Izrek o invarianci odprtih množic

Tom Gornik

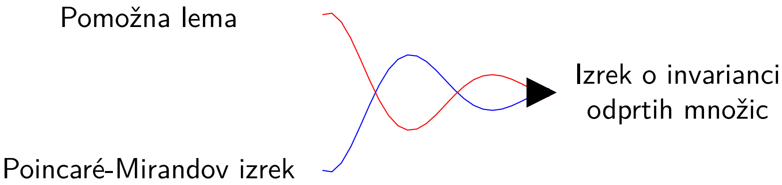
mentor: izr. prof. dr. Jaka Smrekar

16. junij 2020

Struktura dela

- Pomožna lema
- Poincaré-Mirandov izrek
- Izrek o invarianci odprtih množic

Izvedba dokaza



Poincaré-Mirandov izrek

Definicija:

Naj bo število $a > 0$. Za hiperkocko $\mathbb{I}^n = [-a, a]^n$ definiramo:

- $\mathbb{I}_i^- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{I}^n | x_i = -a\}$ in
- $\mathbb{I}_i^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{I}^n | x_i = a\}$

Poincaré-Mirandov izrek

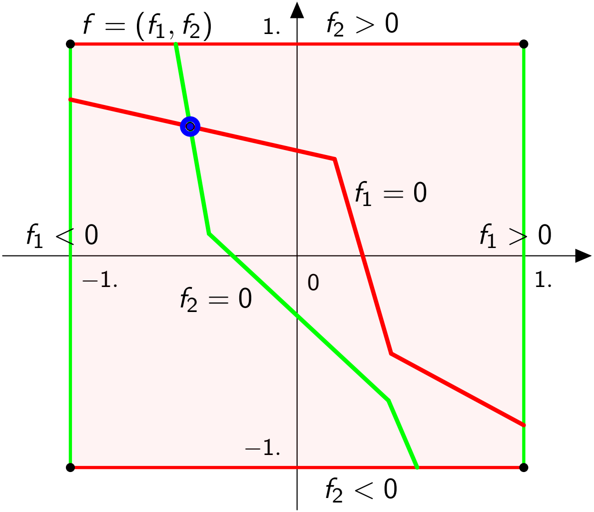
Poincaré-Mirandov izrek:

Naj bo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ taka zvezna preslikava, da je

- $f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0]$ in
- $f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty)$, za vsak $i \in (1, \ldots, n)$.

Potem obstaja točka $x \in \mathbb{I}^n$, da je $f(x) = 0$.

Poincaré Mirandov izrek v dveh dimenzijah



Pomožna lema

Lema:

Naj bo X kompaktna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in $f : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zvezna preslikava. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo $Y \subset \mathbb{R}^n$ obstaja zvezna preslikava $g : X \cup Y \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da velja:
$||g(x) - f(x)|| < \varepsilon$ za vsak $x \in X$

Izrek o invarianco odprtih množic

Izrek o invarianco odprtih množic

Naj bo U odprta množica v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ in naj bo $h : U \to \mathbb{R}^n$ zvezna injekcija. Potem je tudi slika $h(U)$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$

Pomožna lema

Lema:

Naj bo X kompaktna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in $f : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zvezna preslikava. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo $Y \subset \mathbb{R}^n$ obstaja zvezna preslikava $g : X \cup Y \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, da velja:
$||g(x) - f(x)|| < \varepsilon$ za vsak $x \in X$

Poincaré-Mirandov izrek

Poincaré-Mirandov izrek:

Naj bo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ taka zvezna preslikava, da je

- $f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0]$ in
- $f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty)$, za vsak $i \in (1, \ldots, n)$.

Potem obstaja točka $z \in \mathbb{I}^n$, da je $f(z) = 0$.