UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tom Gornik

Izrek o invarianci odprtih množic

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2020

Kazalo

Izrek o invarianci odprtih množic

Povzetek

Zveznost in diskretnost sta v mnogih pogledih povsem nasprotujoča si pojma. Kljub temu se izkaže, da lahko s pomočjo kombinatorike na diskretnih množicah dokažemo veliko lastnosti zveznih funkcij. Glavna prednost takega načina dokazovanja je, da si je postopek dokaza (vsaj v primeru, ko dimenzija ni prevelika) lahko predstavljati in celo skicirati. Pozitivne strani se pokažejo predvsem pri dokazovanju izrekov o obstoju posebnih točk, kot sta negibna točka in ničla funkcije. Primer takega izreka je Poincaré-Mirandov izrek, ki je v tem delu dokazan s pomočjo kombinatorike na ogliščih triangulacije kocke in Spernerjeve leme. Z razširitvijo funkcije je dokazano, da Poincaré-Mirandov izrek implicira izrek o invarianci odprtih množic. Na koncu je predstavljena enostavna, a pomembna posledica izreka o invarianci odprtih množic, ki jo imenujemo izrek o invarianci dimenzije.

Domain invariance theorem

Abstract

Continuity and discreteness are often seen as two opposing concepts, but we can use discrete combinatorics to prove many properties of continuous functions. The main benefit is that we can easily (at least when the dimension is not too large) imagine and also draw some pictures of proof. This works particularly well when we try to prove a theorem on the existence of special points of a function, for example, a fixed point or a zero of a function. One example of this sort of theorem is the Poincaré-Miranda's theorem which is proved in this work by discrete combinatorics on vertices of a triangulation of a cube and Sperner's lemma. By the extension of a function, we can show that the Poincaré-Miranda's theorem implies the domain invariance theorem. In the end, we show a simple but important corollary, the dimension invariance theorem.

Math. Subj. Class. (2010): 52A20, 54F45, 54H25

Ključne besede: simpleks, Spernerjeva lema, Poincaré-Mirandov izrek, izrek o invarianci odprtih množic, izrek o invarianci dimenzij

Keywords: simplex, Sperner's lemma, Poincaré-Miranda's theorem, domain invariance theorem, dimension invariance theorem

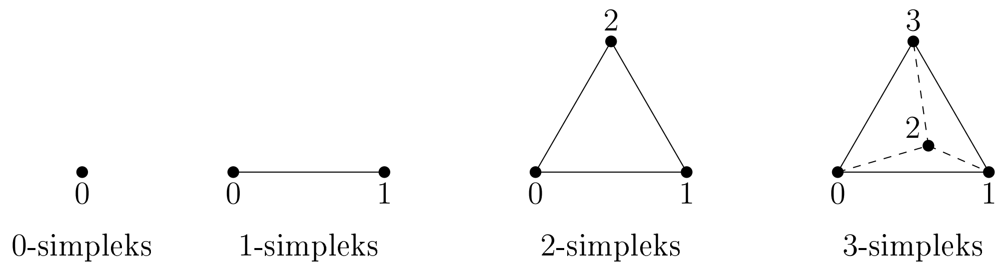
1. Uvod

Koncept dimenzije prostora se zdi zelo naraven in intuitiven. V svojih zapisih je o dimenzijah govoril že Aristotel. A ko beremo njegova dela, hitro vidimo, da je bila njegova predstava o dimenzijah drugačna od današnje. Aristotel namreč pravi: „Premica ima magnitudo v eni smeri, ravnina v dveh smereh, geometrijska telesa pa v treh smereh in poleg teh treh magnitud ni nobene več, kajti te tri so vse" [6, str. 1, moj prevod]. Matematiki so dolgo živeli v prepričanju, da so lahko matematični objekti največ tridimenzionalni. Kasneje so se začele pojavljati potrebe po štiridimenzionalnih objektih, saj so bile na primer v mehaniki enačbe veliko lažje, če je eno dimenzijo predstavljal čas. Tako smo počasi prišli do razmišljanja, da obstajajo večdimenzionalni in celo neskončno dimenzionalni prostori. Problem se pojavi, ko želimo primerjati prostore različnih dimenzij. Intuicija nam pravi, da prostora različnih dimenzij ne moreta biti enaka. V topologiji rečemo, da ne moreta biti homeomorfna. Homeomorfizem je bijektivna zvezna preslikava f, katere inverzna preslikava f^{-1} je tudi zvezna. Če lahko prostor X z neko homeomorfno preslikavo preslikamo na prostor Y, pravimo, da sta prostora X in Y homeomorfna. Matematiki so že od nekdaj verjeli, da je dimenzija topološka invarianta, kar pomeni, da imata homeomorfna prostora enako dimenzijo. To trditev je bilo zelo težko dokazati ne samo zato, ker je dokaz zapleten, ampak tudi zato, ker ni bilo dobre definicije dimenzije prostora. Kaj sploh je dimenzija prostora? Velikokrat na dimenzijo gledamo kot na najmanjše število parametrov, ki so potrebni za opis nekega prostora. Ta definicija je mnogim matematikom dolgo časa zadoščala, obstajali pa so tudi tisti, ki so vanjo dvomili. Eden prvih, ki je izrazil svoje dvome, je bil nemški matematik Georg Cantor v pismu, ki ga je 5. 1. 1874 poslal Richardu Dedekindu, prav tako nemškemu matematiku [3, str. 201]. Čeprav so mnogi matematiki mislili, da je noro poskusiti vsako točko v ravnini izraziti zgolj z enim parametrom iz premice, je Cantor to poskušal doseči in leta 1877 je dokazal, da obstaja bijektivna preslikava $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ [3, str. 203]. To pomeni, da za opis tudi več dimenzionalnih prostorov potrebujemo zgolj en parameter. Kljub presenetljivemu rezultatu pa obstoj take preslikave ni tako zelo ogrožal intuicije, saj je bila preslikava c močno nezvezna. Vedno bolj je postajalo očitno, da je potrebno poiskati dokaz, kar je neuspešno poskusilo kar nekaj matematikov. Potreba po dokazu se je še bolj pokazala, ko je leta 1890 italijanski matematik Giuseppe Peano predstavil krivulje, ki napolnijo cel prostor [10]. To pomeni, da lahko vsako točko v prostoru $\mathbb{R}^n$ zvezno opišemo samo z enim parametrom $t \in \mathbb{R}$. Problem take preslikave je, da ni injektivna, tako da še vedno obstaja upanje, da je intuicija dobra. Potrebno jo je samo posodobiti do trditve, da je dimenzija najmanjše število parametrov, ki jih potrebujemo, da z zvezno injektivno preslikavo opišemo prostor. Ekvivalentno lahko trdimo, da v primeru dveh prostorov X in Y, ki sta različnih dimenzij, ne obstaja zvezna bijektivna preslikava $f : X \to Y$. To je prvi dokazal J. L. Brouwer leta 1910 [3, str. 208]. Za dokaz je uporabil nekatere topološke rezultate, npr. homotopijo, ki jih mnogi ljubiteljski matematiki in tudi študenti dodiplomskega študija matematike ne poznajo.

V tem delu bomo predstavili elementaren dokaz tega izreka, ki se izogne abstraktnejšim topološkim trditvam. V poglavju 2 bomo razvili potrebno besedišče in spoznali nekaj matematičnih objektov ter njihovih lastnosti, ki so ključni pri dokazih v naslednjih poglavjih. V razdelkih 3 in 4 uporabimo rezultate iz poglavja 2 in dokažemo dva ključna gradnika dokaza Brouwerjevega izreka. V poglavju 5 lahko najdemo dokaz izreka o invarianci odprtih množic in njegove posledice, izreka o invarianci dimenzije. Vrstni red razdelkov je izbran tako, da ohrani nekaj matematične skrivnosti, na koncu pa se vse skupaj sestavi v celoto. Neučakan bralec lahko prebere najprej tudi poglavje 5 in se kasneje polno motiviran, z vedenjem zakaj in kako je snov uporabna, vrne na začetek ter naknadno zapolni vse vrzeli v dokazu.

2. Simpleksi

V tem razdelku bomo spoznali simplekse in z njimi povezano Spernerjevo lemo. Na koncu bomo nekatere lastnosti simpleksov posplošili tudi na kocke. Poimenovanje za simpleks izvira iz latinske besede „simplex", ki pomeni preprost oziroma enostaven, saj označuje eno najenostavnejših podmnožic prostora $\mathbb{R}^n$. Simpleks si lahko predstavljamo kot posplošitev pojma trikotnik, ki je dvodimenzionalen objekt, na ostale dimenzije. Tako v 0-dimenzionalnem prostoru simpleks označuje točko, enodimenzionalen simpleks predstavlja daljico, v dveh dimenzijah dobimo že znani trikotnik, v treh dimenzijah pa simpleks imenujemo tudi tetraeder itn. Na sliki 1 so prikazani simpleksi dimenzij 0, 1, 2 in 3 [11]. Preden podamo natančno definicijo simpleksa,



Slika 1. Prikazani so simpleksi v dimenzijah 0, 1, 2 in 3.

moramo spoznati afino neodvisne množice. Pri tem se bomo držali pravila, da bomo vektor od koordinatnega izhodišča do neke točke $x \in \mathbb{R}^n$ označili z enako oznako kot točko samo, le da bomo nad oznako narisali puščico. Takemu vektorju bomo rekli krajevni vektor točke x. Torej, krajevni vektor točke $x \in \mathbb{R}^n$ bomo označili z $\vec{x}$.

Definicija 2.1 ([11])**.** Množica točk $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ je *afino neodvisna*, če je množica vektorjev $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$ linearno neodvisna. V nasprotnem primeru je množica točk *afino odvisna*.

Opazimo lahko, da ima v tej definiciji prva točka, tj. x_0, posebno vlogo. Ker ne govorimo o urejenih množicah in vrstni red elementov ni pomemben, se moramo prepričati, da definicija res karakterizira afino neodvisne množice in ni odvisna od izbire prve točke. Denimo, da je množica vektorjev $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$ linearno neodvisna. Potem je enakost $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\vec{x}_i - \vec{x}_0) = 0$ izpolnjena natanko tedaj, ko so vsi koeficienti enaki 0, torej velja $\alpha_i = 0$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Recimo, da smo za prvi element izbrali neko drugo točko, na primer x_k. Radi bi videli, da je potem tudi enakost $\sum\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i(\vec{x}_i - \vec{x}_k) = 0$ izpolnjena samo v primeru, ko so vsi koeficienti v vsoti enaki 0. V to se prepričamo tako, da uporabimo znan matematični trik ter odštejemo in prištejemo isto vrednost. V tem primeru odštejemo in prištejemo $\vec{x}_0$.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \beta_i(\vec{x}_i - \vec{x}_k) &= \sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \beta_i(\vec{x}_i - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{x}_k) \\
&= \sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \beta_i(\vec{x}_i - \vec{x}_0) + \sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \beta_i(\vec{x}_0 - \vec{x}_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\vec{x}_i - \vec{x}_0),
\end{aligned}$$

kjer koeficiente γ_i določimo na naslednji način:

$$\gamma_i = \begin{cases} -\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} \beta_i & , i = k, \\ \beta_i & , i \neq k. \end{cases}$$

Ker je množica vektorjev $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$ linearno neodvisna, morajo biti vsi koeficienti $\gamma_i = 0$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Torej so tudi vsi koeficienti $\beta_i = 0$ za vsak $i \in \{0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$. Pokazali smo linearno neodvisnost množice vektorjev $\vec{x}_0 - \vec{x}_k, \vec{x}_1 - \vec{x}_k, \ldots, \vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}_k$, zato je zgornja definicija dobra.

S pomočjo točk v prostoru lahko definiramo različne množice. Želeli si bomo take množice, ki imajo naslednjo lastnost.

Definicija 2.2. Poljubna množica $K \in \mathbb{R}^n$ je *konveksna*, če je za vsaki dve točki $x, y \in K$ tudi daljica določena z x in y: $\{\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}; \lambda \in [0,1]\}$ vsa vsebovana v K. Primer in protiprimer konveksne množice si lahko pogledamo na sliki 2.

(A) Množica A je konveksna, saj je vsaka daljica, ki povezuje poljubni točki iz A, cela vsebovana v A.

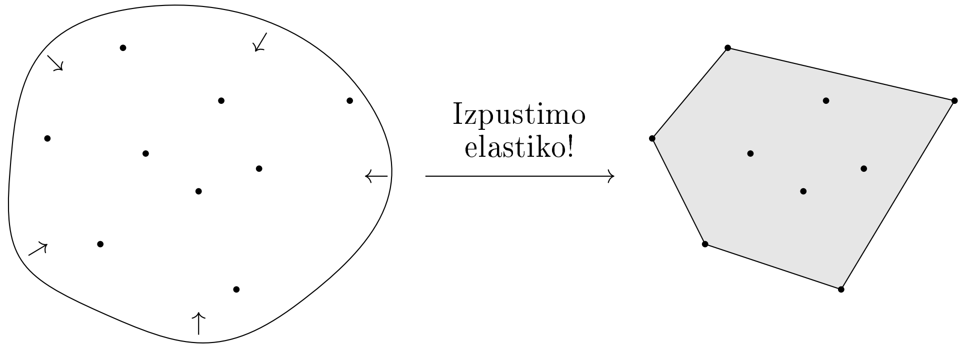
(B) Množica B ni konveksna, saj del daljice določene s točkama x in y, ki je pobarvan rdeče, ni vsebovan v B.

Slika 2. Slika prikazuje primer konveksne množice (levo) in množice, ki ni konveksna (desno).

Konveksnih množic, ki vsebujejo neko množico $A \in R^n$, je veliko. Za nas bodo posebej zanimive najmanjše konveksne množice, ki vsebujejo dano množico.

Definicija 2.3 ([9])**.** Najmanjšo konveksno množico, ki vsebuje poljubno množico točk $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$, imenujemo *konveksna ogrinjača* množice A in jo označimo s $\mathrm{conv}(A)$.

Konveksno ogrinjačo točk $x_0, x_1, \ldots, x_n$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ si lahko predstavljamo kot množico, ki jo omeji elastika, ko jo napnemo čez vse točke in nato spustimo. Prikaz konveksne ogrinjače si lahko pogledamo na sliki 3. Kako poiščemo konveksno ogrinjačo množice $A \in R^n$, nam pove naslednja trditev.



Slika 3. Slika prikazuje, kako dobimo konveksno ogrinjačo točk s pomočjo elastike. Na levi strani napnemo elastiko, tako da zaobjame vse točke. Na desni strani pa je prikazano, kako izgleda elastika po tem, ko jo izpustimo in nam omeji konveksno ogrinjačo – sivo pobarvana množica – prikazanih točk [9].

Trditev 2.4. *Konveksna ogrinjača* $\operatorname{conv}(A)$ *množice* A *je enaka preseku vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico* A.

Dokaz. Zaradi krajšega zapisa označimo množico, ki jo dobimo kot presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico A, s P. Ker je konveksna ogrinjača množice A najmanjša konveksna množica, ki vsebuje množico A, je vsebovana v vsaki konveksni množici, ki vsebuje množico A, torej tudi v množici P. Po drugi strani, pa je konveksna ogrinjača množice A konveksna množica, ki vsebuje množico A, zato vsebuje množico P. Ugotovili smo, da je $\operatorname{conv}(A) \subset P$ in $P \subset \operatorname{conv}(A)$, zato velja enakost $P = \operatorname{conv}(A)$. □

Iskanje konveksne množice kot presek vseh konveksnih množic je zamudno. Prav tako je težko preveriti, ali je neka točka vsebovana v konveksni ogrinjači množice A. Spodnja trditev nam eksplicitno pove, katere točke so vsebovane v konveksni ogrinjači množice točk $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Trditev 2.5 ([9])**.** *Za poljubne točke* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *v prostoru* $\mathbb{R}^n$ *je konveksna ogrinjača* $\operatorname{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_n\})$ *enaka množici*

$$C = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{x}_i;\ \textit{kjer so } \lambda_i \in [0,1] \textit{ za vsak } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \textit{ in } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dokaz. Vsaka konveksna množica, ki vsebuje množico točk $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, vsebuje tudi množico C. Torej je množica C vsebovana v preseku vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico A. Ker pa je množica C konveksna, vsebuje presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo množico A. Zato je množica C enaka konveksni ogrinjači množice A. □

Krajevni vektor vsake točke $x \in A = \operatorname{conv}(\{x_0, \ldots, x_n\})$ lahko izrazimo kot vsoto $\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$, ki zadošča pogoju $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, kjer so vsi koeficienti λ_i pozitivna realna števila. Vsoto, ki zadošča zahtevanim pogojem, imenujemo *konveksna kombinacija* točk $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Simpleks definiramo kot poseben primer konveksne ogrinjače.

Definicija 2.6 ([9])**.** Naj bo $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ afino neodvisna množica točk v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$. Konveksni ogrinjači S točk $x_0, x_1, \ldots, x_n$ iz množice V pravimo *n-dimenzionalni simpleks* ali *n-simpleks*. Točke x_i imenujemo *oglišča* simpleksa S. Ko želimo poudariti, katera oglišča določajo simpleks, lahko zapišemo tudi $S = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Za vsako neprazno podmnožico $U = \{y_0, y_1, \ldots, y_r\} \subset V$ lahko definiramo simpleks $L = \langle y_0, y_1, \ldots, y_r \rangle$, ki ga imenujemo *lice simpleksa S*. Če je lice L $(n-1)$-simpleks, ga imenujemo *glavno lice* simpleksa S.

Krajevni vektor vsake točke $x \in S = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ lahko izrazimo s pomočjo oglišč kot vsoto:

$$\vec{x} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{x}_i, \tag{1}$$

ki zadošča pogoju $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, kjer so vsi λ_i pozitivna realna števila. Zakaj smo konveksni ogrinjači dodali pogoj o afini neodvisnosti točk, bomo utemeljili z naslednjim razmislekom. Najprej preoblikujemo izraz (1).

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{x}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0 + \vec{x}_0) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{x}_x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0) \\
&= \vec{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0).
\end{aligned}$$

Torej lahko simpleks $S = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ zapišemo tudi v obliki:

$$S = \vec{x}_0 + \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{x}_i - \vec{x}_0); \lambda_i \in [0,1] \text{ za vsak } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ in } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}}_{\Delta}.$$

Ker so vektorji $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$ linearno neodvisni, je množica Δ, ki je določena z njimi, n-dimenzionalna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Simpleks S je enak množici Δ, premaknjeni za vektor $\vec{x}_0$, zato je tudi simpleks S n-dimenzionalna množica. Če bi bile točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ afino odvisne, bi bili vektorji $\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_n - \vec{x}_0$ linearno odvisni in bi bila množica Δ največ $(n-1)$-dimenzionalna. Tako z vsakim dodatnim ogliščem povečamo dimenzijo simpleksa. Števila λ_i v enačbi (1) so *baricentrične koordinate* točke x, kar zapišemo kot $x = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)_b$. Koordinate vektorja $\vec{x}$ so zvezne funkcije točke x, zato so tudi baricentrične koordinate točke x zvezno odvisne od položaja točke x. Preden nadaljujemo se moramo prepričati, da so baricentrične koordinate dobro definirane.

Trditev 2.7. *Baricentrične koordinate poljubne točke $x \in \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ so enolično določene.*

Dokaz. Recimo, da x izrazimo na dva načina kot $x = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)_b = (\beta_0, \ldots, \beta_n)_b$. Potem lahko zapišemo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \vec{x}_i.$$

Če enačbi odštejemo desno stran, dobimo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i - \sum_{i=0}^{n} \beta_i \vec{x}_i = 0,$$

kar preoblikujemo v enačbo

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \vec{x}_i = 0.$$

Uporabimo že znan trik ter odštejemo in prištejemo isto vrednost,

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_0 + \vec{x}_0) = 0.$$

Enačbo lahko zapišemo z dvema vsotama

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_0) + \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot \vec{x}_0 = 0,$$

kjer pri prvi vsoti parameter i začne teči pri 1, saj je pri vrednosti 0 tudi vrednost sumanda $(\alpha_0 - \beta_0) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_0)$ enaka 0. Druga vsota je enaka 0, saj velja:

$$\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_0 \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i - \sum_{i=0}^{n} \beta_i \right) = \vec{x}_0 (1 - 1) = 0.$$

Tako pridemo do enačbe

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_0).$$

Ker so vektorji $(\vec{x}_i - \vec{x}_0)$ linearno neodvisni za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$, morajo biti vsi koeficienti $\alpha_i - \beta_i = 0$. Zato velja $\alpha_i = \beta_i$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sedaj lahko iz enakosti

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \vec{x}_i$$

in iz dejstva, da je koeficient α_i enak koeficientu β_i za vsak $i = 1, \ldots, n$, sklepamo, da sta enaka tudi koeficienta α_0 in β_0. □

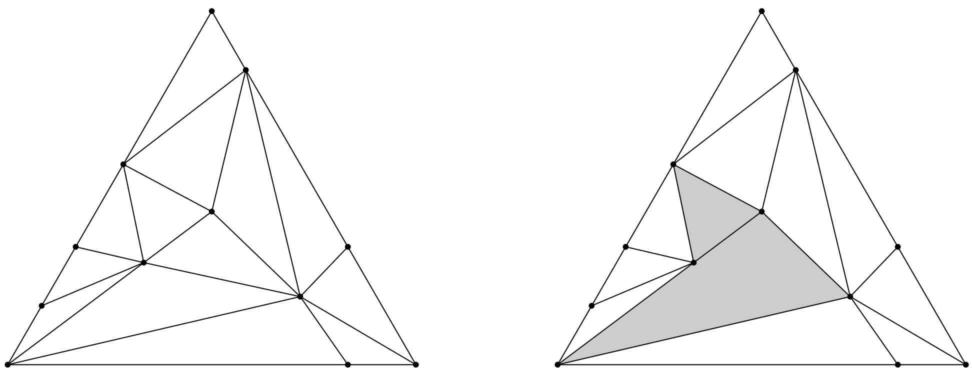
Pri dokazovanju različnih rezultatov s pomočjo simpleksov si večkrat pomagamo z delitvijo simpleksa na manjše simplekse. Da imamo čim več nadzora pri dokazovanju, definiramo posebno delitev simpleksa, ki jo imenujemo triangulacija.

Definicija 2.8. Množica simpleksov K v evklidskem prostoru R^n je *simplicialni kompleks*, če zadošča naslednjim pogojem:

(1) Vsako lice L simpleksa $S \in K$ je tudi vsebovano v K.
(2) Neprazen presek dveh simpleksov iz K je lice obeh simpleksov.

Unijo vseh simpleksov iz simplicialnega kompleksa K bomo označili s $|K|$.

Definicija 2.9. Simplicialni kompleks K je *triangulacija* simpleksa S, če je $|K| = S$.



(A) Delitev je triangulacia. (B) Delitev ni triangulacija.

Slika 4. Slika prikazuje primer triangulacije (levo) in primer delitve, ki ni triangulacija (desno), saj presek osenčenih simpleksov ni lice obeh simpleksov.

Pri poljubnih delitvah simpleksa S nimamo nadzora nad tem, kako veliki simpleksi nastopajo v delitvi. Želeli bi si poiskati take delitve, ki vsebujejo zgolj simplekse, ki so manjši od vnaprej predpisane vrednosti $\varepsilon > 0$. Take delitve lahko poiščemo s pomočjo pojma baricentra:

Definicija 2.10. Če je $S = \langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$ simpleks, je *baricenter* simpleksa S točka b_S z baricentričnimi koordinatami $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right)_b$.

S pomočjo baricentra lahko definiramo delitev simpleksa S, pri kateri imamo nadzor nad velikostjo delilnih simpleksov. Za mero, kako velik je simpleks, imamo več možnosti. Za mero bomo izbrali diameter, ki ga definiramo na naslednji način.

Definicija 2.11. Največjo razdaljo med dvema točkama simpleksa S imenujemo *diameter* simpleksa S. Torej,

$$\operatorname{diam}(S) = \max\{\mathrm{d}(x, y); x, y \in S\}.$$

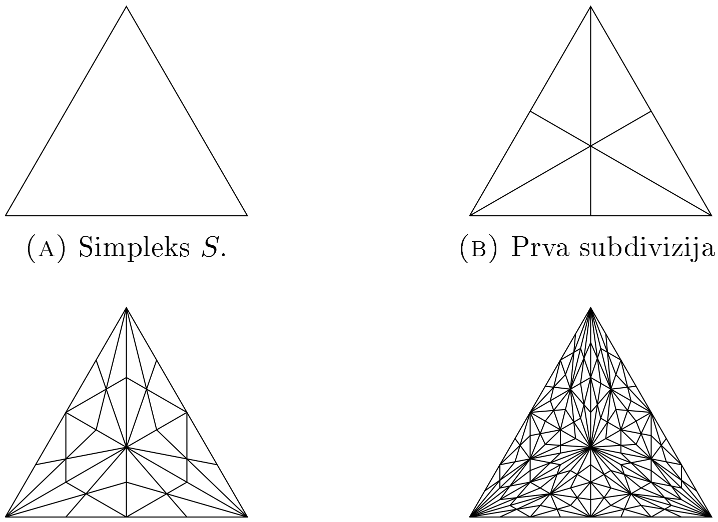
Poglejmo si eno od možnih delitev simpleksa S.

Definicija 2.12. *Baricentrično delitev ali subdivizijo* n-simpleksa S definiramo induktivno na dimenzijo simpleksa in jo označimo s $\mathrm{sd}(S)$. Baricentrična delitev 0-simpleksa S_0 je množica, ki vsebuje samo simpleks S_0. Torej, $\mathrm{sd}(S_0) = \{S_0\}$. Za vsak $i = 0, 1, \ldots, n$ lahko glavna lica n-simpleksa $S = \langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$ označimo z $L_i = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots v_n \rangle$. Zapišimo unijo baricentričnih delitev vseh glavnih lic simpleksa S na naslednji način:

$$Z = \bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{sd}(L_i).$$

Baricentrična delitev n-simpleksa S vsebuje simplekse $R = \langle b_s, t_0, t_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$, kjer je b_S baricenter simpleksa S, točke $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ pa so oglišča nekega simpleksa T iz množice Z. Opisano baricentrično delitev imenujemo tudi prva baricentrična delitev. Če vsak simpleks $P \in \mathrm{sd}(S)$ razdelimo z baricentrično delitvijo, dobimo drugo baricentrično delitev, ki jo zapišemo z $\mathrm{sd}^2(S)$. Postopek lahko nadaljujemo poljubno dolgo in tako za vsako naravno število $k \in \mathbb{N}$ konstruiramo k-to baricentrično delitev $\mathrm{sd}^k(S)$.

Prepričajmo se, da imamo pri baricentrični delitvi res nadzor nad tem, kako veliki simpleksi nastopajo v delitvi.



(A) Simpleks S. (B) Prva subdivizija.

(C) Druga subdivizija. (D) Tretja subdivizija.

SLIKA 5. Slika prikazuje primer prve, druge in tretje subdivizije.

Trditev 2.13. [4] *Pri baricentrični delitvi* $\mathrm{sd}(S)$ *n-simpleksa S za vsak simpleks $R \in \mathrm{sd}(S)$ velja neenakost:*

$$\mathrm{diam}(R) \leq \frac{n}{n+1}\,\mathrm{diam}(S).$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da je za neki simpleks $S = \langle v_0, v_1, \ldots v_n\rangle$ diameter simpleksa enak dolžini najdaljše stranice simpleksa S. Poglejmo si dve točki $x, y \in S$. Razdaljo med njima izračunamo na naslednji način:

$$\mathrm{d}(x,y) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Krajevni vektor točke y lahko zapišemo s pomočjo oglišč simpleksa:

$$\|\vec{x} - \sum_{i=0}^{n} t_i \vec{v_i}\|,$$

kar lahko preoblikujemo in ocenimo:

$$\|\sum_{i=0}^{n} t_i(\vec{x} - \vec{v_i})\| \leq \sum_{i=0}^{n} t_i \|(\vec{x} - \vec{v_i})\| \leq \sum_{i=0}^{n} t_i \max_{i=0,\ldots,n}(\|(\vec{x} - \vec{v_i})\|) = \max_{i=0,\ldots,n}(\|(\vec{x} - \vec{v_i})\|).$$

Ugotovili smo, da je razdalja največja, ko je y oglišče simpleksa S. Zaradi simetričnosti razdalje mora biti za maksimizacijo razdalje tudi x oglišče simpleksa. Sedaj lahko pokažemo, da za vsak simpleks $R \in \mathrm{sd}(S)$ velja neenakost $\mathrm{diam}(R) \leq \frac{n}{n+1}\,\mathrm{diam}(S)$. Trditev bomo dokazovali z indukcijo na dimenzijo n n-simpleksa S. Za $n = 0$ trditev očitno velja. Predpostavimo, da velja tudi za $(n-1)$-simpleks. Poglejmo si poljuben n-simpleks $T = \langle t_0, t_1, \ldots, t_n\rangle \in \mathrm{sd}(S)$. Diameter simpleksa T je enak dolžini njegove najdaljše stranice, zato si poglejmo razdaljo med poljubnima ogliščema t_i in t_j simpleksa T. Če sta obe oglišči različni od baricentra b_S simpleksa S, ležita v nekem licu L simpleksa S. Natančneje, ležita v nekem simpleksu iz baricentrične delitve lica L. Po indukcijski predpostavki je

$$d(t_i, t_j) \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(L) \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(S).$$

Kako pa je v primeru, ko je ena točka enaka baricentru? Brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $t_i = b_S$. Razdalja med b_S in t_j je po premisleku zgoraj največja, ko je t_j oglišče simpleksa S. Denimo, da je $t_j = v_k$. Označimo z b_k baricenter lica $L_k = \langle v_0, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$, ki ima vse koordinate enake $\frac{1}{n}$, razen na k-tem mestu je baricentrična koordinata enaka 0. Ocenimo sedaj razdaljo $d(b_S, v_k)$:

$$d(b_S, v_i) = \|\vec{b}_S - \vec{v}_k\|.$$

Krajevni vektor baricentra b_S zapišimo s pomočjo točke b_k kot $\vec{b}_S = \frac{1}{n+1}\vec{v}_k + \frac{n}{n+1}\vec{b}_k$ in računamo:

$$\begin{aligned}
\|\vec{b}_S - \vec{v}_k\| &= \|\frac{1}{n+1}\vec{v}_k + \frac{n}{n+1}\vec{b}_k - \vec{v}_k\| \\
&= \| - \frac{n}{n+1}\vec{v}_k + \frac{n}{n+1}\vec{b}_k\| \\
&= \|\frac{n}{n+1}(\vec{b}_k - \vec{v}_k)\| \\
&= \frac{n}{n+1}\|(\vec{b}_k - \vec{v}_k)\| \\
&\leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(S).
\end{aligned}$$

Ugotovili smo, da je razdalja med poljubnima ogliščema simpleksa $R \in \operatorname{sd}(S)$ manjša ali enaka kot $\frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(S)$, iz česar sklepamo, da je $\operatorname{diam}(R) \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(S)$ $\square$

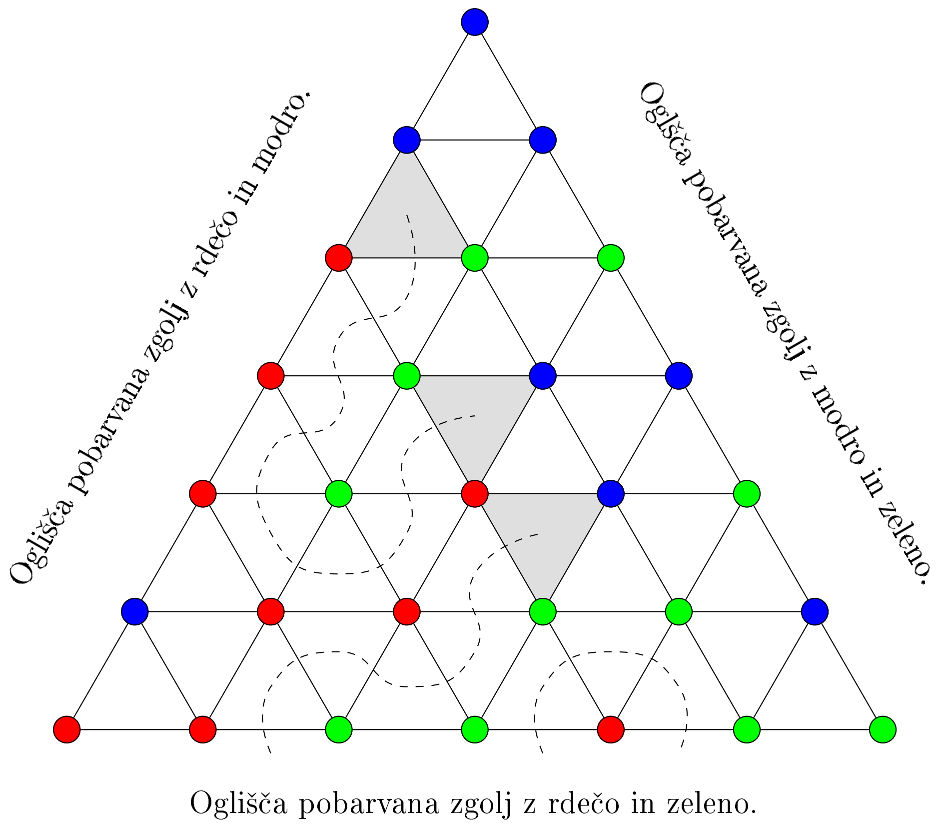
Pri obravnavi triangulacij simpleksov lahko počnemo veliko stvari. Ena taka, ki bi se jo lahko spomnil celo otrok v vrtcu, je, da bi simplekse iz triangulacije pobarvali. Tako lahko dobimo zanimive slike. Mi bomo obravnavali lastnosti, ki jih opazimo pri barvanju oglišč določene triangulacije.

Definicija 2.14 ([1, str. 9, definicija 1])**.** Naj bo podan n-simpleks $S \in \mathbb{R}^n$ s triangulacijo T. Označimo množico oglišč triangulacije T z V. Poljubno preslikavo $b : V \to \{0, 1, \ldots, n\}$ imenujemo *barvanje triangulacije* T. Za oglišče $v \in V$ pravimo številu $b(v)$ *barva* ali *oznaka* oglišča v.

Barve navadno označujemo s številkami, saj bi pri velikem številu različnih barv nastala zmeda in bi se nekatere barve težko ločilo med seboj. Kadar v triangulaciji nastopa majhno število barv, so slike lepše, če jih ponazorimo s pravimi barvami. Če določimo pravila, s katerimi barvami lahko pobarvamo določena oglišča, lahko dobimo zanimive lastnosti. Primer takega pravila in njegove lastnosti je opazoval in opisal Emanuel Sperner, po katerem se imenuje eno od pravil za barvanje triangulacije simpleksa.

Definicija 2.15 ([1, str. 9, definicija 2])**.** Pravimo, da je barvanje triangulacije T n-simpleksa S *Spernerjevo*, če imajo oglišča n-simpleksa S vse oznake iz množice $\{0, 1, \ldots, n\}$ in je vsako oglišče triangulacije T, ki pripada licu L n-simpleksa S, pobarvano enako kot eno od oglišč lica L.

Za n-simpleks, ki ima oglišča pobarvana z vsemi barvami iz množice $\{0, 1, \ldots, n\}$, pravimo, da je *popolno pobarvan*. Naslednji izrek izpostavi eno zanimivo lastnost takega barvanja.



SLIKA 6. Vidimo Spernerjevo barvanje s tremi popolno pobarvanimi trikotniki, ki smo jih zaradi preglednosti osenčili. Zaradi lepše predstave smo barve namesto s številčnimi vrednosti ponazorili s pravimi barvami [7, str. 4, slika 1.4].

Lema 2.16 (Spernerjeva lema [1, str. 10, izrek 4])**.** *Vsaka triangulacija k-simpleksa s Spernerjevim barvanjem vsebuje liho število popolno pobarvanih k-simpleksov.*

Dokaz. Naj bo S k-simpleks in naj bo T njegova triangulacija. Lemo bomo dokazovali z indukcijo na dimenzijo k simpleksa S.

Baza indukcije ($k = 0$). V tem primeru lema očitno drži, saj je 0-simpleks točka. Pri Spernerjevem barvanju točke imamo samo eno možnost in tako dobimo en popolno pobarvan 0-simpleks.

Indukcijska predpostavka ($k-1$). Predpostavimo, da lema drži v dimenziji ($k-1$). Torej v vsaki triangulaciji $(k-1)$-simpleksa s Spernerjevim barvanjem najdemo liho število $(k-1)$-simpleksov, ki so popolno pobarvani.

Indukcijski korak ($(k-1) \implies k$). Poskusimo dokazati pravilnost izjave tudi v dimenziji k. Izberimo poljubno triangulacijo T k-simpleksa S. Naj bodo oglišča triangulacije T pobarvana s Spernerjevim barvanjem. Za poljubno naravno število $i \in \mathbb{N}$ označimo število vseh popolno pobarvanih i-simpleksov iz T s S_p^i, število tistih popolno pobarvanih i-simpleksov, ki se nahajajo na robu simpleksa S, pa z R_p^i. Vsak popolno pobarvan k-simpleks iz triangulacije T vsebuje natanko en popolno pobarvan $(k-1)$-simpleks, medtem ko ostali simpleksi lahko vsebujejo dva ali nobenega. Če k-simpleks vsebuje oglišča, pobarvana z vsemi barvami $1, 2, \ldots, k-1$, kjer se ena barva ponovi dvakrat, tak simpleks vsebuje dva popolno pobarvana simpleksa. Ostali simpleksi ne vsebujejo popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov. Iz zgornjega lahko sklepamo, da je $S_p^k \equiv S_p^{k-1} \pmod 2$. Pri štetju popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov smo vsakega iz notranjosti S šteli dvakrat, tiste iz roba S pa samo enkrat. Zato velja tudi $S_p^{k-1} \equiv R_p^{k-1} \pmod 2$. Torej velja kongruenca $S_p^k \equiv R_p^{k-1} \pmod 2$. Popolno pobarvane $(k-1)$-simplekse lahko zaradi Spernerjevega barvanja najdemo zgolj na enem glavnem licu L simpleksa S. Po indukcijski predpostavki vsebuje L liho mnogo popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov, kar pomeni, da je R_p^{k-1} liho število. Torej je tudi S_p^k lih. □

V posebnem izrek 2.16 pove, da vsaka triangulacija simpleksa S s Spernerjevim barvanjem vsebuje vsaj en popolno pobarvan simpleks R. Ker sta simpleksa S in R oba popolno pobarvana, si lahko predstavljamo, da se nekatere lastnosti prenesejo iz S na R. To dejstvo lahko uporabimo pri dokazovanju nekaterih trditev in tudi za nas bo odigrala pomembno vlogo pri dokazu izreka 3.2.

Poleg simpleksov bomo spoznali še ene enostavne množice. To so kocke. Tudi z njimi si bomo lahko zaradi enostavnosti velikokrat pomagali pri dokazovanju topoloških rezultatov.

Definicija 2.17. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno pozitivno realno število in naj bo interval $\mathbb{I} = [-a, a]$. Potem je $C := \mathbb{I}^n$ *n-dimenzionalna kocka* v $\mathbb{R}^n$ oziroma *n-kocka.*

Tako kot simpleksi, so tudi kocke omejene z lici.

Definicija 2.18. Kocka $C = [-a, a]^n$ je omejena z *lici.* Za vsako naravno število $i < n$ definiramo nasprotni i-lici kot množici $C_i^- = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, -a, x_{i-1}, \ldots, x_n\}$ in $C_i^+ = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i-1}, \ldots, x_n\}$. Kadar govorimo o poljubnem licu, bomo zanj uporabili oznako L.

Lastnosti, ki smo jih obravnavali pri simpleksih, bomo posplošili na kocke. Nekatere lastnosti izgledajo skoraj enako za simplekse in za kocke, a, kot bomo videli, moramo biti pri posploševanju previdni, saj lahko pride do sprememb ravno tam, kjer jih ne pričakujemo. Baricentrično delitev simpleksa smo definirali na tak način, da velja tudi za kocke. Le baricenter kocke definiramo malo drugače.

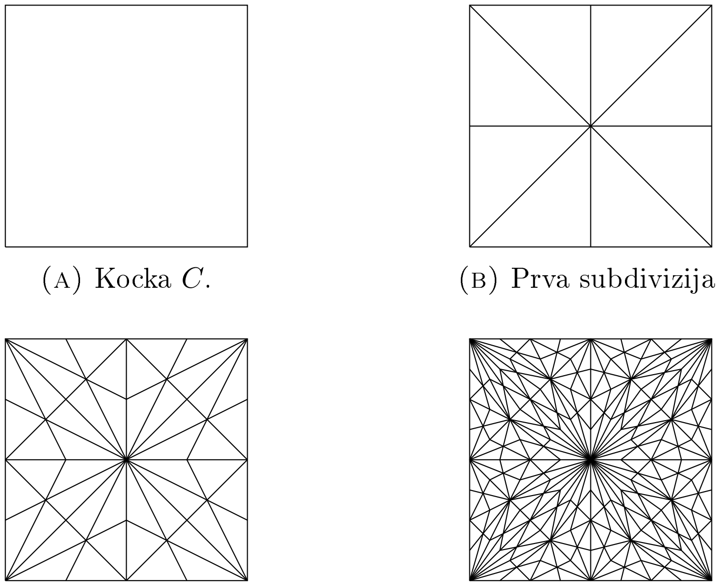
Definicija 2.19. Za poljubno pozitivno realno število a in naravno število n imenujemo točko $(0, \ldots, 0)$ baricenter kocke $C = [-a, a]^n$.

Baricentrična subdivizija kocke je definirana enako kot v primeru simpleksov.

Definicija 2.20. *Baricentrično delitev ali subdivizijo* n-kocke C definiramo induktivno na dimenzijo kocke in jo označimo s $\mathrm{sd}(C)$. Ker je 0-kocka C_0 samo točka, je baricentrična delitev množica, ki vsebuje samo to točko. Torej, $\mathrm{sd}(C_0) = \{C_0\}$. Naj bo Z množica, ki vsebuje vse simplekse iz baricentričnih delitev vseh lic kocke C. Baricentrična delitev n-kocke C vsebuje simplekse $R = \langle b_s, t_0, t_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$, kjer je b baricenter kocke C, točke $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ pa so oglišča nekega simpleksa T iz množice Z. Opisano baricentrično delitev imenujemo tudi prva baricentrična delitev. Če vsak simpleks $P \in \mathrm{sd}(S)$ razdelimo z baricentrično delitvijo, dobimo drugo baricentrično delitev, ki jo zapišemo s $\mathrm{sd}^2(C)$. Postopek lahko nadaljujemo poljubno dolgo in tako za vsako naravno število $k \in \mathbb{N}$ konstruiramo k-to baricentrično delitev $\mathrm{sd}^k(C)$.

Tako kot pri simpleksih, lahko tudi pri kockah barvamo oglišča triangulacije.

Definicija 2.21. Naj bo podana n-kocka $C \in \mathbb{R}^n$ s triangulacijo T. Označimo množico vseh oglišč triangulacije T z V. *Barvanje triangulacije* T je preslikava $b : V \to \{0, 1, \ldots, n\}$.



(A) Kocka C. (B) Prva subdivizija.

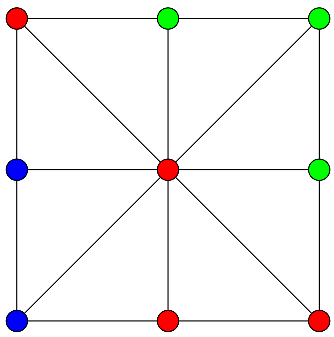
(C) Druga subdivizija. (D) Tretja subdivizija.

Slika 7. Slika prikazuje primer prve, druge in tretje subdivizije kocke C.

Tudi pri kockah bi si želeli tako pravilo za barvanje triangulacije kocke, da bi vsaka triangulacija kocke vsebovala vsaj en popolno pobarvan simpleks. Ker si želimo popolno pobarvan simpleks, nam ni potrebno vsakega oglišča kocke pobarvati s svojo barvo, saj je za n-kocko dovolj že $n+1$ barv. Pravilo za Spernerjevo barvanje simpleksa lahko posplošimo na n-kocko na naslednji način. Definirajmo naivno pravilo:

(1) Na ogliščih so uporabljene vse barve iz množice $\{0, 1, \ldots, n\}$,
(2) vsako oglišče v iz lica L kocke C je enako pobarvano kot eno izmed oglišč, ki ležijo na licu L.

S primerom na sliki 2 pokažimo, da barvanje, ki zadošča naivnemu pravilu, nima želene lastnosti. Naivno pravilo lahko dopolnimo tako, da bo vsaka triangulacija



Slika 8. Triangulacija n-kocke C, pobarvana po naivnem pravilu ne, vsebuje popolno pobarvanega n-simpleksa. Zaradi lepše slike smo barvo 0 prikazali z modro, barvo 1 z rdečo, 2 pa z zeleno.

n-simpleksa, pobarvana po tem pravilu, vsebovala popolno pobarvan n-simpleks. Če pogledamo dokaz izreka 2.16, vidimo, da je bilo ključno dejstvo, da je bilo na robu liho število popolno pobarvanih simpleksov. Na sliki pa temu ni tako. Popolno pobarvani 1-simpleksi so tisti, ki so pobarvani z modro in rdečo. Simpleks S na robu vsebuje 2 popolno pobarvana 1-simpleksa. Če naivnemu barvanju dodamo pogoj, ki nam za vsako triangulacijo n-kocke zagotavlja liho število popolno pobarvanih $(n-1)$-simpleksov na robu, dobimo Spernerjevo barvanje za kocke.

Definicija 2.22. Spernerjevo barvanje triangulacije n-kocke C z oglišči V je preslikava $b : V \to \{0, 1, \ldots, n\}$, pri kateri so izpolnjeni trije pogoji.

(1) Na ogliščih so uporabljene vse barve iz množice $\{0, 1, \ldots, n\}$,
(2) vsako oglišče v iz lica L kocke C je enako pobarvano kot eno izmed oglišč, ki ležijo na licu L.
(3) kocka C vsebuje liho mnogo popolno pobarvanih glavnih lic,

Definicija Spernerjevega barvanja je precej bolj komplicirana kot definicija Spernerjevega barvanja za simplekse, saj je definicija definirana rekurzivno. Pokazali bomo, da vsaka triangulacija n-kocke, pobarvana s Spernerjevim barvanjem vsebuje vsaj en popolno pobarvan n-simpleks.

Lema 2.23 (Spernerjeva lema za kocke)**.** *V vsakem Spernerjevem barvanju triangulacije k-kocke je liho mnogo popolno pobarvanih k-simpleksov.*

Dokaz. Naj bo C k-kocka in naj bo T njena triangulacija. Lemo bomo dokazovali z indukcijo na dimenzijo kocke k.

Baza indukcije ($k = 0$). Če je $k = 0$, lema očitno drži, saj je 0-kocka točka. Pri Spernerjevem barvanju točke, pa imamo samo eno možnost in tako dobimo eno popolno pobarvano 0-kocko.

Indukcijska predpostavka $(k-1)$. Predpostavimo, da lema drži v dimenziji $(k-1)$. Torej v vsaki triangulaciji $(k-1)$-kocke s Spernerjevim barvanjem najdemo liho število $(k-1)$-simpleksov, ki so popolno pobarvani.

Indukcijski korak $((k-1) \to k)$. Pravilnost izjave želimo dokazati tudi v dimenziji k. Za poljubno triangulacijo T k-kocke C naj bodo oglišča triangulacije T pobarvana s Spernerjevim barvanjem. Označimo število vseh popolno pobarvanih i-simpleksov iz T s C_p^i, število tistih popolno pobarvanih i-simpleksov, ki se nahajajo na robu simpleksa S pa z R_p^i. Vsak popolno pobarvan k-simpleks vsebuje natanko en popolno pobarvan $(k-1)$-simpleks, medtem ko ostali simpleksi lahko vsebujejo dva ali pa nobenega. Če k-simpleks vsebuje oglišča, pobarvana z vsemi barvami $0, 1, \ldots, k-1$, kjer se ena barva ponovi dvakrat, tak simpleks vsebuje dva popolno pobarvana simpleksa. Ostali simpleksi pa zagotovo ne vsebujejo popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov, saj niti ne vsebujejo vseh barv iz množice $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Iz zgornjega lahko sklepamo, da je

$$S_p^k \equiv S_p^{k-1} \pmod 2. \tag{2}$$

Pri štetju popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov smo vsakega iz notranjosti C šteli dvakrat, tiste iz roba C pa samo enkrat. Torej velja kongruenca

$$S_p^{k-1} \equiv R_p^{k-1} \pmod 2. \tag{3}$$

Iz enačbe (2) in enačbe (3) sledi, da je $S_p^k \equiv R_p^{k-1} \pmod 2$. Ker je kocka pobarvana s Spernerjevim barvanjem, ima liho število popolno pobarvanih lic, ki zaradi indukcijske predpostavke vsebujejo liho število popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov. Ker na drugih licih ni popolno pobarvanih $(k-1)$-simpleksov, je število R_p^{k-1} liho. Zato je tudi S_p^k lih. □

Enako kot pri simpleksih, se nekatere lastnosti prenašajo iz celotne kocke C na manjše simplekse, kar bo za nas zelo pomembno.

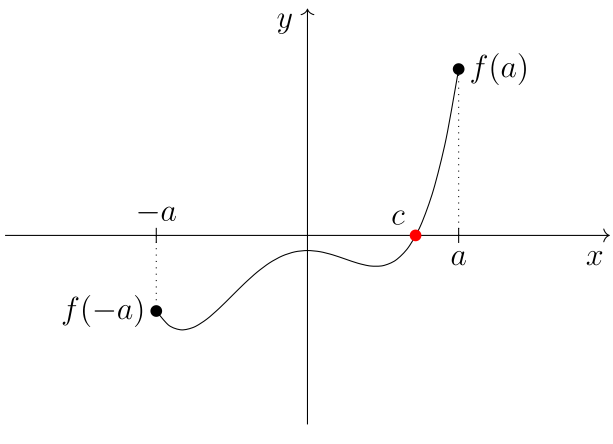
3. Poincaré-Mirandov izrek

Sedaj se bomo posvetili ničlam preslikav, tj. takim točkam, ki jih neka preslikava $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ slika v nič. Iskali bomo torej odgovor na vprašanje: „Kakšni pogoji nam zagotavljajo obstoj take točke c, za katero je $f(c) = (0, 0, \ldots, 0)$?". Zaradi krajšega zapisa bomo točko $(0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$, ko ne bo dvomov o dimenziji, označevali z oznako $\underline{0}$. V primeru funkcije $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ nam odgovor na vprašanje ponudi Bolzanov izrek o srednji vrednosti.

Izrek 3.1 (Bolzanov izrek o srednji vrednosti)**.** *Izberimo poljubno pozitivno realno število a in definirajmo interval $\mathbb{I} := [-a, a]$. Za zvezno funkcijo $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, za katero velja $f(-a) \leq 0 \leq f(a)$, obstaja točka $c \in [-a, a]$, da je $f(c) = 0$.*

Intuitivno nam izrek pove, da ne moremo povezati točke iz spodnje polravnine s točko iz zgornje polravnine, ne da bi pri tem sekali abscisno os, kar se lepo vidi iz slike 9. Izrek nam ne pove, kako lahko iskano točko najdemo, nam pa samo iz vrednosti funkcije na robu pove, kdaj lahko z gotovostjo trdimo, da ima funkcija ničlo. Ključno vlogo pa ima seveda zveznost funkcije.

Dokaz izreka 3.1. Če je $f(-a) = 0$ ali pa je $f(a) = 0$, smo tako točko že našli. V nasprotnem predpostavimo, da ne obstaja tako število $c \in \mathbb{I}$, za katerega je vrednost funkcije $f(c) = 0$. Definiramo množici $A := f^{-1}(-\infty, 0)$ in $B := f^{-1}(0, \infty)$. Množici sta disjunktni, saj sta prasliki disjunktnih množic. Zaradi zveznosti funkcije f sta množici tudi odprti. Hitro lahko vidimo, da sta neprazni, saj je $-a \in A$ in $a \in B$. Unija množic A in B je enaka intervalu $\mathbb{I}$, zato množici A in B razdelita interval $\mathbb{I}$ na dve disjunktni množici, kar pa je protislovje, saj vemo, da je interval povezana množica. Torej je bila naša predpostavka, da ne obstaja tak c, da je $f(c) = 0$, napačna. $\square$



Slika 9. Slika prikazuje dogajanje, ki ga opisuje izrek 3.1

Zgornji rezultat bi si želeli posplošiti na višje dimenzije. Večdimenzionalni analog funkcijam so preslikave, intervalom pa n-kocke. Ostane le še vprašanje, kako bi posplošili pogoje, da bi imela preslikava podobno lastnost kot zgoraj. Razmislimo, kako bi posplošili izrek na zvezno preslikavo $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$. Najprej lahko preslikavo zapišemo s pomočjo komponentnih funkcij $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Da lažje ugotovimo, kakšne pogoje bi izbrali, najprej obravnavamo malo poenostavljen primer. Kakšne pogoje bi postavili, če bi bila vsaka koordinatna funkcija f_i odvisna samo od ene koordinate točke x, npr. x_i? Potem lahko vsako koordinatno funkcijo f_i zapišemo kot $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_i(x_i)$, kjer so funkcije $g_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$. V tem primeru za vsako funkcijo g_i uporabimo enake zahteve, kot v izreku 3.1, kar pa nam za funkcije f_i porodi naslednji pogoj:

$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -a, x_{i+1}, \dots, x_n) < 0 < f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n). \tag{4}$$

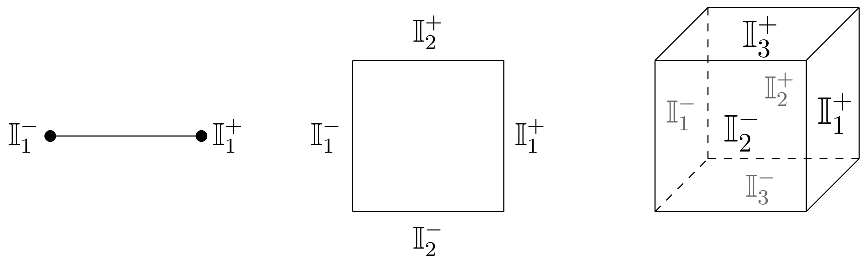
Izrek 3.1 nam za vsako funkcijo $g_i : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ zagotavlja obstoj take točke $c_i \in \mathbb{I}$, da je $g_i(c_i) = 0$. To pa pomeni, da je

$$f(c_1, \dots, c_n) = (f_1(c_1, \dots, c_n), \dots, f_n(c_1, \dots, c_n)) = (g_1(c_1), \dots, g_n(c_n)) = \underline{0}.$$

Izrek 3.2 pokaže, da pogoj (4) zadošča tudi v primeru poljubno zapletene zvezne preslikave $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$. Preden pa navedemo izrek, zapišimo pogoj (4) na način, ki bolj spodbudi geometrijsko predstavo, saj stvari lažje razumemo in si jih zapomnimo, če si jih znamo čim bolj slikovito predstavljati. Naj bo a poljubno pozitivno realno število in naj bo $\mathbb{I}^n := [-a, a]^n$ kocka v $\mathbb{R}^n$. Stranske ploskve ali lica kocke $\mathbb{I}^n$ označimo z $\mathbb{I}_i^- = \{x \in \mathbb{I}^n | x_i = -a\}$ in $\mathbb{I}_i^+ = \{x \in \mathbb{I}^n | x_i = a\}$. Za preslikavo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ lahko pogoj (4) zapišemo na naslednji način:

$$f_i(\mathbb{I}_i^-) \subset (-\infty, 0] \text{ in } f_i(\mathbb{I}_i^+) \subset]0, \infty), \text{ za vsak } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{5}$$

Izrek 3.2 (Poincaré-Mirandov izrek [5])**.** *Naj bo a poljubno pozitivno realno število in naj bo $\mathbb{I}^n := [-a, a]^n$ kocka v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ taka zvezna preslikava iz kocke v evklidski prostor $\mathbb{R}^n$, ki ustreza pogoju* (5)*. Potem obstaja točka $c \in \mathbb{I}^n$, da je vrednost preslikave $f(c) = \underline{0}$.*



Slika 10. Na sliki lahko vidimo, kako smo označili posamezno lice kocke. Na levi je kocka $\mathbb{I}$, na sredini kocka $\mathbb{I}^2$, na desni pa je prikazana kocka $\mathbb{I}^3$ [1, slika 1.2].

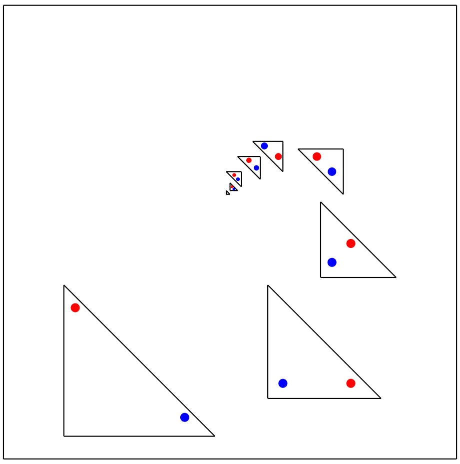
Dokaz. Naj zvezna preslikava $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ zadošča pogoju (5). Za vsako število $i \in \{1, \dots, n\}$ definiramo množici $H_i{}^- := f_i^{-1}(-\infty, 0]$ in $H_i{}^+ := f_i^{-1}[0, -\infty)$. Najprej bomo pokazali, da je za dokaz izreka dovolj, če za vsako naravno število $k \in \mathbb{N}$ poiščemo n-simpleks S_k iz k-te baricentrične delitve $T_k = \mathrm{sd}^k(S)$ z lastnostjo

$$S_k \cap H_i^- \neq \emptyset \neq S_k \cap H_i^+, \text{ za vsak } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{6}$$

Kasneje bomo pokazali, da taki simpleksi res obstajajo.

Pokažimo torej, da obstoj takih simpleksov res zaključi dokaz. Recimo, da je za vsak $k \in \mathbb{N}$ n-simpleks $S_k \in T_k$ z lastnostjo (6). V vsakem simpleksu S_k si lahko izberemo točko x_k in tako dobimo neskončno zaporedje $(x_k)_{k=1}^\infty$. Ker zaporedje leži v kompaktnem prostoru $\mathbb{I}^n$, obstaja konvergentno podzaporedje $\left(x_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$ z limito

$c \in \mathbb{I}^n$. Izberimo si neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Zaradi lastnosti (6) lahko za vsak $j \in \mathbb{N}$ poiščemo točki $z_j \in S_{k_j} \cap H_i^-$ in $w_j \in S_{k_j} \cap H_i^+$. Ker velja $\lim_{j\to\infty} \operatorname{diam}(S_{k_j}) = 0$, je limita $\lim_{j\to\infty} z_j = \lim_{j\to\infty} w_j = \lim_{j\to\infty} x_j = c$ (slika 11). Funkcija f je zvezna, zato je tudi zaporedje $f_i(z_j)$ konvergentno z limito $f_i(c)$. Členi tega zaporedja so vsi manjši ali enaki nič, saj leži zaporedje v množici H_i^-, zato je tudi $f_i(c) \leq 0$. Podobno lahko sklepamo, da je zaporedje $f_i(w_j)$ konvergentno z limito $f_i(c)$. Ker so vsi členi $f_i(w_j)$ nenegativni, je tudi limita $f_i(c) \geq 0$. Ugotovili smo, da je $0 \leq f_i(c) \leq 0$, torej je $f_i(c) = 0$. Razmislek velja za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, zato velja $f(c) = \underline{0}$. Dokazati moramo še, da taki simpleksi S_k res obstajajo. Tudi to bomo dokazovali



Slika 11. Na sliki modre točke predstavljajo točke iz H_i^+, rdeče pa točke iz H_i^-. Ko se simpleksi zmanjšujejo, sta točki vedno bližje in zato imata zaporedji teh točk isto limito.

v dveh delih. Najprej bomo definirali barvanje triangulacije kocke, nato pa bomo v prvem delu pokazali, da imajo popolno pobarvani simpleksi lastnost (6). Kasneje bomo pokazali, da je izbrano barvanje Spernerjevo, kar nam v vsaki triangulaciji zagotavlja obstoj vsaj enega popolno pobarvanega simpleksa. Omenjeno barvanje φ triangulacije n-kocke C z množico oglišč V definiramo na naslednji način:

$$\varphi : V \to \{0, 1, \dots, n\}$$

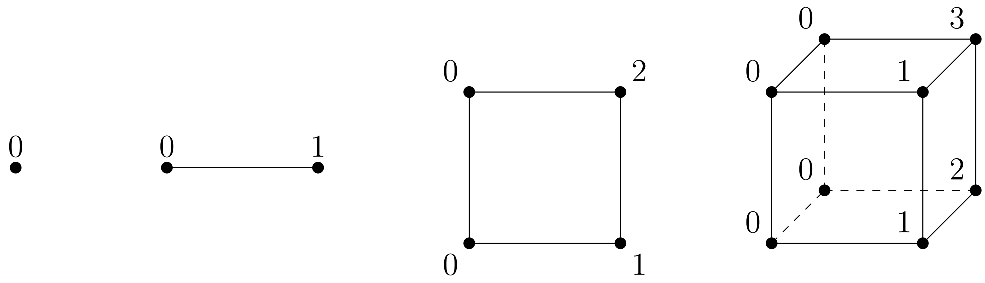
$$\varphi(x) = \max\left\{ j : x \in \bigcap_{i=0}^{j} F_i^+ \right\}$$

Kjer je $F_0^+ = \mathbb{I}^n$, $F_i^+ = H_i^+ \setminus \mathbb{I}_i^-$.

Trdimo, da ima pri tem barvanju popolno pobarvan simpleks S lastnost (6). Za vsak $i \in \{1, 2 \dots, n\}$ in za vsaki taki točki x in y iz $\mathbb{I}^n$, za kateri je $\varphi(x) = i - 1$ in $\varphi(y) = i$, lahko sklepamo, da je $x \in H_i^-$ in $y \in H_i^+$. Res, denimo, da $x \notin H_i^-$. Potem $x \in F_i^+ = H_i^+ \setminus \mathbb{I}_i^-$, kar pa pomeni, da je $\varphi(x) = i$. To je protislovje, torej res velja $x \in H_i^-$. Podobno lahko sklepamo, če $y \notin H_i^+$, potem tudi $y \notin F_i^+$, kar pomeni, da je $\varphi(y) < i$. Spet protislovje s tem, da je $\varphi(y) = i$, torej je tudi $y \in H_i^+$. Ker ima popolno pobarvan simpleks vsako oglišče pobarvano s svojo barvo, so na ogliščih zastopane vse barve iz množice $\{0, 1, \dots, n\}$, zato ima tak simpleks res lastnost (6).

Dokaz bo zaključen, če pokažemo, da je barvanje φ Spernerjevo barvanje, saj bomo potem lahko v vsaki triangulaciji našli popolno pobarvan simpleks. Pokažimo najprej, da je n-kocka $\mathbb{I}^n$ pri barvanju z barvanjem φ pobarvana popolno.

Pokazati moramo, da smo pri barvanju njenih oglišč uporabili vse barve iz množice $\{0, 1, \ldots, n\}$ in da vsebuje liho število popolno pobarvanih glavnih lic. Za boljšo predstavo dokaza si lahko na sliki 12 pogledamo, kako izgleda barvanje oglišč v dimenzijah 0, 1, 2 in 3. Dokazovali bomo z indukcijo na n.



SLIKA 12. Skrajno levo je ena točka (0-kocka), ki je z barvanjem φ pobarvana z 0. Malo bolj proti desni lahko vidimo, kako barvanje φ označi oglišča 1-kocke, naslednja je z φ pobarvana 2-kocka, skrajno desno pa je pobarvana 3-kocka.

Baza indukcije ($n = 0$). Če je $n = 0$, opazujemo eno točko, označeno z 0, kar je popolno pobarvana 0-kocka.

Indukcijska predpostavka ($n - 1$). Predpostavimo, da je $(n-1)$-kocka popolno pobarvana.

Indukcijski korak ($(n-1) \implies n$). Poskusimo dokazati pravilnost izjave tudi v dimenziji n. Lice I_n^- je enako pobarvano, kot $(n-1)$-kocka, saj za njuni oglišči veljata enake vsebovanosti v množicah F_i^+. Po indukcijski predpostavki je lice I_n^- popolno pobarvano, zato vsebuje vse barve iz množice $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Oglišče $(a, a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n$ je označeno z barvo n, saj je vsebovano v vseh množicah F_i^+ za $i = 1, 2, \ldots, n$. To pomeni, da je n-kocka označena z vsemi oznakami iz množice $\{0, 1, \ldots, n\}$. Prepričati se moramo le še, da ima liho število popolno pobarvanih glavnih lic. Trdimo, da je lice $\mathbb{I}_n^-$ edino popolno pobarvano lice kocke $\mathbb{I}^n$. Poglejmo najprej, če je lahko katero od lic $\mathbb{I}_i^+$ popolno pobarvano. Za vsak $x \in \mathbb{I}_i^+$ velja, da je $\varphi(x) \neq i - 1$, zato lice $\mathbb{I}_i^+$ ne more vsebovati oglišč z vsemi barvami $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Poskusimo poiskati popolno pobarvano lice med lici $\mathbb{I}_i^-$. Za vsako točko $x \in \mathbb{I}_i^-$ velja $\varphi(x) < i$. Če želimo, da lice $\mathbb{I}_i^-$ vsebuje vse barve iz množice $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, mora biti $i = n$. Torej je lice $\mathbb{I}_n^-$ res edino popolno pobarvano glavno lice kocke $\mathbb{I}^n$.

Prepričati se moramo samo še, da so vsa oglišča iz nekega lica kocke $\mathbb{I}^n$ pobarvana enako kot neko oglišče, ki to lice določa. Vemo, da lahko vsako lice L dobimo kot presek pravih lic. Zaradi lažjega zapisa definiramo znak $\star$, za katerega je $\mathbb{I}_i^\star = \mathbb{I}^n$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. S pomočjo nove oznake lahko vsako lice L kocke $\mathbb{I}^n$ zapišemo kot

$$L = \mathbb{I}_1^{\varepsilon_1} \cap \mathbb{I}_2^{\varepsilon_2} \cap \cdots \cap \mathbb{I}_n^{\varepsilon_n},$$

kjer je $\varepsilon_i \in \{\star, -, +\}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Naj bo $x \in L$ in naj bo $\varphi(x) = l$ za neki $l \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Vemo, da je $\varepsilon_j \neq -$ za $j \leq l$ in $\varepsilon_{l+1} \neq +$. Poglejmo si oglišče

$$y = \mathbb{I}_1^{\rho_1} \cap \mathbb{I}_2^{\rho_2} \cap \cdots \cap \mathbb{I}_n^{\rho_n},$$

kjer je

$$\rho_i = \begin{cases} \varepsilon_i & , \varepsilon_i \in \{+, -\}, \\ + & , (\varepsilon_i = \star) \wedge (i < l), \\ - & , (\varepsilon_i = \star) \wedge (i > l). \end{cases}$$

Lahko se prepričamo, da je $y \in L$ in $\varphi(y) = l$, kar pomeni, da smo našli oglišče na licu L, ki je enako pobarvano kot točka x. Ker smo to storili za poljubno točko, je vsaka točka iz roba kocke $\mathbb{I}^n$ pobarvana enako kot eno od oglišč, ki določajo lice, na katerem leži točka x. Torej je φ res Spernerjevo barvanje. $\square$

Leta 1940 je K. Miranda dokazal, da je izrek 3.2 ekvivalenten znanemu Brouwerjevemu izreku o negibni točki, ki pravi naslednje.

Izrek 3.3 (Brouwerjev izrek o negibni točki [5]). *Denimo, da je dana kocka $C = [-1, 1]^n$ in zvezna preslikava $f : C \to C$, potem obstaja točka $c \in C$, da je $f(c) = c$.*

Izkaže se, da si pri dokazovanju nekaterih matematičnih trditev lažje pomagamo z izrekom 3.2, kot z izrekom 3.3. Poglejmo si, kako s pomočjo izreka 3.2 dokažemo izrek o negibni točki.

Dokaz izreka 3.3. Naj bo $C = [-1, 1]^n$ kocka v evklidskem prostoru R^n in naj bo $f : C \to C$ poljubna zvezna preslikava iz kocke nazaj vase. Definiramo funkcijo $g : C \to \mathbb{R}^n$ s predpisom $g(x) = x - f(x)$. Funkcija g je zvezna in zadošča pogojem izreka 3.2. Res, za vsak $x \in \mathbb{I}_i^-$ velja, da je $x_i = -1$ in $f_i(x) \geq -1$, zato je

$$g_i(x) = x_i - f_i(x) \leq -1 - (-1) = 0.$$

Podobno lahko razmislimo, da je za vsak $x \in \mathbb{I}_i^+$ vrednost funkcije $g_i \geq 0$. Zato obstaja taka točka $c \in C$, da je $g(c) = 0$, kar pomeni, da je $f(c) = c$. $\square$

Enostavnost dokaza izreka 3.3 pokaže, kako močno orodje za dokazovanje topoloških trditev je izrek 3.2.

4. Razširitev funkcije

Včasih se nam zgodi, da je podana funkcija samo na nekem majhnem območju, želeli pa bi si, da bi bila domena funkcije večja. Poglejmo si poljubno množico $A \in \mathbb{R}^n$ in neko funkcijo $f : A \to \mathbb{R}$. Denimo, da je U taka množica, da je $A \subset U$. Funkciji $F : U \to \mathbb{R}$, za katero je $F(x) = f(x)$ za vsak $x \in A$, pravimo *razširitev funkcije* f na množico U. Če funkcijo razširimo brez omejitev, se informacija o funkciji na prvotni množici popolnoma izgubi. Da to informacijo ohranimo, bomo gledali zgolj zvezne funkcije f in zvezne razširitve F. Pri tem se ponudi vprašanje, ali lahko vsako zvezno funkcijo razširimo. S primerom pokažemo, da temu ni tako.

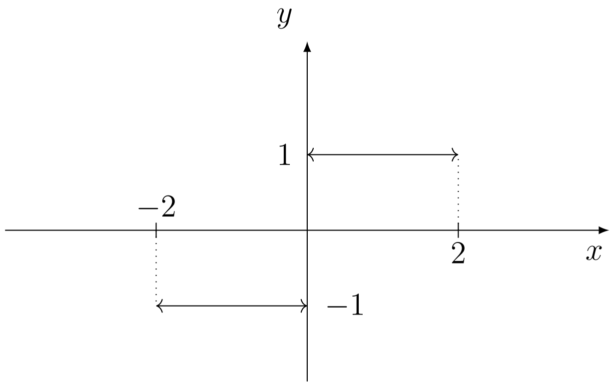
Primer 4.1. Funkcijo $f : (-2, 0) \cup (0, 2) \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x \in (-2, 0) \\ 1 & , x \in (0, 2). \end{cases}$$

Funkcija f je zvezna na $(-2, 0) \cup (0, 2)$, ne moremo pa je zvezno razširiti na $\mathbb{R}$, saj razširitev v točki $x = 0$ ne bi bila zvezna. $\diamondsuit$

Izkaže se, da je za obstoj razširitve dovolj, če je zvezna funkcija definirana na kompaktni množici.

Lema 4.2 (Razširitev zvezne funkcije). *Naj bo A kompaktna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in naj bo dana zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$. Potem obstaja zvezna funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da za vsak $x \in A$, velja $F(x) = f(x)$.*



Slika 13. Prikazan je graf zvezne funkcije, ki je ne moremo zvezno razširiti na $\mathbb{R}$.

Dokaz. Včasih je pri dokazu obstoja neke stvari najlažje, če to stvar poiščemo in jo vsem pokažemo. Tako bomo tudi mi napisali predpis funkcije F, ki zvezno razširi funkcijo f. Seveda bi se lahko pri dokazu oprli na Tietzejev razširitveni izrek, a je to delo zasnovano tako, da se poskuša izogniti uporabi abstraktnejših topoloških izrekov. Denimo torej, da je množica A kompaktna in funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ zvezna. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je funkcija f pozitivna. Vemo, da je zvezna funkcija na kompaktni množici omejena, torej lahko prištejemo dovolj veliko število C, da je funkcija $f + C$ pozitivna. Zveznost funkcije f pa je ekvivalentna zveznosti funkcije $f + C$. Razširitveno funkcijo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lahko definiramo s predpisom [2, str. 257, vaja 4.1.F]:

$$F(x) = \begin{cases} \inf\left\{ f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1; a \in A \right\} & , x \in A^c \\ f(x) & , x \in A. \end{cases}$$

Iz predpisa funkcije F vidimo, da je za $\forall x \in A$ $F(x) = f(x)$

~~Enostavno se je prepričati~~, da je za vsak $x \in A$, $F(x) = f(x)$. Ugotoviti moramo le še, ali je funkcija F res zvezna na R^n. Dokazovali bomo v dveh delih. Najprej bomo dokazali zveznost funkcije F na A^c, potem pa še na A. Izberimo neko poljubno majhno pozitivno realno število $\varepsilon > 0$ in $x_0 \in A^c$. Potem obstaja tako pozitivno realno število $r > 0$, da je odprta krogla s polmerom r vsebovana v A^c, torej $B(x_0, r) \subset A^c$. Na $B(x_0, r)$ je ja funkcija $D_a(x) := \frac{d(x,a)}{d(x,A)}$ zvezna za vsak parameter a, saj sta funkciji $d(x, a)$ in $d(x, A)$ zvezni in različni od 0. Torej obstaja realno število $\delta \in (0, r)$, da je $|D_a(x_0) - D_a(x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in B(x_0, \delta)$. Iz vsak $a \in A$ Denimo, da je infimum $F(x_0)$ dosežen pri a_0, torej je $F(x_0) = f(a_0) + D_{a_0}(x_0) - 1$. Za vrednosti $F(x)$ lahko naredimo naslednje ocene:

$F(x_0) - F(x) + F(x)$

$F(x_0) = \inf\{f(a) + D_a(x_0) - 1$

$- \inf$

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x) - F(x_0) + F(x_0) \\ &= \inf\{f(a) + D_a(x) - 1; a \in A\} - F(x_0) + F(x_0) \\ &\le (f(a_0) + D_{a_0}(x) - 1) - (f(a_0) + D_{a_0}(x_0) - 1) + F(x_0) \\ &= (D_{a_0}(x) - D_{a_0}(x_0)) + F(x_0) \\ &\le \varepsilon + F(x_0), \\ &\implies F(x_0) - F(x) \ge -\varepsilon. \end{aligned}$$

$\le D_a$

$F(x_0) = \inf\{f(a) + D_a(x_0) - 1\} - \inf\{f(a) + D_a(x) - 1) + F(x)$

$\le \cancel{f(a_x)} + D_{a_x}(x_0) - \cancel{1} - \cancel{f(a_x)} + D_{a_x}(x) + \cancel{1}$

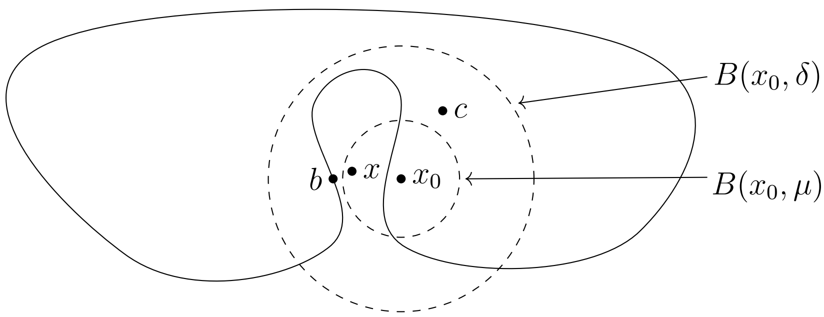
$F(x_0) = \overbrace{F(x_0) - F(x)} + F(x)$
$=: \Delta($

Podobno ocenimo:

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= F(x_0) - F(x) + F(x) \\
&= F(x_0) - \inf\{f(a) + D_a(x) - 1; a \in A\} + F(x) \\
&\leq (f(a_0) + D_{a_0}(x_0) - 1) - (f(a_0) + D_{a_0}(x) - 1) + F(x) \\
&= (D_{a_0}(x_0) - D_{a_0}(x)) + F(x) \\
&\leq \varepsilon + F(x), \\
&\implies F(x_0) - F(x) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Iz zgornjih ocen ugotovimo, da je $|F(x_0) - F(x)| \leq \varepsilon$, kar zagotavlja zveznost funkcije F na A^c.

Da bi preverili zveznost F tudi na množici A, izberemo $x_0 \in A$ in $\varepsilon > 0$. Ker je funkcija f zvezna na A, obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in A$, za katerega velja $d(x_0, x) < \delta$. Zaradi lažjega ocenjevanja naredimo naslednje premisleke. Ker je funkcija f definirana na kompaktni množici, obstaja realno število M, da je $f(a) \leq M$ za vsak $a \in A$. Določimo tak $\mu > 0$, pri katerem je funkcija $D_a(x) \geq M + 1$ za vse $a \in A \setminus B(x_0, \delta)$ in vse $x \in B(x_0, \mu)$. Naj bo $a \in B(x_0, \delta)^c$, potem je $D_a(x)|_{B(x_0,\mu)} = \frac{d(x,a)}{d(x,A)} \geq \frac{\delta - \mu}{\mu}$. Torej moramo določiti $\mu > 0$, da bo veljala neenačba $\frac{\delta-\mu}{\mu} > M + 1$. Izračunamo $\mu < \frac{\delta}{M+2}$. Sedaj imamo dve možnosti. Če



Slika 14. Pri dokazovanju zveznosti funkcije F v točki x_0 želimo poiskati tako pozitivno realno število μ, da se vrednosti funkcije F za vsako točko $x \in B(x_0, \mu)$ od vrednosti funkcije $F(x_0)$ razlikujejo največ za v naprej predpisani ε.

je $x \in A \cap B(x_0, \mu)$, potem je $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$. Če pa je $x \in A^c \cap B(x_0, \mu)$, vemo, da obstajata točki $b \in \partial A$, za katero je $d(x, b) = d(x, A)$ in $c \in A$ z lastnostjo $F(x) = f(c) + D_c(x) - 1$. Iz izbire števila μ je jasno, da ležita točki $b, c \in B(x_0, \delta)$ (slika 14). Lahko naredimo podobni oceni kot prej. Najprej upoštevamo definicijo funkcije F in izbrano točko b:

$$F(x) = \inf_{a \in A}\{f(a) + D_a(x) - 1\} \leq f(b) \leq f(x_0) + \varepsilon = F(x_0) + \varepsilon,$$

pri drugi oceni pa si pomagamo s točko c:

$$F(x) = f(c) + D_c(x) - 1 \geq f(c) \geq f(x_0) - \varepsilon = F(x_0) - \varepsilon.$$

Ugotovimo, da je $|F(x_0) - F(x)| \leq \varepsilon$, kar zaključi dokaz. $\square$

Lemo 4.2 enostavno posplošimo tudi na preslikave, ki slikajo v večrazsežni evklidski prostor.

Posledica 4.3. *Naj bo A kompaktna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in naj bo $f : A \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava. Potem obstaja zvezna preslikava $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, da je za vsak $x \in A$, $F(x) = f(x)$.*

Dokaz. Vemo , da zvezna preslikava $f : A \to \mathbb{R}^n$ določa komponentne funkcije $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$. Vse komponentne funkcije $f_i : A \to \mathbb{R}$ zadoščajo pogojem leme 4.2, zato jih lahko razširimo do funkcij $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Če definiramo preslikavo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s predpisom $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$, dobimo zvezno razširitev preslikave f. □

Sedaj znamo razširiti zvezno preslikavo iz kompaktne množice na cel prostor $\mathbb{R}^n$. Včasih pa si poleg spremembe definicijskega območja želimo imeti nekaj vpliva tudi na zalogo vrednosti preslikave. Želeli bi si, da se zaloga vrednosti pri razširitvi čim manj spremeni. Naivno bi lahko želeli, da ta ostane celo enaka, a to ni vedno mogoče, kar pokaže primer 4.4.

Primer 4.4. Poglejmo si identično preslikavo $f : \partial\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}^n \setminus \{\underline{0}\}$. Po izreku 3.2 ne obstaja zvezna razširitev $F : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}^n \setminus \{\underline{0}\}$, saj mora obstajati $x \in \mathbb{I}^n$, da je $F(x) = \underline{0}$. ♢

V posebnih primerih obstaja taka razširitev preslikave, ki se izogne določeni točki. Brez izgube splošnosti bomo pokazali, da obstajajo pogoji, ki nam zagotavljajo zvezno razširitev preslikave, ki noben element definicijskega območja ne slika v $\underline{0}$. Preden navedemo pogoje, pa si poglejmo nekaj lastnosti preslikav, ki so ključne pri dokazu.

Trditev 4.5 ([8])**.** *Zvezna funkcija, definirana na kompaktni množici, je enakomerno zvezna.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $K \in \mathbb{R}^n$ poljubna kompaktna množica in $f : K \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava. Pokazati želimo, da obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak še tako majhen $\varepsilon > 0$ in vsaka $x, y \in K$, za katera je $d(x, y) < \delta$, velja $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ker je f zvezna funkcija za vsako točko $z \in K$ obstaja tako pozitivno realno število δ_z, da je $f(B(z, \delta_z)) \subset B(f(z), \frac{\varepsilon}{4})$. Družina množic $\mathcal{U} = \{B(z, \delta_z); z \in K\}$ tvori odprto pokritje prostora K. Zaradi kompaktnosti K lahko izberemo končno poddružino $\mathcal{A} = \{(B(x_1, \delta_{x_1}), \ldots, B(x_n, \delta_{x_n})\}$, ki je še vedno pokritje množice K. Definiramo število $\delta = \min_i \delta_{x_i}$. Za poljubni števili $x, y \in K$, ki sta med seboj oddaljeni manj kot δ, imamo dve možnosti. Če obstaja taka krogla $B(x_i, \delta)$, da je $x, y \in B(x_i, \delta)$, potem sta $f(x), f(y) \in B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{4})$ in je $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. V nasprotnem primeru obstajata krogli $B(x_i, \delta)$ in $B(x_j, \delta)$ z nepraznim presekom, za kateri velja $x \in B(x_i, \delta)$ in $y \in B(x_j, \delta)$. V tem primeru je $f(x) \in B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{4})$ in $f(y) \in B(f(x_j), \frac{\varepsilon}{4})$, kjer je $B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{4}) \cap B(f(x_j), \frac{\varepsilon}{4}) \neq \emptyset$. Zato zagotovo velja $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, torej je funkcija res enakomerno zvezna. □

Poglejmo sedaj, kakšne pogoje potrebujemo, da lahko funkcijo razširimo tako, da se izognemo ničli.

Lema 4.6 (razširitev, ki se izogne ničli [5, str. 133, Proof of Lemma])**.** *Naj bo X kompaktna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in naj bo $f : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsako kompaktno množico s prazno notranjostjo $Y \subset \mathbb{R}^n$ obstaja zvezna preslikava $F : X \cup Y \to \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, da velja: $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$ za vsak $x \in X$*

Dokaz. Določimo poljubno število $\varepsilon > 0$ in množici X in Y, kot v lemi 4.6. Ker je množica $X \cup Y \subset R^n$ omejena, obstaja realno število $a > 0$, da je unija množic

$X \cup Y$ vsebovana v kocki $\mathbb{I}^n = [-a, a]^n$. Po lemi 4.2 lahko vsako zvezno preslikavo $f : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ razširimo do zvezne preslikave $g : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$. Izberemo tako realno število $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, da je $f(X) \cap B(\underline{0}, 2\delta) = \emptyset$. Ker je funkcija g zvezna in definirana na kompaktni množici $\mathbb{I}^n$, je po trditvi 4.5 enakomerno zvezna. Zato obstaja realno število μ, da za vsako množico A, katere diameter $\operatorname{diam}(A)$ je manjši od μ, velja $\operatorname{diam}(g(A)) < \delta$. Naj bo $k \in \mathbb{N}$ dovolj veliko naravno število, da za vsak simpleks S iz k-te baricentrične delitve $T_k = \operatorname{sd}^k(\mathbb{I}^n)$ kocke $\mathbb{I}^n$ velja $\operatorname{diam}(S) < \mu$. Če označimo množico oglišč v delitvi T_k z V, nam preslikava $g|_V : V \to \mathbb{R}^n$ enolično določa zvezno preslikavo $h : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$, ki vsako točko $x \in S = \langle z_0, z_1, \ldots, z_n \rangle \in T_k$ z baricentričnimi koordinatami $x = (t_0, t_1, \ldots, t_n)_b$ slika v

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i g(z_i).$$

Zaradi izbire triangulacije T_k je za vsak simpleks $S = \langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle \in T_k$ diameter $\operatorname{diam}(S)$ manjši od μ, torej zaradi enakomerne zveznosti funkcije g velja $\operatorname{diam}(g(S)) < \delta$. Torej obstaja krogla B s premerom δ, ki vsebuje množico $g(S)$. Funkcijo h smo konstruirali tako, da je množica $h(S)$ konveksna ogrinjača točk $g(z_0), g(z_1), \ldots, g(z_n)$. Ker je krogla B konveksna množica, ki vsebuje točke $g(z_0), g(z_1), \ldots, g(z_n)$, vsebuje tudi njihovo konveksno ogrinjačo $h(S)$. Sklep sledi iz dejstva, da je konveksna ogrinjača danih točk najmanjša konveksna množica, ki vsebuje dane točke. Iz tega ugotovimo, da je $\|g(x) - h(x)\| < \delta$ za vsak $x \in \mathbb{I}^n$. Ker je funkcija g razširitev funkcije f, sklepamo, da velja $\|f(x) - h(x)\| < \delta$ za vsak $x \in X$.

Sedaj opazujmo množico točk $\{g(z_0), g(z_1), \ldots, g(z_n)\}$. Če je to afino odvisna množica, potem je množica $h(S)$ določena z n med seboj odvisnimi vektorji, torej leži v nekem $(n-1)$-dimenzionalnem podprostoru prostora $\mathbb{R}^n$ in ima kot taka prazno notranjost. Če pa je množica afino neodvisna, je množica $S \cap Y$ kompaktna množica s prazno notranjostjo, saj je presek množice Y, ki je kompaktna s prazno notranjostjo, in množice S, ki je kompaktna. Zaradi zveznosti funkcije h je tudi $h(S \cap Y)$ kompaktna množica s prazno notranjostjo. Res, zvezne funkcije ohranjajo kompaktnost. Denimo, da je notranjost množice $h(S \cap Y)$ neprazna. Potem obstaja neka odprta množica $V \subset \mathbb{R}^n$, ki je cela vsebovana v $h(S \cap Y)$. Ker je funkcija h zvezna, je njena inverzna preslikava h^{-1} odprta, zato je tudi množica $h^{-1}(V)$ odprta v prostoru $\mathbb{R}^n$. To pa ni mogoče, saj je množica $h^{-1}(V)$ vsebovana v množici $S \cap Y$, ki ima prazno notranjost, zato ima tudi množica $h^{-1}(V)$ prazno notranjost. Iz teh razmislekov ugotovimo, da je množica $h(Y) = \bigcup_{S \in T_k} h(S \cap Y)$ kompaktna množica s prazno notranjostjo, saj jo dobimo s končno unijo kompaktnih množic s prazno notranjostjo. Ker je $f(X) \cap B(\underline{0}, 2\delta) = \emptyset$, in ker je $\|f(x) - h(x)\| < \delta$ za vsak $x \in X$, je $h(X) \cap B(\underline{0}, \delta) = \emptyset$. Jasno je, da lahko izberemo točko $d \in B(\underline{0}, \delta) \setminus h(X \cup Y)$.

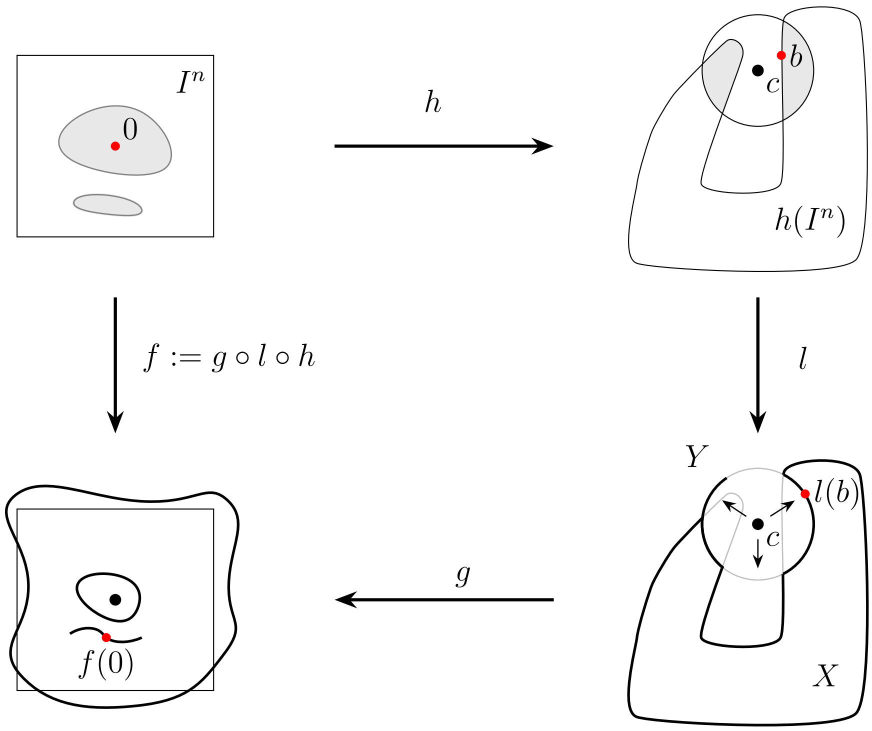
Definiramo preslikavo $F : X \cup Y \to \mathbb{R}^n$ s predpisom $F(x) = h(x) - d$. Opazimo, da je $\|F(x) - f(x)\| \leq \|h(x) - f(x)\| + \|d\| < 2\delta < \varepsilon$, za vsak $x \in X$. Velja tudi $F(z) \neq \underline{0}$ za vsak $z \in X \cup Y$, saj bi enakost $F(z) = 0$ implicirala enakost $h(z) = d$, kar pa nasprotuje predpostavki, da je $d \notin h(X \cup Y)$. Preslikava F je res iskana razširitev. $\square$

5. Izrek o invarianci odprtih množic

V prejšnjih poglavjih smo si pripravili vse potrebno za dokaz izreka o invarianci odprtih množic, zato se bomo brez ovinkarjenja lotili dokaza. Nato pa bomo kot posledico izreka o invarianci odprtih množic dokazali še izrek o invarianci dimenzij. Pri tem bomo sledili [5].

Izrek 5.1 (Izrek o invarianci odprtih množic)**.** *Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in naj bo $h : U \to \mathbb{R}^n$ zvezna injektivna preslikava. Potem je tudi slika $h(U)$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Naj bodo izpolnjene predpostavke izreka. Obravnavamo množico U, ki je odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, in zvezno injektivno preslikavo $h : U \to \mathbb{R}^n$. Izrek bo dokazan, če pokažemo, da je za vsak element u iz množice U točka $h(u)$ notranja točka za množico $h(U)$. Ker je $\mathbb{R}^n$ homogen prostor, take pa so tudi vse njegove odprte podmnožice, lahko predpostavimo, da je $u = 0_n$ in pokažemo, da je $h(0)$ notranja točka za $h(U)$. Izberimo tako pozitivno realno število $a > 0$, za katero je $\mathbb{I}^n \subset U$. Za dokaz izreka je dovolj pokazati vsebovanost $b := h(0) \in \operatorname{Int}(h(\mathbb{I}^n))$. Od tu naprej bomo dokazovali s protislovjem. Privzeli bomo, da je $b \in \partial h(\mathbb{I}^n)$ in konstruirali funkcijo $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tako da bo f zadoščala pogojem izreka 3.2. To pa bo protislovje, saj mora taka funkcija po izreku 3.2 vsaj eno točko slikati v 0. Na poti do protislovja si bomo seveda pomagali tudi z lemami, ki smo jih spoznali in dokazali v prejšnjih poglavjih. Predpostavimo torej, da je $b \in \partial(\mathbb{I}^n)$. Ker je $\mathbb{I}^n$ kompaktna podmnožica $\mathbb{R}^n$ in je $\mathbb{R}^n$ houssdorfov prostor, je funkcija $h|_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizem. Zato obstaja tako pozitivno realno število $\delta > 0$, za katerega je $h^{-1}(B(b, 2\delta)) \subset \operatorname{Int}(\mathbb{I}^n)$. Ker je $b \in \partial h(\mathbb{I}^n)$, je mogoče poiskati tak $c \in B(b, \delta) \setminus h(I^n)$. Enostavno se je prepričati, da je $b \in B(c, \delta)$ in $h^{-1}(B(c, \delta)) \subset \operatorname{Int}(\mathbb{I}^n)$.



Slika 15. Skica dokaza izreka 5.1.

Označimo $X := h(\mathbb{I}^n) \setminus B(c,\delta)$ in $Y := \partial B(c,\delta)$. Definiramo zvezno preslikavo $l : h(\mathbb{I}^n) \cup Y \to X \cup Y$ s predpisom:

$$l(x) = \begin{cases} c + \frac{x-c}{\|x-c\|} \cdot \delta & , x \in h(\mathbb{I}^n) \cup B(c,\delta) \\ x & , x \in X. \end{cases}$$

S pomočjo leme 4.6 lahko preslikavo $h|_X : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ razširimo do zvezne preslikave $g : X \cup Y \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, za katero za vsak $x \in X$ velja $\|g(x) - h^{-1}(x)\| < a$. Sedaj lahko definiramo preslikavo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ kot kompozitum $f := g \circ l \circ h$. Ker ta funkcija slika iz $\mathbb{I}^n$ in ne zavzame ničle, je za protislovje dovolj, če se prepričamo, da funkcija ustreza pogojem izreka 3.2. Vzemimo $t \in \mathbb{I}_i^-$. Velja $l(h(t)) = h(t)$, saj je $h(t) \in X$. Za normo vektorja $f(t) - t$ lahko naredimo naslednje ocene:

$$\|f(t) - t\| = \|g(l(h(t))) - h{-}1(h(t))\| = \|g(h(t) - h{-}1(h(t))\| < a.$$

Ker je $t_i = -a$ je $|f_i(t) - t_i| = |f_i(t) - (-a)| \leq |f(t) - t| < a$ torej je $f_i(t) < 0$. Podobno lahko tudi v primeru, ko je $t_i \in \mathbb{I}_i^+$ sklepamo, da je $f_i(t) > 0$. Ugotovili smo, da je $f_i(\mathbb{I}_i^-) < 0$ in $f_i(\mathbb{I}_i^+) > 0$, zato bi po predpostavkah izreka 3.2 moral obstajati $x \in \mathbb{I}^n$, ki se s f slika v 0. To je protislovje, torej je $b \in \mathrm{Int}(h(\mathbb{I}^n)$ in je $h(U)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. □

Izrek je bil zelo pomemben tudi zaradi spodnje posledice. S pomočjo izreka 5.1 lahko enostavno izpolnimo obljubo iz uvoda in dokažemo izrek o invarianci dimenzij, ki razreši vsaj nekatere nejasnosti, ki se nanašajo na pojem dimenzije.

Posledica 5.2 (Izrek o invarianci dimenzije)**.** *Naj bosta m in n naravni števili. evklidska prostora $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ sta homeomorfna, če in samo če je $m = n$.*

Dokaz. Denimo, da sta za neki dve naravni števili m in n evklidska prostora $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ homeomorfna. Torej obstaja zvezna bijektivna preslikava $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ z zveznim inverzom $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dokazovali bomo s protislovjem. Predpostavimo, da je $m \neq n$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $m < n$. Označimo z i vložitev, torej preslikavo iz prostora $\mathbb{R}^m$ v $\mathbb{R}^n$, ki je definirana s predpisom $i(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)\ in \mathbb{R}^n$. Tedaj je preslikava $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirana kot kompozitum $h := i \circ f$ zvezna injektivna preslikava, zato je po izreku 5.1 odprta. Toda slika prostora $\mathbb{R}^n$, ki je odprta podmnožica same sebe, s funkcijo h, je množica

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n;\ \text{kjer so } x_i \in \mathbb{R} \text{ za vsak } i \in \{1, \ldots, m\}\},$$

ki pa je zaprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Torej mora biti res $m = n$. □

Slovar strokovnih izrazov

continuous zvezen
uniformly continuous enakomerno zvezen
coloring barvanje
convex konveksen
convex hull konveksna ogrinjača
compact kompakten – metrični prostor je kompakten, če vsako odprto pokritje prostora vsebuje končno podpokritje; podmnožica evklidskega prostora je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta
cover pokritje
cube kocka

dimension dimenzija
extension razširitev
face lice
homeomorphism homeomoefizem – preslikava je homeomorfizem, če je zvezna in ima zvezen inverz
homeomorphic homeomoefen – prostor X je homeomorfen prostoru Y, če obstaja homeomorfizem $f : X \to Y$
sequence zaporedje
simplex simpleks
triangulation triangulacija
vertex oglišče

Literatura

[1] C. T. Ahlbach, *A descrete aproach to Poincare-Miranda theorem*, magistsko delo, Department of mathematics, Harvey Mudd College, 2013.

[2] R. Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] F. Q. Gouvêa, *Was cantor surprised?*, amer. math. monthly **118** (2011) 198–209, doi: 10.4169/Amer.math.monthly.118.03.198, dostopno tudi na `https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/AMM-March11_Cantor.pdf`.

[4] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[5] W. Kulpa, *Poincare and domain invariance theorem*, Acta univ. carolin. math. phys. **39**(1) (1998) 127–136, dostopno tudi na `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/702050/ActaCarolinae_039-1998-1_10.pdf`.

[6] H. P. Manning, *Geometry of four dimensions*, Macmillan, New York, 1914, dostopno tudi na `https://archive.org/details/geometryoffourdi033495mbp/page/n3/mode/2up`.

[7] U. Schäfer, *From Sperner's lemma to differential equations in Banach spaces : An introduction to fixed point theorems and their applications*, Karlsruher Institut für Technologie, 2014, doi: 10.5445/KSP/1000042944, dostopno tudi na `https://d-nb.info/106449790X/34`.

[8] *Continuous mapping on a compact metric space is uniformly continuous*, [ogled 26. 4. 2020], dostopno na `https://math.stackexchange.com/questions/110573/continuous-mapping-on-a-compact-metric-space-is-uniformly-continuous`.

[9] *Convex hull*, [ogled 22. 4. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull`.

[10] *Peano curve*, [ogled 14. 5. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Peano_curve`.

[11] *Simplex*, [ogled 22. 4. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex`.