

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik
Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

KAZALO

0.1. Izrek Šarkovskega	5
1. Intervali, relacija pokritja in cikli	7

Izrek Šarkovskega

POVZETEK

Sharkovsky theorem

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2010):

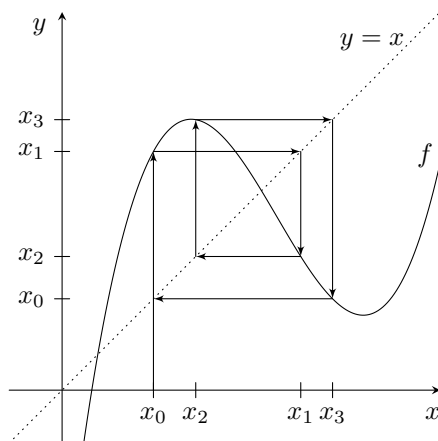
Ključne besede:

Keywords: Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ povezana podmnožica realnih števil. Takim množicam

bomo rekli intervali. Interval ne rabi biti zaprt ali omejen in lahko v nekaterih primerih predstavlja kar celotno množico realnih števil. Naj bo $f : I \rightarrow I$ zvezna funkcija, ki slika interval I nazaj vase. Za naravno število n bomo s f^n označevali kompozitum:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ponovitev } f},$$

kjer f^0 predstavlja identično funkcijo. Lahko si izberemo neko točko x_0 iz intervala I in s pomočjo iteracij funkcije f definiramo zaporedje s splošnim členom $x_n = f^n(x_0)$. Točke v tem zaporedju lahko ponazorimo v koordinatnem sistemu tako, da začnemo na abscisni osi pri točki x_0 . Potujemo navpično do grafa funkcije f in se premaknemo v vodoravni smeri do simetrane lihih kvadrantov. Ta točka ima obe koordinati enaki x_1 . Sedaj se zopet premaknemo navpično do grafa funkcije f in nato vodoravno do simetrane lihih kvadrantov. Pridemo do točke, ki ima obe koordinati enaki x_2 . Postopek (skiciran je na sliki 1) lahko nadaljujemo v neskončnost. V primeru na sliki 1 vidimo, da se točka x_3 slika v točko x_0 . To pomeni, da ima zaporedje samo 4 različne člene, ki se ponavljajo.



SLIKA 1. Slika prikazuje, iteracije funkcije f na točki x_0 .

V takem dinamičnem sistemu ena iteracija funkcije predstavlja en diskreten korak v času, točka $x_0 \in I$ pa začetni položaj točke v sistemu. Množici, ki vsebuje vse člene zaporedja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bomo rekli *f-orbita točke x_0* ali samo orbita točke x_0 . Z matematičnimi simboli jo lahko zapišemo tako:

$$\{\mathcal{O} := f^m(x_0); m \in \mathbb{N}\}.$$

Preučevali bomo take točke $x_0 \in I$, ki se po nekaj iteracijah s funkcijo f slikajo nazaj vase. Takim točkam rečemo *periodične točke*. *Perioda točke x_0* je najmanjše tako naravno število m , za katero je $f^m(x_0) = x_0$. Ekvivalentno lahko sklepamo, da je orbita periodične točke x_0 končna množica, število različnih elementov v orbiti pa je enako periodi točke x_0 . Predvsem, ko želimo poudariti, da govorimo o periodični točki x_0 , bomo *f-orbito točke x_0* imenovali tudi cikel točke x_0 . Cikel dolžine m bomo krajše zapisali *m-cikel*. *Negibna točka* (včasih ji rečemo tudi fiksna točka) je periodična točka s periodo 1, torej taka točka x_0 , za katero je $f(x_0) = x_0$. Če obstaja periodična točka s periodo n , rečemo tudi, da ima funkcija f periodo n .

Pri danem dinamičnem sistemu se lahko vprašamo, katere periode lahko ima funkcija. Šarkovski si je postavil prav to vprašanje in prišel do ureditve množice naravnih števil, ki pove, katere periode lahko ima funkcija.

0.1. Izrek Šarkovskega. Izrek šarkovskega opiše periode poljubne zvezne funkcije tako, da uredi naravna števila z relacijo delne urejenosti, ki jo moramo še spoznati.

Definicija 0.1. Naj bo M množica. Relacija (M, \leq) definirana na množici M je relacija delne urejenosti, če veljajo naslednje lastnosti:

- refleksivnost: $\forall a \in M : a \leq a$,
- antisimetričnost: $\forall a, b \in M : a \leq b \text{ in } b \leq a \Rightarrow a = b$,
- tranzitivnost: $\forall a, b, c \in M : a \leq b \text{ in } b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Relacija (M, \leq) je linearna urejenost, če je relacija delne urejenosti, ki je sovisna. To pomeni, da sta vsaka dva elementa v relaciji \leq . Natančneje: za vsaka elementa $a, b \in M$ velja $a \leq b$ ali $b \leq a$. Stroga linearna urejenost je relacija $(M, <)$, ki je tranzitivna, sovisna in irefleksivna. Irefleksivnot pomeni, da ne obstaja element $a \in M$, za katerega je $a < a$.

Definicija 0.2. Množico naravnih števil lahko uredimo na naslednji način:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Ureditev, imenujemo jo ureditev Šarkovskega, določa relacijo $(\mathbb{N}, \triangleright)$, ki ji pravimo relacija Šarkovskega. Naravni števili m in n sta v relaciji $m \triangleright n$ (ali $n \triangleleft m$) natanko tedaj, ko m leži levo od n ali je $m = n$. Opazimo, da je ureditev sestavljena tako, da najprej po vrsti naštejemo liha števila večja od 1, nato dodamo ta števila po vrsti pomnožena z 2. Sledijo liha števila večja od 1 pomnožena z 2^2 itn. Na koncu so zapisane potence števila 2 v padajočem vrstnem redu. Zaradi vrstnega reda števil pomislimo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila. To pomeni, da lahko poljubni naravni števili m in n zapišemo na naslednji način:

$$(1) \quad m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1),$$

kjer so števila $m_1, n_1, k, l \in \mathbb{N}_0$. Števili sta v relaciji $m \triangleright n$, če je:

- (R1) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
- (R2) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
- (R3) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
- (R4) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

Trditev 0.3. Relacija $(\mathbb{N}, \triangleright)$, ki smo jo definirali, je relacija linearne urejenosti.

Dokaz. Za dokaz potrebujemo tri poljubna naravna števila, ki jih zapišemo na zgoraj opisan način:

- $m = 2^k(2m_1 + 1)$,
- $n = 2^l(2n_1 + 1)$ in
- $s = 2^h(2s_1 + 1)$.

Dokazati moramo refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost in sovisnost relacije. Refleksivnost: če je število m potenca števila 2, točka (R3) zagotavlja, da je $m \triangleright m$. Če število m ni potenca števila 2, pa relacija $m \triangleright m$ sledi iz točke (R2).

Antisimetričnost: denimo, da za števili m in n veljata relaciji $m \triangleright n$ in $n \triangleright m$. Pogoja (R1) in (R4) za relacijo $m \triangleright n$ sta v protislovju z vsemi pogoji relacije $n \triangleright m$. Edina možnost, ki zadosti vsem potrebnim pogojem relacij je $k = l$ in $m_1 = n_1$. Torej je $m = n$.

Tranzitivnost: obravnavamo števila m, n in s , ki zadoščajo relacijam $m \triangleright n$ in $n \triangleright s$. Radi bi videli, ali sta števili m in s v relaciji $m \triangleright s$. Ker imamo 4 pogoje za relacijo

$m \triangleright n$ in 4 pogoje za relacijo $n \triangleright s$, moramo obravnavati 16 možnih kombinacij. Vse kombinacije pogojev za relacije so zapisane v tabeli 1. V drugem stolpcu so zapisani pogoji, ki jih dobimo iz relacije $m \triangleright n$, v tretjem stolpcu so pogoji, ki jih preberemo iz relacije $n \triangleright s$. V četrtem stolpcu je zapisan pogoj, ki sledi iz pogojev v drugem in tretjem stolpcu. Opazimo, da v devetih primerih pogoja ne moreta biti izpolnjena istočasno, zato pridemo do protislovja. V ostalih primerih, pa dobimo enega od pogojev za relacijo $m \triangleright s$, zato sta števili m in s v relaciji $m \triangleright s$.

	$m \triangleright n$	$n \triangleright s$	\Rightarrow
1	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
2	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l = h$ in $0 < n_1 \leq s_1$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
3	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
4	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$n_1 = 0, s_1 > 0$	$m_1 = 0, s_1 > 0$
5	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
6	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	$k = h$ in $0 < m_1 \leq s_1$
7	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
8	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$k < l$ in $n_1 = 0, s_1 > 0$	$m_1 = 0, s_1 > 0$
9	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
10	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
11	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$k \geq h$ in $m_1 = s_1 = 0$
12	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$k < l$ in $n_1 = 0, s_1 > 0$	protislovje
12	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
14	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
15	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$m_1 = 0, s_1 > 0$
16	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$k < l$ in $n_1 = 0, s_1 > 0$	protislovje

TABELA 1. Vseh 16 možnosti.

Sovisnost: prepričati se moramo, da za vsaki dve naravni števili m, n velja $m \triangleright n$ ali $n \triangleright m$. Torej velja en od pogojev:

- (i) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
- (ii) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
- (iii) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
- (iv) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$

ali

- (v) $l < k$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
- (vi) $l = k$ in $0 < n_1 \leq m_1$ ali
- (vii) $l \geq k$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
- (viii) $n_1 > 0$ in $m_1 = 0$.

Denimo, da števili m in n nista v relaciji. Iz (iv) in (viii) ugotovimo, da mora biti $m_1 = n_1 = 0$ ali $m_1, n_1 \neq 0$. Ker števili ne ustrezata pogoju (iii) niti pogoju (vii) ugotovimo, da morata biti števili m_1 in n_1 različni od 0. Iz pogojev (i) in (v) sklepamo, da mora biti $k = l$. Sedaj pa števili zagotovo zadoščata enemu od pogojev (ii) ali (vi). To je preotislovje s predpostavko, da števili m in n nista v relaciji. Torej res za vsaki dve naravni števili m, n velja relacija $m \triangleright n$ ali relacija $n \triangleright m$. \square

Relacija \triangleright ima še eno zanimivo in za dokaz izreka Šarkovskega zelo pomembno lastnost.

Trditev 0.4. *Števili m in n sta v relaciji $m \triangleright n$ natanko tedaj, ko velja relacija $2m \triangleright 2n$. Zapisano z matematičnimi simboli:*

$$\text{za } \forall m, n \in \mathbb{N} : m \triangleright n \Leftrightarrow 2m \triangleright 2n.$$

Dokaz. Zapišimo števili m in n kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1).$$

Če števili pomnožimo z 2, dobimo:

$$2m = 2^{k+1}(2m_1 + 1) \text{ in } 2n = 2^{l+1}(2n_1 + 1).$$

Sedaj lahko preverimo, da so pogoji za relacijo $m \triangleright n$ in relacijo $2m \triangleright 2n$ ekvivalentni. To je očitno takoj, ko opazimo, da se števili m_1 in n_1 nista spremenili. Neenačbi $k < l$ in $k + 1 < l + 1$ pa sta ekvivalentni. Podobno ugotovimo za neenačbi $k \geq l$ in $k + 1 \geq l + 1$ ter enačbi $k = l$ in $k + 1 = l + 1$. \square

Sedaj smo definirali vse potrebne pojme in spoznali tudi ureditev Šarkovskega. Čas je, da si pogledamo, na kakšen način ureditev Šarkovskega določa periode funkcije.

Izrek 0.5 (The Sharkovsky forcing theorem). *Če ima zvezna funkcija $f : I \rightarrow I$ točko periode m in velja $m \triangleright l$, potem obstaja tudi točka periode l .*

Izrek pove, da je množica period zvezne funkcije na intervalu I rep ureditve Šarkovskega. Rep ureditve Šarkovskega je taka množica $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$, za katero je $m \triangleright n$ za vsaki naravni števili $m \notin \mathcal{T}$ in $n \in \mathcal{T}$. Obstajajo trije različni tipi repov: Za neko naravno število m je rep množica $\{n \in \mathbb{N}; m \triangleright n\}$, množica $\{\dots, 16, 8, 4, 2, 1\}$ vseh potenc števila 2 in \emptyset .

Naslednji izrek je neke vrste obrat zgornjega izreka.

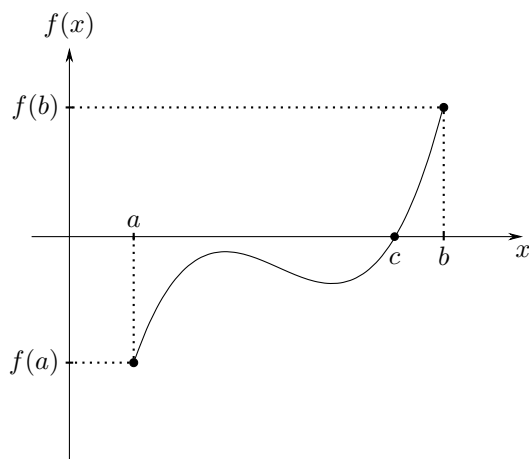
Izrek 0.6 (The Sharkovsky realization theorem). *Za vsak rep \mathcal{T} v zaporedju Šarkovskega obstaja taka zvezna funkcija f , katere množica period je enaka \mathcal{T} .*

Izrek Šarkovskega je unija izreka 0.5 in izreka 0.6. Podmnožica naravnih števil je množica period zvezne funkcije $f : I \rightarrow I$, če in samo če je množica rep ureditve Šarkovskega. Nasledja poglavja so namenjena pripravi in dokazu izreka 0.5, v poglavju ?? pa je predstavljen dokaz izreka 0.6.

1. INTERVALI, RELACIJA POKRITJA IN CIKLI

Vsi dokazi izreka Šarkovskega so si podobni po tem, da so elementarni. Ne glede na to, kako zvito se lotimo dokaza, je ključnega pomena lastnost zveznih funkcij, ki ob določenih predpostavkah zagotavlja obstoj ničle funkcije. To je izrek o vmesni vrednosti.

Izrek 1.1 (izrek o vmesni vrednosti). *Funkcija f , ki je zvezna na intervalu $[a, b]$ in je na krajiščih intervala različno predznačena, torej velja neenačba $f(a) \cdot f(b) < 0$, ima vsaj v eni točki tega intervala vrednost 0.*



SLIKA 2. Zvezna funkcija, ki je definirana na intervalu in je na krajiših intervala različno predznačena ima vsaj eno ničlo.

Dokaz. Naj bo funkcija $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ zvezna in naj bo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $f(a) < 0 < f(b)$. Ničlo funkcije f bomo iskali s pomočjo deljenja intervalov oziroma z bisekcijo. Izračunamo razpolovišče $p_0 = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a, b]$. Če je $f(p_0) = 0$, smo ničlo že našli, sicer razmišljamo tako: če je $f(p_0) > 0$, označimo $[a_1, b_1] = [a, p_0]$, sicer označimo $[a_1, b_1] = [p_0, b]$. Nato izračunamo razpolovišče p_1 intervala $[a_1, b_1]$. Če je $f(p_1) = 0$ postopek ustavimo, saj smo ničlo našli, v nasprotnem primeru pogledamo predznak $f(p_1)$. Če je $f(p_1) > 0$, označimo $[a_2, b_2] = [a_1, p_1]$, drugače označimo $[a_2, b_2] = [p_1, b_1]$. Postopek nadaljujemo dokler ne najdemo ničle p_i funkcije f . Če ničle ne najdemo, dobimo neskončno zaporedje vloženih intervalov

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

Lahko se prepričamo, da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ in $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Števila a_n tvorijo naraščajoče zaporedje, števila b_n pa padajoče zaporedje. Limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ sta enaki, saj je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Označimo $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Točka c je večja od vseh členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in manjša od vseh členov zaporedja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, zato je za vsak $n \in \mathbb{N}$ vsebovana v intervalu $[a_n, b_n]$. Torej velja: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$. Ker je funkcija zvezna, je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(c)$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = f(c)$. Za vsako naravno število n velja $f(a_n) < 0$, zato je $f(c) \leq 0$. Podobno je $f(b_n) > 0$ za vsako naravno število n , iz česar sklepamo, da je $f(c) \geq 0$. Torej je $f(c) = 0$, kar zaključuje dokaz. \square

Posledica 1.2. Naj bo $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ zvezna funkcija. Za vsako točko y , ki leži med točkama $f(a)$ in $f(b)$, obstaja točka $c \in (a, b)$, za katero je vrednost funkcije $f(c)$ enaka y .

Dokaz. Definiramo zvezno funkcijo $g(x) = f(x) - y$. Ker točka y leži med točkama $f(a)$ in $f(b)$, je funkcija g na krajiših intervala $[a, b]$ različno predznačena. Po izreku 1.1 obstaja točka c , za katero je $g(c) = 0$. To pomeni, da je $f(c) = y$. \square

Posledica pove, da zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ zavzame vse vrednosti med $f(a)$ in $f(b)$. V resnici pove še več. Naj bosta $[a, b]$ in $[c, d]$ intervala v realnih

številah in $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a, b]$, za kateri velja $f(a_1) \leq c$ in $f(b_1) \geq d$, potem interval $[c, d]$ leži v sliki $f([a, b])$. To je res, saj funkcija f na intervalu $[a_1, b_1]$ zavzame vse vrednosti med $f(a_1)$ in $f(b_1)$. Torej, $[c, d] \subseteq f([a_1, b_1]) \subseteq f([a, b])$.

Definicija 1.3. Naj bosta $I, J \subseteq \mathbb{R}$ in naj bo $f : I \rightarrow J$ zvezna funkcija. Pravimo, da interval I f -pokrije interval J , če je $J \subseteq f(I)$. Relacijo zapišemo kot $I \xrightarrow{f} J$. Kadar je jasno, katero funkcijo imamo v mislih, lahko rečemo samo, da interval I pokrije interval J . V tem primeru, lahko nadpis, ki označi katero funkcijo imamo v mislih izpustimo in pišemo samo $I \rightarrow J$. Če velja $f(I) = J$, zapišemo $I \rightarrowtail J$.

S pomočjo izreka o vmesni vrednosti in poznavanja, kako se intervali slikajo s funkcijo f , lahko izvemo, ali obstajajo periodične točke. Kako potrdimo obstoj periodičnih točk, nam povejo naslednje leme.

Lema 1.4. Če velja $[a, b] \xrightarrow{f} [a, b]$, potem ima funkcija f negibno točko na intervalu $[a, b]$.

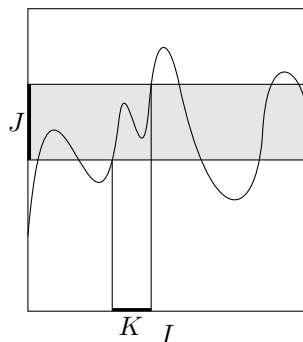
Dokaz. Interval $[a, b]$ je podmnožica slike $f([a, b])$, zato obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a, b]$, da je $f(a_1) = a$ in $f(b_1) = b$. Če je $a_1 = a$ ali $b_1 = b$, smo negibno točko že našli. Če je $a_1 \neq a$ in $b_1 \neq b$, definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Prepričajmo se, da je vrednost funkcije g v točki a_1 negativna, v točki b_1 pa pozitivna. Računamo: $g(a_1) = f(a_1) - a_1 = a - a_1 < 0$. Podobno je $g(b_1) = f(b_1) - b_1 = b - b_1 > 0$. Zvezna funkcija g je na krajiščih intervala $[a, b]$ različno predznačena. Po izreku 1.1 obstaja točka $c \in [a, b]$, pri kateri je $g(c) = 0$, torej je $f(c) = c$. \square

Pri iteracijah funkcije lahko opazujemo, kako se premika točka. To smo počeli na sliki 1. Poglejmo, kako se s f slikajo celi intervali. Lahko se zgodi, da nek interval I_0 pokrije interval I_1 , interval I_1 pa pokrije interval I_2 itn. Na ta način dobimo zaporedje relacij pokritja npr. $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots$. Enako kot pri periodičnih točkah lahko pri zaporedju relacij pokritja po nekaj korakih zopet pridemo do prvotnega intervala. Dobimo naslednje zaporedje relacij pokritja: $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_0$. Če je začetni interval enak končnemu intervalu, zaporedju intervalov in pripadajočim relacijam pokritja pravimo *zanka intervalov* ali samo *zanka*. Od tu naprej bo, razen če ne povemo drugače, interval predstavljal zaprto, omejeno in povezano podmnožico realnih števil.

Lema 1.5. Če za intervale I_0, I_1, \dots, I_{n-1} veljajo naslednje relacije pokritosti: $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, potem obstaja taka točka $c \in I_0$, za katero je $f^i(x) \in I_i$ za $0 \leq i < n$ in $f^n(c) = c$. Pravimo, da točka c sledi zanki $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$.

Dokaz. Če velja relacija pokritosti $I \rightarrow J$, obstaja tak interval $K \subseteq I$, da je $K \rightarrowtail J$. Interval K poiščemo tako, da iz preseka funkcije f s pravokotnikom $I \times J$ izberemo povezan del grafa, ki povezuje spodni in zgornji del pravokotnika. Tak del zagotovo obstaja, saj je $J \subseteq f(I)$. Projekcijo tega dela na interval I označimo s K . To znanje uporabimo na zanki intervalov $I_0 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$. Ker velja relacija pokritja $I_{n-1} \rightarrow I_0$, vemo, da obstaja tak interval $K_{n-1} \subseteq I_{n-1}$, da je $K_{n-1} \rightarrowtail I_0$. Velja relacija pokritosti $I_{n-2} \rightarrow K_{n-1}$, zato obstaja tak interval $K_{n-2} \subseteq I_{n-2}$, da je $K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1}$. S postopkom nadaljujemo in dobimo naslednje relacije:

$$K_0 \rightarrowtail K_1 \rightarrowtail \dots \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail I_0.$$



SLIKA 3. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K .

Za vsako točko $x \in K_0$ in za vsak $i \in [0, n)$ velja $f^i(x) \in K_i \subseteq I_i$ in $f^n(x) \in I_0$. Ker je $K_0 \subseteq I_0 = f^n(K_0)$, lahko s pomočjo leme 1.4 sklepamo, da ima f^n negibno točko c na intervalu K_0 . Točka c sledi zanki $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$. \square

Pri dokazovanju izreka bomo dokazali obstoj zank različnih dolžin. Želeli bi si, da je perioda točke, ki sledi zanki, enaka dolžini zanke.

Definicija 1.6. Zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ je elementarna, če ima vsaka točka, ki sledi zanki, periodo n .

Posledica 1.7. Vsaka elementarna zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ vsebuje točko x_0 , ki sledi zanki in ima periodo n .

Zaradi zgornje posledice bi bilo dobro, če bi poznali kakšen kriterij za prepoznavanje elementarnih zank. Najlažji kriterij je število intervalov v zanki. Če nastopa samo en interval, dobimo zanko $I_0 \rightarrow I_0$. Z uporabo leme 1.4 ugotovimo, da je zanka elementarna. Naslednja lema poda še en kriterij za prepoznavanje elementarnih zank:

Lema 1.8. Zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ je elementarna, če ji ne sledi nobena robna točka intervala I_0 in je notranjost intervala $\text{int}(I_0)$ disjunktna z intervali I_1, I_2, \dots, I_{n-1} . Torej, $\text{int}(I_0) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i = \emptyset$.

Dokaz. Točka x_0 , ki sledi zanki, ne more biti robna točka intervala I_0 . Torej je $x_0 \in \text{int}(I_0)$. Za vsak $i = 1, \dots, n-1$ je $x_0 \neq f^i(x_0)$, saj je $f^i(x_0) \in I_i$, notranjost intervala I_0 pa je disjunktna z intervalom I_i . Ker točka x_0 sledi zanki, je $f^n(x_0) = x_0$. Točka x_0 ima periodo n . \square

Poglejmo si dva primera, ki pokažeta, da nobene predpostavke v lemi 1.8 ne moremo izpustiti.

Primer 1.9. Obravnavajmo zvezno funkcijo $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ in 2-zanko intervalov $[0, \frac{1}{2}] \rightleftharpoons [-\frac{1}{2}, 0]$. Samo ena točka sledi tej zanki, to je točka 0. Perioda točke 0 ni enaka enaki dolžini zanke, saj je točka 0 negibna točka in je njena perioda enaka 1. \diamond

Primer 1.10. Funkcija $f(x) = -x^2$ tvori 2-zanko $[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}] \rightleftharpoons [\frac{1}{2}, 4]$. Tej zanki sledi zgolj točka 1, ki je negibna točka, torej je njena perioda različna od dolžine zanke. \diamond

Zanka v primeru 1.9 ni elementarna, saj ji sledi robna točka začetnega intervala. V primeru 1.10 pa zanka ni elementarna, saj točka 1 leži v preseku notranjosti prvega intervala in drugega intervala.

Definicija 1.11. Zaprt in omejen interval, katerega krajišči pripadata ciklu \mathcal{O} imenujemo \mathcal{O} -interval.

V nadaljevanju bomo zgornje leme uporabili na \mathcal{O} -intervalih. Tako bomo poenostavili obravnavo periodičnih točk funkcije f , saj bomo uporabili samo informacije, ki jih lahko pridobimo iz delovanja funkcije f na ciklu \mathcal{O} . Zato bodo naši sklepi veljali za vse zvezne funkcije s ciklom \mathcal{O} . Relaciji pokritja $I \rightarrow J$ rečemo \mathcal{O} -vsiljena, če interval J leži v \mathcal{O} -intervalu M , katerega krajišči sta skrajno leva in skrajno desna točka množice $f(I \cap \mathcal{O})$. Ker je funkcija f zvezna, lahko s pomočjo izreka 1.1 ugotovimo, da je množica $f(I)$ interval. Velja $J \subseteq M \subseteq f(I)$. V nadaljevanju dela bodo vse relacije pokritja \mathcal{O} -vsiljene. Zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, v kateri vsaka puščica predstavlja \mathcal{O} -vsiljeno relacijo pokritja, se imenuje \mathcal{O} -vsiljena zanka \mathcal{O} -intervalov.

Vse relacije pokritja, o katerih bomo govorili od sedaj naprej in jih bomo označevali s simbolom ' \rightarrow ' bodo \mathcal{O} -vsiljene.