UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: V tem poglavju bomo dokazali glavni del izreka Šarkovskega. Vemo že,

da izrek velja, če obstaja točka cikla, ki ne menja strani. V primeru, da vse točke menjajo strani, bomo podobno kot v primeru **??** cikel razdelili na levo in desno polovico. Vsaka polovica tvori cikel za funkcijo f^2. Informacijo o ciklih funkcije f^2 bomo nato prenesli na cikle funkcije f.

Trditev 0.1. *Naj bosta m in l naravni števili v relaciji $m \triangleright l$ in naj bo $\mathcal{O}$ m-cikel. Potem obstaja $\mathcal{O}$-vsiljena elementarna l-zanka $\mathcal{O}$-intervalov in posledično točka s periodo l.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali s pomočjo indukcije na število m.

Če je $m = 1$, je trditev avtomatično izpolnjena, saj je 1 zadnji člen zaporedja Šarkovskega in edino število l, za katerega velja $l \triangleleft 1$ je 1.

Predpostavimo, da izrek velja za vse cikle, katerih dolžina je krajša od m. Radi bi dokazali, da velja tudi za poljuben m-cikel $\mathcal{O}$. Če obstaja točka iz cikla $\mathcal{O}$, ki ne menja strani, potem je po trditvi **??** resična tudi trditev 0.1. V nasprotnem primeru vse točke cikla $\mathcal{O}$ menjajo strani. Označimo najmanjšo točko cikla $\mathcal{O}$ z L in največjo točko cikla $\mathcal{O}$ z R. Množica $\mathcal{O}_L$ vsebuje vse točke iz cikla $\mathcal{O}$, ki ležijo levo od centra c, množica $\mathcal{O}_R$ pa vsebuje vse točke, ki ležijo desno od centra c. Ker vse točke iz cikla $\mathcal{O}$ menjajo strani, funkcija f slika množico $\mathcal{O}_L$ v množico $\mathcal{O}_R$ in obratno. Funkcija $f|_{\mathcal{O}_L}$ je bijekcija iz množice $\mathcal{O}_L$ v množico $\mathcal{O}_R$ in funkcija $f|_{\mathcal{O}_R}$ je bijekcija iz množice $\mathcal{O}_R$ v množico $\mathcal{O}_L$. Ugotovimo, da množici $\mathcal{O}_L$ in $\mathcal{O}_R$ vsebujeta enako število točk, zato je število m sodo in obstaja naravno število n, za katerega je $m = 2n$. Ker je m sodo število, je lahko neko naravno število l v relaciji $l \triangleleft m$ samo, če je $l = 1$ ali pa je l sodo število. V drugem primeru obstaja tako naravno število k, za katerega je $l = 2k$. Iz zgornjega razmisleka in iz trditve **??** sledi, da je neko naravno število l v relaciji $l \triangleleft m$ natanko tedaj, ko je $l = 1$ ali pa je $l = 2k$ in je število k v relaciji $k \triangleleft n$. To pomeni, da moramo pokazati, da ima f elementarno 1-zanko in elementarno $\mathcal{O}$-vsiljeno $2k$-zanko $\mathcal{O}$-intervalov za vsako naravno število k za katerega velja relacija $k \triangleleft n$. Elementarno 1-zanko dobimo s pomočjo intervala $[p, q]$. Točka p je največja točka množice $\mathcal{O}_L$ in točka q je najmanjša točka množice $\mathcal{O}_R$. Ker točka $f(p)$ leži v množici $\mathcal{O}_R$ in točka $f(q)$ leži v množici $\mathcal{O}_L$ dobimo elementarno 1-zanko $[p, q] \to [p, q]$. Pri dokazovanju obstoja $2k$-zanke za vsako naravno število k, ki ustreza relaciji $k \triangleleft n$, si bomo pomagali z indukcijsko predpostavko. Opazimo, da sta množici $\mathcal{O}_L$ in $\mathcal{O}_R$ cikla dolžine n za funkcijo f^2. Ker je dolžina obeh ciklov manjša od m, lahko uporabimo indukcijsko predpostavko. Če indukcijsko predpostavko uporabimo na ciklu $\mathcal{O}_R$, ugotovimo, da za vsako naravno število k, za katerega je $k \triangleleft n$, obstaja elementarna $\mathcal{O}_R$-vsiljena k-zanka $\mathcal{O}_R$ intervalov za funkcijo f^2. Pokazati moramo, da te zanke zagotavljajo obstoj elementarnih l-zank za funkcijo f. Poglejmo si poljubno elementarno k-zanko $\mathcal{O}_R$ intervalov za funkcijo f^2:

$$I_0 \xrightarrow{f^2} I_1 \xrightarrow{f^2} I_2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^2} I_{k-1} \xrightarrow{f^2} I_0. \tag{1}$$

Za vsako naravno število $0 \leq i < k$ označimo najkrajši zaprti interval, ki vsebuje množico $f(I_i \cap \mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}_L$, z I_i'. Intervali I_i' so $\mathcal{O}$-intervali za katere veljajo relacije pokritja $I_i \xrightarrow{f} I_i'$. Če interval I_0 označimo z I_k lahko naradimo naslednji razmislek. Za vsako naravno število $0 \leq i < k$ lahko zapišemo $\mathcal{O}_R$-vsiljene relacije pokritja $I_i \xrightarrow{f^2} I_{i+1}$, zato obstajata taki točki $a_i, b_i \in I_i \cap \mathcal{O}_R$, da interval I_{i+1} leži v intervalu omejenim s točkama $f^2(a_i)$ in $f^2(b_i)$. Točki $a_i' := f(a_i)$ in $b_i' := f(b_i)$ ležita v množici $I_i' \cap \mathcal{O}$ in zaprt interval omejen s točkama $f(a_i') = f^2(a_i)$ in $f(b_i') = f^2(b_i)$ vsebuje interval I_{i+1}. Dobili smo $\mathcal{O}$ vsiljeno relacijo pokritja $I_i' \xrightarrow{f} I_{i+1}$. S pomočjo zgornjih relacij pokritja lahko zapišemo naslednjo $\mathcal{O}$-vsiljeno l-zanko:

$$I_0 \xrightarrow{f} I_0' \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_1' \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} I_{k-1} \xrightarrow{f} I_{k-1}' \xrightarrow{f} I_0 \tag{2}$$

Prepričajmo se, da je zanka (2) elementarna. Naj bo točka x periodična točka za funkcijo f, ki sledi zanki (2). Točka x je periodična točka za funkcijo f^2, ki sledi zanki (1). Torej, točka x ima periodo k za funkcijo f^2, kar pomeni, da k točk f-orbite leži v množici $\mathcal{O}_R$. Ker intervali v zanki (2) ležijo izmenično na levi oziroma desni strani točke c, tudi iteracije točke x ležijo izmenično na levi oziroma desni strani točke c. To pomeni, da k točk, ki predstavljajo lihe iteracije točke x ležijo v množici $\mathcal{O}_L$. Zato orbita točke x vsebuje $2k = l$ različnih točk in je tudi perioda točke x za funkcijo f enaka l. Sklepamo, da je zanka (2) elementarna, kar zaključi dokaz. □