UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Ime Priimek

Naslov dela

Magistrsko delo

Mentor:

Ljubljana,

Kazalo

Naslov dela

POVZETEK

Angleški prevod slovenskega naslova dela

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

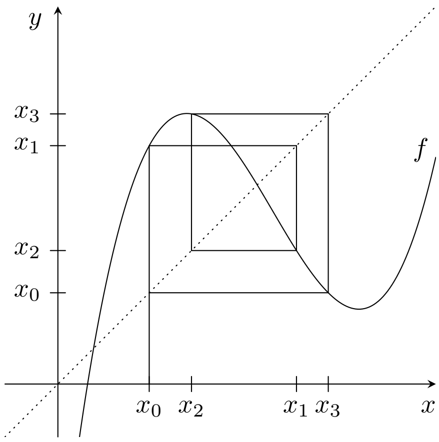
Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2. definicije in formulacija izreka

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ povezana podmnožica realnih števil. Takim množicam bomo rekli intervali. Interval ne rabi biti zaprt ali omejen in lahko v nekaterih primerih predstavlja kar celotno množico realnih števil. Naj bo $f : I \to I$ zvezna funkcija, ki slika interval I nazaj vase. Ker funkcija f slika interval I nazaj vase, si jo lahko predstavljamo kot diskreten dinamični sistem. S f^n bomo označevali kompozitum:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ponovitev } f},$$

kjer f^0 predstavlja identično funkcijo. Lahko si izberemo neko točko x_0 iz intervala I in s pomočjo iteracij funkcije f definiramo zaporedje s splošnim členom $x_n = f^n(x_0)$. Točke v tem zaporedju lahko ponazorimo v koordinatnem sistemu tako, da začnemo na abscisni osi pri počki x_0. Potujemo navpično do grafa funkcije f in se premaknemo v vodoravni smeri do simetrale lihih kvadrantov. Ta točka nam pove kje leži točka x_1, saj ima obe koordinati enaki x_1. Sedaj se zopet premaknemo navpično do grafa funkcije f in nato vodoravno do simetrale lihih kvadrantov. Pridemo do točke, ki ima obe koordinati enaki x_2. Postopek lahko nadaljujemo. V primeru na sliki 1 vidimo, da se točka x_3 slika spet v točko x_0. To pomeni, da ima zaporedje samo 4 različne člene, ki se ponavljajo.



Slika 1. Slika prikazuje, iteracije funkcije f.

V takem dinamičnem sistemu ena iteracija funkcije predstavlja en diskreten korak v času, točka $x_0 \in I$ pa začetni položaj točke v sistemu. Množici, ki vsebuje vse člene zaporedja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bomo rekli f-orbita točke x_0 ali samo orbita točke x_0. Z matematičnimi simboli jo lahko zapišemo tako:

$$\{\mathcal{O} := f^m(x_0); m \in \mathbb{N}\}.$$

Izrek Šarkovskega preučuje take točke $x_0 \in I$, ki se po nekaj iteracijah s funkcijo f slikajo nazaj vase. Takim točkam rečemo periodične točke. Perioda točke x_0 je najmanjše tako naravno število n, za katerega je $f^n(x_0) = x_0$. Ekvivalentno lahko sklepamo, da je orbita periodične točke x_0 končna množica, število različnih elementov v orbiti pa je enako najmanjši periodi točke x_0. Fiksna točka je periodična točka s periodo 1, torej taka točka x_0, za katero je $f(x_0) = x_0$. Če obstaja periodična točka s periodo m, rečemo tudi, da ima funkcija f periodo m.

Pri danem dinamičnem sistemu se lahko vprašamo, katere periode lahko ima funkcija. Šarkovski si je postavil prav to vprašanje in prišel do ureditve množice naravnih števil, ki pove, katere periode lahko ima funkcija.

2.1. **Izrek Šarkovskega.**

Definicija 2.1. Množico naravnih števil lahko uredimo na naslednji način:

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \cdots \lhd 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd \cdots \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1.$$

Ureditev, imenujemo jo ureditev Šarkovskega, določa relacijo $\lhd$. Naravni števili m in n sta v relaciji $m \lhd n$ natanko tedaj, ko m leži levo od n ali je $m = n$. Prepričajmo se, da je relacija $\lhd$ relacija linearne urejenosti. Opazimo, da je ureditev sestavljena tako, da najprej po vrsti naštejemo liha števila večja od 1, nato dodamo ta števila po vrsti pomnožena z 2. Sledijo liha števila večja od 1 pomnožena z 2^2 itn. Na koncu so zapisane potence števila 2 v padajočem vrstnem redu. Zaradi vrstnega reda števil pomislimo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila. To pomeni, da lahko poljubni naravni števili m in n zapišemo na naslednji način:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1),$$

kjer so števila $m_1, n_1, k, l \in \mathbb{N}_0$. Števili sta v relaciji $m \lhd n$, če je:

(1) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(2) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
(3) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(4) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

Lahko je preveriti, da je tako definirana relacija refleksivna, antisimetrična, tranzitivna in sovisna. S pomočjo zapisa relacije se enostavno prepričamo v naslednjo pomembno lastnost relacije:

$$\text{za } m, n \in \mathbb{N} : m \lhd n \Leftrightarrow 2m \lhd 2n.$$

Izrek 2.2 (The Sharkovsky forcing theorem)**.** *Če ima $f : I \to I$ točko periode m in velja $m \lhd l$, potem obstaja tudi točka periode l.*

Izrek pove, da je množica period zvezne funkcije na intervalu I rep ureditve Šarkovskega. Rep ureditve Šarkovskega je taka množica $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$, za katero je $m \lhd n$ za vsaki naravni števili $m \notin \mathcal{T}$ in $n \in \mathcal{T}$. Obstajajo trije različni tipi repov: Za neko naravno število m je rep množica $\{n \in \mathbb{N}; m \lhd n\}$, množica $\{\ldots, 16, 8, 4, 2, 1\}$ vseh potenc števila 2 in $\emptyset$. Naslednji izrek je neke vrste obrat zgornjega izreka.

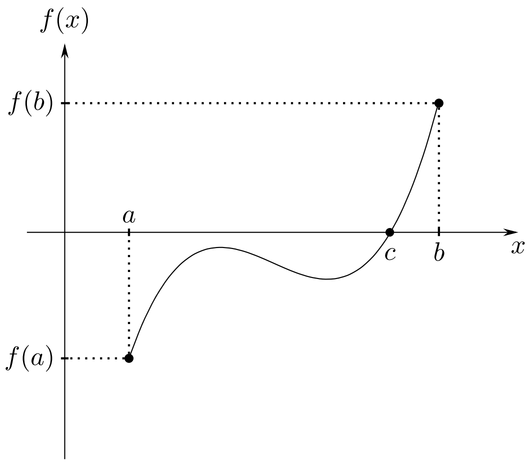
Izrek 2.3 (The Sharkovsky realization theorem)**.** *Za vsak rep $\mathcal{T}$ v zaporedju Šarkovskega obstaja taka funkcija, katere množica period je enaka $\mathcal{T}$.*

Izrek Šarkovskega je unija izreka 2.2 in izreka 2.3. Podmnožica naravnih števil je množica period zvezne funkcije $f : I \to I$, če in samo če je množica rep ureditve Šarkovskega. Nasledja poglavja so namenjena pripravi na dokaz izreka 2.2, v poglavju 8 pa je predstavljen dokaz izreka 2.3.

3. Intervali, relacija pokritja in cikli

Vsi dokazi izreka Šarkovskega so si podobni po tem, da so elementarni. Ne glede na to, kako zvito se lotimo dokaza, je ključnega pomena lastnost zveznih funkcij, ki ob določenih predpostavkah zagotavlja obstoj ničle funkcije. To je izrek o vmesni vrednosti.

Izrek 3.1 (izrek o vmesni vrednosti)**.** *Funkcija f, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$ in je na krajiščih intervala različno predznačena, torej velja neenačba $f(a) \cdot f(b) < 0$, ima vsaj v eni točki tega intervala vrednost 0.*



Slika 2. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K.

Dokaz. Naj bo funkcija $f : [a, b] \to [a, b]$ zvezna in naj bo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $f(a) < 0 < f(b)$. Ničlo funkcije f bomo iskali s pomočjo deljenja intervalov oziroma z bisekcijo. Izračunamo razpolovišče $p_0 = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a, b]$.Če je $f(p) = 0$, smo ničlo že našli, sicer razmišljamo tako: če je $f(p_0) > 0$, označimo $[a_1, b_1] = [a, p_0]$, sicer označimo $[a_1, b_1] = [p_0, b]$. Nato izračunamo razpolovišče p_1 intervala $[a_1, b_1]$. Če je $f(p) = 0$ postopek ustavimo, saj smo ničlo našlio, v nasprotnem primeru pogledamo predznak $f(p_1)$. Če je $f(p_1) > 0$, označimo $[a_2, b_2] = [a_1, p_1]$, sicer označimo $[a_2, b_2] = [p_1, b_1]$. Postopek nadaljujemo dokler ne najdemo ničle p_i funkcije f. Če ničle ne najdemo, dobimo neskončno zaporedje vloženih intervalov

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

Lahko se prepričamo, da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ in $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Števila a_n tvorijo naraščajoče zaporedje, števila b_n pa padajoče zaporedje. Limiti $\lim_{n\to\infty} a_n$ in $\lim_{n\to\infty} b_n$ sta enaki, saj je $\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Označimo $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Potem je $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$. Ker je funkcija zvezna je $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c)$ in $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c)$. Za vsako naravno število n velja $f(a_n) < 0$, zato je $f(c) \leq 0$. Podobn je $f(b_n) > 0$ za vsako naravno število n, iz česar sklepamo, da je $f(c) \geq 0$. Torej je $f(c) = 0$, kar zaključi dokaz. □

Definicija 3.2. Pravimo, da interval I pokrije interval J, če je $J \subseteq f(I)$. Relacijo zapišemo kot $I \xrightarrow{f} J$. Kadar je jasno, katera funkcija nastopa, lahko nadpis, ki označi katero funkcijo imamo v mislih tudi izpustimo in pišemo samo $I \to J$. Če velja $f(I) = J$, zapišemo $I \rightarrowtail J$.

S pomočjo izreka o vmesni vrednosti in poznavanja, kako se intervali slikajo s funkcijo f lahko izvemo, ali obstajajo periodične točke. Kako lahko potrdimo obstoj periodičnih točk, nam povejo naslednje leme.

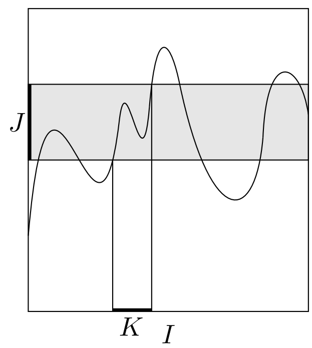
Lema 3.3. *Če je $[a, b] \to [a, b]$, potem ima funkcija f fiksno točko na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Interval $[a, b]$ je podmnožica slike $f([a, b])$, zato obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a, b]$, da je $f(a_1) = a$ in $f(b_1) = b$. Če je $a_1 = a$ ali $b_1 = b$, smo fiksno točko že našli. Če je $a_1 \neq a$ in $b_1 \neq b$, definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Prepričajmo se, da je vrednost funkcije g v točki b_1 negativna, v točki a_1 pa pozitivna. Računamo: $g(b_1) = f(b_1) - b_1 = b - b_1 < 0$. Podobno je $g(a_1) = f(a_1) - a_1 = a - a_1 > 0$. Zvezna funkcija g je na krajiščih intervala $[a, b]$ različno predznačena. Po izreku 3.1 obstaja točka $c \in [a, b]$, pri kateri je $g(c) = 0$, torej je $f(c) = c$. □

Pri iteracijah funkcije lahko opazujemo, kako se premika točka. To smo počeli na sliki. Lahko pa opazujemo, kako se s f slikajo celi intervali. Na ta način lahko dobimo zaporedje relacij pokritja npr. $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots$. Enako kot pri periodičnih točkah lahko lahko pri zaporedu relacij pokritja po nekaj korakih zopet pridemo do prvotnega intervala. Dobimo naslednje zaporedje relacij pokritja $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to I_0$. Če je začetni interval enak končnemu intervalu, zaporedju intervalov in pripadajočim relacijam pokritja pravimo zanka intervalov ali samo zanka.

Lema 3.4. *Če so intervali $I_0, \ldots, I_{n-1}$ zaprti omejeni intervali za katere veljajo naslednje relacije pokritosti: $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$, potem obstaja taka točka x, za katero je $f^i(x) \in J_i$ za $0 \leq i < n$ in $f^n(x) = x$. Pravimo, da točka x sledi zanki.*

Dokaz. Če velja relacija pokritosti $I \to J$, obstaja tak interval $K \subset I$, da je $K \rightarrowtail J$. Interval K poiščemo tako, da iz preseka funkcije f s pravokotnikom $I \times J$ izberemo



SLIKA 3. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K.

povezan del grafa, ki povezuje spodni in zgornji del pravokotnika. Tak del zagotovo obstaja, saj je $J \subset f(I)$. Projekcijo tega dela na interval I označimo s K. Torej, obstaja tak interval $K_{n-1} \subset J_{n-1}$, da je $K_{n-1} \rightarrowtail J_0$. Velja relacija pokritosti $J_{n-2} \to K_{n-1}$, zato obstaja tak interval $K_{n-2} \subset J_{n-2}$, da je $K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1}$. S postopkom nadaljujemo in dobimo naslednje relacije:

$$K_0 \rightarrowtail K_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail J_0.$$

Za vsako točko $x \in K_0$ in za vsak $i \in [0, n)$ velja $f^i(x) \in K_i \subset J_i$ in $f^n(x) \in J_0$. Ker je $K_0 \subset J_0 = f^n(K_0)$, lahko s pomočjo leme 3.3 sklepamo, da ima f^n fiksno točko na intervalu K_0. □

Obravnavajmo zvezno funkcijo $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$. Na tem intervalu sta samo dve točki, ki sledita 2-zanki. To sta točki 0 in 1, ki imata periodo 1. Zato se z obstojem periodičnih točk pa se za enkrat še ne moremo zadovoljiti. Radi bi vedeli, da je perioda točke enaka dolžini zanke in ne kakšen pravi delitelj dolžine.

Definicija 3.5. Zanka intervalov $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ je elementarna, če ima vsaka točka, ki sledi zanki, periodo n.

Posledica 3.6. *Vsaka elementarna zanka intervalov $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ vsebuje točko a, ki sledi zanki in ima periodo n.*

Zaradi zgornje posledice bi bilo dobro, če bi poznali kakšen dober kriterij za prepoznavanje elementarnih zank. Najlažji kriterij je število intervalov v zanki. Če nastopa samo en interval, dobimo $I_0 \to I_0$. Z uporabo leme 3.3 ugotovimo, da je zanka elementarna. Naslednja lema poda še en kriterij za prepoznavanje elementarnih zank:

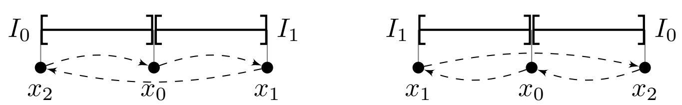
Lema 3.7. *Zanka intervalov $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ je elementarna, če ji ne sledi nobena robna točka intervala I_0 in je notranjost intervala $\mathrm{int}(I_0)$ disjunktna z intervali $I_1, \ldots, I_{n-1}$. Torej, $\mathrm{int}(I_0) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i = \emptyset$.*

Dokaz. Točka x_0, ki sledi zanki ne more biti robna točka intervala I_0. Torej je $x_0 \in \mathrm{int}(I_0)$. Za vsak $i = 1, \ldots, n-1$ je $x_0 \neq f^i(x_0)$, saj je $f^i(x_0) \in I_i$, intervala I_0 in I_i pa sta disjunktna. Ker točka x_0 sledi zanki je $f^n(x_0) = x_0$. Točka x_0 ima periodo n. □

4. Primeri

V tem poglavju si bomo zaradi lažjega razumevanja pogledali nekaj posebnih primerov. Najprej si bomo pogledali najbolj znan poseben primer izreka Šarkovskega. V naslednjih dveh primerih bomo postopek iz prvega primera razširili na daljše cikle. V zadnjem primeru bomo nakazali indukcijski korak, ki ga bomo uporabili v dokazu izreka.

Primer 4.1 (3-cikel)**.** Perioda 3 implicira obstoj vseh ostalih period. Točka lahko tvori 3-cikel na dva različna načina, ki sta v resnici zrcalna podoba drug drugega. Slika prikazuje oba primera. Črtkane puščice nakazujejo, kam se s funkcijo f slikajo



Slika 4. Zrcalna podoba ciklov

točke. Velja:

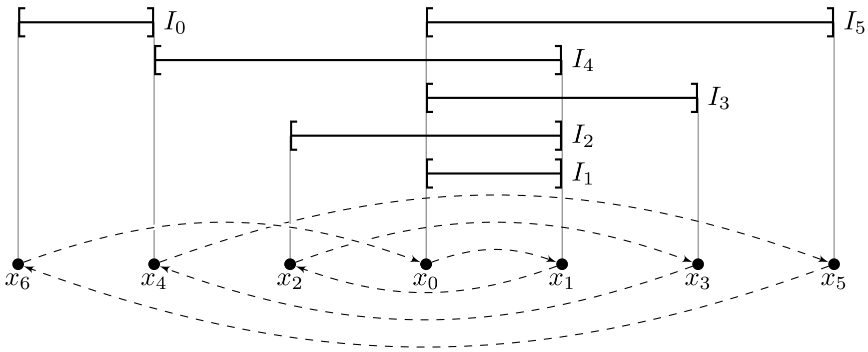
$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \text{ in } x_0 = f(x_2).$$

V obeh primerih smo z I_1 označili $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_1, z I_0 pa $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_2. Krajišči intervala I_1 se slikata v skrajno levo in skrajno desno točko cikla, zato imamo $\mathcal{O}$-vsiljeni pokritji $I_1 \to I_1$ in $I_1 \to I_0$. Krajišči intervala I_0 se slikata v krajišči intervala I_1, zato je tudi pokritje $I_0 \to I_1$ $\mathcal{O}$-vsiljeno. Ugotovljena pokritja lahko strnemo v diagram $\circlearrowleft I_1 \leftrightarrows I_0$. Iz relacije pokritosti $I_1 \to I_1$ in leme 3.3 sklepamo, da interval I_1 vsebuje negibno točko. Krajišči intervala I_1 ne morejo slediti zanki $I_1 \to I_0 \to I_1$, saj sta periodični točki s periodo 3. Točke, ki sledijo zanki, pa imajo periodo 1 ali 2. Ker je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, lahko s pomočjo leme 3.7 sklepamo, da je zanka

$$I_0 \to \overbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}^{l-1 \text{ ponovitev intervala } I_0} \to I_0$$

elementarna za $l > 3$. $\diamondsuit$

Primer 4.2 (7-cikel)**.** Sedaj bomo obravnavali 7-cikel $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$-intervale prikazane na sliki. Podobno kot pri prejšnjem primeru označimo $x_i = f^i(x_0)$ in $I_1 = [x_0, x_1]$ in

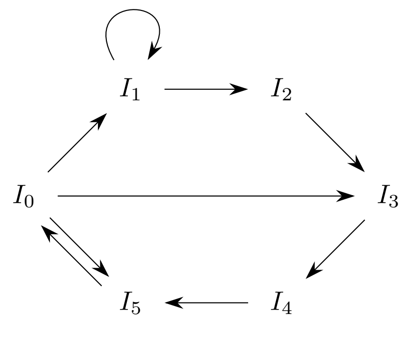


Slika 5. Primer 7-cikla.

tako naprej, kot prikazuje slika. Za to izbiro intervalov dobimo naslednje $\mathcal{O}$-vsiljene relacije pokritosti:

(1) $I_1 \to I_1$
(2) $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(3) $I_0 \to I_1$, $I_0 \to I_3$ in $I_0 \to I_5$

Zgornje relacije pokritosti lahko prikažemo z diagramom, kot ga prikazuje slika: Iz



Slika 6. diagram

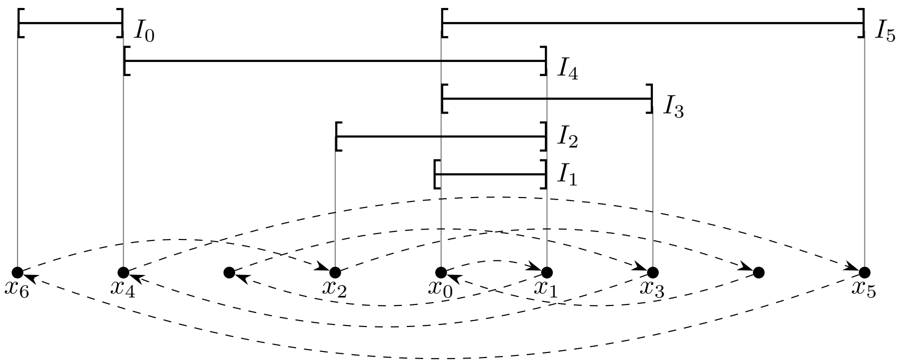
grafa preberemo naslednje zanke.

(1) $I_1 \to I_1$
(2) $I_0 \to I_5 \to I_1$
(3) $I_0 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(4) $I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$

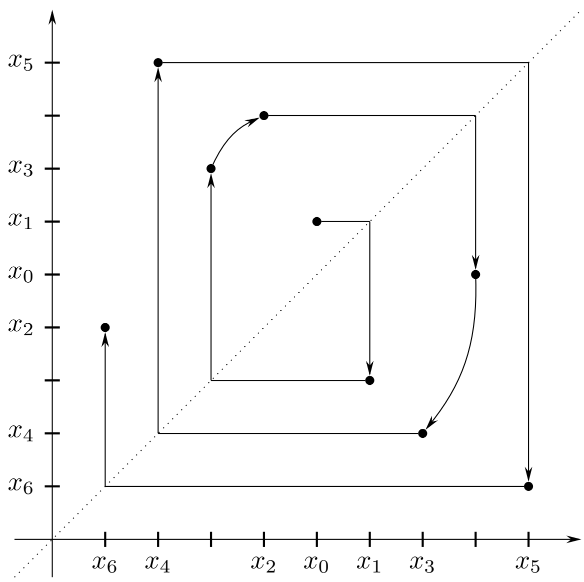
(5) $I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{l \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$, kjer je $l \geq 3$.

Zanka $I_1 \to I_1$ je elementarna, saj je elementarna vsaka zanka dolžine 1. Pri ostalih zankah pa lahko ugotovimo, da za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ velja $\mathrm{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Nobena robna točka intervala I_0 ne more slediti zanki, saj je perioda robnih točk 7, perioda točke ki sledi intervalu pa različna od 7. S tem razmislekom so izpolnjeni pogoji leme 3.7, zato lahko sklepamo, da so zanke elementarne. Torej lahko na podlagi prisotnosti tega cikla sklepamo, da so prisotne vse periode l, za katere je $l \triangleleft 7$ ♢

Primer 4.3 (9-cikel)**.** Slika prikazuje 9-cikel $\mathcal{O}$ neke funkcije, za katerega smo izbrali 6 $\mathcal{O}$-intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_5$, za katere je $\mathrm{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ za $0 \leq j \leq 5$

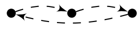


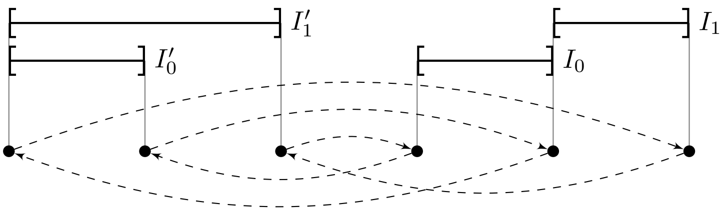
Slika 7. Primer 9-cikla.



Slika 8. Primer 9-cikla.

♢

Primer 4.4 (6-cikel)**.** Obravnavali bomo 6-cikel, ki je na sliki 9. Bistveno pri tem primeu je, da se tri točke na levi strani slikajo v tri točke na desni in obratno. Torej, tri točke na desni tvorijo 3-cikel  za funkcijo f^2. Podobno kot v primeru 4.1 lahko določimo intervala I_0 in I_1 ter opazujemo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$ za intervala I_0 in I_1, ki sta prikazana na sliki 9. Enako kot prej lahko zaključimo, da ima funkcije f^2 elementarne zanke vseh dolžin in zato je vsako naravno število $l \in N$ perioda funkcije f^2. Za funkcijo f določimo še dva intervala. Interval I'_0 naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_0 \cup \mathcal{O})$, interval I'_1 pa naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_1 \cup \mathcal{O})$. Sedaj bomo prikazali rekurzivno metodo, ki jo bomo uporabili kasneje v dokazu. Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo elementarne k-zanke za funkcijo f^2 poiščemo elementarno $2k$-zanko za funkcijo f. V primeru, ki ga obravnavamo, bo to pomenilo, da je vsako sodo naravno število perioda funkcije f. Poglejmo si elementarno k-zanko za funkcijo f^2, v kateri nastopajo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$. Vsak zapis $I_1 \xrightarrow{f^2}$ v zanki lahko zamenjamo z $I_1 \xrightarrow{f} I'_1 \xrightarrow{f}$, vsak zapis $I_0 \xrightarrow{f^2}$ pa z $I_0 \xrightarrow{f} I'_0 \xrightarrow{f}$. S to spremembo dobimo $2k$-zanko za funkcijo f, ki ni samo dvakrat ponovljena k-zanka. Prepričajmo se, da je $2k$-zanka elementarna. Denimo, da točka p sledi $2k$-zanki za funkcijo f. Pokazati moramo, da ima periodo $2k$ za funkcijo f. Opazimo, da točka p sledi prvotni k-zanki za funkcijo f^2 in ima zato periodo k za funkcijo f^2. Po drugi strani pa iteracije točke p s funkcijo f ležijo alternirajoče enkrat na levi in enkrat na desni strani srednjega intervala, saj $2k$-zanka za f alternira med intervali s črtico in intervali brez črtice. Zato je orbita točke p sestavljena iz $2k$ različnih točk. Na desni strani srednjega intervala leži k sodih iteracij, na levi strani pa leži k lihih iteracij. To pomeni, da ja perioda točke p za f enaka $2k$. Ker smo dolžino začetne elementarne k-zanke izbrali poljubno, smo pokazali, da je vsako sodo število perioda za f. Ker interval $[x_0, x_1]$ s funkcijo f pokrije samega sebe, pa obstaja fiksna točka. Torej ima f tudi periodo 1.



SLIKA 9. Primer 6-cikla.

$\diamondsuit$

5. ŠTEFANOVO ZAPOREDJE

Definicija 5.1. Naj bo p najbolj desna točka intervala $\mathcal{O}$, za katero je $f(p) > p$ in $q \in \mathcal{O}$ prva točka desno od p. Center c cikla $\mathcal{O}$ definiramo kot $c = \frac{p+q}{2}$. Za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ označimo množico točk iz cikla $\mathcal{O}$, ki ležijo v zaprtem intervalu omejenem z x in c, z $\mathcal{O}_x$. Natančneje, $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [x, p]$, če je $x \leq p$ in $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [q, x]$, če je $x \geq q$. Pravimo, da točka $x \in \mathcal{O}$ menja strani, če točka c leži med točkama x in $f(x)$.

Definicija 5.2. Zaporedje točk $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je Štefanovo, če:

(Š1) $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$,

(Š2) točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ležijo alternirajoče na levi oziroma desni strani točke c.

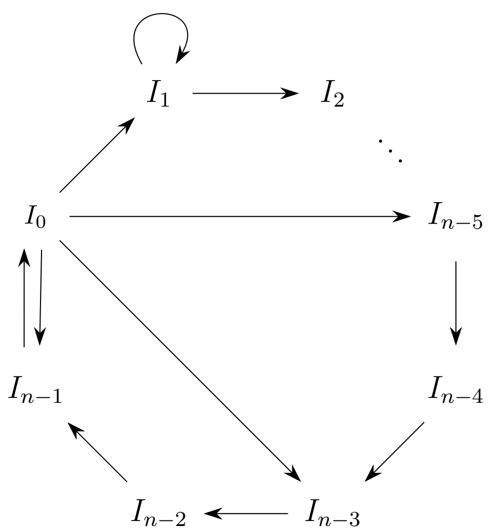
(Š3) Zaporedji x_{2j} in x_{2j+1} sta strogo monotoni in se oddaljujeta od točke c.
(Š4) Če je $1 \leq j \leq n-1$, potem x_j menja stran in $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$.
(Š5) Točka x_n ne menja strani.

Opomba 5.3. Štefanofo zaporedje dobimo tako, da iz množice m točk, ki tvorijo $\mathcal{O}$-cikel izberemo $(n+1)$-o točko, ki zadoščajo zgornjim pogojem. Pogoj $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$ v (Š4) pomeni, da je točka x_{j+1} bližje centru kot slika $f(x_j)$ točke x_j. Velja ena od neenakosti: $c < x_{j+1} \leq f(x_j)$ ali $f(x_j) \leq x_{j+1} < c$. Pogoja (Š2) in (Š3) zagotavljata, da so točke $x_0, x_1, \dots, x_n$ paroma različne. Ker pa lahko pri izbiri točk iz $\mathcal{O}$-cikla tudi kakšno točko izpustimo, je število $n+1$ izbranih točk manjše ali enako številu vseh točk v $\mathcal{O}$-ciklu. Če se vrnemo na primere iz prejšnjega poglavja, lahko vidimo, da v primerih 4.1, 4.2 in 4.4 Štefanovo zaporedje sestavljajo vse točke $\mathcal{O}$-cikla. V primeru 4.3 pa smo dve točki $\mathcal{O}$-cikla ne nastopata v Štefanovem zaporedju. Na slikiIz pogoja (Š2) lahko razberemo, da so točke $x_0, x_1, \dots, x_n$ paroma različne. Torej je $n+1 \leq m$ in zato $n < m$. Sliki 5

Trditev 5.4. *Predpostavimo, da m-cikel $\mathcal{O}$ vsebuje Štefanovo zaporedje. Če je $l \lhd m$, potem funkcija f vsebuje $\mathcal{O}$-vsiljeno elementarno l-zanko $\mathcal{O}$-intervalov in posledično tudi periodično točko z najmanjšo periodo l.*

Pri danem Štefanovem zaporedju $x_0, x_1, \dots, x_n$ definiramo intervale $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ na naslednji način: Za $1 \leq j < n$, označimo z I_j najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_j, medtem ko z I_0 označimo $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_{n-2} in x_n. Iz lastnosti (Š2) lahko sklepamo, da je $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ za vsak $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Trditev 5.5. *Za intervale izbrane na zgoraj opisan način veljajo naslednje relacije pokritja:*
(1) $I_1 \to I_1$ *in* $I_0 \to I_1$,
(2) $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$,
(3) $I_0 \to I_{n-1}, I_{n-3}, I_{n-5} \dots$.
Zaradi boljše predstave ponazorimo relacije pokritja na sliki 14.



SLIKA 10. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Dokaz trditve 5.5. Dokazovali bomo vsako točko posebej.

Pri dokazu točke 1 bomo dokazali še močnejšo trditev, ki nam bo v pomoč tudi pri dokazu druge točke. Pokazali bomo, da za vsak $j = 0, 1, \ldots, n-1$ velja relacija pokritja $I_j \to I_1$. Za dokaz je dovolj, če se prepričamo, da vsak interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1. V primeru intervala $I_0 = [x_n, x_{n-2}]$ ugotovimo, da obe krajišči I_0 ležita na isti strani točke c. Lastnost (Š4) pove, da krajišče x_{n-2} menja stran, medtem ko lastnost (Š5) pravi, da točka x_n ne menja strani, zato točki $f(x_n)$ in $f(x_{n-2})$ ležita na nasprotnih straneh točke c. V primeru intervala I_j za $j = 1, 2, \ldots, n-1$ upoštevamo lastnost (Š2) in pridemo do zaključka, da krajišči intervala ležita na nasprotnih straneh točke c. Lastnost (Š4) pove, da obe krajišči menjata stran. Torej za vsak $j = 0, 1, \ldots, n-1$ interval $f(I_j)$ vsebuje točke $\mathcal{O}$-cikla, ki ležijo na obeh straneh centra c. Zagotovo vsebuje točki x_0 in x_1 in zato tudi interval I_1.

Naj bo j tako naravno število, za katerega velja $1 \leq j \leq n-1$. Interval J vsebuje interval I_j natanko tedaj, ko vsebuje točke x_0, x_1 in x_j. Želimo pokazati, da interval $f(x_j)$ vsebuje interval I_{j+1}. Vemo že, da interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1. Za dokaz točke 3 moramo pokazati samo še vsebovanost točke x_{j+1} v intervalu $f(I_j)$.

Za dokaz točke 2 moramo pokazati, da so intervali $I_{n-1}, I_{n-3}, \ldots$ vsebovani v intervalu $f(I_0)$. Ker že vemo, da $f(I_0)$ vsebuje točki x_0 in x_1, preostane za dokazati še, da vsebuje točke $x_{n-1}, x_{n-3}, \ldots$ Zaradi lastnosti (Š2) ležijo vse točke na drugi strani točke c kot točki x_{n-2} in x_n. Iz lastnoti (Š3) sklepamo, da je točka x_{n-1} najbolj oddaljena od točke c, zato vsak interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_{n-1}, vsebuje tudi vse točke $x_{n-3}, x_{n-5}, \ldots$ Pokazati moramo samo še, da interval $f(I_0)$ vsebuje točko x_{n-1}. Pri lastnosti (Š4) namesto j pišemo $n-2$ in dobimo vsebovanost $x_{n-1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$. Iinterval $f(I_n)$ vsebuje točke x_0, x_1 in $f(x_j)$,

□

Dokaz trditve 5.4. Naj veljajo predpostavke v trditvi 5.4. Radi bi pokazali, da ima funkcija f za vsako naravno število $l \triangleleft m$ točko periode l. Dokaz bomo razdelili na tri točke.

Edino liho število l manjše od m, za katerega lahko velja $l \triangleleft m$ je število 1. Za $l = 1$ uporabimo zanko l1, ki je zanka dolžine 1 in zato elementarna. Torej obstaja točka periode 1 v intervalu I_1.

Naravno število $l \leq n \leq m$ je lahko v relaciji $l \triangleleft m$ samo, če je sodo. Za vsako sodo število $l \leq n$ lahko iz slike 14 izpišemo l-zanko:

$$I_0 \to I_{n-(l-1)} \to I_{n-(l-2)} \to \cdots \to I_{n-2} \to I_{n-1} \to I_0.$$

Iz konstrukcije intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_n$ vemo, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_{n-(l-1)}, I_{n-(l-2)}, \ldots, I_{n-2}, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 imata najmanjšo periodo m in zato ne moreta sledit zanki. Z uporabo leme 3.7 ugotovimo, da je l-zanka elementarna, zato obstaja točka iz I_0, ki ima najmanjšo periodo l.

V primeru, ko je $l > n$ iz slike 14 razberemo l zanko

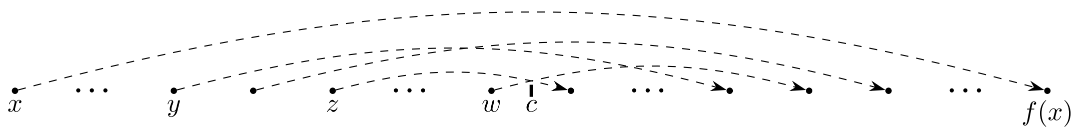
$$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{l-n+1 \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0.$$

Če je $l = m$, potem lahko izberemo točko x_0, ki ima periodo m. Predpostavimo, da je $l \neq m$. Podobno kot v prejšnjem primeru je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 pa ne moreta slediti zanki, saj imata periodo m, dolžina zanke pa je različna od m. Zopet lahko s pomočjo leme 3.7 sklepamo, da je l-zanka elementarna, kar zagotavlja obstoj točke iz I_0, ki ima najmanjšo periodo l. □

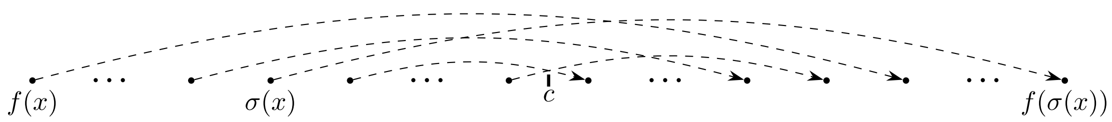
6. Konstrukcija Štefanovega zaporedja

Trditev 6.1. *Cikel, ki vsebuje vsaj eno točko, vsebuje Štefanovo zaporedje, razen če vsaka točka menja stran.*

Dokaz. Naj bo m naravno število večje od 2 in naj bo $\mathcal{O}$ cikel sestavljen iz m različnih točk. $\mathcal{S}$



Slika 11. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



Slika 12. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Lema 6.2. *Če obstaja taka točka $x \in \mathcal{S}$, za katero je $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$, potem vse točke cikla $\mathcal{O}$ menjajo stran.*

Dokaz. Če želimo, da je $\sigma^2(x)$ definiran in da leži v $\mathcal{O}_x$, morajo x, $y = \sigma(x)$ in $z := \sigma(y) = \sigma^2(x)$ vsi ležati v množici $\mathcal{S}$. □

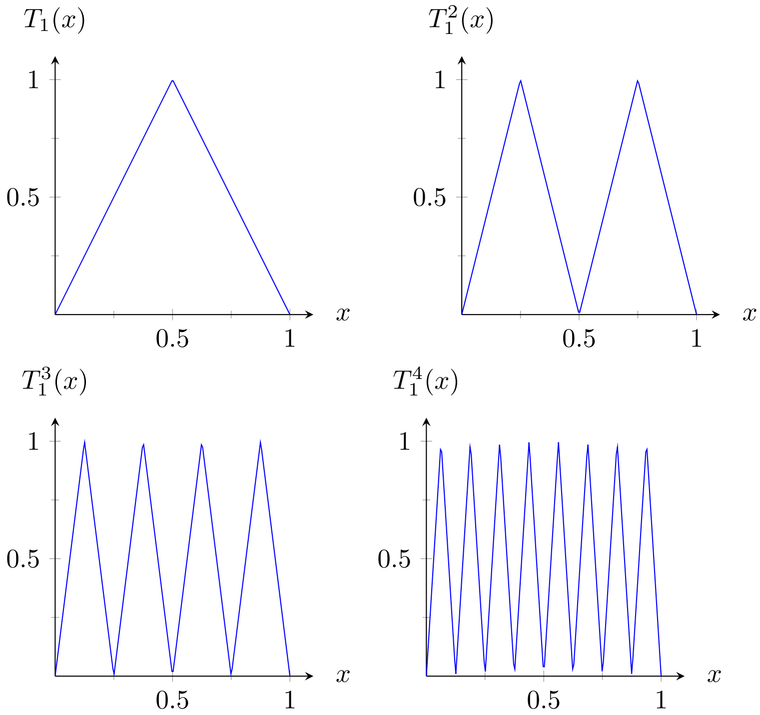
□

7. Dokaz izreka Šarkovskega

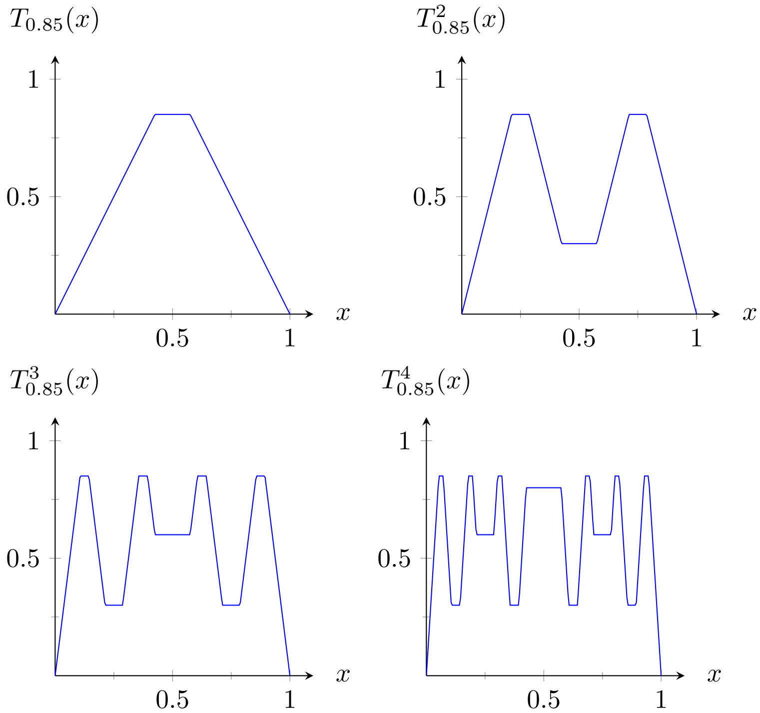
8. Realizacijski izrek Šarkovskega

9. Prostor sharkovskega

10. Linearni kontinuum je prostor šarkovskega



SLIKA 13. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



SLIKA 14. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.