

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tom Gornik

**Izrek o invarianci odprtih množic**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2020

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Simpleksi	5
3. Poincaré-Mirandov izrek	16
4. Razširitev funkcije	23
5. Izrek o invarianci odprtih množic	28
Slovar strokovnih izrazov	30
Literatura	30

## Izrek o invarianci odprtih množic

### POVZETEK

Zveznost in diskretnost sta v mnogih pogledih povsem nasprotujoča si pojma. Kljub temu se izkaže, da lahko s pomočjo kombinatorike na diskretnih množicah dokažemo veliko lastnosti zveznih funkcij. Glavna prednost takega načina dokazovanja je, da si je postopek dokaza (vsaj v primeru, ko dimenzija ni prevelika) lahko predstavljati in celo skicirati. Pozitivne strani se pokažejo predvsem pri dokazovanju izrekov o obstoju posebnih točk, kot sta negibna točka in ničla funkcije. Primer takega izreka je Poincaré-Mirandov izrek, ki je v tem delu dokazan s pomočjo kombinatorike na ogliščih triangulacije kocke in Spernerjeve leme. Z razširitvijo funkcije je dokazano, da Poincaré-Mirandov izrek implicira izrek o invarianci odprtih množic. Na koncu je predstavljena enostavna a pomembna posledica izreka o invarianci odprtih množic, ki jo imenujemo izrek o invarianci dimenzije.

## Domain invariance theorem

### ABSTRACT

Continuity and discreteness are often seen as two opposing concepts, but we can use discrete combinatorics to prove many properties of continuous functions. The main benefit is that we can easily (at least when the dimension is not too large) imagine and also draw some pictures of proof. This works particularly well when we try to prove a theorem on the existence of special points of a function, for example, a fixed point or a zero of a function. One example of this sort of theorem is the Poincaré-Miranda's theorem which is proved in this work by discrete combinatorics on vertices of a triangulation of a cube and Sperner's lemma. By the extension of a function, we can show that the Poincaré-Miranda's theorem implies the domain invariance theorem. In the end, we show a simple but important corollary, the dimension invariance theorem.

**Math. Subj. Class. (2010):** 52A20, 54F45, 54H25

**Ključne besede:** simpleks, Spernerjeva lema, Poincaré-Mirandov izrek, izrek o invarianci odprtih množic, izrek o invarianci dimenzij

**Keywords:** simplex, Sperner's lemma, Poincaré-Miranda's theorem, domain invariance theorem, dimension invariance theorem

## 1. UVOD

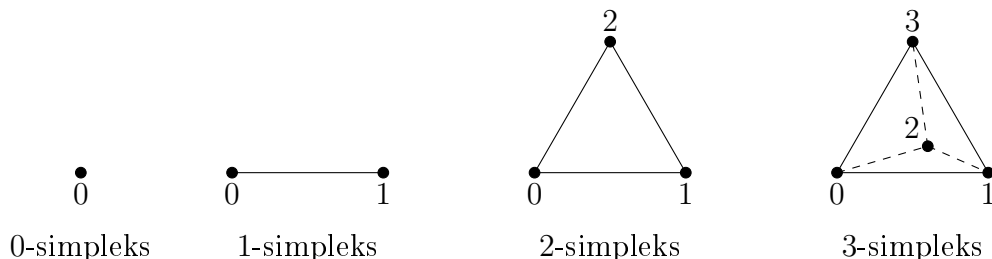
Koncept dimenzije prostora se zdi zelo naraven in intuitiven. V svojih zapisih je o dimenzijah govoril že Aristotel. A ko beremo njegova dela, hitro vidimo, da je bila njegova predstava o dimenzijah drugačna od današnje. Aristotel namreč pravi: „Premica ima magnitudo v eni smeri, ravnina v dveh smereh, geometrijska telesa pa v treh smereh in poleg teh treh magnitud ni nobene več, kajti te tri so vse” [5, str. 1, moj prevod]. Matematiki so dolgo živeli v prepričanju, da so lahko matematični objekti največ tridimenzionalni. Kasneje so se začele pojavljati potrebe po štiridimenzionalnih objektih, saj so bile na primer v mehaniki enačbe veliko lažje, če je eno dimenzijo predstavljal čas. Tako smo počasi prišli do razmišljanja, da obstajajo večdimenzionalni in celo neskončno dimenzionalni prostori. Problem se pojavi, ko želimo primerjati prostore različnih dimenzij. Intuicija nam pravi, da prostora različnih dimenzij ne moreta biti enaka. V topologiji rečemo, da ne moreta biti homeomorfna. Homeomorfizem je bijektivna zvezna preslikava  $f$ , katere inverzna preslikava  $f^{-1}$  je tudi zvezna. Če lahko prostor  $X$  z neko homeomorfno preslikavo preslikamo na prostor  $Y$ , pravimo, da sta prostora  $X$  in  $Y$  homeomorfna. Matematiki so že od nekdaj verjeli, da je dimenzija topološka invarianta, kar pomeni, da imata homeomorfna prostora enako dimenzijo. To trditev je bilo zelo težko dokazati ne samo zato, ker je dokaz zapleten, ampak tudi zato, ker ni bilo dobre definicije dimenzije prostora. Kaj sploh je dimenzija prostora? Velikokrat na dimenzijo gledamo kot na najmanjše število parametrov, ki so potrebni za opis nekega prostora. Ta definicija je mnogim matematikom dolgo časa zadoščala, obstajali pa so tudi tisti, ki so vanjo dvomili. Eden prvih, ki je izrazil svoje dvome, je bil nemški matematik Georg Cantor v pismu, ki ga je 5. 1. 1874 poslal Richardu Dedekindu, prav tako nemškemu matematiku [3, str. 201]. Čeprav so mnogi matematiki mislili, da je noro poskusiti vsako točko v ravnini izraziti zgolj z enim parametrom s premice, je Cantor to poskušal doseči in leta 1877 je dokazal, da obstaja bijektivna preslikava  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  [3, str. 203]. To pomeni, da za opis tudi večdimenzionalnih prostorov potrebujemo zgolj en parameter. Kljub presenetljivemu rezultatu pa obstoj take preslikave ni tako zelo ogrožal intuicije, saj je bila preslikava  $c$  močno nezvezna. Vedno bolj je postajalo očitno, da je potrebno poiskati dokaz, kar je neuspešno poskusilo kar nekaj matematikov. Potreba po dokazu se je še bolj pokazala, ko je leta 1890 italijanski matematik Giuseppe Peano predstavil krivulje, ki napolnijo cel prostor [9]. To pomeni, da lahko vsako točko v prostoru  $\mathbb{R}^n$  zvezno opišemo samo z enim parametrom  $t \in \mathbb{R}$ . Problem take preslikave je, da ni injektivna, tako da še vedno obstaja upanje, da je intuicija dobra. Potrebno jo je samo posodobiti do trditve, da je dimenzija najmanjše število parametrov, ki jih potrebujemo, da z zvezno injektivno preslikavo opišemo prostor. Ekvivalentno lahko trdimo, da v primeru dveh prostorov  $X$  in  $Y$ , ki sta različnih dimenzij, ne obstaja zvezna bijektivna preslikava  $f : X \rightarrow Y$ . To je prvi dokazal J. L. Brouwer leta 1910 [3, str. 208]. Za dokaz je uporabil nekatere topološke rezultate, npr. homotopijo, ki jih mnogi ljubiteljski matematiki in tudi študenti dodiplomskega študija matematike ne poznajo.

V tem delu bomo predstavili elementaren dokaz tega izreka, ki se izogne abstraktnjšim topološkim trditvam. V poglavju 2 bomo razvili potrebno besedišče in spoznali nekaj matematičnih objektov ter njihovih lastnosti, ki so ključni pri dokazih v naslednjih poglavjih. V razdelkih 3 in 4 uporabimo rezultate iz poglavja 2 in dokažemo dva ključna gradnika dokaza Brouwerjevega izreka. V poglavju 5 lahko

najdemo dokaz izreka o invarianci odprtih množic in njegove posledice, izreka o invarianci dimenzije. Vrstni red razdelkov je izbran tako, da ohrani nekaj matematične skrivnosti, na koncu pa se vse skupaj sestavi v celoto. Neučakan bralec lahko prebere najprej tudi poglavje 5 in se kasneje polno motiviran, z vedenjem zakaj in kako je snov uporabna, vrne na začetek ter naknadno zapolni vse vrzeli v dokazu.

## 2. SIMPLEKSI

V tem razdelku bomo spoznali simplekse in z njimi povezano Spernerjevo lemo. Na koncu bomo nekatere lastnosti simpleksov posplošili tudi na kocke. Poimenovanje za simpleks izvira iz latinske besede „simplex“, ki pomeni preprost oziroma enostaven, saj označuje eno najenostavnejših podmnožic prostora  $\mathbb{R}^n$ . Simpleks si lahko predstavljamo kot posplošitev pojma trikotnik, ki je dvodimenzionalen objekt, na ostale dimenzije. Tako v 0-dimenzionalnem prostoru simpleks označuje točko, enodimenzionalen simpleks predstavlja daljico, v dveh dimenzijah dobimo že znani trikotnik, v treh dimenzijah pa simpleks imenujemo tudi tetraeder itn. Na sliki 1 so prikazani simpleksi dimenzij 0, 1, 2 in 3 [10]. Preden podamo natančno definicijo simpleksa,



SLIKA 1. Prikazani so simpleksi v dimenzijah 0, 1, 2 in 3.

moramo spoznati afino neodvisne množice. Pri tem se bomo držali pravila, da bomo vektor od koordinatnega izhodišča do neke točke  $x \in \mathbb{R}^n$  označili z enako oznako kot točko samo, le da bomo nad oznako narisali puščico. Takemu vektorju bomo rekli krajevni vektor točke  $x$ . Torej, krajevni vektor točke  $x \in \mathbb{R}^n$  bomo označili z  $\vec{x}$ .

**Definicija 2.1** ([10]). Množica točk  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  je *afino neodvisna*, če je množica vektorjev  $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$  linearno neodvisna. V nasprotnem primeru je množica točk *afino odvisna*.

Opazimo lahko, da ima v tej definiciji prva točka, tj.  $x_0$ , posebno vlogo. Ker ne govorimo o urejenih množicah in vrstni red elementov ni pomemben, se moramo prepričati, da definicija res karakterizira afino neodvisne množice in ni odvisna od izbire prve točke. Denimo, da je množica vektorjev  $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$  linearno neodvisna. Potem je enakost  $\sum_{i=1}^n \alpha_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0) = 0$  izpolnjena natanko tedaj, ko so vsi koeficienti enaki 0, torej velja  $\alpha_i = 0$  za vsak  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Recimo, da smo za prvi element izbrali neko drugo točko, na primer  $x_k$ . Radi bi videli, da je potem tudi enakost  $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \beta_i (\vec{x}_i - \vec{x}_k) = 0$  izpolnjena samo v primeru, ko so vsi koeficienti v vsoti enaki 0. V to se prepričamo tako, da uporabimo znan matematični trik ter odštejemo in prištejemo isto vrednost. V tem primeru odštejemo in prištejemo  $\vec{x}_0$ .

Računamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \beta_i (\vec{x}_i - \vec{x}_k) &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \beta_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{x}_k) \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \beta_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \beta_i (\vec{x}_0 - \vec{x}_k) \\
&= \sum_{i=1}^n \gamma_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0),
\end{aligned}$$

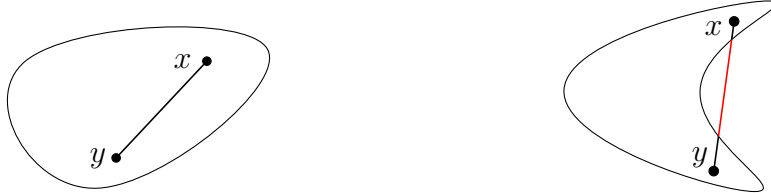
kjer koeficiente  $\gamma_i$  določimo na naslednji način:

$$\gamma_i = \begin{cases} -\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \beta_i & , i = k, \\ \beta_i & , i \neq k. \end{cases}$$

Ker je množica vektorjev  $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$  linearno neodvisna, morajo biti koeficienti  $\gamma_i = 0$  za vsak  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Torej so tudi koeficienti  $\beta_i = 0$  za vsak  $i \in \{0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ . Pokazali smo linearno neodvisnost množice vektorjev  $\vec{x}_0 - \vec{x}_k, \vec{x}_1 - \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_k$ , zato je zgornja definicija dobra.

S pomočjo točk v prostoru lahko definiramo različne množice. Želeli si bomo take množice, ki imajo naslednjo lastnost.

**Definicija 2.2.** Množica  $K \in \mathbb{R}^n$  je *konveksna*, če je za vsaki dve točki  $x, y \in K$  tudi daljica določena z  $x$  in  $y$ :  $\{\lambda \vec{x} + (1 - \lambda) \vec{y}; \lambda \in [0, 1]\}$  vsa vsebovana v  $K$ . Primer in protiprimer konveksne množice si lahko pogledamo na sliki 2.



(A) Množica  $A$  je konveksna, saj je vsaka daljica, ki povezuje poljubni točki iz  $A$ , cela vsebovana v  $A$ .

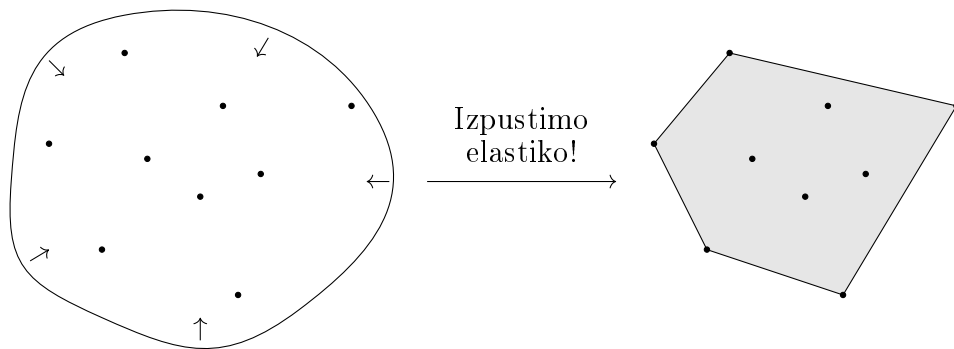
(B) Množica  $B$  ni konveksna, saj del daljice določene s točkama  $x$  in  $y$ , ki je pobarvan rdeče, ni vsebovan v  $B$ .

SLIKA 2. Slika prikazuje primer konveksne množice (levo) in množice, ki ni konveksna (desno).

Konveksnih množic, ki vsebujejo neko množico  $A \in \mathbb{R}^n$ , je veliko. Za nas bodo posebej zanimive najmanjše konveksne množice, ki vsebujejo dano množico.

**Definicija 2.3** ([8]). Najmanjšo konveksno množico, ki vsebuje množico točk  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ , imenujemo *konveksna ogrinjača* množice  $A$  in jo označimo s  $\text{conv}(A)$ .

Konveksno ogrinjačo točk  $x_0, x_1, \dots, x_n$  v prostoru  $\mathbb{R}^2$  si lahko predstavljamo kot množico, ki jo omeji elastika, ko jo napnemo čez vse točke in nato spustimo. Prikaz konveksne ogrinjače si lahko pogledamo na sliki 3. Kako poiščemo konveksno ogrinjačo množice  $A \in \mathbb{R}^n$ , nam pove naslednja trditev.



SLIKA 3. Slika prikazuje, kako dobimo konveksno ogrinjačo točk s pomočjo elastike. Na levi strani napnemo elastiko, tako da zaobjame vse točke. Na desni strani pa je prikazano, kako izgleda elastika po tem, ko jo izpustimo in omeji konveksno ogrinjačo (sivo pobarvana množica) prikazanih točk [8].

**Trditev 2.4.** Konveksna ogrinjača  $\text{conv}(A)$  množice  $A$  je enaka preseku vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico  $A$ .

*Dokaz.* Zaradi krajšega zapisa označimo množico, ki jo dobimo kot presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico  $A$ , s  $P$ . Ker je konveksna ogrinjača množice  $A$  najmanjša konveksna množica, ki vsebuje množico  $A$ , je vsebovana v vsaki konveksni množici, ki vsebuje množico  $A$ , torej tudi v množici  $P$ . Po drugi strani pa je konveksna ogrinjača množice  $A$  konveksna množica, ki vsebuje množico  $A$ , zato vsebuje množico  $P$ . Ugotovili smo, da je  $\text{conv}(A) \subset P$  in  $P \subset \text{conv}(A)$ , zato velja enakost  $P = \text{conv}(A)$ .  $\square$

Iskanje konveksne množice kot preseka vseh konveksnih množic je zamudno. Prav tako je težko preveriti, ali je neka točka vsebovana v konveksni ogrinjači množice  $A$ . Spodnja trditev nam eksplicitno pove, katere točke so vsebovane v konveksni ogrinjači množice točk  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

**Trditev 2.5** ([8]). Za točke  $x_0, x_1, \dots, x_n$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$  je konveksna ogrinjača  $\text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})$  enaka množici točk  $C$ , katerih krajevni vektorji tvorijo množico

$$\left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i; \text{ kjer so } \lambda_i \in [0, 1] \text{ za vsak } i \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ in } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

*Dokaz.* Vsaka konveksna množica, ki vsebuje množico točk  $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , vsebuje tudi množico  $C$ . Torej je množica  $C$  vsebovana v preseku vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico  $A$ . Ker pa je množica  $C$  konveksna, vsebuje presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico  $A$ . Zato je množica  $C$  enaka konveksni ogrinjači množice  $A$ .  $\square$

Krajevni vektor vsake točke  $x \in A = \text{conv}(\{x_0, \dots, x_n\})$  lahko izrazimo kot vsoto  $\vec{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i$ , ki zadošča pogoju  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ , kjer so vsi koeficienti  $\lambda_i$  pozitivna realna števila. Vsoto, ki zadošča zahtevanim pogojem, imenujemo *konveksna kombinacija* točk  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Simpleks definiramo kot poseben primer konveksne ogrinjače.

**Definicija 2.6** ([8]). Naj bo  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$  afino neodvisna množica točk v evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Konveksni ogrinjači  $S$  točk  $x_0, x_1, \dots, x_n$  iz množice  $V$  pravimo *n-dimenzionalni simpleks* ali *n-simpleks*. Točke  $x_i$  imenujemo *oglišča* simpleksa  $S$ . Ko želimo poudariti, katera oglišča določajo simpleks, lahko zapišemo tudi  $S = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ . Za vsako neprazno podmnožico  $U = \{y_0, y_1, \dots, y_r\} \subset V$  lahko definiramo simpleks  $L = \langle y_0, y_1, \dots, y_r \rangle$ , ki ga imenujemo *lice simpleksa*  $S$ . Če je lice  $L$   $(n-1)$ -simpleks, ga imenujemo *glavno lice* simpleksa  $S$ . Unijo vseh glavnih lic simpleksa  $S$  imenujemo *rob* simpleksa  $S$ . Množico točk simpleksa  $S$ , ki ne ležijo na robu simpleksa, imenujemo *notranjost* simpleksa  $S$ .

Krajevni vektor vsake točke  $x \in S = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$  lahko izrazimo s pomočjo oglišč kot vsoto:

$$(1) \quad \vec{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i,$$

ki zadošča pogoju  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ , kjer so koeficienti  $\lambda_i$  pozitivna realna števila. Zakaj smo konveksni ogrinjači dodali pogoj o afini neodvisnosti točk, bomo utemeljili z naslednjim razmislekom. Najprej preoblikujemo izraz (1).

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0 + \vec{x}_0) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \\ &= \vec{x}_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0). \end{aligned}$$

Torej lahko simpleks  $S = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$  zapišemo tudi v obliki:

$$S = \vec{x}_0 + \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0); \lambda_i \in [0, 1] \text{ za vsak } i \in \{1, \dots, n\} \text{ in } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}}_{\Delta}.$$

Ker so vektorji  $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$  linearno neodvisni, je množica  $\Delta$ , ki je določena z njimi,  $n$ -dimenzionalna podmnožica prostora  $\mathbb{R}^n$ . Simpleks  $S$  je enak množici  $\Delta$  premaknjeni za vektor  $\vec{x}_0$ , zato je tudi simpleks  $S$   $n$ -dimenzionalna množica. Če bi bile točke  $x_0, x_1, \dots, x_n$  afino odvisne, bi bili vektorji  $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$  linearno odvisni in bi bila množica  $\Delta$  največ  $(n-1)$ -dimenzionalna. Tako z vsakim dodatnim ogliščem povečamo dimenzijo simpleksa. Števila  $\lambda_i$  v enačbi (1) so *baricentrične koordinate* točke  $x$ , kar zapišemo kot  $x = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)_b$ . Koordinate vektorja  $\vec{x}$  so zvezne funkcije točke  $x$ , zato so tudi baricentrične koordinate točke  $x$  zvezno odvisne od položaja točke  $x$ . Preden nadaljujemo, se moramo prepričati, da so baricentrične koordinate dobro definirane.

**Trditev 2.7.** *Baricentrične koordinate točke  $x \in \langle x_0, \dots, x_n \rangle$  so enolično določene.*



*Dokaz.* Recimo, da  $x$  izrazimo na dva načina kot  $x = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)_b = (\beta_0, \dots, \beta_n)_b$ . Potem lahko zapišemo

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \beta_i \vec{x}_i.$$

Če enačbi odštejemo desno stran, dobimo

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{x}_i - \sum_{i=0}^n \beta_i \vec{x}_i = 0,$$

kar preoblikujemo v enačbo

$$\sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) \vec{x}_i = 0.$$

Uporabimo že znan trik ter odštejemo in prištejemo isto vrednost,

$$\sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_0 + \vec{x}_0) = 0.$$

Enačbo lahko zapišemo z dvema vsotama

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_0) + \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot \vec{x}_0 = 0,$$

kjer pri prvi vsoti parameter  $i$  začne teči pri 1, saj je pri vrednosti 0 tudi vrednost sumanda  $(\alpha_0 - \beta_0) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_0)$  enaka 0. Druga vsota je enaka 0, saj velja:

$$\sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_0 \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i - \sum_{i=0}^n \beta_i \right) = \vec{x}_0(1 - 1) = 0.$$

Tako pridemo do enačbe

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_0) = 0.$$

Ker je množica vektorjev  $\{\vec{x}_i - \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n; i = 1, 2, \dots, n\}$  linearno neodvisna, morajo biti koeficienti  $\alpha_i - \beta_i$  enaki 0 za vsak  $i = 1, 2, \dots, n$ . Zato velja  $\alpha_i = \beta_i$  za vsak  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sedaj lahko iz enakosti

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \beta_i \vec{x}_i$$

in iz dejstva, da je koeficient  $\alpha_i$  enak koeficientu  $\beta_i$  za vsak  $i = 1, \dots, n$ , sklepamo, da sta enaka tudi koeficienta  $\alpha_0$  in  $\beta_0$ .  $\square$

Pri dokazovanju različnih rezultatov s pomočjo simpleksov si večkrat pomagamo z delitvijo simpleksa na manjše simplekse. Da imamo čim več nadzora pri dokazovanju, si pomagamo s pojmom simplicialnega kompleksa.

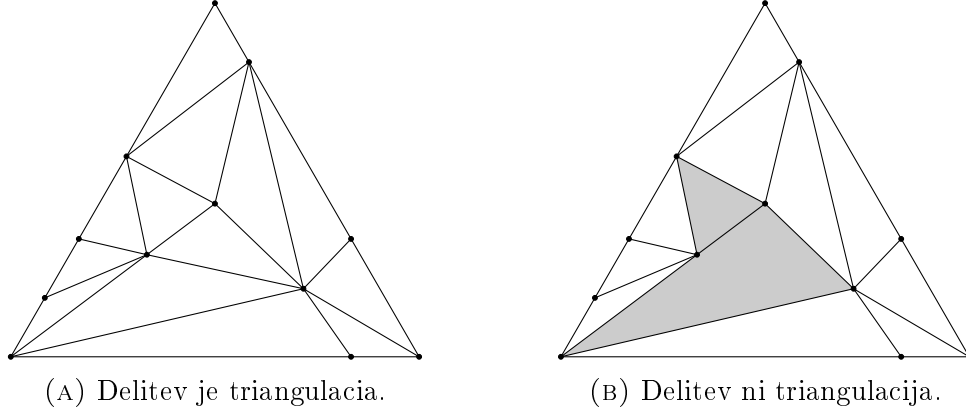
**Definicija 2.8.** Množica simpleksov  $\mathcal{K}$  v evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$  je *simplicialni kompleks*, če zadošča naslednjim pogojem:

- (1) Vsako lice  $L$  simpleksa  $S \in \mathcal{K}$  je tudi vsebovano v  $\mathcal{K}$ .
- (2) Neprazen presek dveh simpleksov iz  $\mathcal{K}$  je lice obeh simpleksov.

Unijo vseh simpleksov iz simplicialnega kompleksa  $\mathcal{K}$  bomo označili s  $|\mathcal{K}|$ .

Iz simpleksa lahko konstruiramo simplicialni kompleks in na ta način dobimo posebno delitev simpleksa.

**Definicija 2.9.** Simplicialni kompleks  $\mathcal{T}$  je *triangulacija* simpleksa  $S$ , če je  $|\mathcal{T}| = S$ .



SLIKA 4. Slika prikazuje primer triangulacije (levo) in primer delitve, ki ni triangulacija (desno), saj presek osenčenih simpleksov ni lice obeh simpleksov.

Pri poljubnih delitvah simpleksa  $S$  nimamo nadzora nad tem, kako veliki simpleksi nastopajo v delitvi. Želeli bi si poiskati take delitve, ki vsebujejo zgolj simplekse, ki so manjši od vnaprej predpisane vrednosti  $\varepsilon > 0$ . Za mero, kako velik je simpleks, imamo več možnosti. Izbrali bomo diameter, ki ga definiramo na naslednji način.

**Definicija 2.10.** Največjo razdaljo med dvema točkama simpleksa  $S$  imenujemo *diameter* simpleksa  $S$ . Torej,

$$\text{diam}(S) = \max\{d(x, y); x, y \in S\}.$$

Sedaj, ko znamo izračunati velikost simpleksa, si pogledajmo, kako lahko celoten prostor  $\mathbb{R}^n$  razdelimo z enako velikimi simpleksi. Izberimo naravno število  $k$  in pozitivno realno število  $a$ . Definiramo bazo  $\mathcal{B}$  prostora  $\mathbb{R}^n$  z baznimi vektorji  $\vec{e}_i := (0, \dots, 0, \frac{a}{k}, 0, \dots, 0)$ , pri katerih je edina neničelna koordinata na  $i$ -tem mestu enaka  $\frac{a}{k}$ . Definiramo množico  $Z_k := \{j \cdot \frac{a}{k}; j \in \mathbb{Z}\}$  in označimo z  $Z_k^n$  kartezični produkt  $n$  kopij množice  $Z_k$ . Naj bo  $P(n)$  množica permutaciji množice  $\{1, \dots, n\}$ . Množica, ki vsebuje vse simplekse  $S = \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle$ , ki zadoščajo pogojema:

- Množica točk  $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$  je podmnožica množice  $Z_k^n$  in
- obstaja taka permutacija  $\pi \in P(n)$ , da je

$$z_1 = z_0 + \vec{e}_{\pi(1)}, z_2 = z_1 + \vec{e}_{\pi(2)}, \dots, z_n = z_{n-1} + \vec{e}_{\pi(n)},$$

razdeli prostor  $\mathbb{R}^n$  z  $n$ -dimenzionalnimi simpleksi. Če množici dodamo še vsa lica simpleksov iz te množice, dobimo  $k$ -to mrežno delitev prostora  $\mathbb{R}^n$ , ki jo označimo z  $M_{\frac{a}{k}}^n$ . Prepričajmo se, da množica  $M_{\frac{a}{k}}^n$  zadošča pogojema definicije 2.8. Hitro vidimo, da izpolnjuje pogoj (1). Preveriti moramo še, da je neprazen presek dveh simpleksov iz  $M_{\frac{a}{k}}^n$  lice obeh simpleksov. Ker je vsak simpleks iz  $M_{\frac{a}{k}}^n$  lice nekega  $n$ -simpleksa iz  $M_{\frac{a}{k}}^n$ , je dovolj, če pokažemo, da je neprazen presek dveh  $n$ -simpleksov iz množice  $M_{\frac{a}{k}}^n$  lice obeh simpleksov. Vsak  $n$ -simpleks  $S = \langle z_0, \dots, z_n \rangle \in M_{\frac{a}{k}}^n$  je natančno določen s točko  $z_0 = (z_{0,1}, z_{0,2}, \dots, z_{0,n})_{\mathcal{B}}$  in permutacijo  $\pi \in P(n)$ . Če

poznamo ta dva podatka, lahko  $n$ -simpleks  $S$  zapišemo tudi kot množico vseh točk  $t = (t_1, \dots, t_n)_B \in R^n$ , ki zadoščajo pogojem:

$$1 \geq t_{\pi(1)} - z_{0,\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} - z_{0,\pi(2)} \geq \dots \geq t_{\pi(n)} - z_{0,\pi(n)} \geq 0.$$

Za vsak par naravnih števil  $1 \leq i, j \leq n$  lahko iz zgornjih pogojev razberemo neenakost  $t_i - z_{0,i} \geq t_j - z_{0,j}$  ali  $t_i - z_{0,i} \leq t_j - z_{0,j}$ , ki nam pove, v katerem polprostoru, omejenem s hiperravnino  $t_i - z_{0,i} = t_j - z_{0,j}$ , leži  $n$ -simpleks  $S$ . Lica  $n$ -simpleksa  $S$  dobimo tako, da nekaj neenačaje spremenimo v enačaj. Naj bo  $S \in M_{\frac{n}{k}}^n$   $n$ -simpleks, ki zadošča pogojem

$$(2) \quad 1 \geq t_{\pi(1)} - z_{0,\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} - z_{0,\pi(2)} \geq \dots \geq t_{\pi(n)} - z_{0,\pi(n)} \geq 0$$

in naj bo  $R \in M_{\frac{n}{k}}^n$   $n$ -simpleks, ki zadošča pogojem

$$(3) \quad 1 \geq t_{\rho(1)} - w_{0,\rho(1)} \geq t_{\rho(2)} - w_{0,\rho(2)} \geq \dots \geq t_{\rho(n)} - w_{0,\rho(n)} \geq 0.$$

Če za vsako naravno število  $l \leq n$  velja  $|z_{0,\pi(l)} - w_{0,\rho(l)}| \leq 1$ , lahko pogoje, katerim zadoščajo točke preseka  $S \cap R = L$ , zapišemo na naslednji način. Naj bo  $E \subset \{1, 2, \dots, n\}$  množica tistih naravnih števil  $e$ , za katera je  $z_{0,e} = w_{0,e}$ . Za vsako naravno število  $l \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus E$  pri pogojih (2) in (3) spremenimo neenačbo  $1 \geq t_l - \min(z_{0,l}, w_{0,l})$  v enačbo  $1 = t_l - \min(z_l, w_l)$  in neenačbo  $t_l - \max\{z_l, w_l\} \geq 0$  v enačbo  $t_l - \max\{z_l, w_l\} = 0$ . Iz pogojev (2) in (3) lahko za vsak par naravnih števil  $i, j \in E$  ugotovimo, v katerem polprostoru, omejenem s hiperravnino  $t_i - z_{0,i} = t_j - z_{0,j}$  ležita  $n$ -simpleksa  $S$  in  $R$ . Kadar ležita v istem polprostoru, tudi presek  $L$  leži v tem podprostoru, zato presek  $L$  zadošča isti neenakosti. Če pa  $n$ -simpleksa  $S$  in  $R$  ležita v različnih polprostorih, leži presek  $L$  na hiperravnini  $t_i - z_{0,i} = t_j - z_{0,j}$ , zato moramo pri pogojih (2) in (3) ustrezno neenakost spremeniti v enakost. Ugotovimo, da presek  $L$  ustreza enakim pogojem kot simpleksa  $S$  in  $R$ , le da smo nekaj neenačaje spremenili v enačaje, zato je presek  $L$  lice simpleksov  $S$  in  $R$ . Če obstaja tako naravno število  $l \leq n$ , da je  $|z_{0,l} - w_{0,l}| \geq 2$ , je presek simpleksov  $S$  in  $R$  prazen.

Pokazali smo, da sta poljubna simpleksa ali disjunktna ali pa si delita lice. V naslednji trditvi bomo pokazali, da sta simpleksa  $S$  in  $R$  edina  $n$ -simpleksa, ki vsebujeta  $(n-1)$ -simpleks  $L$ , če je presek  $L$   $n$ -simpleksov  $S$  in  $R$  glavno lice obeh simpleksov.

**Trditev 2.11.** Če je  $S = \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle$  simpleks iz  $k$ -te mrežne delitve prostora  $\mathbb{R}^n$ , potem za vsako oglišče  $z_i$  simpleksa  $S$  obstaja natanko en tak simpleks  $T = S[i]$  iz  $k$ -te mrežne delitve, da je

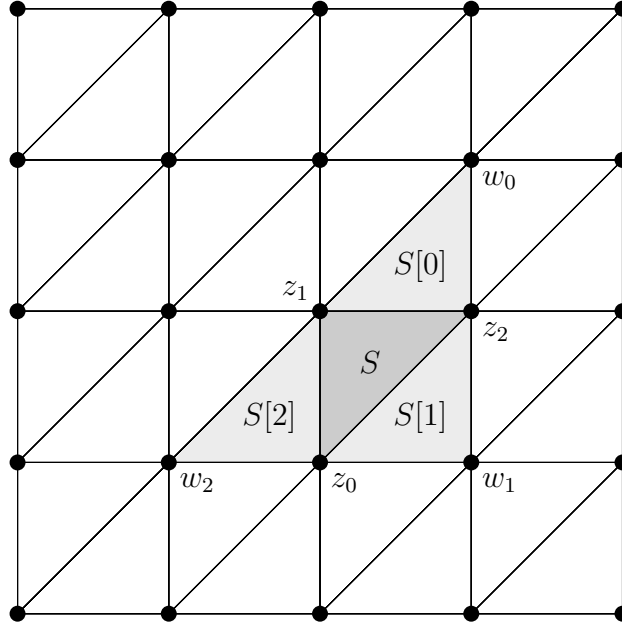
$$S \cap T = \langle z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n \rangle.$$

*Dokaz.* Vemo, da obstaja taka permutacija  $\pi \in P(n)$ , da za oglišča simpleksa  $S = \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle$  veljajo naslednje enakosti:

$$(4) \quad z_1 = z_0 + \vec{e}_{\pi(1)}, z_2 = z_1 + \vec{e}_{\pi(2)}, \dots, z_n = z_{n-1} + \vec{e}_{\pi(n)}.$$

Naj bo  $i$ -ti sosed  $S[i]$  simpleksa  $S$  definiran na naslednji način:

- (1) Če je  $0 < i < n$ , je  $S[i] = \langle z_0, \dots, z_{i-1}, w_i, z_{i+1}, \dots, z_n \rangle$ , kjer je  $w_i = z_{i-1} + (z_{i+1} - z_i) = z_{i-1} + \vec{e}_{\pi(i)}$ .
- (2) Če je  $i = 0$ , je  $S[i] = \langle z_1, \dots, z_n, w_0 \rangle$ , kjer je  $w_0 = z_n + (z_1 - z_0) = z_n + \vec{e}_{\pi(1)}$ .
- (3) Če je  $i = n$ , je  $S[i] = \langle w_n, z_0, \dots, z_{n-1} \rangle$ , kjer je  $w_n = z_0 + (z_{n-1} - z_n) = z_0 - \vec{e}_{\pi(n)}$ .



SLIKA 5. Na sliki vidimo del mrežne delitve prostora  $\mathbb{R}^2$  in prikaz sosedov simpleksa  $S$ .

Prepričajmo se, da je definicija  $i$ -tega sosedu dobra.

Pokazati moramo, da je simpleks  $S[i]$  vsebovan v  $k$ -ti mrežni delitvi prostora  $\mathbb{R}^n$  za vsak  $i = 0, \dots, n$ . Hitro lahko vidimo, da so za vsako število  $i = 0, \dots, n$  oglišča simpleksa  $S[i]$  vsebovana v množici  $Z_k^n$ . Poiščimo permutacijo, s pomočjo katere lahko oglišča simpleksa  $S[i]$  zapišemo kot v enačbi (4). Definirajmo permutacijo  $\tau(i) \in P(n)$ :

- (1) Če je  $0 < i < n$ , je permutacija  $\tau$  transpozicija, ki med seboj zamenja  $i$ -ti in  $(i + 1)$ -i element, ostale pa pusti pri miru.
- (2) Če je  $i = 0$ , je permutacija  $\tau$  cikel, ki vse elemente premakne za eno mesto nazaj, prvi element pa postavi na konec.
- (3) Če je  $i = n$ , je permutacija  $\tau$  cikel, ki vse elemente premakne za eno mesto naprej, zadnji element pa postavi na začetek.

Iskana permutacija je potem  $\rho = \tau \circ \pi$ . Prepričajmo se, da je  $S[i]$  edina izbira za ustreznega sosedu. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je  $z_0 = 0$ . Opazimo, da enačba (4) za simpleks  $S \in M_{\frac{n}{k}}^n$  podaja končno zaporedje točk z začetnim členom  $(0, \dots, 0)_{\mathcal{B}}$  in končnim členom  $(1, \dots, 1)_{\mathcal{B}}$ . Vsak naslednji člen dobimo iz predhodnega tako, da eno koordinato povečamo za 1. V našem primeru to pomeni, da eno koordinato spremenimo iz 0 v 1. Katero koordinato spremenimo, določa enačba (4). To zaporedje je urejeno, saj se koordinate povečujejo, člena pa sta lahko sosednja, kadar se razlikujeta v eni sami koordinati. Če odstranimo začetno točko tega zaporedja, dobimo zaporedje z  $n - 1$  členi. Dopolnimo ga lahko samo na dva načina. Člen, ki smo ga odvzeli, lahko dodamo na začetek ali pa dodamo člen na konec zaporedja tako, da zadnjemu členu povečamo koordinato, ki se v krajšem zaporedju nikoli ne spremeni. V prvem primeru zaporedje ustreza simpleksu  $S$ , v drugem pa simpleksu  $S[0]$ . Člena ne moremo vrniti v sredino krajšega zaporedja, saj se potem sosednji členi ne bi razlikovali v natanko eni koordinati. Podobno lahko postopamo v primeru, ko odvezemo zadnji element zaporedja. Recimo, da smo

odvzeli  $i$ -ti člen zaporedja. Potem se  $(i - 1)$ -i člen in  $(i + 1)$ -i člen razlikujeta v dveh koordinatah. Označimo ti dve koordinati s  $p$  in  $r$ . Da dopolnimo zaporedje, moramo dodati en člen na  $i$ -to mesto. To lahko storimo tako, da dodamo člen, ki se v vseh koordinatah ujema z  $(i + 1)$ -im členom, le na  $p$ -ti ali na  $r$ -ti koordinati se ujema z  $(i - 1)$ -im členom. V enem primeru dobimo zaporedje, s katerim smo začeli, v drugem pa zaporedje, ki ustreza simpleksu  $S[i]$ . Torej je  $S[i]$  res edini sosed simpleksa  $S$ , ki ustreza lastnosti:

$$S \cap S[i] = \langle z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n \rangle.$$

□

S pomočjo delitve prostora  $\mathbb{R}^n$  lahko definiramo triangulacijo simpleksov. Definiramo  $k$ -to mrežno triangulacijo simpleksa  $S = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in M_{\frac{n}{k}}^n$  kot simplicialni kompleks, ki vsebuje vse simplekse iz mrežne delitve  $M_{\frac{n}{k}}^n$  prostora  $\mathbb{R}^n$ , ki so vsebovani v simpleksu  $S$ . Naj bo  $R = \langle y_0, y_1, \dots, y_n \rangle$  poljuben  $n$ -simpleks v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Definirajmo homeomorfno preslikavo  $h : S \rightarrow R$  s predpisom

$$h \left( \sum_{i=0}^n t_i x_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i y_i,$$

kjer za vsak  $i = 0, 1, \dots, n$  realna števila  $t_i$  zadoščajo pogojem  $t_i \geq 0$  in  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . S preslikavo  $h$  smo prenesli triangulacijo simpleksa  $S$  na simpleks  $R$ . Taki triangulaciji rečemo  $k$ -ta mrežna delitev simpleksa  $R$ . Za oznako  $k$ -te mrežne delitve  $n$ -simpleksa bomo uporabljali kar  $M_k^n$ , saj število  $a$  na to delitev nima vpliva.

Radi bi videli, da se s povečevanjem števila  $k$  simpleksi v  $k$ -ti mrežni zmanjšujejo. Pokažimo, da je za neki simpleks  $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$  diameter simpleksa enak dolžini najdaljše stranice simpleksa  $S$ . Poglejmo si dve točki  $x, y \in S$ . Razdaljo med njima izračunamo na naslednji način:

$$d(x, y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Krajevni vektor točke  $y$  lahko zapišemo s pomočjo oglišč simpleksa:

$$\|\vec{x} - \sum_{i=0}^n t_i \vec{v}_i\|,$$

kar lahko preoblikujemo in ocenimo:

$$\left\| \sum_{i=0}^n t_i (\vec{x} - \vec{v}_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^n t_i \|\vec{x} - \vec{v}_i\| \leq \sum_{i=0}^n t_i \max_{i=0, \dots, n} (\|\vec{x} - \vec{v}_i\|) = \max_{i=0, \dots, n} (\|\vec{x} - \vec{v}_i\|).$$

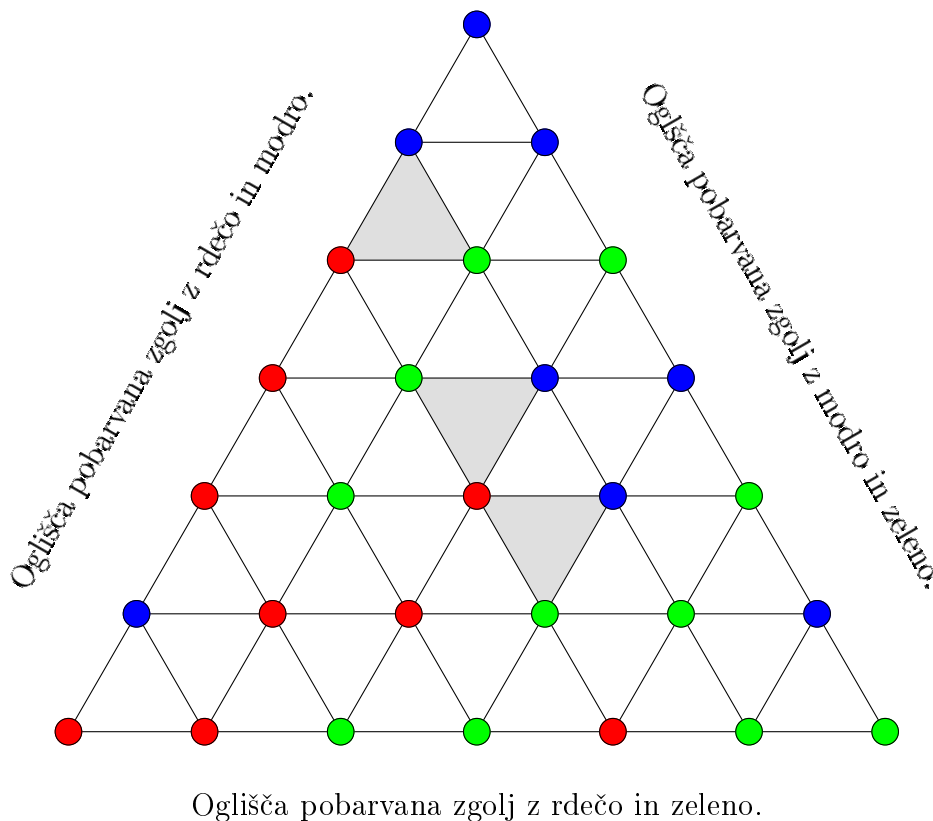
Ugotovili smo, da je razdalja največja, ko je  $y$  oglišče simpleksa  $S$ . Zaradi simetričnosti razdalje mora biti za maksimizacijo razdalje tudi  $x$  oglišče simpleksa. Ker so dolžine stranic simpleksa  $R$  iz  $k$ -te mrežne delitve simpleksa  $S$  za faktor  $k$  manjše od stranic simpleksa  $S$ , velja  $\text{diam}(R) = \frac{1}{k} \cdot \text{diam}(S)$ .

Pri obravnavi triangulacij simpleksov lahko počnemo veliko stvari. Ena taka, ki bi se jo lahko spomnil celo otrok v vrtcu, je, da bi simplekse iz triangulacije pobarvali. Tako lahko dobimo zanimive slike. Mi bomo obravnavali lastnosti, ki jih opazimo pri barvanju oglišč določene triangulacije.

**Definicija 2.12** ([1, str. 9, definicija 1]). Naj bo podan  $n$ -simpleks  $S \in \mathbb{R}^n$  s triangulacijo  $\mathcal{T}$ . Označimo množico oglišč triangulacije  $\mathcal{T}$  z  $V$ . Preslikavo  $b : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$  imenujemo *barvanje triangulacije*  $\mathcal{T}$ . Za oglišče  $v \in V$  pravimo številu  $b(v)$  *barva* ali *oznaka* oglišča  $v$ .

Barve navadno označujemo s številkami, saj bi pri velikem številu različnih barv nastala zmeda in bi se nekatere barve težko ločilo med seboj. Kadar v triangulaciji nastopa majhno število barv, so slike lepše, če jih ponazorimo s praviimi barvami. Če določimo pravila, s katerimi barvami lahko pobarvamo določena oglišča, lahko dobimo zanimive lastnosti. Primer takega pravila in njegove lastnosti je opazoval in opisal Emanuel Sperner, po katerem se imenuje eno od pravil za barvanje triangulacije simpleksa.

**Definicija 2.13** ([1, str. 9, definicija 2]). Pravimo, da je barvanje triangulacije  $\mathcal{T}$   $n$ -simpleksa  $S$  *Spernerjevo*, če imajo oglišča  $n$ -simpleksa  $S$  vse oznake iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$  in je vsako oglišče triangulacije  $\mathcal{T}$ , ki pripada licu  $L$   $n$ -simpleksa  $S$ , pobarvano enako kot eno od oglišč lica  $L$ .



SLIKA 6. Vidimo Spernerjevo barvanje šeste mrežne delitve simpleksa  $S$  s tremi popolno pobarvanimi trikotniki, ki smo jih zaradi preglednosti osenčili. Zaradi lepše predstave smo barve namesto s številčnimi vrednostmi ponazorili s praviimi barvami [6, str. 4, slika 1.4].

Za  $n$ -simpleks, ki ima oglišča pobarvana z vsemi barvami iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$ , pravimo, da je *popolno pobarvan*. Naslednji izrek izpostavi zanimivo lastnost takega barvanja.

**Lema 2.14** (Spernerjeva lema [1, str. 10, izrek 4]). *Vsaka mrežna delitev  $n$ -simpleksa s Spernerjevim barvanjem vsebuje liho število popolno pobarvanih  $n$ -simpleksov.*

*Dokaz.* Naj bo  $S$   $n$ -simpleks in naj bo  $M_k^n$   $k$ -ta mrežna delitev. Lemo bomo dokazovali z indukcijo na dimenzijo  $n$  simpleksa  $S$ .

Baza indukcije ( $n = 0$ ): V tem primeru lema očitno drži, saj je 0-simpleks točka. Pri Spernerjevem barvanju točke imamo samo eno možnost in tako dobimo en popolno pobarvan 0-simpleks.

Indukcijska predpostavka ( $n - 1$ ): Predpostavimo, da lema drži v dimenziji ( $n - 1$ ). Torej v vsaki mrežni delitvi ( $n - 1$ )-simpleksa s Spernerjevim barvanjem najdemo liho število ( $n - 1$ )-simpleksov, ki so popolno pobarvani.

Indukcijski korak ( $(n - 1) \implies n$ ): Poskusimo dokazati pravilnost izjave tudi v dimenziji  $n$ . Izberimo  $k$ -to mrežno delitev  $M_k^n$   $n$ -simpleksa  $S$ . Naj bodo oglišča delitve  $M_k^n$  pobarvana s Spernerjevim barvanjem. Po indukcijski predpostavki vemo, da je število  $r$  popolno pobarvanih ( $n - 1$ )-simpleksov na robu simpleksa  $S$  liho. Označimo število vseh popolno pobarvanih  $n$ -simpleksov iz  $M_k^n$  s  $p$ . Pokazali bomo, da velja  $p \equiv r \pmod{2}$ . Definirajmo funkcijo  $\alpha$ , ki za vsak  $n$ -simpleks pove, koliko popolno pobarvanih ( $n - 1$ ) simpleksov vsebuje. Za vsak  $n$ -simpleks  $R$  iz delitve  $M_k^n$  lahko preštejemo, koliko popolno pobarvanih ( $n - 1$ )-simpleksov vsebuje. Vsak popolno pobarvan  $n$ -simpleks iz triangulacije  $M_k^n$  simpleksa  $S$  vsebuje natanko en popolno pobarvan ( $n - 1$ )-simpleks, medtem ko ostali simpleksi lahko vsebujejo dva ali nobenega. Če  $n$ -simpleks vsebuje oglišča, pobarvana z vsemi barvami  $0, \dots, n - 1$ , kjer se ena barva ponovi dvakrat, tak simpleks vsebuje dva popolno pobarvana ( $n - 1$ )-simpleksa. Ostali  $n$ -simpleksi ne vsebujejo nobenega popolno pobarvanega ( $n - 1$ )-simpleksa. Iz zgornjega lahko sklepamo, da je

$$p \equiv \sum_{R \in M_k^n} \alpha(R) \pmod{2}.$$

Pri štetju popolno pobarvanih ( $n - 1$ )-simpleksov smo vsakega iz notranjosti simpleksa  $S$  šteli dvakrat, tiste z roba  $S$  pa samo enkrat. Zato velja tudi

$$r \equiv \sum_{R \in M_k^n} \alpha(R) \pmod{2}.$$

Torej velja kongruenca  $p \equiv r \pmod{2}$ , zato je  $p$  lih. □

**Opomba 2.15.** Ko v dokazu govorimo o popolno pobarvanih simpleksih, se nam lahko porodi vprašanje, kako bi pri pravih barvah vedeli, kateri ( $n - 1$ )-simpleks je popolno pobarvan. V tem primeru bi morali barve nekako urediti in bi rekli, da je popolno pobarvan ( $n - 1$ )-simpleks tisti, ki ima oglišča pobarvana z vsemi barvami, od prve pa do vključno  $n$ -te barve.

Posledica izreka 2.14 je, da vsaka mrežna delitev simpleksa  $S$  s Spernerjevim barvanjem vsebuje vsaj en popolno pobarvan simpleks  $R$ . Ker sta simpleksa  $S$  in  $R$  oba popolno pobarvana, si lahko predstavljamo, da se nekatere lastnosti prenesejo iz  $S$  na  $R$ . To dejstvo lahko uporabimo pri dokazovanju nekaterih trditev in tudi za nas bo odigrala pomembno vlogo pri dokazu izreka 3.2.

Poleg simpleksov obravnavamo tudi kocke. Z njimi si bomo pomagali pri dokazovanju nekaterih topoloških rezultatov.

**Definicija 2.16.** Naj bo  $a \in \mathbb{R}$  pozitivno realno število in naj bo interval  $\mathbb{I} = [-a, a]$ . Potem je  $C := \mathbb{I}^n$   $n$ -dimenzionalna kocka v  $\mathbb{R}^n$  oziroma  $n$ -kocka.

Tako kot simpleksi, so tudi kocke omejene z lici.

**Definicija 2.17.** Kocka  $C = [-a, a]^n$  je omejena z lici. Za vsako naravno število  $i < n$  definiramo nasprotni  $i$ -lici kot množici  $C_i^- = \{x_0, \dots, x_{i-1}, -a, x_{i+1}, \dots, x_n\}$  in  $C_i^+ = \{x_0, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ . Rob kocke je unija vseh lic.

Lastnosti, ki smo jih obravnavali pri simpleksih, bomo posplošili na kocke. Nekatere lastnosti izgledajo skoraj enako za simplekse in za kocke, vendar videli bomo, da moramo biti pri posploševanju previdni, saj lahko pride do sprememb ravno tam, kjer jih ne pričakujemo. Poglejmo si, kako definiramo delitev kocke.

**Definicija 2.18.** Za poljubno pozitivno realno število  $a$  in naravni števili  $n$  in  $k$  naj bo  $M_{\frac{a}{k}}^n$   $k$ -ta mrežna delitev prostora  $\mathbb{R}^n$ . Mrežna delitev kocke  $C = [-a, a]^n$  je tak simplicialni kompleks, ki vsebuje vse  $n$  simplekse, ki so vsebovani v delitvi  $M_{\frac{a}{k}}^n$  in v kocki  $C$ . Ker iz kocke razberemo, katero število  $a$  nastopa v mrežni delitvi, označimo  $k$ -to mrežno delitev kocke z oznako  $M_k^n$ .

Tako kot pri simpleksih lahko tudi pri kockah barvamo oglišča triangulacije.

**Definicija 2.19.** Naj bo podana  $n$ -kocka  $C \in \mathbb{R}^n$  s triangulacijo  $\mathcal{T}$ . Označimo množico vseh oglišč triangulacije  $\mathcal{T}$  z  $V$ . Barvanje triangulacije  $\mathcal{T}$  je preslikava  $b : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ .

V naslednjem poglavju bomo spoznali Poincaré-Mirandov izrek in definirali barvanje kocke, ki nam pomaga pri njegovem dokazu.

### 3. POINCARÉ-MIRANDOV IZREK

Sedaj se bomo posvetili ničlam preslikav, tj. takim točkam, ki jih neka preslikava  $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  slika v nič. Iskali bomo torej odgovor na vprašanje: Kakšni pogoji nam zagotavljajo obstoj take točke  $c$ , za katero je  $f(c) = (0, 0, \dots, 0)$ ? Zaradi krajšega zapisa bomo točko  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , ko ne bo dvomov o dimenziji, označevali z oznako  $0$ . V primeru funkcije  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  nam odgovor na vprašanje ponudi Bolzanov izrek o srednji vrednosti.

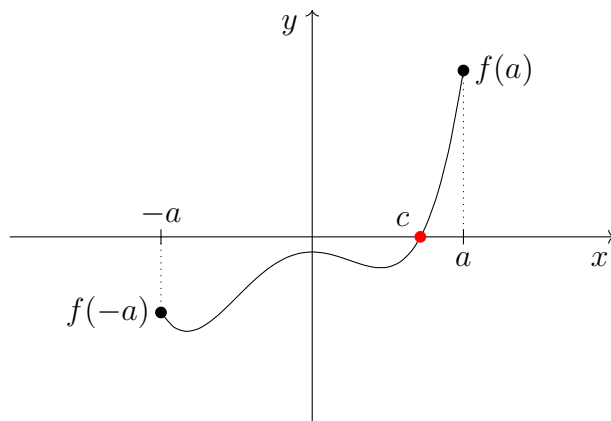
**Izrek 3.1** (Bolzanov izrek o srednji vrednosti). *Izberimo poljubno pozitivno realno število  $a$  in definirajmo interval  $\mathbb{I} := [-a, a]$ . Za zvezno funkcijo  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja  $f(-a) \leq 0 \leq f(a)$ , obstaja točka  $c \in [-a, a]$ , da je  $f(c) = 0$ .*

Intuitivno izrek pove, da ne moremo povezati točke s spodnje polravnine s točko z zgornje polravnine, ne da bi pri tem sekali abscisno os, kar se lepo vidi s slike 7. Izrek nam ne pove, kako lahko iskano točko najdemo, nam pa samo iz vrednosti funkcije na robu pove, kdaj lahko z gotovostjo trdimo, da ima funkcija ničlo. Ključno vlogo pa ima seveda zveznost funkcije.

*Dokaz izreka 3.1.* Če je  $f(-a) = 0$  ali pa je  $f(a) = 0$ , smo tako točko že našli. V nasprotnem predpostavimo, da ne obstaja tako število  $c \in \mathbb{I}$ , za katerega je vrednost funkcije  $f(c) = 0$ . Definiramo množici  $A := f^{-1}(-\infty, 0)$  in  $B := f^{-1}(0, \infty)$ . Množici sta disjunktni, saj sta prasliki disjunktnih množic. Zaradi zveznosti funkcije  $f$  sta množici tudi odprti. Ker je  $-a \in A$  in  $a \in B$ , sta množici  $A$  in  $B$  neprazni. Unija množic  $A$  in  $B$  je enaka intervalu  $\mathbb{I}$ , zato množici  $A$  in  $B$  razdelita interval  $\mathbb{I}$  na dve disjunktni množici, kar pa je protislovje, saj vemo, da je interval povezana množica. Torej je bila naša predpostavka, da ne obstaja tak  $c$ , da je  $f(c) = 0$ , napačna.  $\square$

Zgornji rezultat bi si želeli posplošiti na večje dimenzije. Večdimenzionalna posplošitev funkciji je preslikava, intervalu pa  $n$ -kocka. Ostane le še vprašanje, kako bi posplošili pogoje, da bi imela preslikava podobno lastnost kot zgoraj. Razmislimo, kako bi posplošili izrek na zvezno preslikavo  $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Najprej lahko preslikavo zapišemo s pomočjo komponentnih funkcij  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ . Da lažje ugotovimo, kakšne pogoje bi izbrali, najprej obravnavamo preprost primer. Kakšne pogoje bi





SLIKA 7. Slika prikazuje dogajanje, ki ga opisuje izrek 3.1

postavili, če bi bila vsaka komponenta  $f_i$  odvisna samo od ene koordinate točke  $x$ , npr.  $x_i$ ? Potem lahko vsako komponento  $f_i$  zapišemo kot  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_i(x_i)$ , kjer so  $g_i$  funkcije iz intervala  $\mathbb{I}$  v prostor  $\mathbb{R}$ . V tem primeru za vsako funkcijo  $g_i$  uporabimo enake zahteve kot v izreku 3.1, kar pa nam za funkcije  $f_i$  porodi naslednji pogoj:

$$(5) \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -a, x_{i+1}, \dots, x_n) < 0 < f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Izrek 3.1 nam za vsako funkcijo  $g_i : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  zagotavlja obstoj take točke  $c_i \in \mathbb{I}$ , da je  $g_i(c_i) = 0$ . To pa pomeni, da je

$$f(c_1, \dots, c_n) = (f_1(c_1, \dots, c_n), \dots, f_n(c_1, \dots, c_n)) = (g_1(c_1), \dots, g_n(c_n)) = 0.$$

Izrek 3.2 pokaže, da pogoj (5) zadošča tudi v primeru poljubno zapletene zvezne preslikave  $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Preden pa navedemo izrek, zapišimo pogoj (5) na način, ki bolj spodbudi geometrijsko predstavo, saj stvari lažje razumemo in si jih zapomnimo, če si jih znamo čim bolj slikovito predstavljati. Naj bo  $a$  poljubno pozitivno realno število in naj bo  $\mathbb{I}^n := [-a, a]^n$  kocka v  $\mathbb{R}^n$ . Stranske ploskve ali lica kocke  $\mathbb{I}^n$  označimo z  $\mathbb{I}_i^- = \{x \in \mathbb{I}^n | x_i = -a\}$  in  $\mathbb{I}_i^+ = \{x \in \mathbb{I}^n | x_i = a\}$ . Za preslikavo  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lahko pogoj (5) zapišemo na naslednji način:

$$(6) \quad f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0] \text{ in } f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty), \text{ za vsak } i \in \{1, \dots, n\}.$$

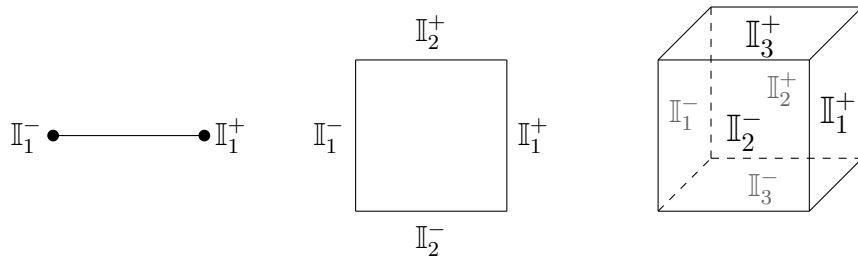
**Izrek 3.2** (Poincaré-Mirandov izrek [4]). *Naj bo  $a$  poljubno pozitivno realno število in naj bo  $\mathbb{I}^n := [-a, a]^n$  kocka v  $\mathbb{R}^n$ . Naj bo  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  taka zvezna preslikava iz kocke v evklidski prostor  $\mathbb{R}^n$ , ki ustreza pogoju (6). Potem obstaja točka  $c \in \mathbb{I}^n$ , da je vrednost preslikave  $f$  v točki  $c$  enaka 0.*

*Dokaz.* Naj zvezna preslikava  $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zadošča pogoju (6). Za vsako število  $i \in \{1, \dots, n\}$  definiramo množici  $H_i^- := f_i^{-1}(-\infty, 0]$  in  $H_i^+ := f_i^{-1}[0, \infty)$ . Najprej bomo pokazali, da je za dokaz izreka dovolj, če za vsako naravno število  $k \in \mathbb{N}$  poiščemo  $n$ -simpleks  $S_k$  iz  $k$ -te mrežne delitve kocke  $M_k^n$  z lastnostjo

$$(7) \quad S_k \cap H_i^- \neq \emptyset \neq S_k \cap H_i^+, \text{ za vsak } i \in \{1, \dots, n\}.$$

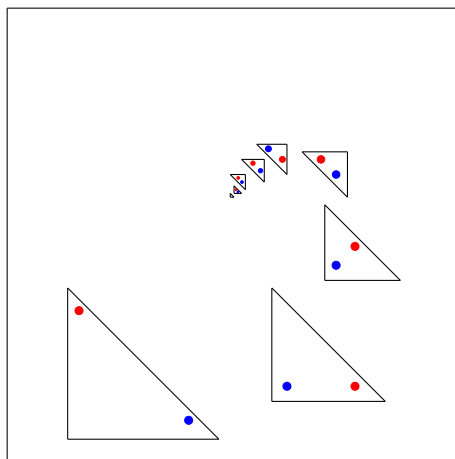
Kasneje bomo pokazali, da taki simpleksi res obstajajo.

Pokažimo torej, da obstoj takih simpleksov res zaključí dokaz. Recimo, da je za vsak  $k \in \mathbb{N}$   $n$ -simpleks  $S_k \in M_k^n$  z lastnostjo (7). V vsakem simpleksu  $S_k$  si lahko izberemo točko  $x_k$  in tako dobimo neskončno zaporedje  $(x_k)_{k=1}^\infty$ . Ker zaporedje leži



SLIKA 8. Na sliki lahko vidimo, kako smo označili posamezno lice kocke. Na levi je kocka  $\mathbb{I}$ , na sredini kocka  $\mathbb{I}^2$ , na desni pa je prikazana kocka  $\mathbb{I}^3$  [1, slika 1.2].

v kompaktnem prostoru  $\mathbb{I}^n$ , obstaja konvergentno podzaporedje  $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$  z limito  $c \in \mathbb{I}^n$ . Izberimo si neki  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Zaradi lastnosti (7) lahko za vsak  $j \in \mathbb{N}$  poiščemo točki  $z_j \in S_{k_j} \cap H_i^-$  in  $w_j \in S_{k_j} \cap H_i^+$ . Ker velja  $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(S_{k_j}) = 0$ , je limita  $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = \lim_{j \rightarrow \infty} w_j = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = c$  (slika 9). Funkcija  $f$  je zvezna, zato je tudi zaporedje  $f_i(z_j)$  konvergentno z limito  $f_i(c)$ . Členi tega zaporedja so vsi manjši ali enaki nič, saj leži zaporedje v množici  $H_i^-$ , zato je tudi  $f_i(c) \leq 0$ . Podobno lahko sklepamo, da je zaporedje  $f_i(w_j)$  konvergentno z limito  $f_i(c)$ . Ker so vsi členi  $f_i(w_j)$  nenegativni, je tudi limita  $f_i(c) \geq 0$ . Ugotovili smo, da je  $0 \leq f_i(c) \leq 0$ , torej je  $f_i(c) = 0$ . Razmislek velja za vsak  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , zato velja  $f(c) = 0$ . Dokazati moramo še, da taki simpleksi  $S_k$  res obstajajo. Tudi to bomo dokazovali



SLIKA 9. Na sliki modre točke predstavljajo točke iz množice  $H_i^+$ , rdeče pa točke iz množice  $H_i^-$ . Ko se simpleksi zmanjšujejo, sta točki vedno bližje, zato imata zaporedji teh točk isto limito.

v dveh delih. Najprej bomo definirali barvanje triangulacije kocke, nato pa bomo v prvem delu pokazali, da imajo popolno pobarvani simpleksi lastnost (7). Kasneje bomo pokazali, da vsaka triangulacija  $M_k^n$ , ki ima vozlišča pobarvana z barvanjem  $\varphi$ , vsebuje vsaj en popolno pobarvan simpleks  $S$ . Omenjeno barvanje  $\varphi$  triangulacije  $n$ -kocke  $\mathbb{I}^n$  z množico oglišč  $V$  definiramo na naslednji način:

$$\varphi : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\varphi(x) = \max \left\{ j : x \in \bigcap_{i=0}^j F_i^+ \right\}$$

Kjer je  $F_0^+ = \mathbb{I}^n$ ,  $F_i^+ = H_i^+ \setminus \mathbb{I}_i^-$ .

Trdimo, da ima pri tem barvanju popolno pobarvan simpleks  $S$  lastnost (7). Za vsak  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  in za vsaki taki točki  $x$  in  $y$  iz  $\mathbb{I}^n$ , za kateri je  $\varphi(x) = i - 1$  in  $\varphi(y) = i$ , lahko sklepamo, da je  $x \in H_i^-$  in  $y \in H_i^+$ . Res, denimo, da  $x \notin H_i^-$ . Potem  $x \in F_i^+ = H_i^+ \setminus \mathbb{I}_i^-$ , kar pa pomeni, da je  $\varphi(x) \geq i$ . To je protislovje, torej res velja  $x \in H_i^-$ . Podobno lahko sklepamo, če  $y \notin H_i^+$ , potem tudi  $y \notin F_i^+$ , kar pomeni, da je  $\varphi(y) < i$ . Spet protislovje s tem, da je  $\varphi(y) = i$ , torej je tudi  $y \in H_i^+$ . Ker ima popolno pobarvan simpleks vsako oglišče pobarvano s svojo barvo, so na ogliščih zastopane vse barve iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$ , zato ima tak simpleks res lastnost (7). Obstoj popolno pobarvanega simpleksa  $S$  v triangulaciji bomo dokazali tako, da se bomo prepričali, da je število  $p$  popolno pobarvanih simpleksov, vsebovanih v triangulaciji  $n$ -kocke  $\mathbb{I}^n$ , liho. Dokazovali bomo z indukcijo na dimenzijo kocke  $\mathbb{I}^n$ .

Baza indukcije ( $n = 0$ ): Triangulacija 0-kocke  $\mathbb{I}^n$  vsebuje zgolj točko 0, ki je z barvanjem  $\varphi$  pobarvana z barvo 0 in tako predstavlja popolno pobarvan simpleks.

Indukcijska predpostavka ( $n - 1$ ): Predpostavimo, da vsaka triangulacija  $\mathcal{T}_k$  kocke  $\mathbb{I}^{n-1}$ , kjer vozlišča pobarvamo s preslikavo  $\varphi$ , vsebuje liho število  $(n - 1)$ -simpleksov, ki so popolno pobarvani.

Indukcijski korak ( $(n - 1) \implies n$ ): Prepričajmo se, da poljubna triangulacija  $\mathcal{T}_k$   $n$ -kocke  $\mathbb{I}^n$  vsebuje liho mnogo popolno pobarvanih  $n$ -simpleksov. Lice simpleksa, ki leži na robu kocke  $\mathbb{I}^n$ , je lahko popolno pobarvano samo v primeru, ko leži na licu  $\mathbb{I}_n^-$ . Po indukcijski predpostavki je število  $r$  takih lic liho. Definirajmo funkcijo  $\alpha$ , ki za vsak  $k$ -simpleks pove, koliko popolno pobarvanih  $(k - 1)$  simpleksov vsebuje. Za vsak  $k$ -simpleks  $R$  iz triangulacije  $M_k^n$  lahko preštejemo, koliko popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov vsebuje. Vsak popolno pobarvan  $k$ -simpleks iz triangulacije  $M_k^n$  kocke  $\mathbb{I}^n$  vsebuje natanko en popolno pobarvan  $(k - 1)$ -simpleks, medtem ko ostali simpleksi lahko vsebujejo dva ali nobenega. Če  $k$ -simpleks vsebuje oglišča, pobarvana z vsemi barvami  $0, \dots, k - 1$ , kjer se ena barva ponovi dvakrat, tak simpleks vsebuje dva popolno pobarvana simpleksa. Ostali simpleksi ne vsebujejo popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov. Iz zgornjega lahko sklepamo, da je

$$p \equiv \sum_{R \in M_k^n} \alpha(R) \pmod{2}.$$

Pri štetju popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov smo vsakega iz notranjosti simpleksa  $S$  šteli dvakrat, tiste z roba  $S$  pa samo enkrat. Zato velja tudi

$$r \equiv \sum_{R \in M_k^n} \alpha(R) \pmod{2}.$$

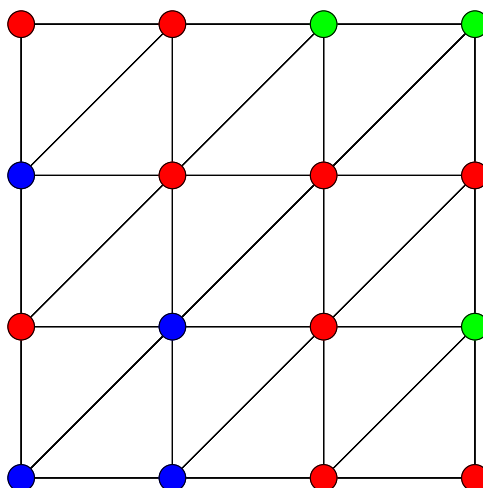
Torej velja kongruenca  $p \equiv r \pmod{2}$ , zato je  $p$  lih. □

Zgornji dokaz zelo spominja na dokaz Spernerjeve leme, a tu obravnavamo kocke. Dobimo idejo, da bi Spernerjevo lemo posplošili na kocke. Želimo poiskati tako pravilo za barvanje triangulacije kocke, da bo vsaka triangulacija kocke vsebovala vsaj en popolno pobarvan simpleks. Ker si želimo popolno pobarvan simpleks, nam ni potrebno vsakega oglišča kocke pobarvati s svojo barvo, saj je za  $n$ -kocko dovolj že  $n + 1$  barv. Pravilo za Spernerjevo barvanje simpleksa lahko posplošimo na  $n$ -kocko

na naslednji način. Definirajmo naivno pravilo za barvanje triangulacije  $\mathcal{T}$  kocke  $C = \mathbb{I}^n$ :

- (1) Na ogliščih kocke  $C$  so uporabljene vse barve iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,
- (2) vsako oglišče triangulacije  $\mathcal{T}$  z lica  $L$  je enako pobarvano kot eno izmed oglišč lica  $L$ .

S primerom na sliki 3 pokažimo, da barvanje, ki zadošča naivnemu pravilu, nima želene lastnosti. Naivno pravilo lahko dopolnimo tako, da bo vsaka triangulacija  $n$ -



SLIKA 10. Triangulacija  $n$ -kocke  $C$ , pobarvana po naivnem pravilu, ne vsebuje popolno pobarvanega  $n$ -simpleksa. Zaradi lepše slike smo barvo 0 prikazali z modro, barvo 1 z rdečo, 2 pa z zeleno.

simpleksa, pobarvana po tem pravilu, vsebovala popolno pobarvan  $n$ -simpleks. Če pogledamo dokaz izreka 2.14, vidimo, da je ključno dejstvo, da je na robu liho število popolno pobarvanih simpleksov. Na sliki pa temu ni tako. Popolno pobarvani 1-simpleksi so tisti, ki so pobarvani z modro in rdečo. Simpleks  $S$  na robu vsebuje 2 popolno pobarvana 1-simpleksa. Če naivnemu barvanju dodamo pogoj, ki nam za vsako triangulacijo  $n$ -kocke zagotavlja liho število popolno pobarvanih  $(n - 1)$ -simpleksov na robu, dobimo Spernerjevo barvanje za kocke.

**Definicija 3.3.** Naj bo podana triangulacija  $\mathcal{T}$  kocke  $C$ . Z  $V$  označimo množico oglišč triangulacije  $\mathcal{T}$ . Spernerjevo barvanje triangulacije  $n$ -kocke  $C$  je preslikava  $b : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ , pri kateri so izpolnjeni trije pogoji:

- (1) Na ogliščih kocke  $C$  so uporabljene vse barve iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,
- (2) vsako oglišče triangulacije  $\mathcal{T}$  z lica  $L$  je enako pobarvano kot eno izmed oglišč lica  $L$ ,
- (3) kocka  $C$  vsebuje liho mnogo glavnih lic, ki so pobarvana s Spernerjevim barvanjem.

Točka (2) predstavlja enak robni pogoj kot pri definiciji spernerjeve leme za simplekse. Definicija Spernerjevega barvanja za kocke je precej bolj komplicirana kot definicija Spernerjevega barvanja za simplekse, saj je definicija definirana rekurzivno. Pri pogoju (3) namreč vidimo, da za Spernerjevo barvanje kocke  $C$  potrebujemo Spernerjevo barvanje njegovih lic. Pokazali bomo, da vsaka triangulacija  $n$ -kocke, pobarvana s Spernerjevim barvanjem, vsebuje vsaj en popolno pobarvan  $n$ -simpleks.

**Lema 3.4** (Spernerjeva lema za kocke). *V vsakem Spernerjevem barvanju triangulacije  $k$ -kocke je liho mnogo popolno pobarvanih  $k$ -simpleksov.*

*Dokaz.* Naj bo  $C$   $k$ -kocka in naj bo  $\mathcal{T}$  njegoa triangulacija. Lemo bomo dokazovali z indukcijo na dimenzijo  $k$  simpleksa  $S$ .

Baza indukcije ( $k = 0$ ): Če je  $k = 0$ , lema očitno drži, saj je 0-kocka točka. Pri Spernerjevem barvanju točke imamo samo eno možnost in tako dobimo eno popolno pobarvano 0-kocko, ki je tudi popolno pobarvan simpleks.

Indukcijska predpostavka ( $k - 1$ ): Predpostavimo, da lema drži v dimenziji  $(k - 1)$ . Torej v vsaki triangulaciji  $(k - 1)$ -kocke s Spernerjevim barvanjem najdemo liho število  $(k - 1)$ -simpleksov, ki so popolno pobarvani.

Indukcijski korak ( $(k - 1) \implies k$ ): Pravilnost izjave želimo dokazati tudi v dimenziji  $k$ . Za poljubno triangulacijo  $\mathcal{T}$   $k$ -kocke  $C$  naj bodo oglišča triangulacije  $\mathcal{T}$  pobarvana s Spernerjevim barvanjem. Označimo število vseh popolno pobarvanih  $k$ -simpleksov iz  $\mathcal{T}$  s  $p$ , število popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov, ki ležijo na robu kocke  $C$  pa z  $r$ . Definirajmo funkcijo  $\alpha$ , ki vsakemu  $k$ -simpleksu priredi število popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov, ki so vsebovani v  $R$ . Vsak popolno pobarvan  $k$ -simpleks vsebuje natanko en popolno pobarvan  $(k - 1)$ -simpleks, medtem ko ostali simpleksi lahko vsebujejo dva ali pa nobenega. Če  $k$ -simpleks vsebuje oglišča, pobarvana z vsemi barvami  $0, 1, \dots, k - 1$ , kjer se ena barva ponovi dvakrat, tak simpleks vsebuje dva popolno pobarvana simpleksa. Ostali simpleksi pa zagotovo ne vsebujejo popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov, saj niti ne vsebujejo vseh barv iz množice  $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ . Iz zgornjega lahko sklepamo, da je

$$(8) \quad p \equiv \sum_{R \in \mathcal{T}} \alpha(R) \pmod{2}.$$

Pri štetju popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov smo vsakega iz notranjosti  $C$  šteli dvakrat, tiste z roba  $C$  pa samo enkrat. Torej velja kongruenca:

$$(9) \quad r \equiv \sum_{R \in \mathcal{T}} \alpha(R) \pmod{2}.$$

Iz enačbe (8) in enačbe (9) sledi, da je  $p \equiv r \pmod{2}$ . Ker je kocka pobarvana s Spernerjevim barvanjem, ima liho število popolno pobarvanih lic, ki zaradi indukcijske predpostavke vsebujejo liho število popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov. Ker na drugih licih ni popolno pobarvanih  $(k - 1)$ -simpleksov, je število  $r$  liho. Zato je tudi  $p$  lih.  $\square$

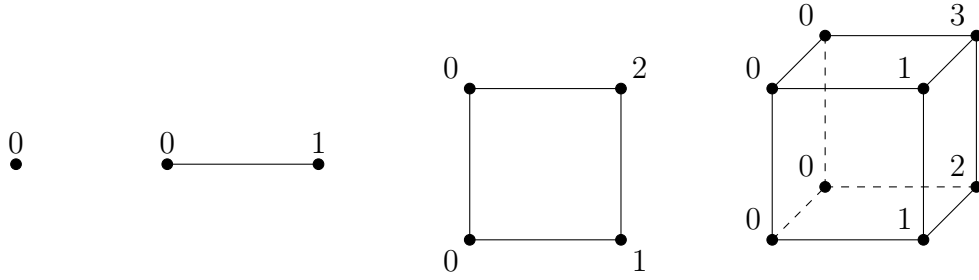
Sedaj pokažimo, da je barvanje  $\varphi$  Spernerjevo barvanje za kocke.

*Dokaz.* Pokažimo najprej, da je  $n$ -kocka  $\mathbb{I}^n$  pri barvanju z barvanjem  $\varphi$  pobarvana popolno. Pokazati moramo, da smo pri barvanju njenih oglišč uporabili vse barve iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$  in da vsebuje liho število popolno pobarvanih glavnih lic. Za boljšo predstavo dokaza si lahko na sliki 11 pogledamo, kako izgleda barvanje oglišč v dimenzijah 0, 1, 2 in 3. Dokazovali bomo z indukcijo na  $n$ .

Baza indukcije ( $n = 0$ ): Če je  $n = 0$ , opazujemo eno točko, označeno z 0, kar je popolno pobarvana 0-kocka.

Indukcijska predpostavka ( $n - 1$ ): Predpostavimo, da je  $(n - 1)$ -kocka popolno pobarvana.

Indukcijski korak ( $(n - 1) \implies n$ ): Dokažimo pravilnost izjave tudi v dimenziji  $n$ . Lice  $I_n^-$  je enako pobarvano kot  $(n - 1)$ -kocka, saj za njuni oglišči veljata enake



SLIKA 11. Skrajno levo je ena točka (0-kocka), ki je z barvanjem  $\varphi$  pobarvana z 0. Malo bolj proti desni lahko vidimo, kako barvanje  $\varphi$  označi oglišča 1-kocke, naslednja je z  $\varphi$  pobarvana 2-kocka, skrajno desno pa je pobarvana 3-kocka.

vsebovanosti v množicah  $F_i^+$ . Po indukcijski predpostavki je lice  $I_n^-$  popolno pobarvano, zato vsebuje vse barve iz množice  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Oglišče  $(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$  je označeno z barvo  $n$ , saj je vsebovano v vseh množicah  $F_i^+$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ . To pomeni, da je  $n$ -kocka označena z vsemi oznakami iz množice  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Prepričati se moramo le še, da ima liho število popolno pobarvanih glavnih lic. Trdimo, da je lice  $\mathbb{I}_n^-$  edino popolno pobarvano lice kocke  $\mathbb{I}^n$ . Poglejmo najprej, če je lahko katero od lic  $\mathbb{I}_i^+$  popolno pobarvano. Za vsak  $x \in \mathbb{I}_i^+$  velja, da je  $\varphi(x) \neq i-1$ , zato lice  $\mathbb{I}_i^+$  ne more vsebovati oglišč z vsemi barvami  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Poskusimo poiskati popolno pobarvano lice med lici  $\mathbb{I}_i^-$ . Za vsako točko  $x \in \mathbb{I}_i^-$  velja  $\varphi(x) < i$ . Če želimo, da lice  $\mathbb{I}_i^-$  vsebuje vse barve iz množice  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , mora biti  $i = n$ . Torej je lice  $\mathbb{I}_n^-$  res edino popolno pobarvano glavno lice kocke  $\mathbb{I}^n$ .

Prepričati se moramo samo še, da so vsa oglišča z nekega lica kocke  $\mathbb{I}^n$  pobarvana enako kot neko oglišče, ki to lice določa. Vemo, da lahko vsako lice  $L$  dobimo kot presek pravih lic. Zaradi lažjega zapisa definiramo znak  $\star$ , za katerega je  $\mathbb{I}_i^\star = \mathbb{I}^n$  za vsak  $i = 1, 2, \dots, n$ . S pomočjo nove oznake lahko vsako lice  $L$  kocke  $\mathbb{I}^n$  zapišemo kot

$$L = \mathbb{I}_1^{\varepsilon_1} \cap \mathbb{I}_2^{\varepsilon_2} \cap \dots \cap \mathbb{I}_n^{\varepsilon_n},$$

kjer je  $\varepsilon_i \in \{\star, -, +\}$  za vsak  $i = 1, 2, \dots, n$ . Naj bo  $x \in L$  in naj bo  $\varphi(x) = l$  za neki  $l \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Vemo, da je  $\varepsilon_j \neq -$  za  $j \leq l$  in  $\varepsilon_{l+1} \neq +$ . Poglejmo si oglišče

$$y = \mathbb{I}_1^{\rho_1} \cap \mathbb{I}_2^{\rho_2} \cap \dots \cap \mathbb{I}_n^{\rho_n},$$

kjer je

$$\rho_i = \begin{cases} \varepsilon_i & , \varepsilon_i \in \{+, -\}, \\ + & , (\varepsilon_i = \star) \wedge (i < l), \\ - & , (\varepsilon_i = \star) \wedge (i > l). \end{cases}$$

Lahko se prepričamo, da je  $y \in L$  in  $\varphi(y) = l$ , kar pomeni, da smo našli oglišče na licu  $L$ , ki je enako pobarvano kot točka  $x$ . Ker smo to storili za poljubno točko, je vsaka točka z roba kocke  $\mathbb{I}^n$  pobarvana enako kot eno od oglišč, ki določajo lice, na katerem leži točka  $x$ . Torej je  $\varphi$  res Spernerjevo barvanje.  $\square$

Leta 1940 je K. Miranda dokazal, da je izrek 3.2 ekvivalenten znanemu Brouwerjevemu izreku o negibni točki, ki pravi naslednje:

**Izrek 3.5** (Brouwerjev izrek o negibni točki [4]). *Denimo, da je dana kocka  $C = [-1, 1]^n$  in zvezna preslikava  $f : C \rightarrow C$ , potem obstaja točka  $c \in C$ , da je  $f(c) = c$ .*

Izkaže se, da si pri dokazovanju nekaterih matematičnih trditev lažje pomagamo z izrekom 3.2 kot z izrekom 3.5. Poglejmo si, kako s pomočjo izreka 3.2 dokažemo izrek o negibni točki.

*Dokaz izreka 3.5.* Naj bo  $C = [-1, 1]^n$  kocka v evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $f : C \rightarrow C$  poljubna zvezna preslikava iz kocke nazaj vase. Definiramo funkcijo  $g : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  s predpisom  $g(x) = x - f(x)$ . Funkcija  $g$  je zvezna in zadošča pogojem izreka 3.2. Res, za vsak  $x \in \mathbb{I}_i^-$  velja, da je  $x_i = -1$  in  $f_i(x) \geq -1$ , zato je

$$g_i(x) = x_i - f_i(x) \leq -1 - (-1) = 0.$$

Podobno lahko razmislimo, da je za vsak  $x \in \mathbb{I}_i^+$  vrednost funkcije  $g_i \geq 0$ . Zato po izreku 3.2 obstaja taka točka  $c \in C$ , da je  $g(c) = 0$ , kar pomeni, da je  $f(c) = c$ .  $\square$

Enostavnost dokaza izreka 3.5 pokaže, kako močno orodje za dokazovanje topoloških trditev je izrek 3.2.

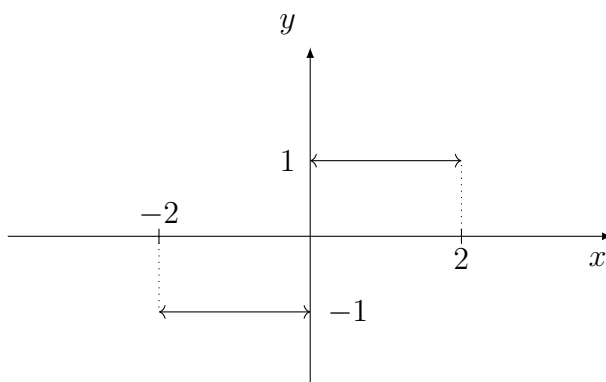
#### 4. RAZŠIRITEV FUNKCIJE

Včasih se nam zgodi, da je podana funkcija definirana samo na nekem majhnem območju, želeli pa bi si, da bi bila domena funkcije večja. Poglejmo si poljubno množico  $A \subset \mathbb{R}^n$  in neko funkcijo  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Denimo, da je  $U$  taka množica, da je  $A \subset U$ . Funkciji  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero je  $F(x) = f(x)$  za vsak  $x \in A$ , pravimo *razširitev funkcije*  $f$  na množico  $U$ . Če funkcijo  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  razširimo brez omejitev, se informacija o funkciji  $f$  na množici  $A$  popolnoma izgubi. Da se ohrani vsaj del informacije, bomo gledali zgolj zvezne funkcije  $f$  in zvezne razširitve  $F$ . Pri tem se ponudi vprašanje, ali lahko vsako zvezno funkcijo razširimo. S primerom pokažemo, da temu ni tako.

**Primer 4.1.** Funkcijo  $f : (-2, 0) \cup (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x \in (-2, 0) \\ 1 & , x \in (0, 2). \end{cases}$$

Funkcija  $f$  je zvezna na  $(-2, 0) \cup (0, 2)$ , ne moremo pa je zvezno razširiti na  $\mathbb{R}$ , saj



SLIKA 12. Prikazan je graf zvezne funkcije, ki je ne moremo zvezno razširiti na  $\mathbb{R}$ .

razširitev v točki  $x = 0$  ne bi bila zvezna.  $\diamond$

Izkaže se, da je za obstoj razširitve zvezne funkcije  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dovolj, če je množica  $A$  kompaktna.

**Lema 4.2** (Razširitev zvezne funkcije). *Naj bo  $A$  kompaktna podmnožica evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  in naj bo dana zvezna funkcija  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Potem obstaja taka zvezna funkcija  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , da za vsak  $x \in A$ , velja  $F(x) = f(x)$ .*

*Dokaz.* Včasih je pri dokazu obstoja neke stvari najlažje, če to stvar poiščemo in jo vsem pokažemo. Tako bomo tudi mi napisali predpis funkcije  $F$ , ki zvezno razširi funkcijo  $f$ . Seveda bi se lahko pri dokazu oprli na Tietzejev razširitveni izrek, a je to delo zasnovano tako, da se poskuša izogniti uporabi abstraktnejših topoloških izrekov. Denimo torej, da je množica  $A$  kompaktna in funkcija  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je funkcija  $f$  pozitivna. Vemo, da je zvezna funkcija na kompaktni množici omejena, torej lahko prištejemo dovolj veliko število  $C$ , da je funkcija  $f + C$  pozitivna. Zveznost funkcije  $f$  pa je ekvivalentna zveznosti funkcije  $f + C$ . Razširitveno funkcijo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lahko definiramo s predpisom [2, str. 257, vaja 4.1.F]:

$$F(x) = \begin{cases} \inf \left\{ f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1; a \in A \right\} & , x \in A^c \\ f(x) & , x \in A. \end{cases}$$

Iz predpisa funkcije je jasno, da je za vsak  $x \in A$ ,  $F(x) = f(x)$ . Ugotoviti moramo le še, ali je funkcija  $F$  res zvezna na  $\mathbb{R}^n$ . Dokazovali bomo v dveh delih. Najprej bomo dokazali zveznost funkcije  $F$  na  $A^c$ , potem pa še na  $A$ . Dokažimo, da je funkcija  $F$  zvezna v točki  $x_0 \in A^c$ . Izberimo poljubno majhno pozitivno realno število  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Potem obstaja tako pozitivno realno število  $r > 0$ , da je zaprta krogla s polmerom  $r$  vsebovana v  $A^c$ , torej  $B(x_0, r) \subset A^c$ . Definiramo funkcijo  $D_a(x) := \frac{d(x,a)}{d(x,A)}$ . Prepričajmo se, da obstaja tako pozitivno realno število  $\delta$ , da je  $|D_a(x_0) - D_a(x)| < \varepsilon$  za vsak  $x \in B(x_0, \delta)$  in vsak  $a \in A$ . Ocenimo navzgor:

$$\begin{aligned} D_a(x_0) - D_a(x) &= \frac{d(x_0, a)}{d(x_0, A)} - \frac{d(x, a)}{d(x, A)} \\ &= \frac{d(x_0, a)d(x, A) - d(x, a)d(x_0, A)}{d(x_0, A)d(x, A)} \\ &\leq \frac{d(x_0, a)(d(x_0, A) + \delta) - (d(x_0, a) - \delta)d(x_0, A)}{d(x_0, A)(d(x_0, A) - \delta)} \\ &= \frac{\delta(d(x_0, a) + d(x_0, A))}{d(x_0, A)(d(x_0, A) - \delta)} \end{aligned}$$

Ker želimo, da je  $\frac{\delta(d(x_0, a) + d(x_0, A))}{d(x_0, A)(d(x_0, A) - \delta)} \leq \varepsilon$ , lahko izračunamo  $\delta \leq \frac{\varepsilon(d(x_0, A))^2}{d(x_0, a) + d(x_0, A)(1 + \varepsilon)}$ . Ocenimo navzdol:

$$\begin{aligned} D_a(x_0) - D_a(x) &= \frac{d(x_0, a)}{d(x_0, A)} - \frac{d(x, a)}{d(x, A)} \\ &= \frac{d(x_0, a)d(x, A) - d(x, a)d(x_0, A)}{d(x_0, A)d(x, A)} \\ &\geq \frac{d(x_0, a)(d(x_0, A) - \delta) - (d(x_0, a) + \delta)d(x_0, A)}{d(x_0, A)(d(x_0, A) + \delta)} \\ &= \frac{-\delta(d(x_0, a) + d(x_0, A))}{d(x_0, A)(d(x_0, A) + \delta)} \end{aligned}$$



Ker želimo, da je  $\frac{\delta(d(x_0,a)+d(x_0,A))}{d(x_0,A)(d(x_0,A)-\delta)} \geq -\varepsilon$ , dobimo neenačbo  $\delta \leq \frac{\varepsilon(d(x_0,A))^2}{d(x_0,A)+d(x_0,A)(1-\varepsilon)}$ . Opazimo, da je ocena navzgor strožja. Ker je funkcija  $\delta(a) = \frac{\varepsilon d(x_0,A)}{d(x_0,A)(1+\varepsilon)+d(x_0,a)}$  definirana na kompaktni množici, doseže svoj minimum. Ker je funkcija  $\delta(a)$  na množici  $A$  strogo pozitivna, je tudi minimum večji od 0. Zato obstaja pozitivno realno število  $\delta$ , ki je manjše od  $\delta(a)$  za vsako število  $a \in A$ .

Denimo, da je infimum  $F(x_0)$  dosežen pri  $a_0$ , torej je  $F(x_0) = f(a_0) + D_{a_0}(x_0) - 1$ , infimum  $F(x)$  pa pri  $a_1$ , torej je  $F(x) = f(a_1) + D_{a_1}(x) - 1$ . Naredimo naslednje ocene:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x) - F(x_0) + F(x_0) \\ &= \inf \{f(a) + D_a(x) - 1; a \in A\} - F(x_0) + F(x_0) \\ &\leq (f(a_0) + D_{a_0}(x) - 1) - (f(a_0) + D_{a_0}(x_0) - 1) + F(x_0) \\ &= (D_{a_0}(x) - D_{a_0}(x_0)) + F(x_0) \\ &\leq \varepsilon + F(x_0), \\ &\implies F(x_0) - F(x) \geq -\varepsilon. \end{aligned}$$

Podobno ocenimo:

$$\begin{aligned} F(x_0) &= F(x_0) - F(x) + F(x) \\ &= \inf \{f(a) + D_a(x_0) - 1; a \in A\} - F(x) + F(x) \\ &\leq (f(a_1) + D_{a_1}(x_0) - 1) - (f(a_1) + D_{a_1}(x) - 1) + F(x) \\ &= (D_{a_1}(x_0) - D_{a_1}(x)) + F(x) \\ &\leq \varepsilon + F(x), \\ &\implies F(x_0) - F(x) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Iz zgornjih ocen ugotovimo, da je  $|F(x_0) - F(x)| \leq \varepsilon$ , kar zagotavlja zveznost funkcije  $F$  na  $A^c$ .

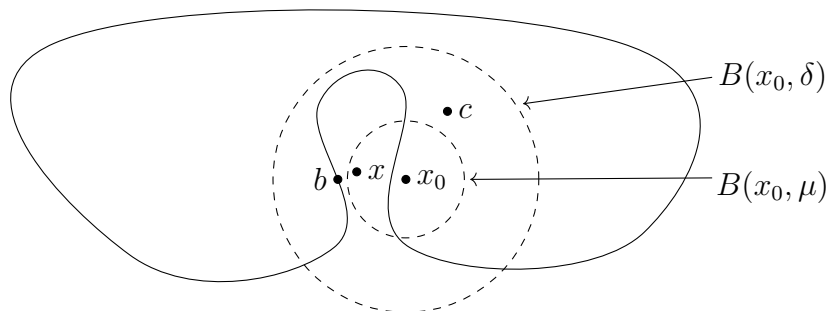
Da bi preverili zveznost  $F$  tudi na množici  $A$ , izberemo  $x_0 \in A$  in  $\varepsilon > 0$ . Ker je funkcija  $f$  zvezna na  $A$ , obstaja tak  $\delta > 0$ , da je  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$  za vsak  $x \in A$ , za katerega velja  $d(x_0, x) < \delta$ . Zaradi lažjega ocenjevanja naredimo naslednje premisleke. Ker je funkcija  $f$  definirana na kompaktni množici, obstaja realno število  $M$ , da je  $f(a) \leq M$  za vsak  $a \in A$ . Določimo tak  $\mu > 0$ , pri katerem je funkcija  $D_a(x) \geq M + 1$  za vse  $a \in A \setminus B(x_0, \delta)$  in vse  $x \in B(x_0, \mu)$ . Naj bo  $a \in B(x_0, \delta)^c$ , potem je  $D_a(x)|_{B(x_0, \mu)} = \frac{d(x, a)}{d(x, A)} \geq \frac{\delta - \mu}{\mu}$ . Torej moramo določiti  $\mu > 0$ , da bo veljala neenačba  $\frac{\delta - \mu}{\mu} > M + 1$ . Izračunamo  $\mu < \frac{\delta}{M+2}$ . Sedaj imamo dve možnosti. Če je  $x \in A \cap B(x_0, \mu)$ , potem je  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ . Če pa je  $x \in A^c \cap B(x_0, \mu)$ , vemo, da obstajata točki  $b \in \partial A$ , za katero je  $d(x, b) = d(x, A)$ , in  $c \in A$  z lastnostjo  $F(x) = f(c) + D_c(x) - 1$ . Iz izbire števila  $\mu$  je jasno, da ležita točki  $b, c \in B(x_0, \delta)$  (slika 13). Lahko naredimo naslednji oceni. Najprej upoštevamo definicijo funkcije  $F$  in izbrano točko  $b$ :

$$F(x) = \inf_{a \in A} \{f(a) + D_a(x) - 1\} \leq f(b) \leq f(x_0) + \varepsilon = F(x_0) + \varepsilon,$$

pri drugi oceni pa si pomagamo s točko  $c$ :

$$F(x) = f(c) + D_c(x) - 1 \geq f(c) \geq f(x_0) - \varepsilon = F(x_0) - \varepsilon.$$

Ugotovimo, da je  $|F(x_0) - F(x)| \leq \varepsilon$ , kar zaključimo dokaz.  $\square$



SLIKA 13. Pri dokazovanju zveznosti funkcije  $F$  v točki  $x_0$  želimo poiskati tako pozitivno realno število  $\mu$ , da se vrednosti funkcije  $F$  za vsako točko  $x \in B(x_0, \mu)$  od vrednosti funkcije  $F(x_0)$  razlikujejo največ za vnaprej predpisani  $\varepsilon$ .

Lemo 4.2 enostavno posplošimo tudi na preslikave, ki slikajo v večrazsežni evklidski prostor.

**Posledica 4.3.** *Naj bo  $A$  kompaktna podmnožica evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  zvezna preslikava. Potem obstaja zvezna preslikava  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da je za vsak  $x \in A$ ,  $F(x) = f(x)$ .*

*Dokaz.* Vemo, da zvezna preslikava  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  določa komponentne funkcije  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ . Vse komponentne funkcije  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  zadoščajo pogojem leme 4.2, zato jih lahko razširimo do funkcij  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Če definiramo preslikavo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  s predpisom  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ , dobimo zvezno razširitev preslikave  $f$ .  $\square$

Sedaj znamo razširiti zvezno preslikavo iz kompaktne množice na cel prostor  $\mathbb{R}^n$ . Včasih pa si poleg spremembe definicijskega območja želimo imeti nekaj vpliva tudi na zalogo vrednosti preslikave. Želeli bi si, da se zaloga vrednosti pri razširitvi čim manj spremeni. Naivno bi lahko želeli, da ta ostane celo enaka, a to ni vedno mogoče, kar pokaže primer 4.4.

**Primer 4.4.** Poglejmo si identično preslikavo  $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}^n \setminus \{0\}$ . Po izreku 3.2 ne obstaja zvezna razširitev  $F : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}^n \setminus \{0\}$ , saj mora obstajati  $x \in \mathbb{I}^n$ , da je  $F(x) = 0$ .  $\diamond$

V posebnih primerih obstaja taka razširitev preslikave, ki se izogne določeni točki. Brez izgube splošnosti bomo pokazali, da obstajajo pogoji, ki nam zagotavljajo zvezno razširitev preslikave, ki nobenega elementa definicijskega območja ne slika v 0. Preden navedemo pogoje, pa si pogledimo pomembno lastnost preslikav, ki je ključna pri dokazu.

**Trditev 4.5** ([7]). *Zvezna funkcija, definirana na kompaktni množici, je enakomerno zvezna.*

*Dokaz.* Predpostavimo, da je  $K \in \mathbb{R}^n$  kompaktna množica in  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  zvezna preslikava. Pokazati želimo, da za vsako še tako majhno število  $\varepsilon > 0$  obstaja tako realno število  $\delta > 0$ , da za vsaki točki  $x, y \in K$ , za kateri je  $d(x, y) < \delta$ , velja  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Ker je  $f$  zvezna funkcija za vsako točko  $z \in K$  obstaja tako pozitivno realno število  $\delta_z$ , da je  $f(B(z, \delta_z)) \subset B(f(z), \frac{\varepsilon}{4})$ . Družina množic  $\mathcal{U} = \{B(z, \delta_z); z \in K\}$  tvori odprto pokritje prostora  $K$ . Zaradi kompaktnosti  $K$

lahko izberemo končno poddružino  $\mathcal{A} = \{(B(x_1, \delta_{x_1}), \dots, B(x_n, \delta_{x_n}))\}$ , ki je še vedno pokritje množice  $K$ . Definiramo število  $\delta = \min_i \delta_{x_i}$ . Za poljubni števili  $x, y \in K$ , ki sta med seboj oddaljeni manj kot  $\delta$ , imamo dve možnosti. Če obstaja taka krogla  $B(x_i, \delta)$ , da je  $x, y \in B(x_i, \delta)$ , potem sta  $f(x), f(y) \in B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{4})$  in je  $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . V nasprotnem primeru obstajata krogli  $B(x_i, \delta)$  in  $B(x_j, \delta)$  z nepraznim presekom, za kateri velja  $x \in B(x_i, \delta)$  in  $y \in B(x_j, \delta)$ . V tem primeru je  $f(x) \in B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{4})$  in  $f(y) \in B(f(x_j), \frac{\varepsilon}{4})$ , kjer je  $B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{4}) \cap B(f(x_j), \frac{\varepsilon}{4}) \neq \emptyset$ . Zato zagotovo velja  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ , torej je funkcija res enakomerno zvezna.  $\square$

Poglejmo sedaj, kakšne pogoje potrebujemo, da lahko funkcijo razširimo tako, da se izognemo ničli.

**Lema 4.6** (razširitev, ki se izogne ničli [4, str. 133, Proof of Lemma]). *Naj bo  $X$  kompaktna podmnožica evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo  $Y \subset \mathbb{R}^n$  obstaja zvezna preslikava  $F : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , da velja:  $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$  za vsak  $x \in X$*

*Dokaz.* Izberimo realno število  $\varepsilon > 0$ . Naj bosta  $X$  in  $Y$  taki množici kot v lemi 4.6. Ker je množica  $X \cup Y \subset \mathbb{R}^n$  omejena, obstaja realno število  $a > 0$ , da je unija množic  $X \cup Y$  vsebovana v kocki  $\mathbb{I}^n = [-a, a]^n$ . Po lemi 4.2 lahko vsako zvezno preslikavo  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  razširimo do zvezne preslikave  $g : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Izberemo tako realno število  $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ , da je  $f(X) \cap B(0, 2\delta) = \emptyset$ . Ker je funkcija  $g$  zvezna in definirana na kompaktni množici  $\mathbb{I}^n$ , je po trditvi 4.5 enakomerno zvezna. Zato obstaja realno število  $\mu$ , da za vsako množico  $A$ , katere diameter  $\text{diam}(A)$  je manjši od  $\mu$ , velja  $\text{diam}(g(A)) < \frac{\delta}{2}$ . Naj bo  $k \in \mathbb{N}$  dovolj veliko naravno število, da za vsak simpleks  $S$  iz  $k$ -te mrežne delitve  $\mathcal{T}_k = M_k^n$  kocke  $\mathbb{I}^n$  velja  $\text{diam}(S) < \mu$ . Če označimo množico oglišč v delitvi  $\mathcal{T}_k$  z  $V$ , nam preslikava  $g|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  enolično določa zvezno preslikavo  $h : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ki vsako točko  $x \in S = \langle z_0, z_1, \dots, z_n \rangle \in \mathcal{T}_k$  z baricentričnimi koordinatami  $x = (t_0, t_1, \dots, t_n)_b$  slika v

$$h(x) = \sum_{i=0}^n t_i g(z_i).$$

Zaradi izbire triangulacije  $\mathcal{T}_k$  je za vsak simpleks  $S = \langle z_1, z_2, \dots, z_n \rangle \in \mathcal{T}_k$  diameter  $\text{diam}(S)$  manjši od  $\mu$ , torej zaradi enakomerne zveznosti funkcije  $g$  velja  $\text{diam}(g(S)) < \frac{\delta}{2}$ . Torej obstaja krogla  $B$  s premerom  $\delta$ , ki vsebuje množico  $g(S)$ . Funkcijo  $h$  smo konstruirali tako, da je množica  $h(S)$  konveksna ogrinjača točk  $g(z_0), g(z_1), \dots, g(z_n)$ . Ker je krogla  $B$  konveksna množica, ki vsebuje točke  $g(z_0), g(z_1), \dots, g(z_n)$ , vsebuje tudi njihovo konveksno ogrinjačo  $h(S)$ . Sklep sledi iz dejstva, da je konveksna ogrinjača danih točk najmanjša konveksna množica, ki vsebuje dane točke. Iz tega ugotovimo, da je  $\|g(x) - h(x)\| < \delta$  za vsak  $x \in \mathbb{I}^n$ . Ker je funkcija  $g$  razširitev funkcije  $f$ , sklepamo, da velja  $\|f(x) - h(x)\| < \delta$  za vsak  $x \in X$ .

Sedaj opazujmo množico točk  $\{g(z_0), g(z_1), \dots, g(z_n)\}$ . Če je to afino odvisna množica, potem je množica  $h(S)$  določena z  $n$  med seboj odvisnimi vektorji, torej leži v nekem  $(n - 1)$ -dimenzionalnem podprostoru prostora  $\mathbb{R}^n$  in ima kot taka prazno notranjost. Če pa je množica afino neodvisna, je množica  $S \cap Y$  kompaktna množica s prazno notranjostjo, saj je presek množice  $Y$ , ki je kompaktna s prazno notranjostjo, in množice  $S$ , ki je kompaktna. Zaradi zveznosti funkcije  $h$  je tudi  $h(S \cap Y)$  kompaktna množica s prazno notranjostjo. Res, zvezne funkcije ohranjajo kompaktnost. Denimo, da je notranjost množice  $h(S \cap Y)$  neprazna. Potem obstaja

neka odprta množica  $V \subset \mathbb{R}^n$ , ki je cela vsebovana v  $h(S \cap Y)$ . Ker je funkcija  $h$  zvezna, je njena inverzna preslikava  $h^{-1}$  odprta, zato je tudi množica  $h^{-1}(V)$  odprta v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . To pa ni mogoče, saj je množica  $h^{-1}(V)$  vsebovana v množici  $S \cap Y$ , ki ima prazno notranjost, zato ima tudi množica  $h^{-1}(V)$  prazno notranjost. Iz teh razmislekov ugotovimo, da je množica  $h(Y) = \bigcup_{S \in \mathcal{T}_k} h(S \cap Y)$  kompaktna množica

s prazno notranjostjo, saj jo dobimo s končno unijo kompaktnih množic s prazno notranjostjo. Ker je  $f(X) \cap B(0, 2\delta) = \emptyset$  in ker je  $\|f(x) - h(x)\| < \delta$  za vsak  $x \in X$ , je  $h(X) \cap B(0, \delta) = \emptyset$ . Jasno je, da lahko izberemo točko  $d \in B(0, \delta) \setminus h(X \cup Y)$ .

Definiramo preslikavo  $F : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  s predpisom  $F(x) = h(x) - d$ . Opazimo, da je  $\|F(x) - f(x)\| \leq \|h(x) - f(x)\| + \|d\| < 2\delta < \varepsilon$  za vsak  $x \in X$ . Velja tudi  $F(z) \neq 0$  za vsak  $z \in X \cup Y$ , saj bi enakost  $F(z) = 0$  implicirala enakost  $h(z) = d$ , kar pa nasprotuje predpostavki, da je  $d \notin h(X \cup Y)$ . Preslikava  $F$  je res iskana razširitev.  $\square$

## 5. IZREK O INVARIANCI ODPRTIH MNOŽIC

V prejšnjih poglavjih smo si pripravili vse potrebno za dokaz izreka o invarianci odprtih množic, zato se bomo brez ovinkarjenja lotili dokaza. Nato bomo dokazali še posledico izreka o invarianci odprtih množic, ki jo imenujemo izrek o invarianci dimenzij. Pri tem bomo sledili viru [4].

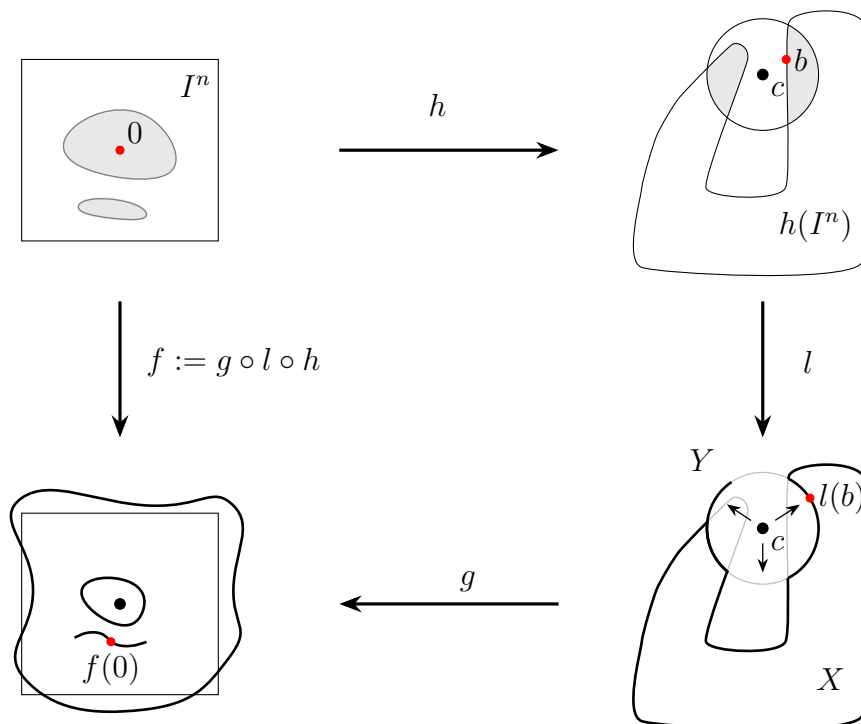
**Izrek 5.1** (Izrek o invarianci odprtih množic). *Naj bo  $U \subset \mathbb{R}^n$  odprta podmnožica evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zvezna injektivna preslikava. Potem je tudi slika  $h(U)$  odprta množica v  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dokaz.* Naj bodo izpolnjene predpostavke izreka. Obravnavamo množico  $U$ , ki je odprta podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ , in zvezno injektivno preslikavo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Izrek bo dokazan, če pokažemo, da je za vsak element  $u$  iz množice  $U$  točka  $h(u)$  notranja točka za množico  $h(U)$ . Ker je  $\mathbb{R}^n$  homogen prostor, take pa so tudi vse njegove odprte podmnožice, lahko predpostavimo, da je  $u = 0$  in pokažemo, da je  $h(0)$  notranja točka za  $h(U)$ . Izberimo tako pozitivno realno število  $a > 0$ , za katero je  $\mathbb{I}^n \subset U$ . Za dokaz izreka je dovolj pokazati vsebovanost  $b := h(0) \in \text{Int}(h(\mathbb{I}^n))$ . Od tu naprej bomo dokazovali s protislovjem. Privzeli bomo, da je  $b \in \partial h(\mathbb{I}^n)$ , in konstruirali funkcijo  $f : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , tako da bo  $f$  zadoščala pogojem izreka 3.2. To pa bo protislovje, saj mora taka funkcija po izreku 3.2 vsaj eno točko slikati v 0. Na poti do protislovja si bomo seveda pomagali tudi z lemmami, ki smo jih spoznali in dokazali v prejšnjih poglavjih. Predpostavimo torej, da je  $b \in \partial(\mathbb{I}^n)$ . Ker je  $\mathbb{I}^n$  kompaktna podmnožica  $\mathbb{R}^n$  in je  $\mathbb{R}^n$  hausdorffov prostor, je funkcija  $h|_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfizem. Zato obstaja tako pozitivno realno število  $\delta > 0$ , za katerega je  $h^{-1}(B(b, 2\delta)) \subset \text{Int}(\mathbb{I}^n)$ . Ker je  $b \in \partial h(\mathbb{I}^n)$ , je lahko poiščemo točko  $c \in B(b, \delta) \setminus h(\mathbb{I}^n)$ . Enostavno se je prepričati, da je  $b \in B(c, \delta)$  in  $h^{-1}(B(c, \delta)) \subset \text{Int}(\mathbb{I}^n)$ .

Označimo  $X := h(\mathbb{I}^n) \setminus B(c, \delta)$  in  $Y := \partial B(c, \delta)$ . Definiramo zvezno preslikavo  $l : h(\mathbb{I}^n) \cup Y \rightarrow X \cup Y$  s predpisom:

$$l(x) = \begin{cases} c + \frac{x-c}{\|x-c\|} \cdot \delta & , x \in h(\mathbb{I}^n) \cap B(c, \delta) \\ x & , x \in X. \end{cases}$$

S pomočjo leme 4.6 lahko preslikavo  $h^{-1}|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  razširimo do zvezne preslikave  $g : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , za katero za vsak  $x \in X$  velja  $\|g(x) - h^{-1}(x)\| < a$ . Sedaj lahko definiramo preslikavo  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  kot kompozitum  $f := g \circ l \circ h$ . Ker ta funkcija slika iz  $\mathbb{I}^n$  in ne zavzame ničle, je za protislovje



SLIKA 14. Skica dokaza izreka 5.1.

dovolj, če se prepričamo, da funkcija ustreza pogojem izreka 3.2. Vzemimo  $t \in \mathbb{I}_i^-$ . Velja  $l(h(t)) = h(t)$ , saj je  $h(t) \in X$ . Za normo vektorja  $f(t) - t$  lahko naredimo naslednje ocene:

$$\|f(t) - t\| = \|g(l(h(t))) - h^{-1}(h(t))\| = \|g(h(t) - h^{-1}(h(t)))\| < a.$$

Ker je  $t_i = -a$ , je  $|f_i(t) - t_i| = |f_i(t) - (-a)| \leq |f(t) - t| < a$ , je  $f_i(t) < 0$ . Podobno lahko tudi v primeru, ko je  $t_i \in \mathbb{I}_i^+$ , sklepamo, da je  $f_i(t) > 0$ . Ugotovili smo, da je  $f_i(\mathbb{I}_i^-) < 0$  in  $f_i(\mathbb{I}_i^+) > 0$ , zato bi po predpostavkah izreka 3.2 moral obstajati  $x \in \mathbb{I}^n$ , ki se s  $f$  slika v 0. To je protislovje, saj je  $f$  preslikava, ki slika v prostor  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , torej je  $b \in \text{Int}(h(\mathbb{I}^n))$  in je  $h(U)$  odprta podmnožica v  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

S pomočjo izreka 5.1 lahko enostavno izpolnimo obljubo iz uvoda in dokažemo izrek o invarianci dimenzij, ki razreši vsaj nekatere nejasnosti, ki se nanašajo na pojem dimenzije.

**Posledica 5.2** (Izrek o invarianci dimenzije). *Naj bosta  $m$  in  $n$  naravni števili. evklidska prostora  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$  sta homeomorfna, če in samo če je  $m = n$ .*

*Dokaz.* Denimo, da sta za neki dve naravni števili  $m$  in  $n$  evklidska prostora  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$  homeomorfna. Torej obstaja zvezna bijektivna preslikava  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  z zveznim inverzom  $f^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dokazovali bomo s protislovjem. Predpostavimo, da je  $m \neq n$ . Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je  $m < n$ . Označimo z  $i$  vložitev, torej preslikavo iz prostora  $\mathbb{R}^m$  v  $\mathbb{R}^n$ , ki je definirana s predpisom  $i(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Tedaj je preslikava  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definirana kot kompozitum  $h := i \circ f$  zvezna injektivna preslikava, zato je po izreku 5.1 odprta. Toda slika prostora  $\mathbb{R}^n$ , ki je odprta podmnožica same sebe, s funkcijo  $h$  je množica

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n; \text{ kjer so } x_i \in \mathbb{R} \text{ za vsak } i \in \{1, \dots, m\}\},$$

ki pa je zaprta podmnožica prostora  $\mathbb{R}^n$ . Torej mora biti res  $m = n$ . □

#### SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

**continuous** zvezen

**uniformly continuous** enakomerno zvezen

**coloring** barvanje

**convex** konveksen

**convex hull** konveksna ogrinjača

**compact** kompakten – Metrični prostor je kompakten, če vsako odprto pokritje prostora vsebuje končno podpokritje. Podmnožica evklidskega prostora je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta.

**cover** pokritje

**cube** kocka

**dimension** dimenzija

**extension** razširitev

**face** lice

**homeomorphism** homeomorfizem – Preslikava je homeomorfizem, če je zvezna in ima zvezen inverz.

**homeomorphic** homeomorfen – Prostor  $X$  je homeomorfen prostoru  $Y$ , če obstaja homeomorfizem  $f : X \rightarrow Y$ .

**sequence** zaporedje

**simplex** simpleks

**triangulation** triangulacija

**vertex** oglišče

#### LITERATURA

- [1] C. T. Ahlbach, *A discrete aproach to Poincare-Miranda theorem*, magistrsko delo, Department of mathematics, Harvey Mudd College, 2013.
- [2] R. Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [3] F. Q. Gouvêa, *Was cantor surprised?*, amer. math. monthly **118** (2011) 198–209, doi: 10.4169/Amer.math.monthly.118.03.198, dostopno tudi na [https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/AMM-March11\\_Cantor.pdf](https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/AMM-March11_Cantor.pdf).
- [4] W. Kulpa, *Poincare and domain invariance theorem*, Acta univ. carolin. math. phys. **39**(1) (1998) 127–136, dostopno tudi na [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/702050/ActaCarolinae\\_039-1998-1\\_10.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/702050/ActaCarolinae_039-1998-1_10.pdf).
- [5] H. P. Manning, *Geometry of four dimensions*, Macmillan, New York, 1914, dostopno tudi na <https://archive.org/details/geometryoffourdi033495mbp/page/n3/mode/2up>.
- [6] U. Schäfer, *From Sperner's lemma to differential equations in Banach spaces : An introduction to fixed point theorems and their applications*, Karlsruher Institut für Technologie, 2014, doi: 10.5445/KSP/1000042944, dostopno tudi na <https://d-nb.info/106449790X/34>.
- [7] *Continuous mapping on a compact metric space is uniformly continuous*, [ogled 26. 4. 2020], dostopno na <https://math.stackexchange.com/questions/110573/continuous-mapping-on-a-compact-metric-space-is-uniformly-continuous>.
- [8] *Convex hull*, [ogled 22. 4. 2020], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Convex\\_hull](https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull).
- [9] *Peano curve*, [ogled 14. 5. 2020], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Peano\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Peano_curve).
- [10] *Simplex*, [ogled 22. 4. 2020], dostopno na <https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex>.