

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik
Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2022

KAZALO

1. Uvod	4
2. definicije in formulacija izreka	4
2.1. Izrek Šarkovskega	5
3. Intervali, relacija pokritja in cikli	7
4. Primeri	10
5. Štefanovo zaporedje	14
6. Konstrukcija Štefanovega zaporedja	17
7. Dokaz izreka Šarkovskega	17
8. Realizacijski izrek Šarkovskega	18
9. Prostor šarkovskega	19
10. Linearni kontinuum je prostor šarkovskega	19

Izrek Šarkovskega

POVZETEK

Sharkovsky theorem

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2010):

Ključne besede:

Keywords:

1. UVOD

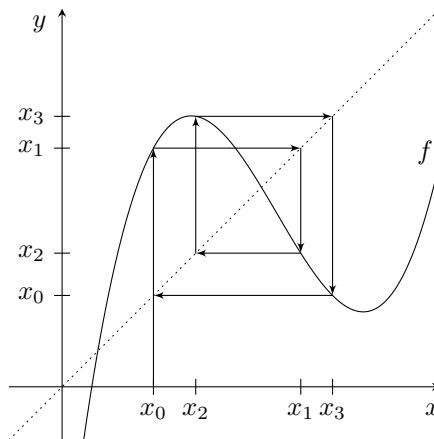
Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2. DEFINICIJE IN FORMULACIJA IZREKA

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ povezana podmnožica realnih števil. Takim množicam bomo rekli intervali. Interval ne rabi biti zaprt ali omejen in lahko v nekaterih primerih predstavlja kar celotno množico realnih števil. Naj bo $f : I \rightarrow I$ zvezna funkcija, ki slika interval I nazaj vase. Ker funkcija f slika interval I nazaj vase, si jo lahko predstavljamo kot diskreten dinamični sistem. S f^n bomo označevali kompozitum:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ponovitev } f},$$

kjer f^0 predstavlja identično funkcijo. Lahko si izberemo neko točko x_0 iz intervala I in s pomočjo iteracij funkcije f definiramo zaporedje s splošnim členom $x_n = f^n(x_0)$. Točke v tem zaporedju lahko ponazorimo v koordinatnem sistemu tako, da začnemo na abscisni osi pri točki x_0 . Potujemo navpično do grafa funkcije f in se premaknemo v vodoravni smeri do simetrane lihih kvadrantov. Ta točka nam pove, kje leži točka x_1 , saj ima obe koordinati enaki x_1 . Sedaj se zopet premaknemo navpično do grafa funkcije f in nato vodoravno do simetrane lihih kvadrantov. Pridemo do točke, ki ima obe koordinati enaki x_2 . Postopek (skiciran je na sliki 1) lahko nadaljujemo. Na tem primeru vidimo, da se točka x_3 slika v točko x_0 . To pomeni, da ima zaporedje samo 4 različne člene, ki se ponavljajo.



SLIKA 1. Slika prikazuje, iteracije funkcije f .

V takem dinamičnem sistemu ena iteracija funkcije predstavlja en diskreten korak v času, točka $x_0 \in I$ pa začetni položaj točke v sistemu. Množici, ki vsebuje vse člene zaporedja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bomo rekli f -orbita točke x_0 ali samo orbita točke x_0 . Z matematičnimi simboli jo lahko zapišemo tako:

$$\{\mathcal{O} := f^m(x_0); m \in \mathbb{N}\}.$$

Izrek Šarkovskega preučuje take točke $x_0 \in I$, ki se po nekaj iteracijah s funkcijo f slikajo nazaj vase. Takim točkam rečemo *periodične točke*. *Perioda točke* x_0 je najmanjše tako naravno število m , za katero je $f^m(x_0) = x_0$. Ekvivalentno lahko

sklepamo, da je orbita periodične točke x_0 končna množica, število različnih elementov v orbiti pa je enako periodi točke x_0 . *Negibna točka* (včasih ji rečemo tudi fiksna točka) je periodična točka s periodo 1, torej taka točka x_0 , za katero je $f(x_0) = x_0$. Če obstaja periodična točka s periodo n , rečemo tudi, da ima funkcija f periodo n .

Pri danem dinamičnem sistemu se lahko vprašamo, katere periode lahko ima funkcija. Šarkovski si je postavil prav to vprašanje in prišel do ureditve množice naravnih števil, ki pove, katere periode lahko ima funkcija.

2.1. Izrek Šarkovskega.

Definicija 2.1. Množico naravnih števil lahko uredimo na naslednji način:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

Ureditev, imenujemo jo ureditev Šarkovskega, določa relacijo \triangleleft . Naravni števili m in n sta v relaciji $m \triangleleft n$ natanko tedaj, ko m leži levo od n ali je $m = n$. Opazimo, da je ureditev sestavljena tako, da najprej po vrsti naštejemo liha števila večja od 1, nato dodamo ta števila po vrsti pomnožena z 2. Sledijo liha števila večja od 1 pomnožena z 2^2 itn. Na koncu so zapisane potence števila 2 v padajočem vrstnem redu. Zaradi vrstnega reda števil pomislimo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila. To pomeni, da lahko poljubni naravni števili m in n zapišemo na naslednji način:

$$(1) \quad m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1),$$

kjer so števila $m_1, n_1, k, l \in \mathbb{N}_0$. Števili sta v relaciji $m \triangleleft n$, če je:

- (R1) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
- (R2) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
- (R3) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
- (R4) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

Trditev 2.2. Relacija \triangleleft , ki smo jo definirali, je relacija linearne urejenosti.

Dokaz. Za dokaz potrebujemo tri poljubna naravna števila:

- $m = 2^k(2m_1 + 1)$,
- $n = 2^l(2n_1 + 1)$ in
- $s = 2^h(2s_1 + 1)$.

Dokazati moramo refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost in sovisnost relacije. Refleksivnost: če je število m liho, točka (R3) zagotavlja, da je $m \triangleleft m$. Če je število m sodo, pa relacija $m \triangleleft m$ sledi iz točke (R2).

Antisimetričnost: denimo, da za števili m in n veljata relaciji $m \triangleleft n$ in $n \triangleleft m$. Pogoja (R1) in (R4) za relacijo $m \triangleleft n$ sta v protislovju z vsemi pogoji relacije $n \triangleleft m$. Edina možnost, ki zadosti vsem potrebnim pogojem relacij je $k = l$ in $m_1 = n_1$. Torej je $m = n$.

Tranzitivnost: obravnavamo števila m , n in s , ki zadoščajo relacijam $m \triangleleft n$ in $n \triangleleft s$. Radi bi videli sta števili m in s v relaciji $m \triangleleft s$. Ker imamo 4 pogoje za relacijo $m \triangleleft n$ in 4 pogoje za relacijo $n \triangleleft s$, moramo obravnavati 16 možnih kombinacij. Vse kombinacije pogojev za relacije so zapisane v tabeli 1. V drugem stolpcu so zapisani pogoji, ki jih dobimo iz relacije $m \triangleleft n$, v tretjem stolpcu so pogoji, ki jih preberemo iz relacije $n \triangleleft s$. V četrti stolpec smo zapisali pogoj, ki sledi iz pogojev v drugem in tretjem stolpcu. Opazimo, da v devetih primerih pogoja ne moreta biti izpolnjena istočasno, zato pridemo do protislovja. V ostalih primerih, pa dobimo enega od pogojev za relacijo $m \triangleleft s$, zato sta števili m in s v relaciji $m \triangleleft s$.

Col1	$m \triangleleft n$	$n \triangleleft s$	\Rightarrow
1	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
2	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l = h$ in $0 < n_1 \leq s_1$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
3	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
4	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$n_1 = 0, s_1 > 0$	$m_1 = 0, s_1 > 0$
5	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
6	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	$k = h$ in $0 < m_1 \leq s_1$
7	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
8	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$k < l$ in $n_1 = 0, s_1 > 0$	$m_1 = 0, s_1 > 0$
9	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
10	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
11	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$k \geq h$ in $m_1 = s_1 = 0$
12	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$k < l$ in $n_1 = 0, s_1 > 0$	protislovje
12	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
14	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
15	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$m_1 = 0, s_1 > 0$
16	$m_1 = 0, n_1 > 0$	$k < l$ in $n_1 = 0, s_1 > 0$	protislovje

TABELA 1. Vseh 16 možnosti.

Sovisnost: prepričati se moramo, da za vsaki dve naravni števili m, n velja $m \triangleleft n$ ali $n \triangleleft m$. Torej velja en od pogojev:

- (i) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
- (ii) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
- (iii) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
- (iv) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

ali

- (v) $l < k$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
- (vi) $l = k$ in $0 < n_1 \leq m_1$ ali
- (vii) $l \geq k$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
- (viii) $n_1 > 0$ in $m_1 = 0$.

Denimo, da števili m in n nista v relaciji. Iz (iv) in (viii) ugotovimo, da mora biti $m_1 = n_1 = 0$ ali $m_1, n_1 \neq 0$. Ker števili ne ustrezata pogoju (iii) niti pogoju (vii) ugotovimo, da morata biti števili m_1 in n_1 različni od 0. Iz pogojev (i) in (v) sklepamo, da mora biti $k = l$. Sedaj pa števili zagotovo zadoščata enemu od pogojev (ii) ali (vi). To je preotislovje s predpostavko, da števili m in n nista v relaciji. Torej res za vsaki dve naravni števili m, n velja relacija $m \triangleleft n$ ali relacija $n \triangleleft m$. \square

Relacija \triangleleft ima še eno zanimivo in za dokaz izreka Šarkovskega zelo pomembno lastnost.

Trditev 2.3. Števili m in n sta v relaciji $m \triangleleft n$ natanko tedaj, ko sta velja relacija $2m \triangleleft 2n$. Zapisano z matematičnimi simboli:

$$\text{za } \forall m, n \in \mathbb{N} : m \triangleleft n \Leftrightarrow 2m \triangleleft 2n.$$

Dokaz. Zapišimo števili m in n kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1).$$

Če števili pomnožimo z 2, dobimo:

$$m = 2^{k+1}(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^{l+1}(2n_1 + 1).$$

Sedaj lahko preverimo, da so pogoji za relacijo $m \triangleleft n$ in relacijo $2m \triangleleft 2n$ ekvivalentni. To je očitno takoj, ko opazimo, da se števili m_1 in n_1 nista spremenili. Neenačbi $k < l$ in $k + 1 < l + 1$ pa sta ekvivalentni. Podobno ugotovimo za neenačbi $k \geq l$ in $k + 1 \geq l + 1$ in enačbi $k = l$ in $k + 1 = l + 1$. \square

Sedaj smo definirali vse potrebne pojme in spoznali tudi ureditev Šarkovskega. Čas je, da si pogledamo na kakšen način ureditev Šarkovskega določa periode funkcije.

Izrek 2.4 (The Sharkovsky forcing theorem). *Če ima $f : I \rightarrow I$ točko periode m in velja $m \triangleleft l$, potem obstaja tudi točka periode l .*

Izrek pove, da je množica period zvezne funkcije na intervalu I rep ureditve Šarkovskega. Rep ureditve Šarkovskega je taka množica $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$, za katero je $m \triangleleft n$ za vsaki naravni števili $m \notin \mathcal{T}$ in $n \in \mathcal{T}$. Obstajajo trije različni tipi repov: Za neko naravno število m je rep množica $\{n \in \mathbb{N}; m \triangleleft n\}$, množica $\{\dots, 16, 8, 4, 2, 1\}$ vseh potenc števila 2 in \emptyset . Naslednji izrek je neke vrste obrat zgornjega izreka.

Izrek 2.5 (The Sharkovsky realization theorem). *Za vsak rep \mathcal{T} v zaporedju Šarkovskega obstaja taka funkcija f , katere množica period je enaka \mathcal{T} .*

Izrek Šarkovskega je unija izreka 2.4 in izreka 2.5. Podmnožica naravnih števil je množica period zvezne funkcije $f : I \rightarrow I$, če in samo če je množica rep ureditve Šarkovskega. Nasledja poglavja so namenjena pripravi na dokaz izreka 2.4, v poglavju 8 pa je predstavljen dokaz izreka 2.5.

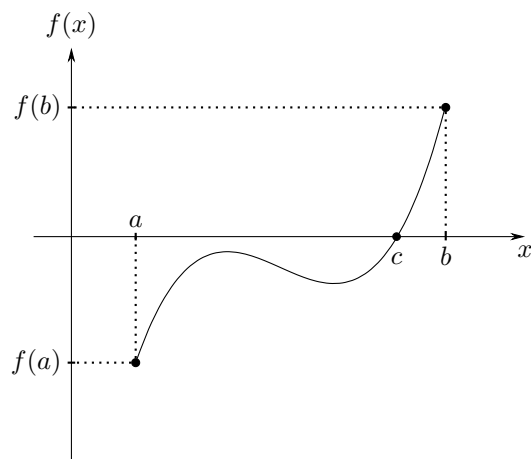
3. INTERVALI, RELACIJA POKRITJA IN CIKLI

Vsi dokazi izreka Šarkovskega so si podobni po tem, da so elementarni. Ne glede na to, kako zvito se lotimo dokaza, je ključnega pomena lastnost zveznih funkcij, ki ob določenih predpostavkah zagotavlja obstoj ničle funkcije. To je izrek o vmesni vrednosti.

Izrek 3.1 (izrek o vmesni vrednosti). *Funkcija f , ki je zvezna na intervalu $[a, b]$ in je na krajiščih intervala različno predznačena, torej velja neenačba $f(a) \cdot f(b) < 0$, ima vsaj v eni točki tega intervala vrednost 0.*

Dokaz. Naj bo funkcija $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ zvezna in naj bo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $f(a) < 0 < f(b)$. Ničlo funkcije f bomo iskali s pomočjo deljenja intervalov oziroma z bisekcijo. Izračunamo razpolovišče $p_0 = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a, b]$. Če je $f(p_0) = 0$, smo ničlo že našli, sicer razmišljamo tako: če je $f(p_0) > 0$, označimo $[a_1, b_1] = [a, p_0]$, sicer označimo $[a_1, b_1] = [p_0, b]$. Nato izračunamo razpolovišče p_1 intervala $[a_1, b_1]$. Če je $f(p_1) = 0$ postopek ustavimo, saj smo ničlo našli, v nasprotnem primeru pogledamo predznak $f(p_1)$. Če je $f(p_1) > 0$, označimo $[a_2, b_2] = [a_1, p_1]$, drugače označimo $[a_2, b_2] = [p_1, b_1]$. Postopek nadaljujemo dokler ne najdemo ničle p_i funkcije f . Če ničle ne najdemo, dobimo neskončno zaporedje vloženih intervalov

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$



SLIKA 2. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K .

Lahko se prepričamo, da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ in $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Števila a_n tvorijo naraščajoče zaporedje, števila b_n pa padajoče zaporedje. Limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ sta enaki, saj je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Označimo $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Točka c je večja od vseh členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in manjša od vseh členov zaporedja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, zato je za vsak $n \in \mathbb{N}$ vsebovana v intervalu $[a_n, b_n]$.

Torej velja: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$. Ker je funkcija zvezna je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(c)$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = f(c)$. Za vsako naravno število n velja $f(a_n) < 0$, zato je $f(c) \leq 0$. Podobno je $f(b_n) > 0$ za vsako naravno število n , iz česar sklepamo, da je $f(c) \geq 0$. Torej je $f(c) = 0$, kar zaključí dokaz. \square

Definicija 3.2. Pravimo, da interval I pokrije interval J , če je $J \subseteq f(I)$. Relacijo zapišemo kot $I \xrightarrow{f} J$. Kadar je jasno, katera funkcija nastopa, lahko nadpis, ki označi katero funkcijo imamo v mislih tudi izpustimo in pišemo samo $I \rightarrow J$. Če velja $f(I) = J$, zapišemo $I \rightarrowtail J$.

S pomočjo izreka o vmesni vrednosti in poznavanja, kako se intervali slikajo s funkcijo f lahko izvemo, ali obstajajo periodične točke. Kako lahko potrdimo obstoj periodičnih točk, nam povejo naslednje leme.

Lema 3.3. Če je $[a, b] \rightarrow [a, b]$, potem ima funkcija f fiksno točko na intervalu $[a, b]$.

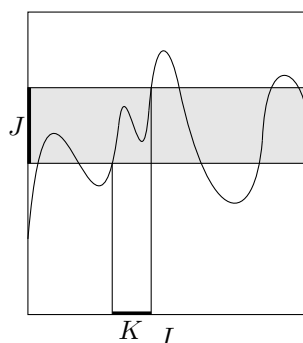
Dokaz. Interval $[a, b]$ je podmnožica slike $f([a, b])$, zato obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a, b]$, da je $f(a_1) = a$ in $f(b_1) = b$. Če je $a_1 = a$ ali $b_1 = b$, smo fiksno točko že našli. Če je $a_1 \neq a$ in $b_1 \neq b$, definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Prepričajmo se, da je vrednost funkcije g v točki b_1 negativna, v točki a_1 pa pozitivna. Računamo: $g(b_1) = f(b_1) - b_1 = b - b_1 < 0$. Podobno je $g(a_1) = f(a_1) - a_1 = a - a_1 > 0$. Zvezna funkcija g je na krajiščih intervala $[a, b]$ različno predznačena. Po izreku 3.1 obstaja točka $c \in [a, b]$, pri kateri je $g(c) = 0$, torej je $f(c) = c$. \square

Pri iteracijah funkcije lahko opazujemo, kako se premika točka. To smo počeli na sliki 1. Lahko pa opazujemo, kako se s f slikajo celi intervali. Na ta način dobimo zaporedje relacij pokritja npr. $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots$. Enako kot pri periodičnih točkah lahko pri zaporedju relacij pokritja po nekaj korakih zopet pridemo do prvotnega intervala. Dobimo naslednje zaporedje relacij pokritja $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_0$.

Če je začetni interval enak končnemu intervalu, zaporedju intervalov in pripadajočim relacijam pokritja pravimo *zanka intervalov* ali samo *zanka*. Od tu naprej bo interval predstavljal zaprto, omejeno in povezano podmnožico realnih števil.

Lema 3.4. Če so intervali I_0, \dots, I_{n-1} intervali, za katere veljajo naslednje relacije pokritosti: $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, potem obstaja taka točka $c \in I_0$, za katero je $f^i(x) \in I_i$ za $0 \leq i < n$ in $f^n(c) = c$. Pravimo, da točka c sledi zanki.

Dokaz. Če velja relacija pokritosti $I \rightarrow J$, obstaja tak interval $K \subset I$, da je $K \rightarrow J$. Interval K poiščemo tako, da iz preseka funkcije f s pravokotnikom $I \times J$ izberemo



SLIKA 3. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K .

povezan del grafa, ki povezuje spodni in zgornji del pravokotnika. Tak del zagotovo obstaja, saj je $J \subset f(I)$. Projekcijo tega dela na interval I označimo s K . To znanje uporabimo na zanki intervalov $I_0 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$. Ker velja relacija pokritja $I_{n-1} \rightarrow I_0$, vemo, da obstaja tak interval $K_{n-1} \subset I_{n-1}$, da je $K_{n-1} \rightarrow I_0$. Velja relacija pokritosti $I_{n-2} \rightarrow K_{n-1}$, zato obstaja tak interval $K_{n-2} \subset I_{n-2}$, da je $K_{n-2} \rightarrow K_{n-1}$. S postopkom nadaljujemo in dobimo naslednje relacije:

$$K_0 \rightarrow K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_{n-1} \rightarrow I_0.$$

Za vsako točko $x \in K_0$ in za vsak $i \in [0, n)$ velja $f^i(x) \in K_i \subset I_i$ in $f^n(x) \in I_0$. Ker je $K_0 \subset I_0 = f^n(K_0)$, lahko s pomočjo leme 3.3 sklepamo, da ima f^n fiksno točko c na intervalu K_0 . Točka c sledi zanki $I_0 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$. \square

Pri dokazovanju izreka bomo dokazali obstoj zank različnih dolžin. Želeli bi si, da je perioda točke, ki sledi zanki enaka dolžini zanke.

Definicija 3.5. Zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ je elementarna, če ima vsaka točka, ki sledi zanki, periodo n .

Posledica 3.6. Vsaka elementarna zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ vsebuje točko x_0 , ki sledi zanki in ima periodo n .

Zaradi zgornje posledice bi bilo dobro, če bi poznali kakšen dober kriterij za prepoznavanje elementarnih zank. Najlažji kriterij je število intervalov v zanki. Če nastopa samo en interval, dobimo zanko $I_0 \rightarrow I_0$. Z uporabo leme 3.3 ugotovimo, da je zanka elementarna. Naslednja lema pove, da sta poda še en kriterij za prepoznavanje elementarnih zank:

Lema 3.7. Zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ je elementarna, če ji ne sledi nobena robna točka intervala I_0 in je notranjost intervala $\text{int}(I_0)$ disjunktna z intervali I_1, I_2, \dots, I_{n-1} . Torej, $\text{int}(I_0) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i = \emptyset$.

Dokaz. Točka x_0 , ki sledi zanki ne more biti robna točka intervala I_0 . Torej je $x_0 \in \text{int}(I_0)$. Za vsak $i = 1, \dots, n-1$ je $x_0 \neq f^i(x_0)$, saj je $f^i(x_0) \in I_i$, notranjost intervala I_0 pa je disjunktna z intervalom I_i . Ker točka x_0 sledi zanki, je $f^n(x_0) = x_0$. Točka x_0 ima periodo n . \square

Poglejmo si dva primera, ki pokažeta, da nobene predpostavke v lemi 3.7 ne moremo izpustiti.

Primer 3.8. Obravnavajmo zvezno funkcijo $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ in 2-zanko intervalov $[0, \frac{1}{2}] \rightleftharpoons [-\frac{1}{2}, 0]$. Samo ena točka sledi tej zanki, to je točka 0. Perioda točke 0 ni enaka enaki dolžini zanke, saj je točka 0 negibna točka in je njena perioda enaka 1. \diamond

Primer 3.9. Funkcija $f(x) = -x^2$ tvori 2-zanko $[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}] \rightleftharpoons [\frac{1}{2}, 4]$. Tej zanki sledi zgolj točka 1, ki je negibna točka, torej je njena perioda različna od dolžine zanke. \diamond

Zanka v primeru 1 ni elementarna, saj ji sledi robna točka začetnega intervala. Zanka v primeru 2 pa ni elementarna, saj točka 1 leži v preseku notranjosti prvega intervala in drugega intervala.

Definicija 3.10. Zaprt in omejen interval, katerega krajišči pripadata ciklu \mathcal{O} imenujemo \mathcal{O} -interval.

V nadaljevanju bomo zgornje leme uporabili na \mathcal{O} -intervalih. Tako bomo poenostavili obravnavo periodičnih točk funkcije f , saj bomo uporabili samo informacije, ki jih lahko pridobimo iz delovanja funkcije f na ciklu \mathcal{O} . Zato bodo naši sklepi veljali za vse zvezne funkcije s ciklom \mathcal{O} . Relaciji pokritja $I \rightarrow J$ rečemo \mathcal{O} -vsiljena, če interval J leži v \mathcal{O} -intervalu M katerega krajišči sta skrajno leva in skrajno desna točka množice $f(I \cap \mathcal{O})$. Ker je funkcija f zvezna, lahko s pomočjo izreka 3.1 ugotovimo, da je množica $f(I)$ interval. Velja $J \subset M \subset f(I)$. V nadaljevanju dela bodo vse relacije pokritja \mathcal{O} -vsiljene. Zanka intervalov $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, v kateri vsaka puščica predstavlja \mathcal{O} -vsiljeno relacijo pokritja, se imenuje \mathcal{O} -vsiljena zanka \mathcal{O} -intervalov.

Vse relacije pokritja, o katerih bomo govorili, bodo \mathcal{O} -vsiljene, zato bodo vse relacije pokritja, ki jih bomo označili s simbolom " \rightarrow ", predstavljale \mathcal{O} -vsiljene relacije pokritja.

4. PRIMERI

V tem poglavju si bomo zaradi lažjega razumevanja pogledali nekaj posebnih primerov. Najprej si bomo pogledali najbolj znan poseben primer izreka Šarkovskega. V naslednjih dveh primerih bomo postopek iz prvega primera razširili na daljše cikle. V zadnjem primeru bomo nakazali kako lahko iz periodičnih točk funkcije f^2 ugotovimo katere periode ima funkcija f , kar igra pomembno vlogo pri dokazu izreka 2.4.

Primer 4.1 (3-cikel). Perioda 3 implicira obstoj vseh ostalih period. Točka lahko tvori 3-cikel na dva različna načina, ki sta v resnici zrcalna podoba drug drugega. Slika prikazuje oba primera. Črtkane puščice nakazujejo, kam se s funkcijo f slikajo



SLIKA 4. Zrcalna podoba ciklov

točke. Velja:

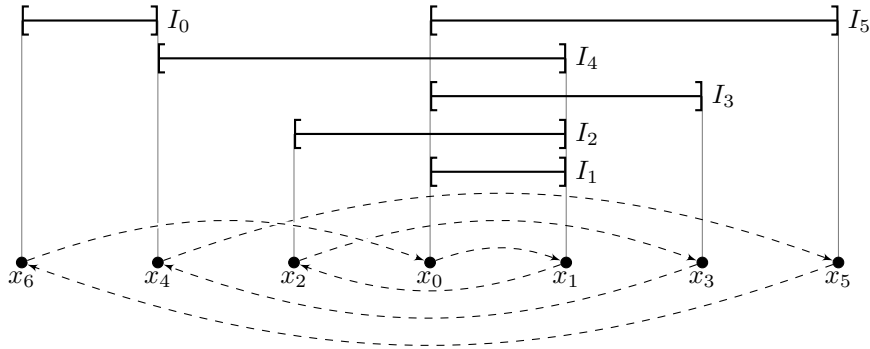
$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \text{ in } x_0 = f(x_2).$$

V obeh primerih smo z I_1 označili \mathcal{O} -interval s krajišči x_0 in x_1 , z I_0 pa \mathcal{O} -interval s krajišči x_0 in x_2 . Krajišči intervala I_1 se slikata v skrajno levo in skrajno desno točko cikla, zato imamo \mathcal{O} -vsiljeni pokritji $I_1 \rightarrow I_1$ in $I_1 \rightarrow I_0$. Krajišči intervala I_0 se slikata v krajišči intervala I_1 , zato je tudi pokritje $I_0 \rightarrow I_1$ \mathcal{O} -vsiljeno. Ugotovljena pokritja lahko strnemo v diagram $\hookrightarrow I_1 \rightleftharpoons I_0$. Iz relacije pokritosti $I_1 \rightarrow I_1$ in leme 3.3 sklepamo, da interval I_1 vsebuje negibno točko. Krajišči intervala I_0 ne morejo slediti zanki $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$, saj sta periodični točki s periodo 3. Točke, ki sledijo zanki, pa imajo periodo 1 ali 2. Ker je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1 , lahko s pomočjo leme 3.7 sklepamo, da je zanka elementarna. Torej lahko v intervalu I_0 poiščemo točko s periodo 2. Za dokaz obstoja točke s periodo $l \geq 4$ si pogledjmo zanko

$$(2) \quad I_0 \rightarrow \overbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1}^{l-1 \text{ ponovitev intervala } I_0} \rightarrow I_0.$$

V tej zanki nastopajo vsaj 3 kopije intervala I_1 , v katerem ležita samo dve točki \mathcal{O} -intervala. Ker imajo točke iz cikla \mathcal{O} periodo 3, v intervalu I_1 ne morejo ležati trije zaporedni členi iz cikla \mathcal{O} , torej tudi tri zaporedne iteracije funkcije f na krajiščih intervala I_0 ne morejo ležati v intervalu I_1 . To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne moreta slediti zanki. Že prej smo ugotovili, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1 , zato je zanka (2) elementarna zanka dolžine l . Zato ima funkcija f periodo l za vsak $l \geq 4$. Pokazali smo, da je vsako naravno število perioda funkcije f . \diamond

Primer 4.2 (7-cikel). Sedaj bomo obravnavali 7-cikel \mathcal{O} in \mathcal{O} -intervale prikazane na sliki 5. Podobno kot pri prejšnjem primeru označimo točke $x_i = f^i(x_0)$ ter intervale



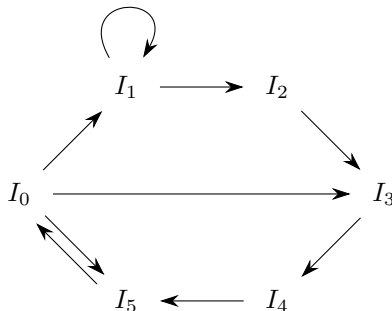
SLIKA 5. Primer 7-cikla.

$I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$ in tako naprej kot prikazuje slika 5. Za to izbiro intervalov dobimo naslednje \mathcal{O} -vsiljene relacije pokritosti:

$$(1) \quad I_1 \rightarrow I_1$$

- (2) $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$
(3) $I_0 \rightarrow I_1, I_0 \rightarrow I_3$ in $I_0 \rightarrow I_5$

Zgornje relacije pokritosti lahko prikažemo z diagramom, ki ga prikazuje slika 6. Iz



SLIKA 6. diagram

grafa preberemo naslednje zanke.

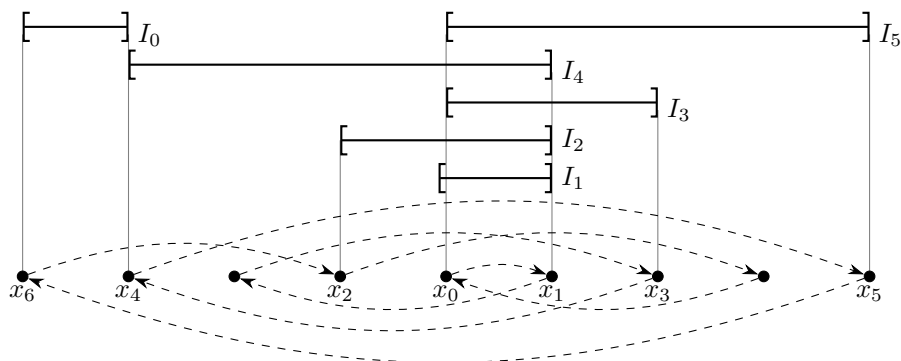
- (1) $I_1 \rightarrow I_1$
(2) $I_0 \rightarrow I_5 \rightarrow I_1$
(3) $I_0 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$
(4) $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$
(5) $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{l \text{ ponovitev intervala } I_1} \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4 \rightarrow I_5 \rightarrow I_0$, kjer je $l \geq 3$.

Zanka $I_1 \rightarrow I_1$ je elementarna, saj je elementarna vsaka zanka dolžine 1. Pri ostalih zankah lahko najprej ugotovimo, da za vsak $j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ velja $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Pri zankah 2, 3 in 4 nobena robna točka intervala I_0 ne more slediti zanki, saj je perioda robnih točk 7, perioda točk, ki sledijo zankam 2, 3 in 4 pa je manjša ali enaka 6. Podobno kot v primeru 4.1 ugotovimo, da nobene tri zaporedne iteracije funkcije f na točkah cikla \mathcal{O} ne ležijo v intervalu I_1 , zato v tem intervalu tudi ne morejo ležati tri zaporedne iteracije funkcije f na robnih točkah intervala I_0 . To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne sledita zanki 5. S tem razmislekom so izpolnjeni pogoji leme 3.7, zato lahko sklepamo, da so zanke elementarne. Torej lahko na podlagi prisotnosti 7-cikla na sliki 5 sklepamo, da so prisotne vse periode l , za katere je $l \triangleleft 7$ \diamond

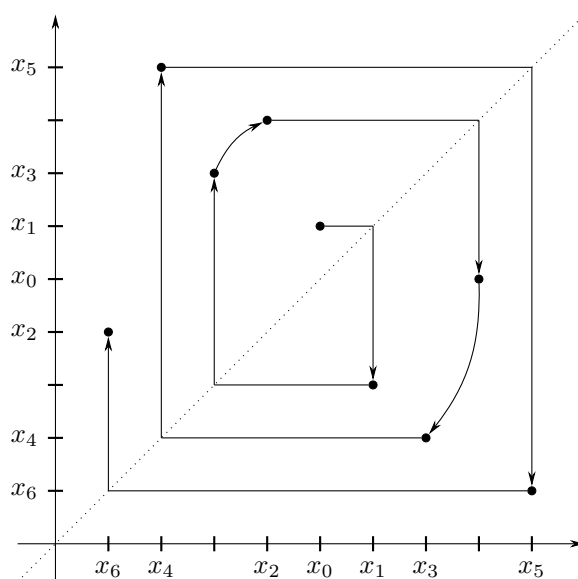
Primer 4.3 (9-cikel). Predpostavimo, da ima funkcija f 9-cikel \mathcal{O} , ki je prikazan na sliki 7. Opazimo lahko, da smo določili šest \mathcal{O} -intervalov I_0, I_1, \dots, I_5 , za katere velja, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z ostalimi intervali. Torej za $j = 1, 2, \dots, 5$ velja: $\text{int}(I_0) \cap I_j \neq \emptyset$. Za tako izbrane intervale dobimo enake relacije pokritja kot v primeru 4.1 in lahko s pomočjo enakih sklepov ugotovimo prisotnost enakih elementarnih zank in posledično periodičnih točk s periodami 1, 2, 4, 6 in vse periode večje od 7.

Zaporedje števil x_0, x_1, \dots, x_6 smo določili tako, da se spiralno oddaljujejo od centra $c := \frac{x_0 + x_1}{2}$, kar je prikazano na sliki 8. S tako izbiro točk pa v zaporedju ne nastopajo vse točke cikla \mathcal{O} in tudi ne velja enakost $f(x_i) = x_{i+1}$ za vsak $i = 1, 2, \dots, 5$ kot je to veljalo v primeru 4.2

V poglavju 6 je predstavljen algoritem za izbiro zaporedja točk x_0, x_1, \dots, x_6 . Glavna ideja algoritma je, da za naslednji člen zaporedja ne izberemo vedno sliko prejšnjega člena na način: $x_{i+1} = f(x_i)$, vendar včasih izberemo točko, ki je bližje



SLIKA 7. Primer 9-cikla.



SLIKA 8. Primer 9-cikla.

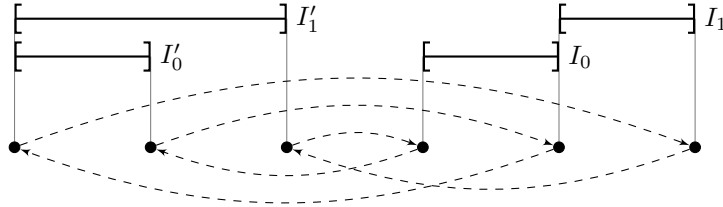
centru c . Točko x_{i+1} , ki je bližje centra c kot točka $f(x_i)$ izberemo, če je slika $f(x_{i+1})$ bolj oddaljena od centra kot točka $f(f(x_i))$. Postopka izbire naslednje točke na sliki 1 in na sliki 8 sta podobna. V obeh primerih se pomikamo navpično do grafa funkcije in nato vodoravno do simetrane lihih kvadrantov. Sprememba se zgodi na sliki 8, ko lahko izberemo še neizbrano točko tako, da se v vodoravni smeri pomaknemo proti centru c , v navpični smeri pa stran od centra c . To se na sliki 8 zgodi dvakrat in je prikazano s krivimi puščicami. Postopek se ustavi, ko pridemo do točke x_j , katere slika $f(x_j)$ je na isti strani centra c kot točka sama. V primeru na sliki 8 je to točka x_6 .

V poglavju 5 si bomo natančno pogledali kakšne lastnosti mora imeti zaporedje točk x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , ki predstavlja krajišča intervalov I_0, I_1, \dots, I_{n-1} .

◇

Primer 4.4 (6-cikel). Obravnavali bomo 6-cikel, ki je na sliki 9. Bistveno pri tem primeu je, da se tri točke na levi strani slikajo v tri točke na desni in obratno. Torej, tri točke na desni tvorijo 3-cikel $\bullet \dashrightarrow \bullet \dashrightarrow \bullet$ za funkcijo f^2 . Podobno kot v primeru 4.1 lahko določimo intervala I_0 in I_1 ter opazujemo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$,

$I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$ za intervala I_0 in I_1 , ki sta prikazana na sliki 9. Enako kot prej lahko zaključimo, da ima funkcije f^2 elementarne zanke vseh dolžin in zato je vsako naravno število $l \in \mathbb{N}$ perioda funkcije f^2 . Za funkcijo f določimo še dva intervala. Interval I'_0 naj bo najkrajši \mathcal{O} -interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_0 \cup \mathcal{O})$, interval I'_1 pa naj bo najkrajši \mathcal{O} -interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_1 \cup \mathcal{O})$. Sedaj bomo prikazali rekurzivno metodo, ki jo bomo uporabili kasneje v dokazu. Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo elementarne k -zanke za funkcijo f^2 poiščemo elementarno $2k$ -zanko za funkcijo f . V primeru, ki ga obravnavamo, bo to pomenilo, da je vsako sodo naravno število perioda funkcije f . Poglejmo si elementarno k -zanko za funkcijo f^2 , v kateri nastopajo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$. Vsak zapis $I_1 \xrightarrow{f^2}$ v zanki lahko zamenjamo z $I_1 \xrightarrow{f} I'_1 \xrightarrow{f}$, vsak zapis $I_0 \xrightarrow{f^2}$ pa z $I_0 \xrightarrow{f} I'_0 \xrightarrow{f}$. S to spremembo dobimo $2k$ -zanko za funkcijo f , ki ni samo dvakrat ponovljena k -zanka. Prepričajmo se, da je $2k$ -zanka elementarna. Denimo, da točka p sledi $2k$ -zanki za funkcijo f . Pokazati moramo, da ima periodo $2k$ za funkcijo f . Opazimo, da točka p sledi prvotni k -zanki za funkcijo f^2 in ima zato periodo k za funkcijo f^2 . Po drugi strani pa iteracije točke p s funkcijo f ležijo alternirajoče enkrat na levi in enkrat na desni strani srednjega intervala, saj $2k$ -zanka za f alternira med intervali s črtico in intervali brez črtice. Zato je orbita točke p sestavljena iz $2k$ različnih točk. Na desni strani srednjega intervala leži k sodih iteracij, na levi strani pa leži k lihih iteracij. To pomeni, da ja perioda točke p za f enaka $2k$. Ker smo dolžino začetne elementarne k -zanke izbrali poljubno, smo pokazali, da je vsako sodo število perioda za f . Ker interval $[x_0, x_1]$ s funkcijo f pokrije samega sebe, pa obstaja fiksna točka. Torej ima f tudi periodo 1.



SLIKA 9. Primer 6-cikla.

◇

5. ŠTEFANOVO ZAPOREDJE

V tem poglavju podamo definicijo Štefanovega zaporedja točk. Pokažemo, da te točke določajo intervale, s pomočjo katerih zapišemo relacije pokritja in ustrezne zanke, ki zagotavljajo obstoj periodičnih.

Definicija 5.1. Naj bo p najbolj desna točka intervala \mathcal{O} , za katero je $f(p) > p$ in $q \in \mathcal{O}$ prva točka desno od p . Center c cikla \mathcal{O} definiramo kot $c = \frac{p+q}{2}$. Za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ označimo množico točk iz cikla \mathcal{O} , ki ležijo v zaprtem intervalu omejenem z x in c , z \mathcal{O}_x . Natančneje, $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [x, p]$, če je $x \leq p$ in $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [q, x]$, če je $x \geq q$. Pravimo, da točka $x \in \mathcal{O}$ menja strani, če točka c leži med točkama x in $f(x)$.

Definicija 5.2. Zaporedje točk x_0, x_1, \dots, x_n je Štefanovo, če:

$$(\text{Š1}) \quad \{x_0, x_1\} = \{p, q\},$$

- (Š2) točke x_1, x_2, \dots, x_n ležijo alternirajoče na levi oziroma desni strani točke c .
- (Š3) Zaporedji x_{2j} in x_{2j+1} sta strogo monotoni in se oddaljujeta od točke c .
- (Š4) Če je $1 \leq j \leq n-1$, potem x_j menja stran in $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$.
- (Š5) Točka x_n ne menja strani.

Opomba 5.3. Štefanovo zaporedje dobimo tako, da iz množice m točk, ki tvorijo \mathcal{O} -cikel izberemo $(n+1)$ -o točko, ki zadoščajo zgornjim pogojem. Pogoji $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$ v (Š4) pomeni, da je točka x_{j+1} bližje centru kot slika $f(x_j)$ točke x_j . Velja ena od neenakosti: $c < x_{j+1} \leq f(x_j)$ ali $f(x_j) \leq x_{j+1} < c$. Pogoja (Š2) in (Š3) zagotavljata, da so točke x_0, x_1, \dots, x_n paroma različne. Ker pa lahko pri izbiri točk iz \mathcal{O} -cikla tudi kakšno točko izpustimo, je število $n+1$ izbranih točk manjše ali enako številu vseh točk v \mathcal{O} -ciklu. Če se vrnemo na primere iz prejšnjega poglavja, lahko vidimo, da v primerih 4.1, 4.2 in 4.4 Štefanovo zaporedje sestavljajo vse točke \mathcal{O} -cikla. V primeru 4.3 pa smo dve točki \mathcal{O} -cikla ne nastopata v Štefanovem zaporedju. Na sliki iz pogoja (Š2) lahko razberemo, da so točke x_0, x_1, \dots, x_n paroma različne. Torej je $n+1 \leq m$ in zato $n < m$. Sliki 5

Trditev 5.4. *Predpostavimo, da m -cikel \mathcal{O} vsebuje Štefanovo zaporedje. Če je $l \triangleleft m$, potem funkcija f vsebuje \mathcal{O} -vsiljeno elementarno l -zanko \mathcal{O} -intervalov in posledično tudi periodično točko z periodo l .*

Pri danem Štefanovem zaporedju x_0, x_1, \dots, x_n definiramo intervale I_0, I_1, \dots, I_{n-1} na nasledni način: Za $1 \leq j < n$, označimo z I_j najkrajši \mathcal{O} -interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_j , medtem ko z I_0 označimo \mathcal{O} -interval s krajišči x_{n-2} in x_n . Iz lastnosti (Š2) lahko sklepamo, da je $\text{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ za vsak $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Trditev 5.5. *Za intervale izbrane na zgoraj opisan način veljajo naslednje relacije pokritja:*

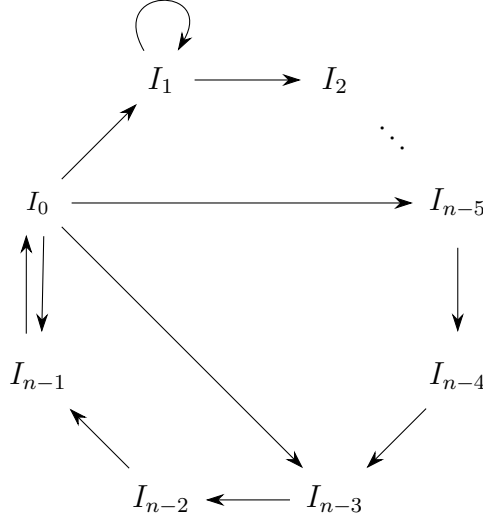
- (1) $I_1 \rightarrow I_1$ in $I_0 \rightarrow I_1$,
- (2) $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$,
- (3) $I_0 \rightarrow I_{n-1}, I_{n-3}, I_{n-5} \dots$

Zaradi boljše predstave ponazorimo relacije pokritja na sliki 14.

Dokaz trditve 5.5. Dokazovali bomo vsako točko posebej.

Pri dokazu točke 1 bomo dokazali še močnejšo trditev, ki nam bo v pomoč tudi pri dokazu druge točke. Pokazali bomo, da za vsak $j = 0, 1, \dots, n-1$ velja relacija pokritja $I_j \rightarrow I_1$. Za dokaz je dovolj, če se prepričamo, da vsak interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1 . V primeru intervala $I_0 = [x_n, x_{n-2}]$ ugotovimo, da obe krajišči I_0 ležita na isti strani točke c . Lastnost (Š4) pove, da krajišče x_{n-2} menja stran, medtem ko lastnost (Š5) pravi, da točka x_n ne menja strani, zato točki $f(x_n)$ in $f(x_{n-2})$ ležita na nasprotnih straneh točke c . V primeru intervala I_j za $j = 1, 2, \dots, n-1$ upoštevamo lastnost (Š2) in pridemo do zaključka, da krajišči intervala ležita na nasprotnih straneh točke c . Lastnost (Š4) pove, da obe krajišči menjata stran. Torej za vsak $j = 0, 1, \dots, n-1$ interval $f(I_j)$ vsebuje točke \mathcal{O} -cikla, ki ležijo na obeh straneh centra c . Zagotovo vsebuje točki x_0 in x_1 in zato tudi interval I_1 .

Naj bo j tako naravno število, za katerega velja $1 \leq j \leq n-1$. Interval J vsebuje interval I_j natanko tedaj, ko vsebuje točke x_0, x_1 in x_j . Želimo pokazati, da interval $f(x_j)$ vsebuje interval I_{j+1} . Vemo že, da interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1 . Za dokaz točke 3 moramo pokazati samo še vsebovanost točke x_{j+1} v intervalu $f(I_j)$.



SLIKA 10. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Za dokaz točke 2 moramo pokazati, da so intervali I_{n-1}, I_{n-3}, \dots vsebovani v intervalu $f(I_0)$. Ker že vemo, da $f(I_0)$ vsebuje točki x_0 in x_1 , preostane za dokazati še, da vsebuje točke x_{n-1}, x_{n-3}, \dots . Zaradi lastnosti (Š2) ležijo vse točke na drugi strani točke c kot točki x_{n-2} in x_n . Iz lastnosti (Š3) sklepamo, da je točka x_{n-1} najbolj oddaljena od točke c , zato vsak interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_{n-1} , vsebuje tudi vse točke x_{n-3}, x_{n-5}, \dots . Pokazati moramo samo še, da interval $f(I_0)$ vsebuje točko x_{n-1} . Pri lastnosti (Š4) namesto j pišemo $n-2$ in dobimo vsebovanost $x_{n-1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$. Interval $f(I_n)$ vsebuje točke x_0, x_1 in $f(x_j)$, □

Dokaz trditve 5.4. Naj veljajo predpostavke v trditvi 5.4. Radi bi pokazali, da ima funkcija f za vsako naravno število $l \triangleleft m$ točko periode l . Dokaz bomo razdelili na tri dele. Najprej bomo dokazali izrek za liha števila manjša od m , potem za sode števila manjša od n in na koncu še za vsa števila večja od n .

Edino liho število l manjše od m , za katerega lahko velja $l \triangleleft m$ je število 1. Za $l = 1$ uporabimo zanko 11, ki je zanka dolžine 1 in zato elementarna. Torej obstaja točka periode 1 v intervalu I_1 .

Naravno število $l \leq n \leq m$ je lahko v relaciji $l \triangleleft m$ samo, če je sodo. Za vsako sodo število $l \leq n$ lahko iz slike 14 izpišemo l -zanko:

$$I_0 \rightarrow I_{n-(l-1)} \rightarrow I_{n-(l-2)} \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0.$$

Iz konstrukcije intervalov I_0, I_1, \dots, I_n vemo, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_{n-(l-1)}, I_{n-(l-2)}, \dots, I_{n-2}, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 imata periodo m in zato ne moreta slediti zanki. Z uporabo leme 3.7 ugotovimo, da je l -zanka elementarna, zato obstaja točka iz I_0 , ki ima periodo l .

V primeru, ko je $l > n$ iz slike 14 razberemo l zanko

$$I_0 \rightarrow \underbrace{I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1}_{l-n+1 \text{ ponovitev intervala } I_1} \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0.$$

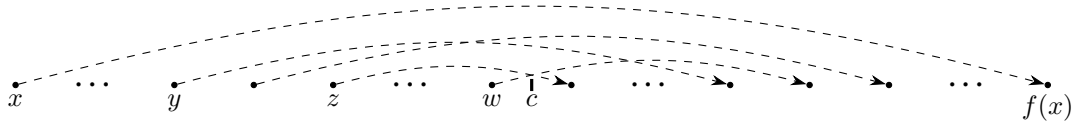
Če je $l = m$, potem lahko izberemo točko x_0 , ki ima periodo m . Predpostavimo, da je $l \neq m$. Podobno kot v prejšnjem primeru je notranjost intervala I_0 disjunktna z

intervali I_1, I_2, \dots, I_{n-1} . Krajišči intervala I_0 pa ne moreta slediti zanki, saj imata periodo m , dolžina zanke pa je različna od m . Zopet lahko s pomočjo leme 3.7 sklepamo, da je l -zanka elementarna, kar zagotavlja obstoj točke iz I_0 , ki ima periodo l . \square

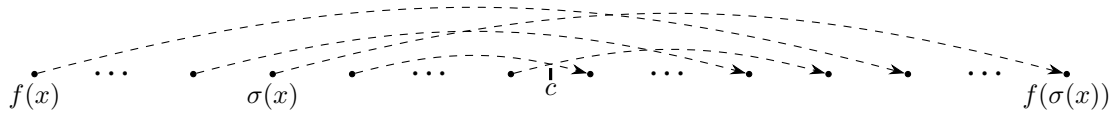
6. KONSTRUKCIJA ŠTEFANOVEGA ZAPOREDJA

Trditev 6.1. *Cikel, ki vsebuje vsaj dve točki, vsebuje Štefanovo zaporedje, če vsaj ena točka ne menja strani.*

Dokaz. Naj bo m naravno število večje ali enako 2 in naj bo \mathcal{O} cikel sestavljen iz m različnih točk. Naj bo množica \mathcal{M} največji tak \mathcal{O} -interval, ki vsebuje točki p in q , da vsaka točka cikla \mathcal{O} , ki je vsebovana v \mathcal{M} menja stran. To pomeni, da za poljubno točko $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ vse točke iz množice \mathcal{O}_x menjajo stran. Če želimo konstruirati Štefanovo zaporedje, bomo definiramo množico $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, ki vsebuje vse kandidate za



SLIKA 11. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



SLIKA 12. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Lema 6.2. *Če obstaja taka točka $x \in \mathcal{S}$, za katero je $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$, potem vse točke cikla \mathcal{O} menjajo stran.*

Dokaz. Če želimo, da je $\sigma^2(x)$ definiran in da leži v \mathcal{O}_x , morajo $x, y = \sigma(x)$ in $z := \sigma(y) = \sigma^2(x)$ vsi ležati v množici \mathcal{S} . \square

\square

Trditev 6.3. *Naj bo m naravno število večje od 2. Če m -cikel vsebuje točko, ki ne menja strani, potem za vsako naravno število l , za katero velja $l \triangleleft m$ obstaja elementarna \mathcal{O} -vsiljena l -zanka \mathcal{O} -intervalov in zato tudi točka s periodo l .*

7. DOKAZ IZREKA ŠARKOVskega

Trditev 7.1. *Naj bosta m in l naravni števili v relaciji $m \triangleleft l$ in naj bo \mathcal{O} m -cikel. Potem obstaja \mathcal{O} -vsiljena elementarna l -zanka \mathcal{O} -intervalov in posledično točka s periodo l .*

Dokaz. Izrek bomo dokazali s pomočjo indukcije na število m . Če je $m = 1$, je trditev avtomatično izpolnjena, saj \square

8. REALIZACIJSKI IZREK ŠARKOVskega

Daljši in bolj zapleten del dokaza izreka Šarkovskega je za nami. Sedaj moramo dokazati še drugi del, ki pravi:

Izrek 8.1. *Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ povezana podmnožica realnih števil. Vsak rep \mathcal{T} ureditve Šarkovskega je množica period za neko zvezno funkcijo $f : I \rightarrow I$.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali tako, da bomo za vsak rep \mathcal{T} poiskali funkcijo, katere množica period je enaka repu \mathcal{T} . Pri iskanju primerne funkcije si bomo pomagali z družino odrezanih šotorskih funkcij. Družino odrezanih šotorskih funkcij definiramo tako, da za vsako realno število $h \in [0, 1]$ definiramo funkcijo:

$$T_h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$T_h : x \mapsto \min \left(h, 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| \right)$$

Ekvivalentno in mogoče lažje predstavljivo lahko predpis funkcije zapišemo na naslednji način:

$$T_h(x) = \min(2x, 2 - 2x, h).$$

Najprej bomo pokazali, da obstaja funkcija, ki ima samo periodo 1. To je funkcija T_0 . Hitro vidimo, da je za vsak $x \in [0, 1]$ vrednost funkcije T_h enaka 0, zato je 0 tudi edina periodična točka za to funkcijo. Točka 0 je fiksna točka, zato je njena perioda enaka 1. Obravnavajmo funkcijo T_1 . Dokazali bomo, da je vsako naravno število n perioda funkcije T_1 . To najlažje dokažemo tako, da poiščemo cikel dolžine 3 in s pomočjo izreka XXX sklepamo, da ima funkcija T_1 vse periode. Vsaka točka ki ima za funkcijo T_1 periodo 3 je fiksna točka funkcije T_1^3 , zato si pogledjmo fiksne točke funkcije T_1^3 . Iz grafa razberemo, da ima funkcija T_1^3 8 fiksnih točk. Točki 0 in $\frac{2}{3}$ sta fiksni točki funkcije T_1 , točke $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ in $\frac{6}{7}$ tvorijo 3-cikel. Prav tako tvorijo 3-cikel točke $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ in $\frac{8}{9}$. S pomočjo izreka XXX ugotovimo, da funkcija T_1 vsebuje točke vseh period, saj vsebuje točko periode 3.

Lema 8.2. *Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h]$ cikel za funkcijo T_1 , je tudi cikel za funkcijo T_h . Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h)$ cikel za funkcijo T_h , je cikel tudi za funkcijo T_1 .*

Dokaz. Funkciji T_1 in T_h se razlikujeta samo v tistih točkah x , za katere je $T_1(x) > h$. V vseh ostalih točkah, sta funkciji enaki. Privzemimo, da je $\mathcal{O} \subset [0, h]$ cikel za funkcijo T_1 . To pomeni, da za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ velja $T_1(x) \leq h$. Torej velja $T_1(x) = T_h(x)$, kar pomeni, da je \mathcal{O} tudi cikel za funkcijo T_h . Denimo, da je $\mathcal{O} \subset [0, h)$ cikel za funkcijo T_h . Torej je za vsako točko x cikla \mathcal{O} slika $T_h(x)$ manjša od h . Velja, da je tudi funkcija točka $T_1(x)$ manjša od h . To pomeni, da sta vrednosti funkcij T_1 in T_h v x enaki. Ker to velja za vsako točko cikla \mathcal{O} , je \mathcal{O} tudi cikel za funkcijo T_1 . \square

V drugem primeru trditev z zaprtim intervalom ne drži, saj ne moremo narediti sklepa, da iz neenakosti $t_h(x) \leq h$ sledi neenakost $T_1(x) \leq h$. To si lahko pogledamo tudi na primeru

Primer 8.3. Presečišča funkcije $T_{0,88}^3$ s simetralo lihih kvadrantov predstavljajo kandidate za periodične funkcije. Iz slike razberemo presečišče $(\frac{6}{25}, \frac{6}{25})$, kar pomeni, da je točka $\frac{6}{25}$ periodična točka za funkcijo $T_{0,88}$. Z iteracijami funkcije $T_{0,88}$ na točki $\frac{6}{25}$ dobimo 3-cikel $\mathcal{O} = \{ \frac{6}{25}, \frac{12}{25}, \frac{22}{25} \}$. Iz grafa funkcije T_1^3 vidimo, da točka $\frac{6}{25}$ ni fiksna

točka funkcije T_1^3 in zato ne more biti točka periode 3 za funkcijo T_1 . Cikel \mathcal{O} res ni cikel za funkcijo T_1 . \diamond

□

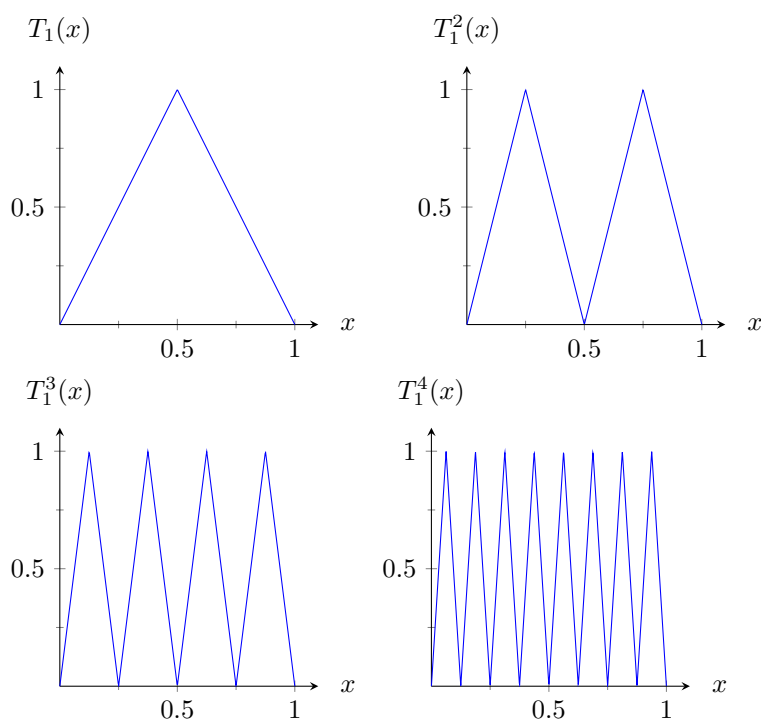
$$h : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1], h(m) := \min\{\max \mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ je } m\text{-cikel funkcije } T_1\}$$

Lema 8.4. Naj bosta m in n naravni števili, ki sta v relaciji $m \triangleleft n$. Potem velja ekvivalenca:

$$h(m) \triangleleft h(n) \iff m \triangleleft n.$$

Dokaz. Dokaz...

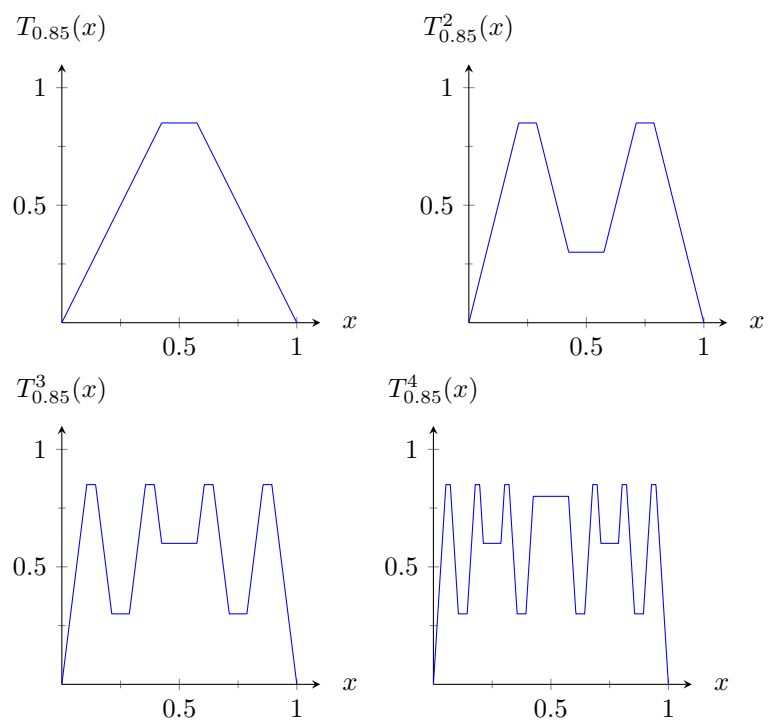
□



SLIKA 13. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

9. PROSTOR SHARKOVSKEGA

10. LINEARNI KONTINUUM JE PROSTOR ŠARKOVSKEGA



SLIKA 14. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.