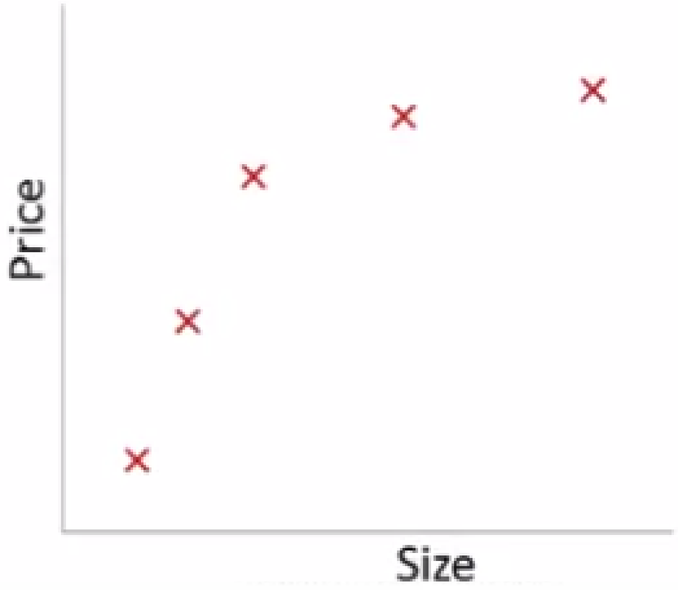
2- Regularização

- Mantém todas variáveis, mas reduz a magnitude/valores
- Funciona melhor quando têm muitas variáveis, cada uma contribui um pouco para prever.

O problema do Overfitting – Regularização



$$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$$



$$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4$$

Suppose we penalize and make θ_3, θ_4 really small.

$$\min_{\theta} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

O problema do Overfitting – Regularização

1- Valores pequenos para os parâmetros

- hipótese mais "simples"
- Menor propensão ao overfitting

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

O problema do Overfitting – Regularização

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \lambda\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2\right]$$

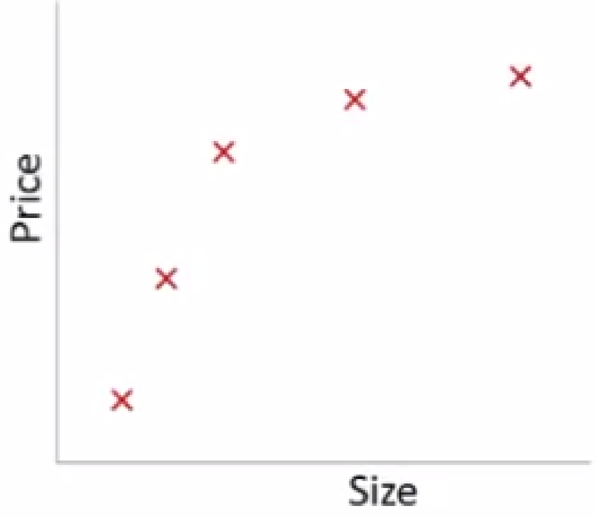
$$\min_\theta J(\theta)$$

O problema do Overfitting – Regularização

In regularized linear regression, we choose θ to minimize

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2\right]$$

What if λ is set to an extremely large value (perhaps for too large for our problem, say $\lambda = 10^{10}$)?



$$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4$$

O problema do Overfitting – Regularização Reg. Linear

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \lambda\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2\right]$$

$$\min_{\theta} J(\theta)$$

O problema do Overfitting – Regularização Reg. Linear

Gradient descent

Repeat {

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \qquad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)}$$

$$(j = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

}

$$\theta_j := \theta_j (1 - \alpha \frac{\lambda}{m}) - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)}$$

O problema do Overfitting – Regularização Eq. Normal

Normal equation

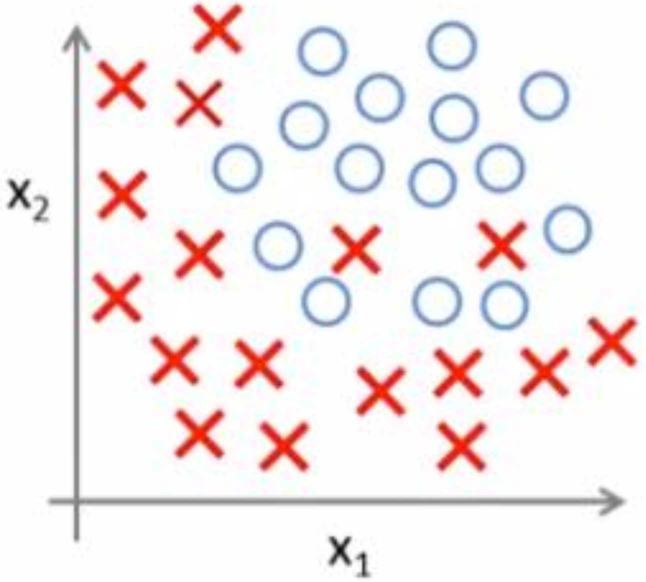
$$X = \begin{bmatrix} (x^{(1)})^T \\ \vdots \\ (x^{(m)})^T \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$\min_{\theta} J(\theta)$$

$$\theta = \left(X^T X + \lambda \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} X^T y$$

O problema do Overfitting – Regularização Reg. Log.

Regularized logistic regression.



$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + \theta_3 x_1^2 x_2 + \theta_4 x_1^2 x_2^2 + \theta_5 x_1^2 x_2^3 + \dots)$$

Cost function:

$$J(\theta) = -\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log (1 - h_\theta(x^{(i)}))\right]$$

O problema do Overfitting – Regularização

Gradient descent

Repeat $\{$

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)}$$

$$(j = \cancel{0}, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$\}$


!!! SIMBORA !!!