

Izrek o invarianci odprtih množic

Tom Gornik

mentor: prof. dr. Jaka Smrekar

18. februar 2020

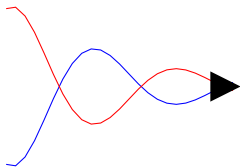
Struktura dela

- Pomožna lema
- Poincaré-Mirandov izrek
- Izrek o invarianci odprtih množic

Izvedba dokaza

Pomožna lema

Poincaré-Mirandov izrek



Izrek o invarianci
odprtih množic

Poincaré-Mirandov izrek

Definicija:

Naj bo število $a > 0$. Za hiperkocko $\mathbb{I}^n = [-a, a]^n$ definiramo:

- $\mathbb{I}_i^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n \mid x_i = -a\}$ in
- $\mathbb{I}_i^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n \mid x_i = a\}$

Poincaré-Mirandov izrek

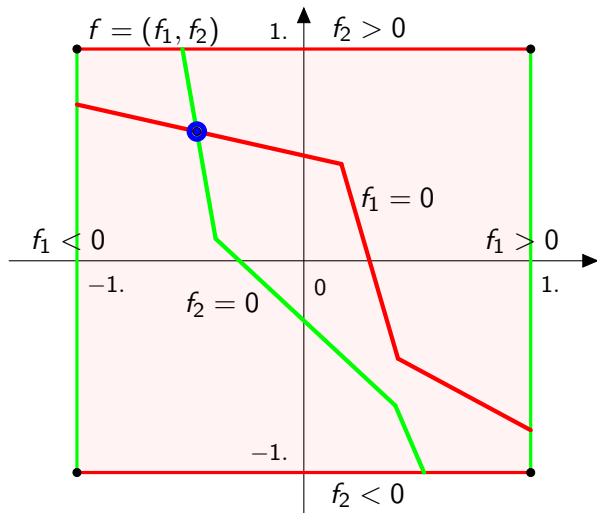
Poincaré-Mirandov izrek:

Naj bo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka zvezna preslikava, da je

- $f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0]$ in
- $f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty)$, za vsak $i \in (1, \dots, n)$.

Potem obstaja točka $x \in \mathbb{I}^n$, da je $f(x) = 0$.

Poincaré Mirandov izrek v dveh dimenzijah



Pomožna lema

Lema:

Naj bo X kompaktna podmnožica evklidskega prostora \mathbb{R}^n in $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zvezna preslikava. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo $Y \subset \mathbb{R}^n$ obstaja zvezna preslikava $g : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da velja:
 $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$ za vsak $x \in X$

Izrek o invarianco odprtih množic

Izrek o invarianco odprtih množic

Naj bo U odprta množica v evklidskem prostoru \mathbb{R}^n in naj bo $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zvezna injekcija. Potem je tudi slika $h(U)$ odprta množica v \mathbb{R}^n

Pomožna lema

Lema:

Naj bo X kompaktna podmnožica evklidskega prostora \mathbb{R}^n in $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zvezna preslikava. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo $Y \subset \mathbb{R}^n$ obstaja zvezna preslikava $g : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da velja:
 $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$ za vsak $x \in X$

Poincaré-Mirandov izrek

Poincaré-Mirandov izrek:

Naj bo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taka zvezna preslikava, da je

- $f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0]$ in
- $f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty)$, za vsak $i \in (1, \dots, n)$.

Potem obstaja točka $z \in \mathbb{I}^n$, da je $f(z) = 0$.