UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

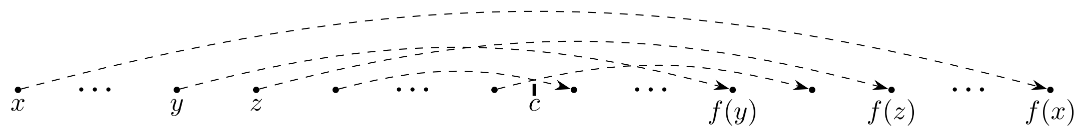
Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: V tem poglavju bomo pokazali, da lahko v vsakem ciklu, ki vsebuje vsaj

dve točki poiščemo Štefanovo zaporedje, razen če vsaka točka v ciklu menja stran. Dokaz bomo izvedli tako, da bomo konstruirali zaporedje in na koncu preverili, da gre za Štefanovo zaporedje.

Trditev 0.1. *Cikel, ki vsebuje vsaj dve točki, vsebuje Štefanovo zaporedje, če vsaj ena točka ne menja strani.*

Dokaz. Naj bo m naravno število večje ali enako 2 in naj bo $\mathcal{O}$ cikel sestavljen iz m različnih točk. Naj bo množica $\mathcal{M}$ največji tak $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke p, q in take točke iz cikla $\mathcal{O}$, ki menjajo strani. To pomeni, da za poljubno točko $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ vse točke iz množice $\mathcal{O}_x$ menjajo strani. Pri konstrukciji Štefanovega zaporedja, si bomo pomagali z množico $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, ki vsebuje vse točke, ki so kandidati za nekončne člene Štefanovega zaporedja. V množici $\mathcal{S}$ ležijo take točke $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{M}$, ki jih funkcija f slika dlje od točke c kot katerokoli drugo točko iz množice $\mathcal{O}_x$ (slika 1). Za vsak $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{M}$ velja, da je x iz množice $\mathcal{S}$, če je $\mathcal{O}_{f(w)} \subseteq \mathcal{O}_{f(x)}$ za vsako

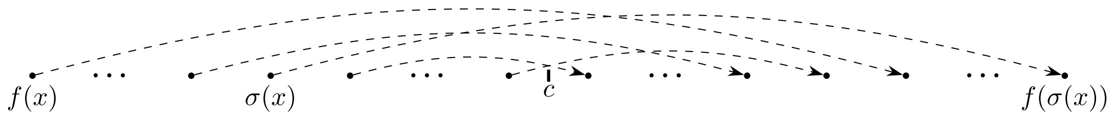


Slika 1. Točka x pripada množici $\mathcal{S}$, medtem ko točka y pripada množici $\mathcal{M}$ ne pa tudi množici $\mathcal{S}$, saj se točka z slika bolj stran od točke c kot točka y.

točko $w \in \mathcal{O}_x$. Množica $\mathcal{S}$ zagotovo ni prazna množica, saj vsebuje točki p in q. Sedaj lahko definiramo preslikavo $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$, ki slika element Štefanovega zaporedja v naslednji člen tega zaporedja. Za $\sigma(x)$ vedno izberemo točko iz množice $\mathcal{O}_{f(x)}$. Točka x je vsebovana v množici $\mathcal{S}$, torej menja strani. To zagotavlja, da točki x in $\sigma(x)$ ležita na nasprotnih straneh točke c. Točko $\sigma(x)$ določimo na naslednji način:

(1) Če $f(x) \in \mathcal{M}$, potem je $\sigma(x)$ tista točke iz množice $\mathcal{O}_{f(x)}$, ki se s funkcijo f slika najdlje od centra c. Velja vsebovanost:
$$f(\mathcal{O}_{f(x)}) \subseteq \mathcal{O}_{f(\sigma(x))}.$$
(2) Če $f(x) \notin \mathcal{M}$, potem za $\sigma(x)$ izberemo katero koli točko iz $\mathcal{O}_{f(x)}$, ki ne menja strani.

Iz definicije preslikave σ vidimo, da v primeru (1) točka $\sigma(x)$ leži v množici $\mathcal{S}$, saj menja strani in se slika bolj stran od točke c kot katero koli drugo število iz množice $\mathcal{O}_{\sigma(x)}$. Primer si lahko pogledamo na sliki 2.



Slika 2. Ker $f(x)$ menja strani, smo točko $\sigma(x)$ določili po primeru (1).

V primeru (2) $\sigma(x)$ ne leži v množici $\mathcal{S}$, saj ne menja strani. Glede na to, da so v množici $\mathcal{S}$ kandidati za nekončne člene zaporedja, je $\sigma(x)$, ki ga dobimo v primeru (2), dober kandidat za končen člen zaporedja.

Števili x in $\sigma(x)$ ležita na nasprotnih straneh točke c. Če je število $\sigma^2(x)$ dobro definirano, tudi števili $\sigma(x)$ in $\sigma^2(x)$ ležita na nasprotnih straneh točke c, kar pomeni, da točki x in $\sigma^2(x)$ ležita na isti strani točke c. Kot smo utemeljili v poglavju **??**, je za dokaz zelo pomembno, da se točke spiralno oddaljujejo od točke c, kot kaže slika **??** in je podrobneje opisano v definiciji Štefanovega zaporedja v točkah **??** in **??**. Za vsako točko x iz štefanovega zaporedja bi radi videli, da je $\sigma^2(x)$, če ta obstaja, bolj stran od točke c kot točka x. Torej, $\sigma^2(x) \notin \mathcal{O}_x$.

Lema 0.2. *Če obstaja taka točka $x \in \mathcal{S}$, za katero je $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$, potem vse točke cikla $\mathcal{O}$ menjajo stran.*

Dokaz. Denimo, da je za neko točko $x \in \mathcal{O}$ točka $\sigma^2(x)$ dobro definirana in da je vsebovana v množici $\mathcal{O}_x$. Potem so dobro definirane vse točke $x, y := \sigma(x)$ in $z := \sigma(y) = \sigma^2(x)$. Da lahko izračunamo $\sigma(x)$ ali $\sigma(y)$, morata točki x in y ležati v množici $\mathcal{S}$. Točka $y = \sigma(x)$ je izračunana po pravilu (1) v definiciji preslikave σ, iz česar lahko sklepamo, da velja vsebovanost:

$$f(\mathcal{O}_{f(x)}) \subseteq \mathcal{O}_{f(\sigma(x))} = \mathcal{O}_{f(y)}.$$

Točka x je vsebovana v množici $\mathcal{M}$, zato vse točke iz množice $\mathcal{O}_x$ menjajo strani. To pomeni, da točka $z = \sigma(y) \in \mathcal{O}$ menja strani in je izračunana po pravilu (1) v definiciji preslikave σ. Torej tudi točka z leži v množici $\mathcal{S}$ in velja vsebovanost:

$$f(\mathcal{O}_{f(y)}) \subseteq \mathcal{O}_{f(\sigma(y))} = \mathcal{O}_{f(z)}.$$

Iz dejstva, da točka x pripada množici $\mathcal{S}$, sklepamo, da se x s funkcijo f slika dlje od centra c kot katera koli druga točka iz množice $\mathcal{O}_x$. Točka $z = \sigma^2(x)$ pripada množici $\mathcal{O}_x$, zato točka $f(z)$ leži bližje centru kot točka $f(x)$, kar lahko zapišemo tudi tako:

$$\mathcal{O}_{f(z)} \subseteq \mathcal{O}_{f(x)}.$$

Ugotovili smo, da je slika množice $\mathcal{O}_{f(x)}$ vsebovana v množici $\mathcal{O}_{f(y)}$ in da je slika množice $\mathcal{O}_{f(y)}$ vsebovana v množici $\mathcal{O}_{f(x)}$. Ker točki x in y ležita na nasprotnih straneh točke c in ker obe točki menjata strani, tudi točki $f(x)$ in $f(y)$ ležita na nasprotnih straneh točke c. Sklepamo lahko, da sta množici $\mathcal{O}_{f(x)}$ in $\mathcal{O}_{f(y)}$ disjunktni in ležita na nasprotnih straneh točke c. To pomeni, da vse točke iz množice $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$ menjajo strani. Množica $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$ je podmnožica cikla $\mathcal{O}$, ki se s funkcijo f slika nazaj vase. Edina podmnožica cikla $\mathcal{O}$, ki se s f slika nazaj vase, je množica $\mathcal{O}$, zato je cikel $\mathcal{O}$ enak uniji $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$. To pomeni, da vsaka točka iz cikla $\mathcal{O}$ menja strani. □

Za dokončanje dokaza predpostavimo, da obstaja točka iz cikla $\mathcal{O}$, ki ne menja strani. Pokažimo, da potem obstaja Štefanovo zaporedje. Če za implikacjo v lemi 0.2 uporabimo pravilo kontrapozicije, dobimo naslednjo izjavo: Če obstaja točka iz cikla $\mathcal{O}$, ki ne menja strani, potem ne obstaja točka x, za katero velja $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$. To pomeni, da ne moreta biti hkrati izpoljneni enakosti $\sigma(p) = q$ in $\sigma(q) = p$. Lahko izberemo taki točki x_0 in x_1, da je $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ in $x_2 := \sigma(x_1) \neq x_0$. Dokler je x_i vsebovan v množici $\mathcal{S}$, dobimo naslednji člen s predpisom $x_{i+1} = \sigma(x_i)$.

Za dokončanje dokaza se moramo prepričati, da tako definirano zaporedje ustreza vsem petim pogojem iz definicije **??**. Zaradi izbire točk $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ zaporedje ustreza pogoju **??**. Točki x_0 in x_1 ležita na nasprotnih straneh točke c, ostale točke pa ležijo alternirajoče na levi oziroma desni strani točke c, saj zaporedni točki x_i in $x_{i+1} = \sigma(x_i)$ ležita na nasprotnih straneh. S tem je izpolnjen pogoj **??**. Za dokaz pogoja **??** se moramo prepričati, da se točke v zaporedju spiralno oddaljujejo od centra c. Začetne točke so bile izbrane tako, da točka x_2 ne leži v množici $\mathcal{O}_{x_0}$. Lema 0.2 pokaže, da lahko podoben sklep naredimo tudi za ostale člene zaporedja, velja namreč $x_{i+2} = \sigma^2(x_i) \notin \mathcal{O}_{x_i}$. To pa pomeni, da število x_{i+2} leži bolj stran od točke c kot število x_i. Iz tega med drugim sledi, da so členi zaporedja paroma različni. Ker pa ležijo členi zaporedja v končni množici $\mathcal{O}$, obstaja končni člen tega zaporedja. Označimo ga z x_n. Glede na definicijo zaporedja za vsako naravno število $j < n$ točka x_j menja stran in velja $x_{j+1} = \sigma(x_j) \in \mathcal{O}_{f(x)}$. S tem je izpolnjen tudi pogoj **??**. Za izpolnitev pogoja **??** se moramo prepričati, da zadnji člen x_n ne menja strani. Število $x_n = \sigma(x_{n-1})$ smo dobili s predpisom (2) v definiciji funkcije σ. Če točko x_n določimo s pomočjo predpisa (1), potem x_n leži v množici $\mathcal{S}$. Točka x_n menja strani in se slika dlje od točke c kot katera koli druga točka iz množice $\mathcal{O}_x$. Lahko izberemo točko $x_{n+1} = \sigma(x_n)$ in točka x_n ni zadnja točka zaporedja, kar je protislovje s predpostavko, da je x_n zadnja točka zaporedja. Točko x_n smo zato dobili iz predpisa (2), kar pomeni, da x_n ne menja strani. S tem je izpolnjena tudi zadnja zahteva **??** in je zaporedje x_i res Štefanovo zaporedje. □

V lemi 0.2 smo ugotovili, da za naravno število $m \geq 2$ vsak m-cikel $\mathcal{O}$, ki vsebuje vsaj eno točko, ki ne menja strani, vsebuje Štefanovo zaporedje. V trditvi **??** pa smo se prepričali da cikli, ki vsebujejo Štefanovo zaporedje implicirajo obstoj elementarnih $\mathcal{O}$-vsiljenih l-zank za vsak $l \triangleleft m$. Dobimo naslednjo trditev:

Trditev 0.3. *Naj bo m naravno število večje od 2. Če m-cikel vsebuje točko, ki ne menja strani, potem za vsako naravno število l, za katero velja $l \triangleleft m$ obstaja elementarna $\mathcal{O}$-vsiljena l-zanka $\mathcal{O}$-intervalov in zato tudi točka s periodo l.*