

# Izrek o invarianci odprtih množic

Tom Gornik

mentor: prof. dr. Jaka Smrekar

16. junij 2020

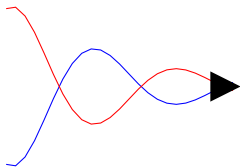
# Struktura dela

- Pomožna lema
- Poincaré-Mirandov izrek
- Izrek o invarianci odprtih množic

# Izvedba dokaza

Pomožna lema

Poincaré-Mirandov izrek



Izrek o invarianci  
odprtih množic

# Poincaré-Mirandov izrek

## Definicija:

Naj bo število  $a > 0$ . Za hiperkocko  $\mathbb{I}^n = [-a, a]^n$  definiramo:

- $\mathbb{I}_i^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n \mid x_i = -a\}$  in
- $\mathbb{I}_i^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n \mid x_i = a\}$

# Poincaré-Mirandov izrek

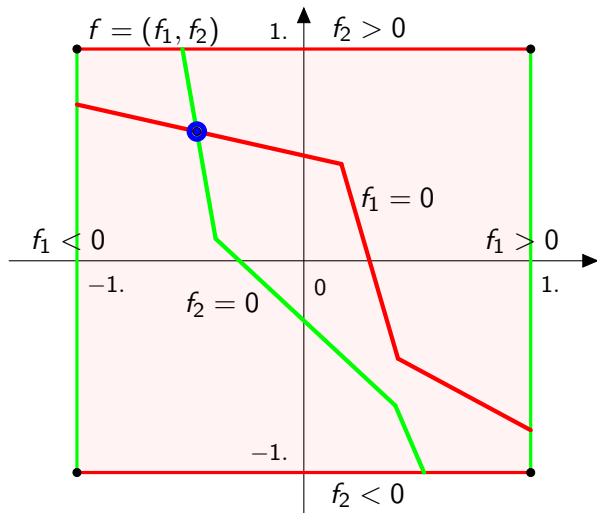
## Poincaré-Mirandov izrek:

Naj bo  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  taka zvezna preslikava, da je

- $f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0]$  in
- $f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty)$ , za vsak  $i \in (1, \dots, n)$ .

Potem obstaja točka  $x \in \mathbb{I}^n$ , da je  $f(x) = 0$ .

# Poincaré Mirandov izrek v dveh dimenzijah



## Pomožna lema

### Lema:

Naj bo  $X$  kompaktna podmnožica evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  in  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zvezna preslikava. Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo  $Y \subset \mathbb{R}^n$  obstaja zvezna preslikava  $g : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , da velja:  
 $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$  za vsak  $x \in X$

## Izrek o invarianco odprtih množic

### Izrek o invarianco odprtih množic

Naj bo  $U$  odprta množica v evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$  in naj bo  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zvezna injekcija. Potem je tudi slika  $h(U)$  odprta množica v  $\mathbb{R}^n$



## Pomožna lema

### Lema:

Naj bo  $X$  kompaktna podmnožica evklidskega prostora  $\mathbb{R}^n$  in  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  zvezna preslikava. Potem za vsak  $\varepsilon > 0$  in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo  $Y \subset \mathbb{R}^n$  obstaja zvezna preslikava  $g : X \cup Y \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , da velja:  
 $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$  za vsak  $x \in X$

# Poincaré-Mirandov izrek

## Poincaré-Mirandov izrek:

Naj bo  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  taka zvezna preslikava, da je

- $f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0]$  in
- $f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset [0, \infty)$ , za vsak  $i \in (1, \dots, n)$ .

Potem obstaja točka  $z \in \mathbb{I}^n$ , da je  $f(z) = 0$ .