UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

POVZETEK

Sharkovsky theorem

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: Po zaključenem dokazu si lahko postavimo vprašanje, kako se spre-

menijo posledice izreka, če spremenimo njegove predpostavke. Glede na to, kako spremenimo predpostavke, lahko pridemo do različnih posplošitev izreka. V primeru izreka Šarkovskega že obstaja več posplošitev. Nekatere obravnavajo izrek za nezvezne funkcije, ki ustrezajo določenim pogojem, druge pa preučujejo zvezne funkcije, ki so namesto na intervalu definirane na drugih prostorih. V tem primeru se lahko vprašamo, kakšna ureditev naravnih števil, če ta obstaja, opiše prisotnost periodičnih točk zvezne funkcije $f : X \to X$, ki slika nek topološki prostor X nazaj vase. Natančneje, iščemo relacijo $\lhd_X$ z lastnostjo: če je m perioda za zvezno funkcijo $f : X \to X$, potem je vsako naravno število l, za katero je $l \lhd_X m$, tudi perioda za funkcijo f. V tem poglavju si bomo najprej pogledali, kakšne periodične točke lahko ima zvezna funkcija definirana na dveh disjunktnih intervalih, nato pa bomo obravnavali prisotnost periodičnih točk za zvezvne funkcije na krožnici.

Na začetku si poglejmo, kaj lahko povemo o periodah funkcije, ki je definirana na dveh disjunktnih intervalih.

Primer 0.1. Naj bo prostor X unija dveh disjunktnih intervalov $X = I_1 \cup I_2$, kjer sta I_1 in I_2 disjunktna intervala v množici $\mathbb{R}$. Funkcija $g : X \to X$ podana s predpisom $g(x) = -x$ je zvezna funkcja. Vsaka točka iz prostora X ima periodo 2, funkcija pa nima fiksne točke. Vseeno lahko poiščemo relacijo $\lhd_X$, ki opiše katere periode ima lahko funkcija. Pri poljubni funkciji $f : X \to X$ imamo štiri možnosti. Če je $f(I_1) \subseteq I_1$ in $f(I_2) \subseteq I_2$ lahko za funkciji $f|_{I_1}$ in $f|_{I_2}$ uporabimo izrek Šarkovskega in ugotovimo, de je relacija $\lhd_X$ enaka relaciji Šarkovskega. V primeru, ko je $f(I_1) \subseteq I_1$ in $f(I_2) \subseteq I_1$ lahko periodične točke ležijo samo v intervalu I_1. Za funkcijo $f|_{I_1}$ uporabimo izrek Šarkovskega in ugotovimo, da je relacija $\lhd_X$ enaka relaciji Šarkovskega. Podoben sklep lahko naredimo tudi v primeru, ko je $f(I_1) \subseteq I_2$ in $f(I_2) \subseteq I_2$. Drugače je v primeru $f(I_1) \subseteq I_2$ in $f(I_2) \subseteq I_1$. V tem primeru se točke iz intervala I_1 s funkcijo f slikajo v interval I_2 in obratno. Zato ima vsaka periodična točka sodo periodo. Naj bo $x \in X$ točka periode $2m$ za funkcijo f. Brez izgube splošnosti lahko sklepamo, da točka x pripada intervalu I_1. Potem ima točka x periodo m za funkcijo $f^2|_{I_1} : I_1 \to I_1$. Ker je I_1 prostor Šarkovskega in je f^2 zvezna funkcija, lahko uporabimo izrek Šarkovskega in ugotovimo, da za vsako naravno število l, za katerega velja $l \lhd m$, obstaja točka $y \in I_1$ s periodo l za funkcijo f^2. Točka y ima periodo $2l$ za funkcijo f, saj je orbita točke y sestavljena iz l različnih točk v intervalu I_1 (sode iteracije) in l različnih točk iz intervala I_2 (lihe iteracije). Ugotovili smo naslednje: Če ima zvezna funkcija $f : X \to X$ liho periodo m, potem ima zagotovo tudi vse periode l, kjer je $l \lhd m$. Če pa je perioda m soda, potem ima funkcija vse periode $l \neq 1$, za katere je $l \lhd m$. Dobimo relacijo $\rhd_X$:

$$3 \rhd_X 5 \rhd_X 7 \rhd_X \cdots \rhd_X 2 \cdot 3 \rhd_X 2 \cdot 5 \rhd_X 2 \cdot 7 \rhd_X \cdots \rhd_X 2^2 \cdot 3 \rhd_X 2^2 \cdot 5 \rhd_X 2^2 \cdot 7 \rhd_X \cdots \rhd_X 2^3 \rhd_X 2^2 \rhd_X 2,$$

$$3 \rhd_X 5 \rhd_X 7 \rhd_X 9 \rhd_X \cdots \rhd_X 1.$$

$\diamondsuit$

Primer 0.2. Krožnica $S^1 = \{(cos(\varphi), \sin(\varphi)), \varphi \in [0, 1)\}$. Hitro se lahko prepričamo, da obstajajo funkcije, ki imajo samo eno periodo. To so rotacije okoli koordinatnega izhodišča. Definiramo družino funkciji:

$$R_n : S^1 \to S^1$$

$$R_n : (cos(\varphi), \sin(\varphi)) \mapsto (cos(\varphi + \frac{2\pi}{n}), \sin(\varphi + \frac{2\pi}{n})).$$

Vse točke krožnice S^1 so periodične točke za funkcijo R_n in vse imajo periodo n. Zato iz obstoja periodične točke za zvezno funkcijo $f : S^1 \to S^1$ ne moremo sklepati na obstoj drugih period za to funkcijo. $\diamondsuit$

Primer 0.2 pokaže, da s predpostavko splošne zvezne funkcije ne dobimo željenega rezultata. Če želimo podobne posledice izreka kot v primeru izreka Šarkovskega, moramo dodati še kakšen pogoj. V nadaljevanju bomo formulirali in dokazali izrek podoben izreku Šarkovskega, ki obravnava periode zveznih funkcij na krožnici S^1, ki imajo vsaj eno negibno točko.

Izrek 0.3. *Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna funkcija. Predpostavimo, da ima funkcija f negibno točko in da je neko liho naravno število n tudi perioda funkcije f. Potem je vsako naravno število $m > n$ tudi perioda za funkcijo f.*

Zaradi lažjega dokazovanja, si poglejmo naslednjo definicijo:

Definicija 0.4. Naj bosta $a \in S^1$ in $b \in S^1$ različni točki na krožnici. Z zapisi $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ označimo zaprt, odprt, pol odprt in pol zaprt interval, ki predstavljajo množice točk na krožnici od točke a do točke b v nasprotni smeri urinega kazalca.

Relacijo pokritja intervalov bomo definirali malo drugače, kot v poglavju

Definicija 0.5. Naj bosta $I, J \subset S^1$ prava zaprta podintervala krožnice S^1 in naj bo $f : I \to J$ zvezna preslikava. Pravimo, da interval I f-pokrije interval J, če obstaja tak interval $K \subseteq I$, za katerega velja $f(K) = J$. Relacijo zapišemo kot $I \xrightarrow{f} J$. Kadar je jasno, katero funkcijo imamo v mislih, lahko rečemo samo, da interval I pokrije interval J.V tem primeru, lahko nadpis, ki označi katero funkcijo imamo v mislih izpustimo in pišemo samo $I \to J$.

Preden se lotimo dokazovanja izreka bomo dokazali leme, ki so pomembne pri dokazu izreka in spoznali kakšno definicijo, ki nam olajša zapis pri dokazovanju.

Lema 0.6. *Naj bo $I = [a, b]$ zaprt interval na krožnici S^1 in naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna preslikava. Predpostavimo, da je $f(a) = c$ in $f(b) = d$. Potem velja $I \to [c, d]$ ali $I \to [d, c]$.*

Dokaz. Naj bo $A = \{x \in I; f(x) = c\}$. Ker je funkcija f zvezna, je praslika $f^{-1}(c) = A$ zaprta podmnožica kompaktne množice I, zato je tudi množica A kompaktna. Obstaja točka $v \in A$, za katero je $(v, b] \cap A = \emptyset$. Naj bo $B = \{x \in I; f(x) = d\}$. Zaradi podobnega razmisleka, kot pri množici A obstaja točka $w \in B$, za katero je $[v, w) \cap B = \emptyset$. Velja $f(v) = c$, $f(w) = d$ in $f(x) \notin \{c, d\}$ za vsak $x \in (c, d)$. Zaradi zveznosti funkcije f velja ena od enakosti $f([u, v]) = [c, d]$ ali $f([u, v]) = [d, c]$, zato velja ena od relacij $I \to [c, d]$ ali $I \to [d, c]$. $\square$

Lema 0.7. *Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna preslikava in naj bosta I in J zaprta intervala na S^1, za katera velja $I \to J$. Če je $L \subseteq J$ zaprt interval, potem velja $I \to L$.*

Dokaz. Za intervala I in J velja relacija $I \to J$, zato obstaja interval $K \subset I$, za katerega je $f(K) = J$. Naj bo $L = [c, d]$. Obstajata točki $a, b \in K$ za kateri veljata enakosti $f(a) = c$ in $f(b) = d$. Označimo s K_1 tisti interval s krajiščima a in b, ki leži v intervalu K. Zaradi leme 0.6 velja $K_1 \to [c, d]$ ali $K_1 \to [d, c]$. Zaradi enakosti $f(K) = J$ in ker je K_1 podinterval intervala K, ne more veljati $K \to [d, c]$, zato velja $K \to [c, d]$. Ker je $K_1 \subseteq K \subseteq I$, velja $I \to [c, d]$. $\square$

Lema 0.8. *Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna preslikava in I zaprt interval na krožnici S^1. Če velja relacija $I \to I$, potem ima funkcija f negibno točko na intervalu I.*

Dokaz. Zaradi relacije $I \to I$ obstaja zaprt interval $K \subseteq I$, za katerega velja $f(K) = I$. Obstajata taki točki $v, w \in K$, da sta $f(v)$ in $f(w)$ krajišči intervala I. □

Lema 0.9. *Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna preslikava in naj bojo $M_1, M_2, \dots, M_n$ zaprti intervali na krožnici S^1, za katere veljajo relacije pokritja*

$$M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to M_1.$$

Potem obstaja točka $z \in M_1$, za katero je $f^i(z) \in M_{i+1}$ za $i = 1, \dots, n-1$ in $f^n(z) = z$. S pomočjo leme 0.8 sklepamo, da obstaja negibna točka $z \in M_1$ za funkcijo f^n. Veljajo tudi vsebovanosti $z \in M_, f(z) \in M_2, \dots, f^{n-1} \in M_n$, kar zaključi dokaz.

Dokaz. Velja relacija $M_n \to M_1$, zato obstaja interval $J_n \subseteq M_n$, za katerega je $f(J_n) = M_1$. Podobno obstajajo tudi taki intervali $J_1, \dots, J_{n-1}$, da za vsak $k = 1, \dots, n-1$ velja $f_k \subseteq M_k$ in $f(J_k) = J_{k+1}$. Sledi, da je $f^n(J_1) = M_1$. S pomočjo dokaza leme 0.8 lahko sklepamo, da ima f^n negibno točko $z \in J$. Očitno velja $z \in M_1, f(z) \in M_2, \dots, f^{n-1}(z) \in M_n$. □

Definicija 0.10. Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna dunkcija in $P = \{p_1, p_1, \dots, p_n\}$ orbita funkcije f s periodo n. Pravimo, da je orbita P urejena, če za vsak $k = 1, \dots, n-1$ velja enakost $P \cap (p_k, pk+1) = \emptyset$ in $P \cap (p_n, p_q) = \emptyset$. V tem primeru definiramo n intervalov določenih s P:

$$I_1 = [p_1, p_2], I_2 = [p_2, p_3], \dots, I_{n-1} = [p_{n-1}, p_n], I_n = [p_n, p_1].$$

Lema 0.11. *Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna preslikava. S $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ označimo f-orbito z liho periodo $n \geq 3$. Predpostavimo, da je P urejena in z $I_1, \dots, I_n$ označimo intervale določene s P. Denimo, da obstajata taki števili $i, j \in \{1, \dots, n\}$, za kateri ne obstaja naravno število $k \in \{1, \dots, n\}$, kjer je $k \neq i$, za katerega velja $I_k \to I_i$ in ne obstaja tako naravno število $l \in \{1, \dots, n\}$, kjer je $l \neq j$, za katerega velja $I_l \to I_j$. Potem je $i = j$.*

Dokaz. Naj bo □

Lema 0.12. *Predpostavimo, da ima zvezna funkcija $f : S^1 \to S^1$ periodično orbito $P = \{p1, dots, p_n\}$ z liho periodo $n \geq 3$. Denimo, da je P urejena in da so $I_1, \dots, I_n$ intervali določeni s P. Naj ima funkcija f negibno točko e. Potem ima f negibno točko z, za katero obstaja interval I_j določen s P,*

Dokaz. Po predpostavkah leme ima funkcija f negibno točko e. Brez izgube splošnosti lahko sklepamo, da je $e \in I_n$. Prav tako lahko predpostavimo, da relacija pokritja $I_j \to I_n$ ne velja za nobeno število $j = 1, \dots, n-1$. V nasprotnem primeru izberemo $z = e$, kar zaključi dokaz. Naj bo m najmanjše naravno število, za katerega iz enakosti $f(p_m) = p_r$ sledi neenakost $r < m$. Za število m velja sistem neenakosti $2 \leq m \leq n$, ki ga lahko preoblikujemo tako, da vsem členom odštejemo 1 in dobimo sistem neenakosti $1 \leq m-1 \leq n-1$, iz česar sklepamo, da $m-1 \neq n$. Denimo, da je $f(p_m) = p_r$ in $f(p_{m-1}) = p_q$. Potem je $I_{m-1} \subseteq (p_r, p_q)$ in $I_n \subseteq (p_q, p_r)$. S pomočjo leme 0.6 in leme 0.7 sklepamo, da velja relacija $I_{m-1} \to I_n$ ali $I_{m-1}\ toI_{m-1}$. Toda, na začetku dokaza smo predpostavili, da relacija $I_j \to I_n$ ne velja za vsa naravna števila $j < n$, zato velja relacija $I_{m-1} \to I_{m-1}$. S pomočjo leme 0.8 sklepamo, da ima funkcija f negibno točko z na intervalu I_{m-1}. Ker za nobeno naravno število

$j = 1, \ldots, n$ ne velja relacija $I_j \to I_n$ iz leme 0.11 sledi, da obstaja $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq m-1$, za katerega velja relacija $I_j \to I_{m-1}$.

□

Lema 0.13. *Naj bo $f : S^1 \to S^1$ zvezna preslikava in naj bo P periodična orbita funkcije f s periodo $m \geq 3$. Denimo, da za nek $k \in \{2, \ldots, n\}$ množica zaprtih intervalov $\{M_1, \ldots, M_k\}$ izpolnjuje naslednje pogoje:*

(1) za vsak $j \in \{1, \ldots, k\}$ notranjost intervala M_j ne vsebuje nobene točke iz P,
(2) če je $i \neq j$, potem imata intervala M_i in M_j disjunktni notranjosti,
(3) za $j \in \{2, \ldots, k\}$ so krajišča intervala M_j vsebovana v P,
(4) Če je b krajišče intervala M_1, potem je $b \in P$, ali b je negibna točka funkcije f,
(5) za vsak $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ velja relacija $M_j \to M_{j+1}$,
(6) veljata relaciji $M_1 \to M_1$ in $M_k \to M_1$.

Potem je vsako naravno število $m > k$ perioda funkcije f.

Dokaz. Recimo, da je $n > k$. Predpostavimo lahko, da je $n \neq m$, saj ima po predpostavkah leme funkcija f točko periode m. Označimo intervale $L_1 = M_1, L_2 = M_1, \ldots, L_{n-k} = M_1, L_{n-k+1} = M_1, L_{n-k+2} = M_2, L_{n-k+3} = M_3, \ldots, L_{n-k+k} = L_n = M_k$. Če uporabimo lemo 0.9 na intervalih $L_1, \ldots, L_n$ ugotovimo, da obstaja negibna točka z za funkcijo f^n, za katero velja $z \in L_1, f(z) \in L_2, \ldots, f^{n-1}(z) \in L_{n-1}$. Točka z leži v intervalu M_1, točka $F^{n-k+1}(z)$ pa v intervalu M_2 iz česar lahko s pomočjo pogoja 2 in pogoja3 iz predpostavk leme sklepamo, da z ni negibna točka funkcije f.

Trdimo tudi, da točka z ne pripada ciklu P. Predpostavimo najprej, da je $n \geq k+2$. Potem je $L_1 = L_2 = L_3 = M_1$. Torej, točke $z, f(z)$ in $f^2(z)$ ležijo v intervalu M_1. Ker je P cikel dolžine $m \geq 3$, lahko s pomočjo pogoja 1 sklepamo, da točka z ne pripada orbiti P. Sedaj predpostavimo, da je $n < k+2$. Potem je $n < m+2$. Ker je $n \neq m$ in $m \geq 3$, število n ni večkratnik števila m. Iz enakosti $f^n(z) = z$ sledi, da točka z ne pripada ciklu P.

Ugotovili smo, da točka z ni negibna točka funkcije f in tudi ne pripada ciklu P, zato lahko s pomočjo pogoja 4 iz predpostavk leme sklepamo, da z leži v notranjosti intervala M_1. Ker točka $f^n(z) = z$ ne pripada cuklu P, za vsako naravno število $r < n$ tudi točka $f^r(z)$ ne pripada ciklu P. Trdimo lahko tudi, da $f^r(z)$ ni negibna točka funkcije f. Zaradi pogojev 3 in 4 za vsako naravno število $r < n$ velja, da $f^r(z)$ ni krajišče nobenega intervala $M_1, \ldots, M_k$. S pomočjo te ugotovitve, pogoja 2 in dejstva, da je $z \in M_1, f(z) \in M_1, f^2(z) \in M_1, \ldots, f^{n-k}(z) \in M_1, f^{n-k+1} \in M_2, \ldots, f^{n-1} \in M_k$, lahko sklepamo, da je točka z periodična točka funkcije f s periodo n. □

Dokažimo izrek:

Dokaz. Po predpostavki izreka obstaja f-orbita $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ s periodo n. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je orbita P urejena in so $I_1, \ldots, I_n$ intervali določeni s P. Po predpostavkah izreka ima funkcija negibno točko e. Predpostavimo lahko, da točka e leži v intervalu I_n. Po lemi 0.12 lahko predpostavimo, da obstaja tako naravno število $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, za katerega velja $I_j \to I_n$. Označimo $f(p_1) = p_s$ in $f(p_n) = p_t$. Imamo dve možnosti.

Prva možnost: Velja $[e, p_1] \to [e, p_s]$ ali velja $[p_n, e] \to [p_t, e]$. Ker lahko v obeh primerih dokaz izpeljemo na enak način, predpostavimo, da velja $[e, p_1] \to [e, p_s]$. S pomočjo leme 0.7 sklepamo,da velja $[e, p_1] \to [e, p_1]$ in za vsak $j \in \{1, \ldots, s-1\}$ velja $[e, p_1] \to I_j$. Recimo, da za neko število $j \in \{q, \ldots, s-1\}$ velja $I_j \to I_n$. Potem so izpolnjene predpostavke leme 0.13 za $k = 2$, $M_1 = [e, p_1]$ in $M_2 = I_j$. Lema 0.13 zagotavlja obstoj vseh period $m > 2$.

Torej, lahko predpostavimo, da za vsako število $j \in \{1, \ldots, s-1\}$ ne velja $I_j \to I_n$. Ker za neko število $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ velja $I_j \to I_n$, je $s - 1 < n - 1$. Torej, velja $s < n$.

Obstaja naravno število $r \in \{2, \ldots, s\}$, za katerega vrednost funkcije $f(p_r)$ ne leži v množici $\{p_1, \ldots, p_s\}$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je r najmanjše število s to lastnostjo. Velja $f(p_{r-1}) \in \{p_1, \ldots, p_s\}$. Označimo $f(p_r) = p_q$. Ker ne velja $I_{r-1} \to I_n$, lahko s pomočjo leme 0.6 in leme 0.7 sklepamo, da velja $I_{r-1} \to [f(p_{r-1}), p_q]$. Torej, za vsako naravno število $j \in \{s, \ldots, q-1\}$ velja $I_{r-1} \to I_j$.

Glede na definicijo točke p_q opazimo, da je $s \leq q-1$. Denimo, da obstaja pozitivno naravno število $j \in \{s, \ldots, q-1\}$, za katero velja $I_j \to I_n$. Potem so izpolnjene predpostavke leme 0.13 za $k = 3, M_1 = [e, p_1], M_2 = I_{r-1}$ in $M_3 = I_j$, kar zagotavlja obstoj vseh period $m > 3$.

Postopek opisan v zadnjih treh odstavkih ponavljamo in po največ n korakih, z upoštevanjem dejstva, da za neko naravno število $j = 1, \ldots, n-1$ velja $I_j \to I_n$, sčasoma konstruiramo množico intervalov $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, kjer je $k \leq n$, za katero so izpolnjene predpostavke leme 0.13. To pa zagotavlja obstoj vseh period $m > k$ za funkcijo f.

Druga možnost: Ne velja $[e, p_1] \to [e, p_s]$ in ne velja $[p_n, e] \to [p_t, e]$. S pomočjo leme 0.6 se prepričamo, da velja $[e, p_1] \to [p_s, e]$ in velja $[p_n, e] \to [e, p_t]$. Trdimo, da velja $I_n = [p_n, p_1] \to I_n$. Ker velja $[e, p_1] \to [p_s, e]$ in je $p_n \in [p_s, e]$, obstaja taka točka $a \in (e, p_1]$, za katero je $f(a) = p_n$, vendar za vsak $x \in (e, a)$ velja $f(x) \neq p_n$. Opazimo, da je $f(e) = e$ in $f(a) = p_n$, zato velja $[e, a] \to [e, p_n]$ ali $[e, a] \to [p_n, e]$. Vemo že, da ne velja $[e, p_1] \to [e, p_s]$, zato tudi ne velja $[e, a] \to [e, p_s]$. S pomočjo leme 0.7 sklepamo, da ne velja $[e, a] \to [e, p_n]$, torej velja $[e, a] \to [p_n, e]$. Zapišemo lahko $[p_n, e] \subseteq f([e, a])$.

Denimo, da obstaja neka točka $z \in [e, a]$, za katero velja $f(z) \notin [p_n, p_1]$. Ker $f(z) \notin [p_n, p_1]$ in $f(e) \in [p_n, p_1]$, zaradi zveznosti obstaja točka $q \in (e, a)$, za katero je $f(q) = p_1$ ali $f(q) = p_n$. Ker je $q \in (e, a)$, mora biti $f(q) \neq p_n$, saj smo tako definirali točko a. Torej velja $f(q) = p_1$. Iz definicije točke a sledi, da je $f([e, a])$ zaprt interval na krožnici S^1, ki je pravi podinterval krožnice S^1. Eno krajišče intervala $f([e, a])$ je točka p_n. Točki e in p_1 sta tudi vsebovani v intervalu $f([e, a])$, zato lahko s pomočjo leme **??** sklepamo, da velja $[p_n, p_1] \subseteq f([e, a])$ ali $[e, p_n] \subseteq f([e, a])$. Če velja $[e, p_n] \subseteq f([e, a])$, podobno kot pri dokazu leme 0.7 z uporabo dejstva, da velja $f([e, a]) \neq S^1$, sklepamo, da velja $[e, a] \to [e, p_n]$. To s pomočjo leme 0.7 zagotavlja relacijo $[e, a] \to [e, p_s]$. Torej tudi relacijo $[e, p_1] \to [e, p_s]$, kar je protislovje. Zato je interval $[p_n, p_1]$ vsebovan v intervalu $f([e, a])$. Ker je $f([e, a]) \neq S^1$, sklepamo, da velja $[e, a] \to [p_n, p_1]$. Velja tudi $[p_n, p_1] \to [p_n, p_1]$. Trditev smo dokazali v primeru, ko obstaja točka $z \in (e, a)$, za katero velja $f(z) \notin [p_n, p_1]$. Sedaj lahko predpostavimo, da je $f([e, a]) \subseteq [p_n, p_1]$.

Ker velja $[p_n, e] \to [e, p_t]$, obstaja točka $b \in [p_n, e)$, za katero je $f(b) = p_1$ in za vsak $x \in (b, e)$ velja $f(x) \neq p_1$. Z enakim argumentom, kot smo pokazali, da je $[p_n, e] \subseteq f([e, a])$ utemeljimo, da je $[e, p_1] \subseteq f([b, e])$. Na enak način kot smo utemeljili predpostavko, da je $f([e, a]) \subseteq [p_n, p_1]$, lahko utemeljimo predpostavko, da je $f([b, e]) \subseteq [p_n, p_1]$

Torej velja $f([b,a]) = [p_n, p_1]$.Ker je $[b,a] \subseteq [p_n, p_1]$, je res izpoljnena relacija pokritja $[p_n, p_1] \to [p_n, p_1]$.

Iz relacije $[e, p_1] \to [p_s, e]$ lahko sklepamo, da velja relacija $[p_n, p_1] \to [p_s, e]$. Enako lahko iz relacije $[p_n, e] \to [e, p_t]$ sklepamo, da je izpolnjena relacija $[p_n, p_1] \to [e, p_t]$. Lema 0.7 zagotavlja, da za vsako naravno število $j \in \{1, \ldots, t-1\} \cup \{s, \ldots, n-1\}$ velja $[p_n, p_1] \to I_j$.

Predpostavimo, da obstaja naravno število $j \in \{1, \ldots, t-1\} \cup \{s, \ldots, n-1\}$, za katerega velja $I_j \to I_n$. Potem je izrek dokazan, saj so izpolnjene predpostavke leme 0.13 za $k = 2, M_1 = I_n$ in $M_2 = I_j$. Torej, predpostavimo, da za vsako naravno število $j \in \{1, \ldots, t-1\} \cup \{s, \ldots, n-1\}$ ne velja relacija $I_j \to I_n$. Ker za nek $j \in 1, \ldots, n-1$ velja $I_j \to I_n$ je število t strogo manjše od števila s.

Prepričajmo se, da ne moreta biti istočasno izpolnjena pogoja $f(\{p_1, \ldots, p_t\}) \subseteq \{p_s, \ldots, p_n\}$ in $f(\{p_s, \ldots, p_n\}) \subseteq \{p_1, \ldots, p_t\}$. V nasprotnem primeru je množica $P = \{p_1, \ldots, p_t, p_s, \ldots, p_n\}$ orbita točke p_1. Toda orbita točke p_1 je enaka $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. To pomeni, da je $t = s-1$ in imata množici $\{p_1, \ldots, p_t\}$ in $\{p_s, \ldots, p_n\}$ enako število elementov. To pa bi pomenilo, da ima množica P sodo število elementov, kar je v nasprotju s predpostavko, da ima orbita P liho periodo. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da množica $f(\{p_1, \ldots, p_t\})$ ni podmnožica množice $\{p_s, \ldots, p_n\}$.

Naj bo w najmanjše pozitivno število, za katero je $f(p_w) \notin \{p_s, \ldots, p_n\}$. Potem je $2 \leq w \leq t$ in velja $I_{w-1} \to [f(p_{w-1}), f(p_w)]$ ali $I_{w-1} \to [f(p_w), f(p_{w-1})]$. Recimo, da velja $I_{w-1} \to [f(p_{w-1}), f(p_w)]$. Potem velja tudi $I_{w-1} \to I_n$, kar je v protislovju s predpostavko. Velja torej $I_{w-1} \to [f(p_w), f(p_{w-1})]$, iz česar lahko sklepamo, da velja tudi $I_{w-1} \to [f(p_w), p_s]$. Označimo $f(p_w)$ s p_v.Potem je število v manjše ali enako $s-1$ in za vsako naravno število $j \in \{v, \ldots, s-1\}$ velja $I_{w-1} \to I_j$.

Denimo, da obstaja tako naravno število $j \in \{v, \ldots, s-1\}$, za katero velja $I_j \to I_n$. Potem so izpolnjene predpostavke leme 0.13 za $k = 3, M_1 = I_n, M_2 = I_{w-1}$ in $M_3 = I_j$, kar zagotavlja, da veljajo posledice izreka.

Postopek opisan v zadnjih štirih odstavkih ponavljamo in po največ n korakih, z upoštevanjem dejstva, da za neko naravno število $j = 1, \ldots, n-1$ velja $I_j \to I_n$, sčasoma konstruiramo množico zaprtih intervalov $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, kjer je $k \leq n$, za katero so izpolnjene predpostavke leme 0.13. To pa zagotavlja obstoj vseh period $m > k$ za funkcijo f, kar zaključi dokaz. $\square$