UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: V prejšnjem poglavju smo obravnavali periode zveznih funkcij defini-

ranih na dveh disjunktnih intervalih in na krožnici. Ko smo obravnavali periode poljubne funkcije f definirane na prostoru $X = I_1 \cup I_2$, smo prišli do relacije $\rhd_X$, ki določa prisotnost period za funkcijo $f : X \to X$. Natančneje, če je m perioda za zvezno funkcijo $f : X \to X$, potem je vsako naravno število l, za katero je $l \lhd_X m$, tudi perioda za funkcijo f. V tem poglavju bomo obravnali prostore, pri katerih je relacija, ki določa prisotnost period funkcije enaka relaciji Šarkovskega, ki smo jo spoznali v definiciji **??**. Če je relacija $\rhd_X$ enaka relaciji Šarkovskaga, pravimo, da je prostor X *prostor Šarkovskega*. V tem poglavju, bomo spoznali nekaj prostorov Šarkovskega in tudi nekaj prostorov, ki to niso. S primeri in protiprimeri bomo poskušali ugotoviti katere topološke lastnosti imajo prostori Šarkovskega. Preden začnemo s preučevanjem različnih prostorov Šarkovskega se prepričajmo, da je lastnost biti prostor Šarkovskega tudi topološka lastnost.

Trditev 0.1. *Lastnost biti prostor Šarkovskega je topološka lastnost. To pomeni, če je X prostor Šarkovskega in je prostor Y homeomorfen prostoru X, potem je tudi Y prostor Šarkovskega.*

Dokaz. Naj bo prostor X prostor Šarkovskega in naj bo prostor Y homeomorfen prostoru X. Naj bo $h : X \to Y$ homeomorfizem med prostoroma X in Y. Funkciji $f : Y \to Y$ in $g = h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$ imata enake periode, zato je Y tudi prostor Šarkovskega. $\square$

Iz prejšnjih poglavji je razvidno, da so tipični predstavniki prostorov Šarkovskega množica realnih števil in intervali v realnih številih. V poglavju **??** smo spoznali dva prostora, ki nista prostora Šarkovskega. Največ časa smo namenili krožnici, ki ni prostor Šarkovskega, saj imajo na primer pri rotaciji za $120°$ vse točke periodo 3, drugih period pa ta rotacija nima. S podobnim sklepanjem lahko za nekatere prostore hitro preverimo, da niso prostori Šarkovskega. To naredimo tako, da poiščemo kakšno os n-kratne rotacijske simetrije, kjer je n naravno število večje od 2. Pri takih primerih lahko hitro ugotovimo, da ima rotacija za kot $\varphi = \frac{360°}{n}$, za $n > 2$, točke periode n in morda tudi točke periode 1, nima pa točk periode 2. Zaradi tega taki prostori ne morejo biti prostori Šarkovskega. Primeri takih prostorov so npr. sfera, krogla, torus ...

Na začetku poglavja **??** smo enostavno pokazali, da disjunktna unija dveh intervalov ni prostor Šarkovskega. Z zelo podobno idejo lahko pokažemo, da je vsak prostor Šarkovskega povezan.

Trditev 0.2. *Prostor Šarkovskega je povezan.*

Dokaz. Naj bo prostor X disjunktna unija nepraznih prostorov A in B in naj bosta $a \in A$ in $b \in B$ poljubni točki tega prostora. Definiramo funkcijo $f : X \to X$ s predpisom:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{če } x \in B \\ b, & \text{če } x \in A. \end{cases}$$

Funkcija f ima samo dve periodični točki. To sta točki a in b. Obe pa imata periodo 2. Ker nobena točka prostora X ni fiksna točka za funkcijo f, prostor X ni prostor Šarkovskega. $\square$

Pokazali smo, da je vsak prostor Šarkovskega povezan prostor. V nadaljevanju bomo ponovili kakšni prostori so s potmi povezani, lokalno povezani in lokalno s potmi povezani. S primeri se bomo prepričali, da obstajajo prostori Šarkovskega, ki imajo te lastnosti, in tudi prostori Šarkovskega, ki teh lastnosti nimajo.

Definicija 0.3. Topološki prostor X je *s potmi povezan*, če za poljubni točki $a, b \in X$ obstaja zvezna preslikava $\gamma : [0,1] \to X$, za katero je $\gamma(0) = a$ in $\gamma(1) = b$. Preslikavi γ rečemo tudi pot med točkama a in b.

Primeri s potmi povezanih prostorov so intervali v realnih številih, krožnica, disk v $\mathbb{R}^2$...

Trditev 0.4. *Lastnost biti s potmi povezan je strožji pogoj, kot biti povezan. To pomeni, da je vsak s potmi povezan prostor tudi povezan.*

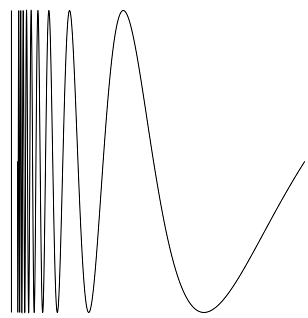
Dokaz. Naj bo X s potmi povezan prostor. Dokazovali bomo s protislovjem. Denimo, da prostor X ni povezan. Potem obstajata neprazni odprti množici $U, V \subseteq X$, za kateri veljata naslednji lastnosti:

(1) $U \cup V = X$ in
(2) $U \cap V \neq \emptyset$.

Množici U in V sta neprazni, zato si lahko izberemo točki $a \in U$ in $b \in V$. Prostor X je s potmi povezan, kar pomeni, da obstaja pot $\gamma : [0,1] \to X$, za katero je $\gamma(0) = a$ in $\gamma(1) = b$. Sedaj bomo obravnavali množici $\gamma^{-1}(U)$ in $\gamma^{-1}(V)$. Množici sta disjunktni podmnožici intervala $[0,1]$, njuna unija pa je enaka interevalu $[0,1]$. Obe množici sta odprti v $[0,1]$, saj je pot γ zvezna funkcija. Ker je 0 element množice $\gamma^{-1}(U)$ in 1 element množice $\gamma^{-1}(V)$, tvorita ti dve množici separacijo povezane množice $[0,1]$, kar je protislovje. Torej je prostor X povezan. □

Implikacija v drugo smer ne drži. Torej, če je nek topološki prostor X povezan, ne moremo sklepati, da je tudi s potmi povezan. Poglejmo si primer povezanega prostora, ki pa ni s potmi povezan.

Definicija 0.5. Naj bo C grapf funkcije $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ na intervalu $x \in (0,1]$ in naj bo A daljica $\{0\} \times [-1,1]$. *Varšavski lok* je prostor $X = C \cup A$.



SLIKA 1. Varšavski lok.

Komponenta A je homeomorfna zaprtemu intervalu $[-1,1]$, komponenta C pa je homeomorfna polodprtemu intervalu $(0,1]$. Denimo, da lahko množico X zapišemo kot unija dveh nepraznih odprtih množic U in V. Ker je množica C povezana, celotna leži v eni množici, denimo, da leži v množici V. Pokažimo, da v vsaki okolici točke $x = (0,0) \in A$ ležijo tudi točke iz množice C in zato tudi iz množice V. Naj bo δ poljubno majhno pozitivno število in množica D delta okolica točke x v prostoru X. Za naravno število $k > \frac{1}{\pi\delta}$ točka $\left(\frac{1}{k\pi}, 0\right)$ leži v množici C in v množici D, kar pomeni, da točka $(0,0)$ leži v množici V. Ker je množica A povezana množica, cela leži v množici V. Ugotovili smo, da celoten prostor X leži v množici V, zato je povezan prostor.

Pokažimo, da Varšavski lok ni s potmi povezan. Predpostavimo, da obstaja pot p med točkama $(0,0) \in A$ in $(1,0) \in C$, za katero velja $p(0) = (0,0)$ in $p(1) = (1,0)$. Naj bo $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekcija na os x. Funkcija x je zvezna. Pot med točkama $(0,0)$ in $(1,0)$ se začne na množici A in mora v neki točki „skočiti" na množico C, ki je del Varšavskega loka s pozitivno koordinato x. Definiramo natančen čas, ko se to zgodi kot število t_0:

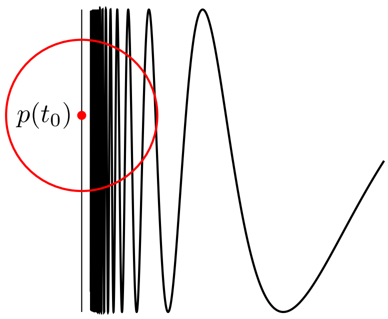
$$t_0 := \inf\{t \in [0,1] : x(p(t)) > 0\}.$$

Za vsako število $t < t_0$ je $x(p(t)) = 0$. Zaradi zveznosti funkcije $x \circ p$ v točki t_0 velja enakost $x(p(t_0)) = \lim_{t \uparrow t_0} x(p(t)) = 0$. Zaradi zveznosti funkcije p lahko izberemo tako pozitivno realno število δ, za katerega velja:

$$t_0 \leq t < t_0 + \delta \Rightarrow ||p(t) - p(t_0)|| < \frac{1}{2}.$$

Obstaja točka $t_1 \in (t_0, t_0 + \delta)$, za katero je $a := x(p(t_1)) > 0$. Ker je množica $[t_0, t_1]$ povezana, je tudi njena slika $x(p([t_0, t_1]))$ z zvezno funkcijo $x \circ p$ povezana in vsebuje $0 = x(p(t_0))$ in $a = x(p(t_1))$. Vsaka povezana podmnožica množice realnih števil $\mathbb{R}$ je interval, zato velja:

$$[0, a] \subseteq x(p([t_0, t_1])).$$



Slika 2. Relacije pokritja v trditvi ?? lahko prikažemo z grafom.

S slike lahko razberemo, da je to v protislovju z zveznostjo funkcije $x \circ p$, saj graf funkcije $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ sega izven rdečega kroga s središčem v $p(t_0)$. Zato x-vrednosti točk na množici X, ki ležijo znotraj kroga, ne vsebujejo vseh vrednosti iz intervala $[0, a]$. Pretvorimo vizualno razlago v matematični dokaz.

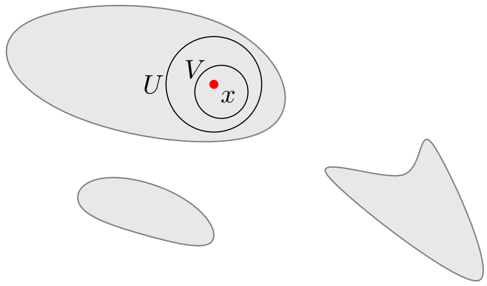
Za $k > \frac{2+a}{4a}$ ležita števili $\frac{2}{4k+1}$ in $\frac{2}{4k-1}$ v intervalu $[0, a]$. Ti dve števili predstavljata x-koordinati točk $p(t')$ in $p(t'')$ za neki števili $t', t'' \in [t_0, t_0 + \delta)$. Velja $p(t') = (\frac{2}{4k+1}, 1)$ in $p(t'') = (\frac{2}{4k-1}, -1)$. Zaradi izbire števil t' in t'' iz intervala $[t_0, t_0 + \delta)$ in zaradi zveznosti funkcije p, velja $||p(t') - p(t_0)|| < \frac{1}{2}$ in $||p(t'') - p(t_0)|| < \frac{1}{2}$ iz česar sledi, da je $||p(t') - p(t'')|| < 1$. Po drugi strani pa velja $||p(t') - p(t'')|| = \sqrt{\left(\frac{2}{4k+1} - \frac{2}{4k-1}\right)^2 + (1 - (-1))^2} \geq \sqrt{(1 - (-1))^2} = 2$, kar je protislovje. Varšavski lok res ni s potmi povezan prostor.

Definicija 0.6. Prostor X je lokalno povezan prostor, če za vsako točko $x \in X$ in vsako odptro množico $U \subseteq X$, ki vsebuje točko x, obstaja taka odprta povezana množica $V \subseteq X$, da je $x \in V \subseteq U$. Prostoru, ki ni lokalno povezan pravimo lokalno nepovezan prostor.

poglejmo si nekaj primerov:

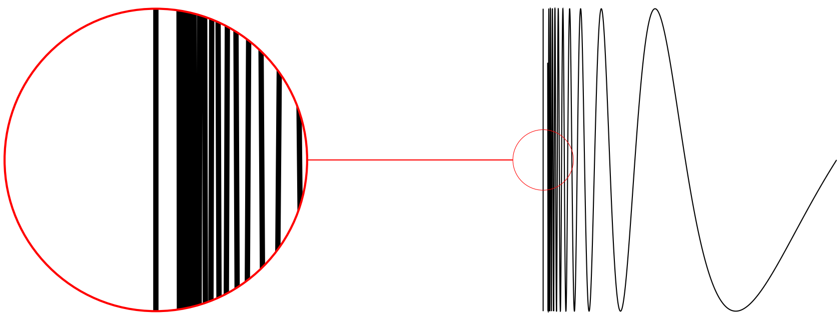
Primer 0.7. Odprti disk v $\mathbb{R}^2$ je povezan in lokalno povezan prostor. Prav tako so intervali v realnih številih lokalno povezani prostori. $\diamondsuit$

Primer 0.8. Poglejmo si nepovezan prostor, sestavljen iz treh komponent za povezanost kot prikazuje slika. Prostor je lokalno povezan, saj za vsako točko $x \in X$ in vsako njeno odprto okolico $U \subseteq X$ obstaja taka povezana okolica V, da je $x \in V \subseteq U$. $\diamondsuit$



Slika 3. Za vsako točko x in vsako okolico U točke x obstaja odprta povezana množica V, za katero velja $x \in V \subseteq U$.

Obstajajo pa tudi prostori, ki so povezani, vendar so lokalno nepovezani. Perpričajmo se, da temu pogoju ustreza Varšavski lok. Slika 4 prikazuje na desni strani Varšavski lok, na levi strani pa je povečana okolica točke $(0, 0)$. Opazimo, da je vsaka okolica točke $(0, 0)$ nepovezana, saj vsebuje nepovezane navpične črte, ki jih lahko vidimo v povečani okolici na sliki 4.



Slika 4. Vsaka dovolj majhna okolica točke $(0, 0)$ je nepovezana.

Definicija 0.9. Prostor X je lokalno s potmi povezan prostor, če za vsako točko $x \in X$ in vsako odprto množico U, ki vsebuje x, obstaja odprta in s potmi povezana množica V, ki vsebuje x in je vsebovana v množici U.

Primer prostora, ki je lokalno s potmi povezan, je množica realnih števil ali interval v množici realnih števil. Primer prostora, ki ni lokalno s potmi povezan, pa je Varšavski lok. Slika 4 pokaže, da je vsaka okolica točke $(0, 0)$ nepovezana, saj vsebuje nepovezane navpične črte.

Varšavski lok je primer prostora, ki ni s potmi povezan in ni lokalno povezan, a je kljub temu prostor Šarkovskega.

Trditev 0.10. *Varšavski lok je prostor Šarkovskega.*

Dokaz. Varšavski lok zapišimo kot $X = C \cup A$, kjer je $A = \{0\} \times [-1,1]$ in C krivulja $\left\{\left(x, \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right), x \in [0,1]\right\}$. Naj bo $x \in X$ točka s periodo n in naj bo m tako naravno število, da velja relacija $m \triangleleft n$. Pokazali bomo, da obstaja točka y s periodo m. Ker je funkcija f zvezna, se ne more zgoditi, da je $f(A) \subseteq C$ in $f(C) \subseteq A$. V tem primeru bi bila množica $f(A)$ kompaktna množica, ki nima skupne točke z množico A. Množici $f(A)$ in A sta disjunktni zaprti podmnožici prostora $\mathbb{R}^2$. Ker ima prostor $\mathbb{R}^2$ lastnost T_4, obstajata disjunktni odprti množici, U in V, za kateri velja $f(A) \subseteq U$, $f(C) \subseteq A \subseteq V$, kar predstavlja separacijo prostora $f(X)$, kar pa ni mogoče, saj je prostor X povezan. Množica $f(X)$ je slika povezanega prostora z zvezno funkcijo in je tudi povezana. Če je $f(A) \subseteq C$, potem je zaradi zveznosti funkcije f tudi $f(C) \subseteq C$. Ker je X kompaktna množica in je slika kompaktne množice z zvezno preslikavo kompaktna, je množica $f(X)$ kompaktna povezana podmnožica množice C. Množica C je homeomorfna intervalu, zato je tudi $f(X)$ homeromorfna intervalu, kar pomeni, da je tudi $f(X)$ prostor Šarkovskega. Zato obstaja točka y s periodo m. Če je $f(C) \subseteq A$, potem je tudi $f(A) \subseteq A$ in vsaka periodična točka funkcije f leži v A. Zopet je množica $f(X)$ povezana kompaktna podmnožica homeomorfna intervalu. Torej obstaja točka y s periodo m. Dokazati moramo še primer, ko je $f(A) \subseteq A$ in $f(C) \subseteq C$. Ker sta prostora A in C homeomorfna intervalu, sta prostora Šarkovskega, kar pomeni, da zagotovo obstaja točka $y \in X$, ki leži v isti komponenti za povezanost s potmi kot točka x s periodo m. □

Pokazali smo že, da Varšavski lok ni s potmi povezan prostor. V dokazu smo se prepričali, da ne obstaja pot, ki poveže ptostora A in C. Če dodamo pot, ki poveže ta dva prostora, dobimo nov prostor, ki je s potmi povezan.

Definicija 0.11. Varšavska krožnica je topološki prostor, ki ga lahko definiramo na naslednji način:

$$S_W = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right); 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0,y); -1 \leq x \leq 1\} \cup C,$$

kjer je C zvezna krivulja, ki povezuje točki $(0,-1)$ in $(1,0)$ in ne seka preostalega dela Varšavske krožnice. Množico lahko parametriziramo na naslednji način:

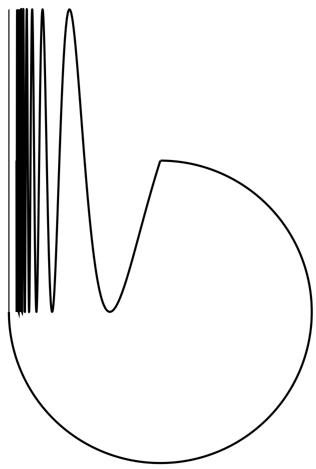
$$p(t) = \begin{cases} (t, \sin(\frac{\pi}{t}), & \text{če } t \in (0,1) \\ (\cos(\frac{3\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}) + 1, \sin(\frac{3\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}) - 1). & \text{če } t \in [1,2] \\ (0, 2t-5), & \text{če } t \in (2,3]. \end{cases}$$

Varšavska krožnica je povezan in s potmi povezan prostor, vendar ni lokalno povezan prostor. Prepričajmo se, da je Varšavska krožnica prostor Šarkovskega.

Trditev 0.12. *Varšavska krožnica je prostor Šarkovskega.*

Dokaz. Interval $(0,3]$ označimo s črko I, Varšavsko krožnico pa z X. Varšavsko krožnico lahko parametriziramo z zvezno bijektivno preslikavo $p : I \to X$. Naj bo $f : X \to X$ zvezna funkcija. Ker je funkcija p bijektivna, je funkcija $\widehat{f} = p^{-1} \circ f \circ p : I \to I$ dobro definirana. Trdimo, da je funkcija $\widehat{f}$ zvezna. Ker je funkcija p bijekcija, imata funkciji f in $\widehat{f}$ enake periode. Ker je interval I prostor Šarkovskega, je tudi X prostor Šarkovskega.

Prepričati se moramo samo še, da je funkcija $\widehat{f}$ res zvezna. Naj bo $t \in I$ poljubna točka intervala I in naj bo $U \in I$ odprta okolica točke $\widehat{f}(t) = (p^{-1} \circ f \circ p)(t)$. Množico robnih točk okolice U označimo z A. Velja $|A| \leq 2$. Ker ima X lastnost T_2, so točke



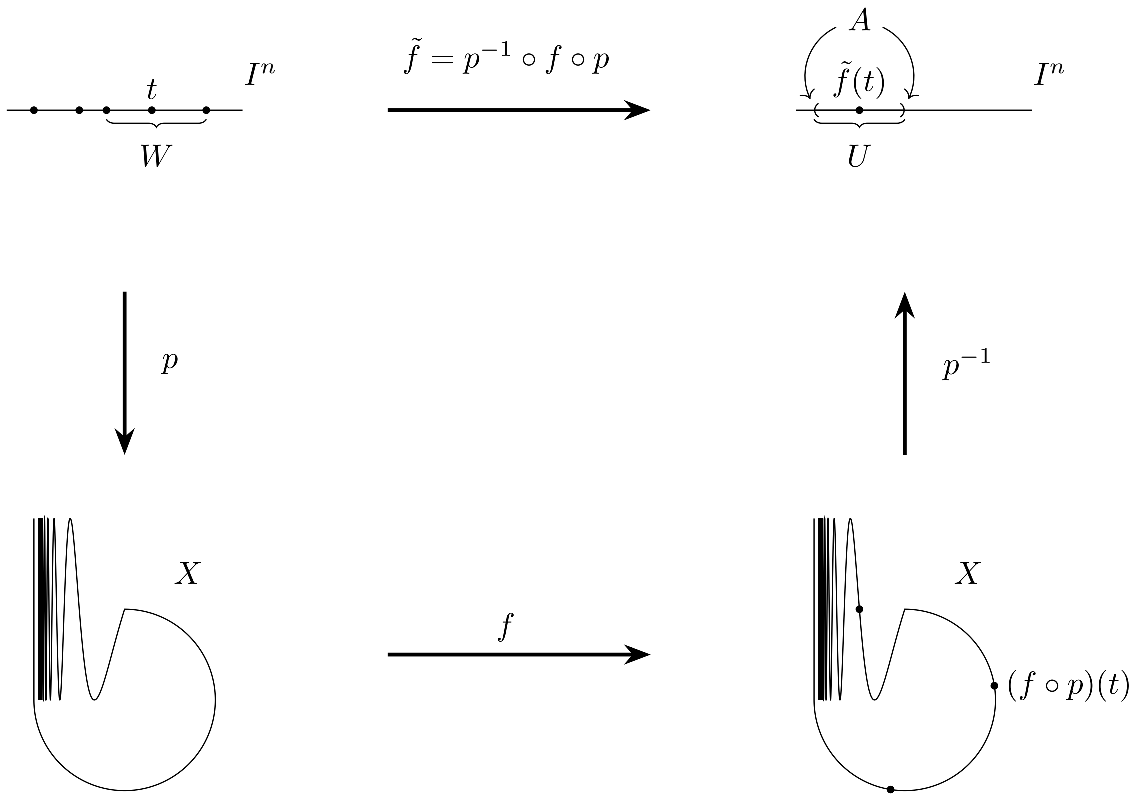
Slika 5. Slika prikazuje primer varšavske krožnice določene s predpisom p iz definicije.

zaprte množice in zato je množica $X - p(A)$ odprta podmnožica prostora X, ki vsebuje točko $(f \circ p)(t)$. Povezano komponento množice $(f \circ p)^{-1}(X - p(A))$, ki vsebuje točko t označimo z W. Množica $(f \circ p)^{-1}(X - p(A))$ je odprta podmnožica intervala I, saj je praslika odprte množice z zvezno funkcijo $(f \circ p)$. Ker je interval I lokalno s potmi povezan, so komponente za povezanost s potmi odprte množice. Množica W je zato odprta. Sedaj obravnavajmo množico $\left(p \circ \widehat{f}\right)(W) = (f \circ p)(W) \subseteq X - p(A)$. Ker je množica W povezana s potmi, je množica $\left(p \circ \widehat{f}\right)(W)$ vsebovana v tisti komponenti za povezanost s potmi množice $X - p(A)$, ki vsebuje $(f \circ p)(t)$. Označimo to komponento za povezanost s potmi s črko Z.

Pokažimo, da je komponenta Z kar enaka $p(U)$. To je res, saj je množica $p(U)$ povezana s potmi in je zato cela vsebovana v množici Z. Trdimo, da komponenta za povezanost s potmi ne more vsebovati nobene druge točke. Naj bo x točka iz množice $X - p(A)$, ki ne leži v množici $p(U)$. Potem točka $p^{-1}(x)$ ne leži v intervalu U. Definiramo pot $\gamma : [0,1] \to X$ med točkama $p^{-1}(x)$ in $(p^{-1} \circ f \circ p)(t)$ s predpisom

$$\gamma(z) = (\widehat{f}(t) - p^{-1}(x)) \cdot z + p^{-1}(x).$$

Ker v prostoru I med poljubnima točkama obstaja samo ena pot, je pot γ edina pot v množici I med točkama $p^{-1}(x)$ in $(p^{-1} \circ f \circ p)(t)$. Opazimo, da pot γ v neki točki seka množico A. Sedaj lahko s pomočjo preslikave p prenesemo pot γ na množico X. Dobimo pot $\beta(z) = p((\widehat{f}(t) - p^{-1}(x)) \cdot z + p^{-1}(x))$. Tudi v množici X obstaja samo ena pot od točke x do točke $(f \circ p)(t)$, zato je pot β edina pot med teme dvema točkama. Ker pot γ seka množico A, pot β seka množico $p(A)$ in ne leži cela v množici $X - p(A)$. Sklepamo, da ne obstaja pot v množici $X - p(A)$ od točke x do točke $(f \circ p)(t)$, zato točki x in $(f \circ p)(t)$ ne ležita v isti komponenti za povezanost s potmi. Velja $(p \circ f)(W) \subseteq p(U)$, kar implicira vsebovanost $\widehat{f}(W) = (p^{-1} \circ f \circ p)(W) \subseteq (p^{-1} \circ p)(U) = U$. Za poljubno točko t in poljubno odprto okolico U točke $\widehat{f}(t)$ smo našli odprto okolico W točke t, za katero velja $\widehat{f}(W) \subseteq U$, kar dokaže zveznost funkcije $\widehat{f}$. $\square$



SLIKA 6. Slika prikazuje primer varšavske krožnice določene s predpisom p iz definicije.