Izrek Šarkovskega

Mentor: Aleš Vavpetič

Vsebina teme:

Leta 1950 je W. A. Coppel dokazal, da za vsako funkcijo $f\colon [0,1] \to [0,1]$, ki nima točke periode 2 (torej za vse $x \in [0,1]$ velja $f^2(x) \neq x$ ali $f(x) = x$), in vsako točko $x \in [0,1]$ zaporedje $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k negibni točki. Posledično funkcija, ki nima točke periode 2, nima točke periode $n \in \mathbb{N}$; torej ne obstajata $x \in [0,1]$ in $n \in \mathbb{N}$, da je $f(x) \neq x$ in $f^n(x) = x$.

Šarkovski je v 60 letih posplošil zgornji rezultat. Naravna števila uredimo na sledeči način:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \rhd 2{\cdot}3 \rhd 2{\cdot}5 \rhd 2{\cdot}7 \rhd 2{\cdot}9 \rhd \cdots \rhd 2^n{\cdot}3 \rhd 2^n{\cdot}5 \rhd 2^n{\cdot}7 \rhd 2^n{\cdot}9 \rhd \cdots \rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Izrek Šarkovskega pravi, da ima vsaka zvezna funkcija $f\colon [0,1] \to [0,1]$, ki ima točko periode n, za vsak $m \lhd n$ tudi točko periode m. Velja tudi v nekem smislu obrat izreka: Za vsako naravno število n obstaja $f\colon [0,1] \to [0,1]$, da ima f točko peride m natanko tedaj, ko je $m \lhd n$.

Literatura:

K. Burns, B. Hasselblatt, *The Sharkovsky theorem: a natural direct proof.* Amer. Math. Monthly 118 (2011), no. 3, 229–244.

W. A. Coppel, *The solution of equations by iteration.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 51, (1955). 41–43.

M. Misiurewicz, *Remarks on Sharkovsky's theorem.* Amer. Math. Monthly 104 (1997), no. 9, 846–847.

C. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.