UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: Daljši in bolj zapleten del dokaza izreka Šarkovskega je za nami. Sedaj

moramo dokazati še drugi del, ki pravi:

Izrek 0.1. *Vsak rep $\mathcal{T}$ ureditve Šarkovskega je množica period za neko zvezno funkcijo f, ki slika interval nazaj vase.*

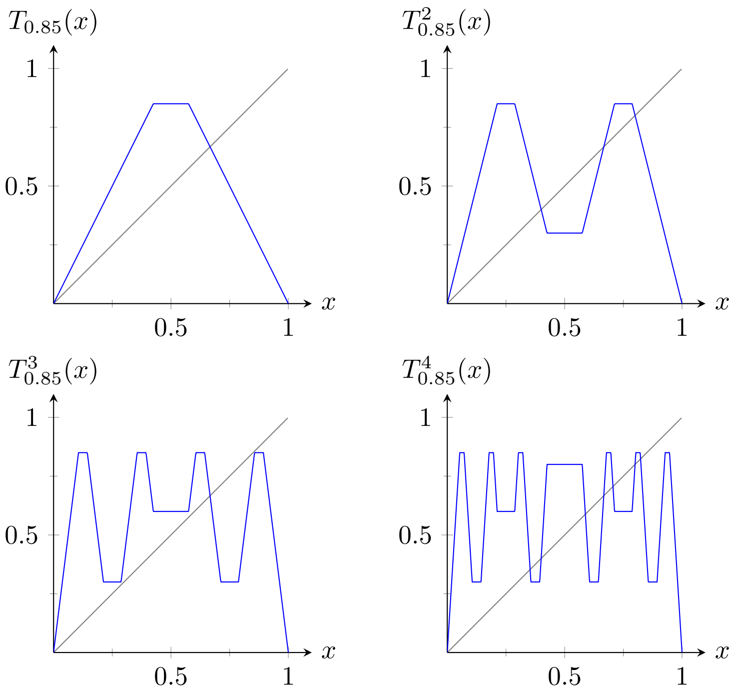
Dokaz. Izrek bomo dokazali tako, da bomo za vsak rep $\mathcal{T}$ poiskali funkcijo, katere množica period je enaka repu $\mathcal{T}$. Pri iskanju primerne funkcije si bomo pomagali z družino odrezanih šotorskih funkcij:

$$T_h : [0,1] \to [0,1]$$
$$T_h : x \mapsto \min\left(h, 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Ekvivalentno in mogoče lažje predstavljivo lahko predpis funkcije T_h zapišemo na naslednji način:

$$T_h(x) = \min(2x, 2 - 2x, h).$$

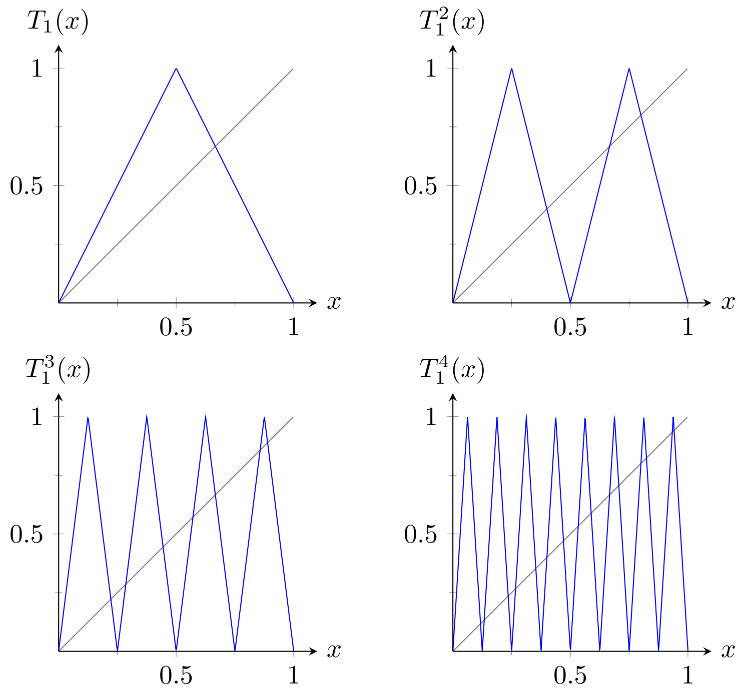
Točke, ki imajo za funkcijo T_h periodo n, so negibne točke za funkcijo T_h^n, zato si zaradi lažje predstave na sliki 1 ogledamo funkcije $T_{0,85}, T^2_{0,85}, T^3_{0,85}$ in $T^4_{0,85}$.



SLIKA 1. Funkcije $T_{0,85}, T^2_{0,85}, T^3_{0,85}$ in $T^4_{0,85}$ in njihova presečišča s simetralo lihih kvadrantov.

V nadaljevanju dokaza bo zelo pomembna funkcija T_1. Na sliki 2 so prikazane prve štiri iteracije funkcije T_1. S slike razberemo, da ima funkcija T_1 dve presečišči s simetralo lihih kvadrantov in zato tudi dve negibni točki. Funkcija T_1^2 ima 4 negibne točke, funkcija T_1^3 jih ima 8, funkcija T_1^4 pa 16. Ugotovimo, da funkcija T_1^n seka simetralo lihih kvadrantov natanko 2^n-krat in ima prav toliko negibnih točk. Funkcija T_1 pa ima po tem razmisleku največ 2^n točk s periodo n.

Za dokaz izreka bomo najprej pokazali, da obstaja funkcija, ki ima samo periodo 1. To je funkcija T_0. Za vsak $x \in [0,1]$ je vrednost funkcije T_0 enaka 0, zato je 0 tudi edina periodična točka za to funkcijo. Točka 0 je negibna točka, zato je njena perioda enaka 1.



Slika 2. Funkcije T_1, T_1^2, T_1^3, T_1^4 in njihova presečišča s simetralo lihih kvadrantov.

Obravnavajmo funkcijo T_1. Dokazali bomo, da je vsako naravno število n perioda funkcije T_1. To najlažje dokažemo tako, da poiščemo cikel dolžine 3 in s pomočjo izreka **??** sklepamo, da ima funkcija T_1 vse periode. Vsaka točka ki ima za funkcijo T_1 periodo 3 je negibna točka funkcije T_1^3, zato si poglejmo negibne točke funkcije T_1^3. Iz grafa razberemo, da ima funkcija T_1^3 osem negibnih točk. Izračunamo lahko, da sta točki 0 in $\frac{2}{3}$ sta negibni točki funkcije T_1, točke $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$ in $\frac{6}{7}$ tvorijo 3-cikel. Prav tako tvorijo 3-cikel točke $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$ in $\frac{8}{9}$. S pomočjo izreka **??** ugotovimo, da funkcija T_1 vsebuje točke vseh period, saj vsebuje točko periode 3.

Funkciji T_1 in T_h sta vsaj na nekem delu intervala $[0, 1]$ enaki, zato lahko pričakujemo, da obstajajo cikli, ki so skupni obema funkcijama. O tem govori naslednja lema:

Lema 0.2. *Za funkciji T_1, T_h in njune cikle veljata naslednji dve trditvi:*

(1) Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_1, je tudi cikel za funkcijo T_h.
(2) Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h)$ cikel za funkcijo T_h, je cikel tudi za funkcijo T_1.

Dokaz. Funkciji T_1 in T_h se razlikujeta samo v tistih točkah x, za katere je $T_1(x) > h$. V vseh ostalih točkah, sta funkciji enaki. Privzemimo, da je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_1. Ker je cikel $\mathcal{O}$ vsebovan v intervalu $[0, h]$, za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ velja $T_1(x) \leq h$. Torej velja $T_1(x) = T_h(x)$, kar pomeni, da je $\mathcal{O}$ tudi cikel za funkcijo T_h. Dokazali smo trditev (1)

Za dokaz trditve (2) prespostavimo, da je $\mathcal{O} \subseteq [0, h)$ cikel za funkcijo T_h. Torej je za vsako točko x iz cikla $\mathcal{O}$ slika $T_h(x)$ manjša od h. Velja, da je tudi vrednost $T_1(x)$ manjša od h. To pomeni, da sta vrednosti funkcij T_1 in T_h v x enaki. Ker to velja za vsako točko cikla $\mathcal{O}$, je $\mathcal{O}$ tudi cikel za funkcijo T_1. □

V trditvi (2) polodprtega intervala $[0, h)$ ne moremo zamenjati z zaprtim intervalom $[0, h]$, saj ne moremo narediti sklepa, da iz neenakosti $T_h(x) \leq h$ sledi neenakost

$T_1(x) \leq h$. Za primer si lahko pogledamo funkcijo $T_{\frac{1}{2}}$, ki ima negibno točko $\frac{1}{2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, vendar to ni negibna točka funkcije T_1.

Ključna ideja tega dokaza je, da definiramo funkcijo $h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} &h : \mathbb{N} \to [0, 1], \\ &h(m) := \min\{\max \mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ je } m\text{-cikel funkcije } T_1\} \end{aligned}$$

Prepričati se moramo, da je definicija dobra. Očitno je, da maksimum m-cikla obstaja. Pokazati moramo še, da obstaja tudi minimum. Funkcija T_1^n seka simatralo lihih kvadratov 2^n-krat, kar pomeni, da ima funkcija T_1^n natanko 2^n negibnih točk, funkcija T_1 pa ima 2^n periodičnih točk. Ker je nabor točk končen, minimum obstaja.

Zvitost dokaza se skriva v tem, da pri funkciji $T_{h(m)}$ število $h(m)$ igra tri vloge. Pojavi se kot parameter, ki določi funkcijo iz družine funkcij. Predstavlja maksimum funkcije $T_{h(m)}$ in največjo točko neke orbite za funkcijo $T_{h(m)}$. Pokazali bomo, da funkcija $h(m)$ razvrsti naravna števila na interval $[0, 1]$ natančno v obratnem vrstnem redu kot ureditev Šarkovskega. Funkcija $h(\cdot)$ ima naslednje lastnosti:

(a) funkcija T_h vsebuje l-cikel $\mathcal{O} \subseteq [0, h)$, če in samo če je $h(l) < h$,
(b) orbita točke $h(m)$ je m-cikel za funkcijo $T_{h(m)}$,
(c) vsi ostali cikli za funkcijo $T_{h(m)}$ ležijo v intervalu $[0, h(m))$.

Lastnost (a) je očitna iz definicije funkcije $h(\cdot)$.

Za dokaz lastnosti (b) opazimo, da je točka $h(m)$ največja točka m-cikla $\mathcal{O}$ za funkcijo T_1, zato cikel $\mathcal{O}$ leži v intervalu $[0, h(m)]$. Po trditvi (1) iz leme 0.2 je $\mathcal{O}$ cikel za funkcijo $T_{h(m)}$.

Ker je $h(m)$ maksimum funkcije $T_{h(m)}$m vsi ostali cikli funkcije $T_{h(m)}$ ležijo v intervalu $[0, h)$. Pokazali smo lastnost (c)

S pomočjo lastnosti (a), (b), (c) in izreka **??** lahko dokažemo naslednjo lemo, s pomočjo katere zaključimo dokaz realizacijskega izreka Šarkovskega.

Lema 0.3. *Za poljubni naravni števili m in n velja ekvivalenca:*

$$n \lhd m \iff h(n) < h(m).$$

Dokaz. Najprej pokažimo implikacijo v desno. Denimo, da sta števili m in n v relaciji $n \lhd m$. Zaradi lastnosti (b) ima funkcija $T_h(m)$ m-cikel. Izrek **??** zagotavlja, da ima funkcija $T_{h(m)}$ tudi cikel dolžine n. Iz lastnosti (c) ugotovimo, da ta cikel leži v intervalu $[0, h(m))$. Na koncu upoštevamo še lastnost (a) in se prepričamo, da je $h(n) < h(m)$

Pri dokazu implikacije v levo stran uporabimo pravilo kontrapozicije in dokazujemo izjavo: $m \lhd n \iff h(m) < h(n)$. Zaradi simetričnosti števil n in m je ta izjava ekvivalentna prejšnji. □

Poglejmo, katere periode ima funkcija $T_{h(m)}$. Iz definicije funkcije $h(m)$ sledi, da je m perioda za funkcijo $T_{h(m)}$. Radi bi videli, da ima funkcija $T_{h(m)}$ periodo l natanko tedaj, ko velja $l \lhd m$. Naj bo l naravno število, za katerega velja relacija $l \lhd m$. Lema 0.3 pravi, da velja neenakost $h(l) < h(m)$. Iz lastnosti (a) sklepamo, da funkcija $T_{h(m)}$ vsebuje l-cikel. Sedaj predpostavimo, da funkcija $T_{h(m)}$ vsebuje l cikel. Iz lastnosti (a) sklepamo, da je $h(l) < h(m)$. Lema zagotavlja, da v tem primeru število l zadošča relaciji $l \lhd m$. Torej je množica period za funkcijo $T_{h(m)}$ res množica $\{n \in \mathbb{N}; n \lhd m\}$.

Poiskati moramo še zvezno funkcijo ki ima za množico period množico vseh potenc števila 2. Definiramo $h(2^\infty) := \sup_k h(2^k)$. Za vsako naravno število k velja

$h(2^k) < h(2^\infty)$. Zaradi lastnosti (a) funkcija $T_{h(2^\infty)}$ vsebuje 2^k-cikel, za vsak $k \in \mathbb{N}$. Denimo, da funkcija $T_{h(2^\infty)}$ vsebuje nek m cikel, kjer število m ni potenca števila 2. Zaradi izreka **??** funkcija $T_{h(2^\infty)}$ vsebuje tudi $2m$-cikel. Ker sta m-cikel in $2m$-cikel disjunktna, lastnost (c) zagotavlja, da vsaj en od teh dveh ciklov leži v intervalu $[0, h(2^\infty))$. Recimo, da je to m-cikel. Potem obstaja tako naravno število l, da velja $h(m) < h(2^l)$. S pomočjo leme 0.3 ugotovimo, da velja $m \triangleleft 2^l$, torej je število m potenca števila 2. To je protislovje. Če bi predpostavili, da $2m$-cikel leži v intervalu $[0, h(2^\infty))$, bi prišli do sklepa, da je število $2m$ potenca števila 2, kar pa tudi vodi v protislovje. Funkcija $T_{h(2^\infty)}$ res vsebuje samo cikle, katerih dolžina je potenca števila 2.

Za konec pokažimo, da obstaja funkcija, ki nima periodičnih točk. Za primer lahko vzamemo translacijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x + a$, kjer je a katerokoli neničelno realno število. $\square$