UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: V tem poglavju bomo obravnavali topologijo porojemo z linearno ure-

ditvijo. Spoznali bomo družino topoloških prostorov, ki jih imenujemo linearni kontinuum. Gre za neke vrste posplošitev premice realnih števil. Pokazali bomo, da je linearni kontinuum prostor Šarkovskega.

Naj bo množica X urejena s strogo linearno relacijo $<$. Za dana elementa $a, b \in X$, za katera velja neenakost $a < b$, lahko definiramo štiri podmnožice prostora X, ki jih imenujemo intervali s krajišči a in b. To so:

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in X : a \leq x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$$

Opomba 0.1. Interval (a, b) imenujemo odprti interval, intervalu $(a, b]$ rečemo pol odprti interval, interval $[a, b)$ je pol zaprti interval, interval $[a, b]$ pa je zaprti interval.

Definicija 0.2. Naj bo X množica z vsaj dvema elementoma urejena z relacijo $<$ in naj bo $\mathcal{B}$ družina množic, ki vsebuje intervale naslednjih tipov:

(1) Vsi odprti intervali $(a, b) \in X$.
(2) Vsi intervali $[a_0, b) \in X$, kjer je a_0 najmanjši element (če obstaja) množice X.
(3) Vsi intervali $(a, b_0] \in X$, kjer je b_0 največji element (če obstaja) množice X.

Družina množic $\mathcal{B}$ je baza za topologijo na množici X porojeno z ureditvijo $<$.

Opomba 0.3. Če množica X nima najmanjšega elementa, potem baza $\mathcal{B}$ ne vsebuje intervalov tipa 2 in če množica X nima največjega elementa, potem baza $\mathcal{B}$ ne vsebuje intervalov tipa 3.

Prepričati se moramo, da zgoraj opisana družina množic $\mathcal{B}$ res predstavlja bazo topologije na množici X urejeni z linearno relacijo $<$. Družina podmnožic prostora X je baza topologije na prostoru X, če sta izpolnjeni naslednji lastnosti:

(b1) Množice iz družine $\mathcal{B}$ pokrijejo celoten prostor X. Torej, vsaka točka $x \in X$ je vsebovana v neki množici $B_1 \in \mathcal{B}$.
(b2) Za vsaki množici $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ in vsako točko $x \in B_1 \cap B_2$ obstaja množica $B_3 \in \mathcal{B}$, za katero velja $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Preverimo najprej pogoj (b1). Najprej moramo preveriti, da je vsaka točka množice X vsebovana v nekem intervalu iz družine $\mathcal{B}$. Če je točka x enaka a_0, potem velja $x \in [a_0, a)$ za neko točko $a \in X$. Podobno lahko sklepamo v primeru, ko je $x = b_0$. Če je $x \neq a_0$ in $x \neq b_0$, potem zagotovo obstajata točki $a, b \in X$, za kateri velja $a < x < b$. Tedaj je točka x vsebovana v intervalu (a, b).

Naj bosta $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ poljubni bazni množici z nepraznim presekom in naj bo $x \in B_1 \cap B_2$ poljubna točka iz preseka. Obravnavati moramo več možnosti.

Recimo, da sta obe množici B_1, B_2 tipa 2, potem obstajata števili $b_1, b_2 \in X$, za kateri je $B_1 = [a_0, b_1)$ in $B_2 = [a_0, b_2)$. Velja $x \in [a_0, \min\{b_1, b_2\}) \subseteq B_1 \cap B_2$. Podobno lahko sklepamo, ko sta obe množici B_1, B_2 tipa 3.

Če je ena množica tipa 2, ena množica pa tipa 3, lahko zapišemo množici z intervali $B_1 = [a_0, b_1)$ in $B_2 = (a_2, b_0]$. Predpostavimo, da je presek teh dveh množic neprazen in da je $x \in B_1 \cap B_2$. Potem je izpolnjena neenakost $a_2 < b_1$, zato velja $x \in (a_2, b_1) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Predpostavimo, da je ena množica tipa 1, ena množica pa je tipa 2. Množici zapišimo s pomočjo intervalov $B_1 = (a_1, b_1), B_1 = [a_0, b_2)$. Denimo, da imata množici

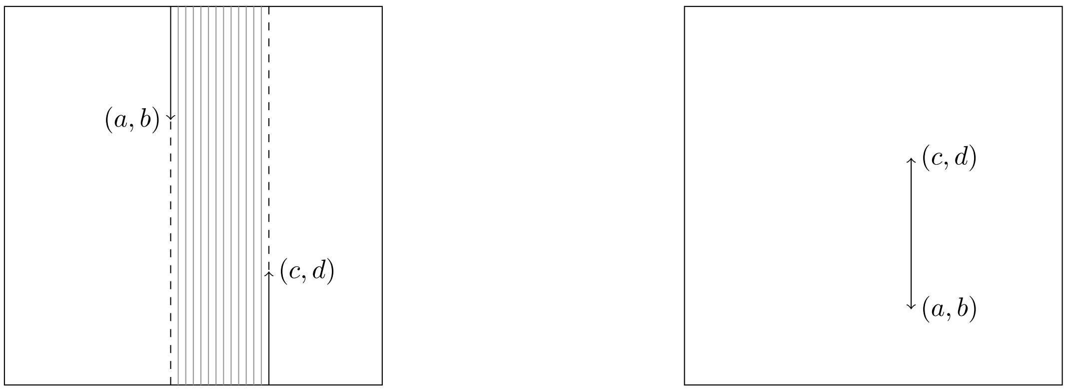
B_1 in B_2 neprazen presek. Potem velja $a_1 < b_2$. Za vsako število x iz preseka $B_1 \cap B_2$ velja $x \in (a_1, \min\{b_1, b_2\}) \subseteq B_1 \cap B_2$. Podoben razmislek deluje tudi v primeru, če je druga množica tipa 3.

Na koncu obravnavamo primer, ko sta obe množici tipa 1. Zapišimo ju z intervali: $B_1 = (a_1, b_1), B_2 = (a_2, b_2)$. Za vsako število $x \in B_1 \cap B_2$ velja $x \in (\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}) \subseteq B_1 \cap B_2$. Dokazali smo, da družina množic $\mathcal{B}$ res predstavlja bazo topologije na prostoru X.

Definicija 0.4. *Linearni kontinuum* je linearno urejena množica S z vsaj dvema elementoma, ki ima naslednji lastnosti:

(1) Vsaka navzgor omejena podmnožica $A \subseteq S$ ima najmanjšo zgornjo mejo v S,
(2) za vsaki dve števili $x, y \in S$, za kateri velja $x < y$, obstaja število $z \in S$, za katerega je $x < z < y$.

Primer 0.5. Enotski kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ $\diamondsuit$



$a < c \Rightarrow (a, b) < (c, d)$ $\quad$ $a = c \wedge b < d \Rightarrow (a, b) < (c, d)$

Slika 1. Relacije pokritja v trditvi **??** lahko prikažemo z grafom.

Trditev 0.6. *Linearno urejena množica X s topologijo porojeno z linearno uderitvijo je linearni kontinuum natanko tedaj, ko je povezana.*

Dokaz. Predpostavimo, da je prostor X opremljen s topologijo porojeno z linearno ureditvijo $\leq$. Denimo, da X ni linearni kontinuum. Potem ne zadošča pogoju 1 ali ne zadošča pogoju 2. Recimo, da ne množica X ne zadošča pogoju 1. Naj bo A neprazna podmnožica množice X, ki je navzgor omejena s točko b, vendar nima najmanjše zgornje meje. Naj bo U množica vseh zgornjih mej množice A. Če točka x leži v množici U, potem točka x ni najmanjša zgornja meja množice A, zato obstaja $z \in X$, za katerega je $z < x$ in z je tudi zgornja meja množice A. Množica $\{y \in X; y > z\}$ je odprta neprazna, saj vsebuje točko x. Vsak njen element je večji os točke z in je tako zgornja meja množice A. Torej, množica $\{y \in X; y > z\}$ je odprta podmnožica množice U, ki vsebuje točko x. Ugotovili smo, da je množica U odprta podmnožica prostora X. Množica U je neprazna, saj vsebuje točko b.

Naj bo w poljubna točka iz množice $X \setminus U$. Potem w zagotovo ni zgornja meja množice A, zato obstaja točka $a \in A$, za katero je $w < a$. Množica $\{y \in X; y < a\}$ je odprta in ne vsebuje nobene zgornje meje množice A, zato je vsebovana v množici

$X \setminus U$. Sklepamo, množica $X \setminus U$ vsebuje odprto okolico točke w in je zato odprta množica.

Ker sta množici U in $X \setminus U$ obe neprazni in odprti, tvorita separacijo prostora X.

Recimo, da prostor X ne ustreza pogoju 2. To pomeni, da odbstajata elementa a in b , prostoru X, za katari velja $a < b$, vandar ne obstaja točka $c \in X$, za katero je izpolnjena neenakost $a < c < b$. Definiramo množici $U := \{x \in X, x < b\}$ in $V := \{x \in X; x > a\}$. Ker med točko a in točko b ne leži nobena točka iz X, sta množici U in V disjunktni. Ker je relacija $<$ relacija linearne urejenost, za vsaki točki x in y velja $x < y$ ali $y < x$. Za poljubno točko $x \in X$ lahko velja $x < a$, $a < x$ ali $x = a$. Če je $x < a$, zaradi tranzitivnosti sklepamo, da je $x < b$, kar pomeni, da je točka x vsebovana v množici U. Če je $x = a$, velja $x = a < b$, zato točka x pripada množici U. Kadar je $a < x$, točka x pripada množici V. Prepričali smo se, da je $U \cup V = X$. Množici U in V sta neprazni, saj prva vsebuje točko a, druga pa vsebuje točko b. Množici sta tudi odprti in tvorita particijo množice X. S tem smo dokazali, da je množica X nepovezana.

Predpostavimo, da je X nepovezana množica z lastnostjo 1. Naj bosta množici U in V neprazni odprti množici, ki tvorita particijo prostora X. Naj bo a točka iz množice U in naj obstaja taka točka $b \in V$, ki ustreza relaciji $a < b$. Če taka točka ne obstaja, zamenjamo imeni za množici U in V. Množica $Z = \{x \in V, x > a\}$ je odprta množica, saj jo dobimo kot presek odprte množice V in odprte množice $\{x \in X, x > a\}$. Množica Z je neprazna, saj vsebuje točko b. □

Izrek 0.7. *Naj bo $f : X \to Y$ zvezna funkcija, kjer je X povezan prostor in Y urejen prostor s topologijo urejenih množic. Če sta a in b dve točki v prostoru X in je r točka v prostoru Y, ki leži med točkama $f(a)$ in $f(b)$, potem obstaja točka $c \in X$, da velja $f(c) = r$.*

Dokaz. Privzemimo predpostavke izreka. Množici $= f(X) \cap (-\infty, r)$ in $B = f(X) \cap (r, \infty)$ sta disjunktni in neprazni, saj ena množica vsebuje točko $f(a)$, druga pa točko $f(b)$. Obe sta odprti v $f(X)$ saj smo ju dobili kot presek odprtega intervala z množico $f(X)$. Če ne obstaja taka točke $c \in X$, da je $f(c) = r$, potem je $f(X)$ unija množic A in $\mathcal{B}$. Na ta način smo dobili separacijo množice $f(X)$, kar pa je protislovje, saj je slika povezane množice z zvezno preslikavo povezana. □

Lema 0.8. *Naj bo L linearni kontinuum s topologijo urejenih množic. Naj bosta I in J zaprta intervala v L in $f : L \to L$ zvezna funkcija. Če je $J \subseteq f(I)$, obstaja zaprt interval $K \subseteq I$, za katerega je $f(K) = J$.*

Dokaz. Izberemo taki točki $p, q \in I$, da velja $p < q$ in $J = [f(p), f(q)]$ ali $J = [f(q), f(p)]$. Definiramo točko $p \leq r < q$:

$$r = \sup\{x \in [p, q] : f(x) = f(p)\}.$$

Trdimo, da je $f(r) = f(p)$. V nasprotnem primeru obstaja odprta množica V, ki vsebuje točko $f(r)$ in ne vsebuje točke $f(p)$.To je res, ker je prostor L Hausdorffov. Zaradi zveznosti funkcije f obstaja taka odprta okolica U točke r, da je $f(U) \subseteq V$. Ker je L linearni kontinuum obstaja taka točka $p \leq r' < r$, za katero je interval $[r', r]$ vsebovan v množici U. Torej je $f([r', r]) \subseteq V$, kar pomeni, da $f(p) \notin f([r', r])$. To pa je protislovje z definicijo točke r kot supremum množice. Sedaj definiramo $r < s \leq q$:

$$r = \inf\{x \in [r, q] : f(x) = f(q)\}.$$

Enako kot prej se prepričamo, da je $f(s) = f(q)$. Zapišimo $Q = [r, s]$ in pokažimo, da je $f(Q) = J$. Izrek o vmesni vrednosti zagotavlja, da je interval J vsebovan v množici $f([r, s])$. Velja tudi $f([r, s]) \subseteq J$, saj v nasprotnem primeru obstaja $r < x < s$, za katerega velja $f(x) \notin J$. Če je $f(x) < f(p) < f(q)$ ali $f(q) < f(p) < f(x)$, potem po izreku o vmesni vrednosti obstaja tak x', da velja $r < x < x' < s$ in $f(p) = f(x')$. to pa je protislovje z definicijo točke r kot supremum. Če je $f(x) < f(q) < f(p)$ ali $f(p) < f(q) < f(x)$, to privede do protislovja z definicijo točke s kot infimum. To pomeni, da res velja $J = f(Q)$. $\square$

Lema 0.9. *Naj bo L linearni kontinuum v topologiji urejenih množic. Naj bosta I zaprt interval v L in $f : L \to L$ zvezna funkcija. Če je $I \subseteq f(I)$, potem ima f negibno točko $x \in I$.*

Dokaz. S pomočjo leme 0.8 ugotovimo, da obstaja zaprt interval $Q \subseteq I$, za katerega je $f(Q) = I$. Pokazali bomo, da ima funkcija f negibno točko v intervalu Q. Predpostavimo, da funkcija f na intervalu Q nima negibne točke. Potem lahko zapišemo $Q = A \cup B$, kjer je:

$$A = \{x \in L : x < f(x)\},$$
$$B = \{x \in L : x > f(x)\}.$$

Trdimo, da je množica A odprta. Za vsako točko $x \in A$ lahko izberemo točko $z \in (x, f(x))$ in odprto okolico $U \subseteq (-\infty, z)$ točke x, za katero velja $f(U) \subseteq (z, \infty)$. Ker je množica U podmnožica množoce A, je točka x notranja točka množice A. Množica A je odprta. Podobno lahko dokažemo, da je množica $\mathcal{B}$ odprta. Množici $Q \cap A$ in $Q \cap B$ sta odprti podmnožici množice Q za kateri velja $Q = (Q \cap A) \cup (Q \cap B)$. Radi bi videli, da sta množici $Q \cap A$ in $Q \cap B$ neprazni. Zapišimo $I = [c, d]$. Ker je $f(Q) = I$, obstaja $x' \in Q$, za katerega je $f(x') = d$. Ker f nima fiksne točke na Q, je $x' \neq d$. Interval Q je pomnožica intervala I, zato velja $x' < f(x') = d$, kar pomeni, da je $x' \in Q \cap A$. Analogno poiščemo točko $x'' \in Q - \{c\}$ z lastnostjo: $f(x'') = c$ in $x'' \in Q \cap B$. Torej, množici $Q \cap A$ in $Q \cap B$ tvorita separacijo povezanega prostora Q, kar je protislovje. Funkcija f ima negibno točko v intervalu Q. $\square$