

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik
Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

KAZALO

Izrek Šarkovskega

POVZETEK

Sharkovsky theorem

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2010):

Ključne besede:

Keywords: Daljši in bolj zapleten del dokaza izreka Šarkovskega je za nami. Sedaj

moramo dokazati še drugi del, ki pravi:

Izrek 0.1. Vsak rep \mathcal{T} ureditve Šarkovskega je množica period za neko zvezno funkcijo f , ki slika interval nazaj vase.

Dokaz. Izrek bomo dokazali tako, da bomo za vsak rep \mathcal{T} poiskali funkcijo, katere množica period je enaka repu \mathcal{T} . Pri iskanju primerne funkcije si bomo pomagali z družino odrezanih šotorskih funkcij:

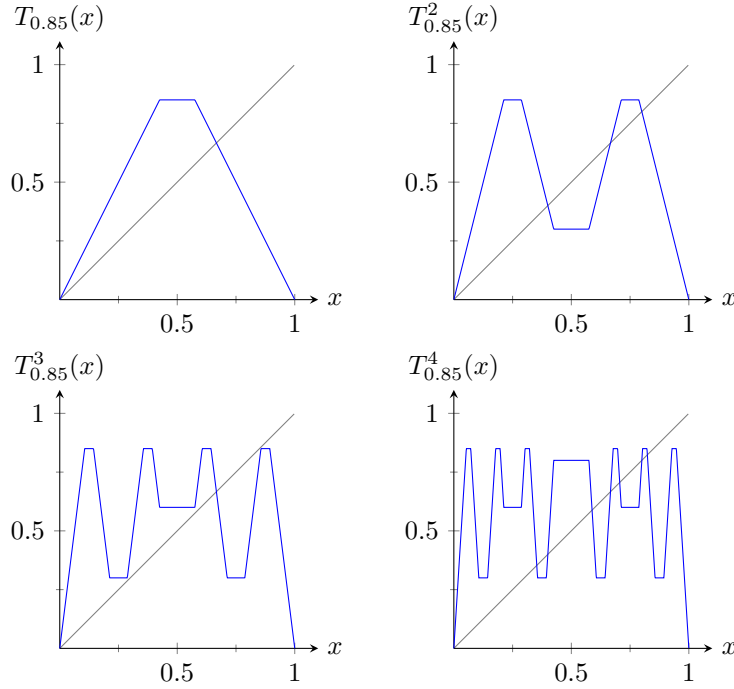
$$T_h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$T_h : x \mapsto \min \left(h, 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)$$

Ekvivalentno in mogoče lažje predstavljivo lahko predpis funkcije T_h zapišemo na naslednji način:

$$T_h(x) = \min(2x, 2 - 2x, h).$$

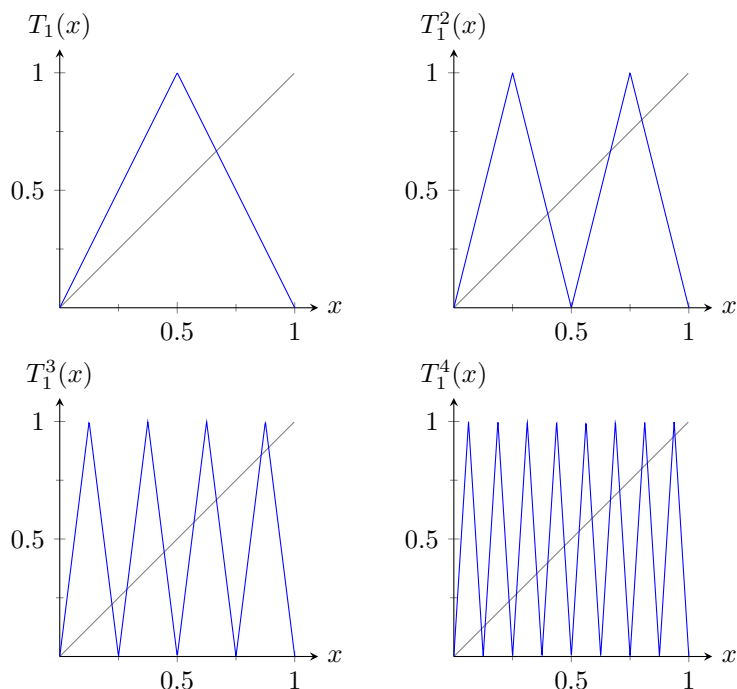
Točke, ki imajo za funkcijo T_h periodo n , so negibne točke za funkcijo T_h^n , zato si zaradi lažje predstave na sliki 1 ogledamo funkcije $T_{0,85}, T_{0,85}^2, T_{0,85}^3$ in $T_{0,85}^4$.



SLIKA 1. Funkcije $T_{0,85}, T_{0,85}^2, T_{0,85}^3$ in $T_{0,85}^4$ in njihova presečišča s simetralo lihih kvadrantov.

V nadaljevanju dokaza bo zelo pomembna funkcija T_1 . Na sliki 2 so prikazane prve štiri iteracije funkcije T_1 . S slike razberemo, da ima funkcija T_1 dve presečišči s simetralo lihih kvadrantov in zato tudi dve negibni točki. Funkcija T_1^2 ima 4 negibne točke, funkcija T_1^3 jih ima 8, funkcija T_1^4 pa 16. Ugotovimo, da funkcija T_1^n seka simetralo lihih kvadrantov natanko 2^n -krat in ima prav toliko negibnih točk. Funkcija T_1 pa ima po tem razmisleku največ 2^n točk s periodo n .

Za dokaz izreka bomo najprej pokazali, da obstaja funkcija, ki ima samo periodo 1. To je funkcija T_0 . Za vsak $x \in [0, 1]$ je vrednost funkcije T_0 enaka 0, zato je 0 tudi edina periodična točka za to funkcijo. Točka 0 je negibna točka, zato je njena perioda enaka 1.



SLIKA 2. Funkcije T_1, T_1^2, T_1^3, T_1^4 in njihova presečišča s simetralo lihih kvadrantov.

Obravnavajmo funkcijo T_1 . Dokazali bomo, da je vsako naravno število n perioda funkcije T_1 . To najlažje dokažemo tako, da poiščemo cikel dolžine 3 in s pomočjo izreka ?? sklepamo, da ima funkcija T_1 vse periode. Vsaka točka ki ima za funkcijo T_1 periodo 3 je negibna točka funkcije T_1^3 , zato si bomo opazovali negibne točke funkcije T_1^3 . Iz grafa razberemo, da ima funkcija T_1^3 osem negibnih točk. Izračunamo lahko, da sta točki 0 in $\frac{2}{3}$ sta negibni točki funkcije T_1 , točke $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ in $\frac{6}{7}$ tvorijo 3-cikel. Prav tako tvorijo 3-cikel točke $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ in $\frac{8}{9}$. S pomočjo izreka ?? ugotovimo, da funkcija T_1 vsebuje točke vseh period, saj vsebuje točko periode 3.

Funkciji T_1 in T_h sta vsaj na nekem delu intervala $[0, 1]$ enaki, zato lahko pričakujemo, da obstajajo cikli, ki so skupni obema funkcijama. O tem govori naslednja lema:

Lema 0.2. *Za funkciji T_1, T_h in njune cikle veljata naslednji dve trditvi:*

- (1) *Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_1 , je tudi cikel za funkcijo T_h .*
- (2) *Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_h , je cikel tudi za funkcijo T_1 .*

Dokaz. Funkciji T_1 in T_h se razlikujeta samo v tistih točkah x , za katere je $T_1(x) > h$. V vseh ostalih točkah, sta funkciji enaki. Privzemimo, da je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_1 . Ker je cikel \mathcal{O} vsebovan v intervalu $[0, h]$, za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ velja $T_1(x) \leq h$. Torej velja $T_1(x) = T_h(x)$, kar pomeni, da je \mathcal{O} tudi cikel za funkcijo T_h . Dokazali smo trditve (1)

Za dokaz trditve (2) prepostavimo, da je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_h . Torej je za vsako točko x iz cikla \mathcal{O} slika $T_h(x)$ manjša od h . Velja, da je tudi vrednost $T_1(x)$ manjša od h . To pomeni, da sta vrednosti funkcij T_1 in T_h v x enaki. Ker to velja za vsako točko cikla \mathcal{O} , je \mathcal{O} tudi cikel za funkcijo T_1 . \square

V trditvi (2) polodprtega intervala $[0, h)$ ne moremo zamenjati z zaprtim intervalom $[0, h]$, saj ne moremo narediti sklepa, da iz neenakosti $T_h(x) \leq h$ sledi neenakost

$T_1(x) \leq h$. Za primer si lahko pogledamo funkcijo $T_{\frac{1}{2}}$, ki ima negibno točko $\frac{1}{2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, vendar to ni negibna točka funkcije T_1 .

Ključna ideja tega dokaza je, da definiramo funkcijo $h(\cdot)$:

$$h : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1],$$

$$h(m) := \min\{\max \mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ je } m\text{-cikel funkcije } T_1\}$$

Prepričati se moramo, da je definicija dobra. Očitno je, da maksimum m -cikla obstaja. Pokazati moramo še, da obstaja tudi minimum. Funkcija T_1^n seka simatralo lihih kvadratov 2^n -krat, kar pomeni, da ima funkcija T_1^n natanko 2^n negibnih točk, funkcija T_1 pa ima 2^n periodičnih točk. Ker je nabor točk končen, minimum obstaja.

Zvitost dokaza se skriva v tem, da pri funkciji $T_{h(m)}$ število $h(m)$ igra tri vloge. Pojavi se kot parameter, ki določi funkcijo iz družine funkcij. Predstavlja maksimum funkcije $T_{h(m)}$ in največjo točko neke orbite za funkcijo $T_{h(m)}$. Pokazali bomo, da funkcija $h(m)$ razvrsti naravna števila na interval $[0, 1]$ natančno v obratnem vrstnem redu kot ureditev Šarkovskega. Funkcija $h(\cdot)$ ima naslednje lastnosti:

- (a) funkcija T_h vsebuje l -cikel $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$, če in samo če je $h(l) < h$,
- (b) orbita točke $h(m)$ je m -cikel za funkcijo $T_{h(m)}$,
- (c) vsi ostali cikli za funkcijo $T_{h(m)}$ ležijo v intervalu $[0, h(m))$.

Lastnost (a) je očitna iz definicije funkcije $h(\cdot)$.

Za dokaz lastnosti (b) opazimo, da je točka $h(m)$ največja točka m -cikla \mathcal{O} za funkcijo T_1 , zato cikel \mathcal{O} leži v intervalu $[0, h(m)]$. Po trditvi (1) iz leme 0.2 je \mathcal{O} cikel za funkcijo $T_{h(m)}$.

Ker je $h(m)$ maksimum funkcije $T_{h(m)}$ in vsi ostali cikli funkcije $T_{h(m)}$ ležijo v intervalu $[0, h)$. Pokazali smo lastnost (c).

S pomočjo lastnosti (a), (b), (c) in izreka ?? lahko dokažemo naslednjo lemo, s pomočjo katere zaključimo dokaz realizacijskega izreka Šarkovskega.

Lema 0.3. *Za poljubni naravni števili m in n velja ekvivalenca:*

$$n \triangleleft m \iff h(n) < h(m).$$

Dokaz. Najprej pokažimo implikacijo v desno. Denimo, da sta števili m in n v relaciji $n \triangleleft m$. Zaradi lastnosti (b) ima funkcija $T_h(m)$ m -cikel. Izrek ?? zagotavlja, da ima funkcija $T_{h(m)}$ tudi cikel dolžine n . Iz lastnosti (c) ugotovimo, da ta cikel leži v intervalu $[0, h(m))$. Na koncu upoštevamo še lastnost (a) in se prepričamo, da je $h(n) < h(m)$.

Pri dokazu implikacije v levo stran uporabimo pravilo kontrapozicije in dokazujemo izjavo: $m \triangleleft n \iff h(m) < h(n)$. Zaradi simetričnosti števil n in m je ta izjava ekvivalentna prejšnji. \square

Poglejmo, katere periode ima funkcija $T_{h(m)}$. Iz definicije funkcije $h(m)$ sledi, da je m perioda za funkcijo $T_{h(m)}$. Radi bi videli, da ima funkcija $T_{h(m)}$ periodo l natanko tedaj, ko velja $l \triangleleft m$. Najprej dokažimo implikacijo v levo smer. Naj bo l naravno število, za katerega velja relacija $l \triangleleft m$. Lema 0.3 zagotavlja, da velja neenakost $h(l) < h(m)$. Iz lastnosti (a) funkcije h sklepamo, da funkcija $T_{h(m)}$ vsebuje l -cikel. Za dokaz implikacije v desno smer predpostavimo, da funkcija $T_{h(m)}$ vsebuje l cikel. Iz lastnosti (a) funkcije h sklepamo, da je $h(l) < h(m)$. Lema 0.3 zagotavlja, da v tem primeru število l zadošča relaciji $l \triangleleft m$. Torej je množica period za funkcijo $T_{h(m)}$ res množica $\{n \in \mathbb{N}; n \triangleleft m\}$.

Poiskati moramo še zvezno funkcijo ki ima za množico period množico vseh potenc števila 2. Definiramo $h(2^\infty) := \sup_k h(2^k)$. Za vsako naravno število k velja $h(2^k) < h(2^\infty)$. Zaradi lastnosti (a) funkcija $T_{h(2^\infty)}$ vsebuje 2^k -cikel, za vsak $k \in \mathbb{N}$. Denimo, da funkcija $T_{h(2^\infty)}$ vsebuje nek m -cikel, kjer število m ni potenca števila 2. Zaradi izreka ?? funkcija $T_{h(2^\infty)}$ vsebuje tudi $2m$ -cikel. Ker sta m -cikel in $2m$ -cikel disjunktna, lastnost (c) zagotavlja, da vsaj en od teh dveh ciklov leži v intervalu $[0, h(2^\infty))$. Recimo, da je to m -cikel. Potem obstaja tako naravno število l , da velja $h(m) < h(2^l)$. S pomočjo leme 0.3 ugotovimo, da velja $m \triangleleft 2^l$, torej je število m potenca števila 2. To je protislovje. Če bi predpostavili, da $2m$ -cikel leži v intervalu $[0, h(2^\infty))$, bi prišli do sklepa, da je število $2m$ potenca števila 2, kar pa tudi vodi v protislovje. Funkcija $T_{h(2^\infty)}$ res vsebuje samo cikle, katerih dolžina je potenca števila 2.

Za konec pokažimo, da obstaja funkcija, ki nima periodičnih točk. Za primer lahko vzamemo translacijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x + a$, kjer je a katerokoli neničelno realno število. \square