UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tom Gornik

# Izrek o invarianci odprtih množic

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2020

Kazalo

**Izrek o invarianci odprtih množic**

Povzetek

**Domain invariance theorem**

Abstract

**Math. Subj. Class. (2010):**
**Ključne besede:**
**Keywords:**

# 1. Izrek o invarianci odprtih množic

V prejšnjih poglavjih smo si pripravili vse potrebno za dokaz izreka o invarianci odprtih množic, zato se bomo brez ovinkarjenja lotili dokaza.

1.1. **Navajanje literature.** Članke citiramo z uporabo `\cite{label}`, `\cite[text]{label}` ali pa več naenkrat s `\cite\{label1, label2}`. Tudi tukaj predhodno besedo in citat povežemo z nedeljivim presledkom ~. Na primer [?, ?], ali pa [?], ali pa [?, str. 12], [7, enačba (2.3)]. Vnosi iz `.bib` datoteke, ki niso citirani, se ne prikažejo v seznamu literature, zato jih tukaj citiram. [3], [2], [6], [1], [5], [4], [8].

**Izrek 1.1** (Izrek o invarianci odprtih množic)**.** *Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in naj bo $h : U \to \mathbb{R}^n$ zvezna injektivna preslikava. Potem je tudi slika $h(U)$ odprta množica v $\mathbb{R}^n$.*

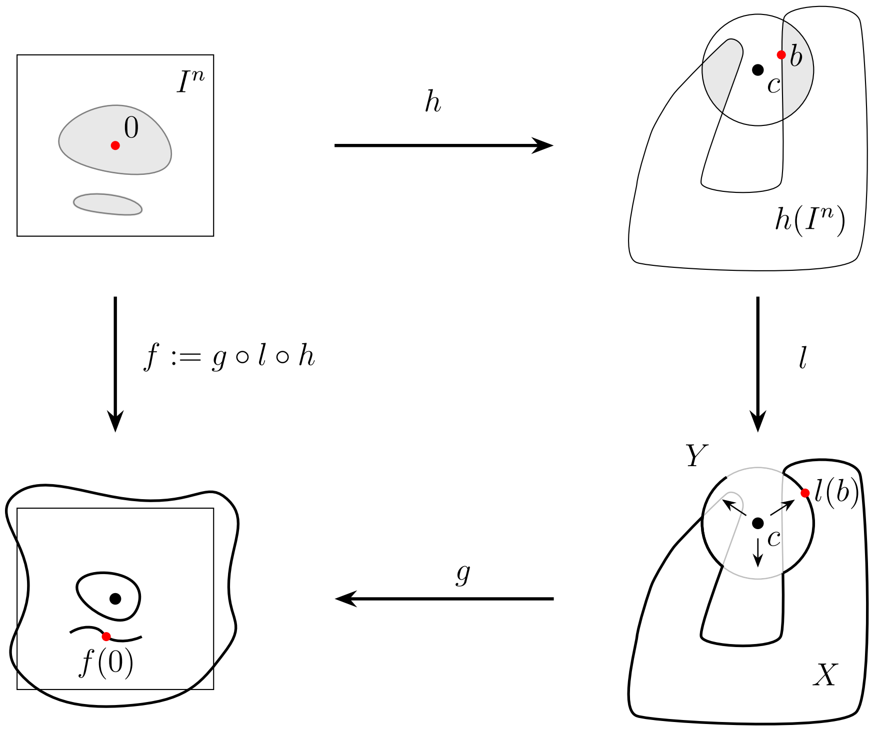
*Dokaz.* Naj bodo izpolnjene predpostavke izreka. Imamo množico U, ki je odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in zvezno injektivno preslikavo $h : U \to \mathbb{R}^n$. Izrek bo dokazan, če pokažemo, da je za vsak element $u$ iz množice $U$ točka $h(u)$ notranja točka za množico $h(U)$. Ker je $\mathbb{R}^n$ homogen prostor, take pa so tudi vse njegove odprte podmnožice, lahko predpostavimo, da je $u = 0_n$ in pokažemo, da je $h(0)$ notranja točka za $h(U)$. Izberimo tako pozitivno realno število $a > 0$, za katero je $\mathbb{I}^n \subset U$. Za dokaz izreka je dovolj pokazati vsebovanost $b := h(0) \in \mathrm{Int}(h(\mathbb{I}^n))$. Od tu naprej bomo dokazovali s protislovjem. Privzeli bomo, da je $b \in \partial h(\mathbb{I}^n)$ in konstruirali funkcijo $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tako da bo f zadoščala pogojem izreka **??**. To pa bo protislovje, saj mora taka funkcija po izreku **??** vsaj eno točko slikati v 0. Na poti do protislovja si bomo seveda pomagali tudi z lemami, ki smo jih spoznali in dokazali v prejšnjih poglavjih. Predpostavimo torej, da je $b \in \partial(\mathbb{I}^n)$. Ker je $\mathbb{I}^n$ kompaktna podmnožica $\mathbb{R}^n$ in je $\mathbb{R}^n$ houssdorfov prostor, je funkcija $h|_{\mathbb{I}^n} : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizem. Zato obstaja tako pozitivno realno število $\delta > 0$, za katerega je $h^{-1}(B(b, 2\delta)) \subset \mathrm{Int}(\mathbb{I}^n)$. Ker je $b \in \partial h(\mathbb{I}^n)$ je mogoče poiskati tak $c \in B(b, \delta) \setminus h(I^n)$. Enostavno se je prepričati, da je $b \in B(c, \delta)$ in $h^{-1}(B(c, \delta)) \subset \mathrm{Int}(\mathbb{I}^n)$.

Označimo $X := h(\mathbb{I}^n) \setminus B(c, \delta)$ in $Y := \partial B(c, \delta)$. Definiramo zvezno preslikavo $l : h(\mathbb{I}^n) \cup Y \to X \cup Y$ s predpisom:

$$l(x) = \begin{cases} c + \frac{x-c}{\|x-c\|} \cdot \delta & , x \in h(\mathbb{I}^n) \cup B(c, \delta) \\ x & , x \in X. \end{cases}$$

S pomočjo leme **??** lahko preslikavo $h|_X : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ razširimo do zvezne preslikave $g : X \cup Y \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, za katero za vsak $x \in X$ velja $\|g(x) - h^{-1}(x)\| < a$. Sedaj lahko definiramo preslikavo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kot kompozitum $f := g \circ l \circ h$. Ker ta funkcija slika iz $\mathbb{I}^n$ in ne zavzame ničle, je za protislovje dovolj, če se prepričamo, da funkcija ustreza pogojem izreka **??**. Vzemimo $t \in \mathbb{I}_i^-$. Velja $l(h(t)) = h(t)$, saj je $h(t) \in X$. Poglejmo normo $\|f(t) - t\| = \|g(l(h(t))) - h{-}1(h(t))\| = \|g(h(t) - h{-}1(h(t))\| < a$. Ker je $t_i = -a$ je $|f_i(t) - t_i| = |f_i(t) - (-a)| \leq |f(t) - t| < a$ torej je $f_i(t) < 0$. Enako lahko sklepamo tudi v primeru, ko je $t_i \in \mathbb{I}_i^+$. Ugotovili smo, da je $f_i(\mathbb{I}_i^-) < 0$ in $f_i(\mathbb{I}_i^+) > 0$, zato bi po predpostavkah izreka **??** moral obstajati $x \in \mathbb{I}^n$, ki se z $f$ slika v 0. To je protislovje, torej je $b \in \mathrm{Int}(h(\mathbb{I}^n)$ in je $h(U)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. □

**Izrek 1.2** (Izrek o invarianci dimenzije)**.** *Naj bosta $m$ in $n$ naravni števili, potem sta Evklidska prostora $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ homeomorfna, če in samo če je $m = n$.*




SLIKA 1. Skica dokaza izreka 1.1.

*Dokaz.* Denimo, da sta za neki dve naravni števili $m$ in $n$ Evklidska prostora $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ homeomorfna. Torej obstaja zvezna bijektivna preslikava $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ z zveznim inverzom $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dokazovali bomo s protislovjem. Predpostavimo, da je $m \neq n$, brez izgube splošnosti lahko predpostavimo , da je $m < n$. Označimo z $i$ vložitev, torej preslikavo iz prostora $\mathbb{R}^m$ v $\mathbb{R}^n$, ki je definirana s predpisom $i(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Tedaj je preslikava $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirana kot kompozitum $h := i \circ f$ zvezna injektivna preslikava, zato je po izreku 1.1 odprta. Toda slika prostora $\mathbb{R}^n$, ki je odprta podmnožica same sebe, je množica $\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n; \text{ kjer so } x_i \in \mathbb{R} \text{ za vsak } i \in \{1, \ldots, m\}\}$, ki pa je zaprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Torej mora biti res $m = n$. $\square$

## Literatura


[1] C. T. Ahlbach, *A descrete aproach to Poincare-Miranda theorem*, magistsko delo, Department of mathematics, Harvey mudd college, 2013.

[2] *Convex hull*, [ogled 22. 4. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull`.

[3] R. Engelking, *General topology*, Sigma series in pure mathematics **6**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] F. Q. Gouvêa, *Was cantor surprised?*, The American Mathematical Monthly **118**(3) (2011) 198–209, doi: 10.4169/amer.math.monthly.118.03.198.

[5] W. Kulpa, *Poincare and domain invariance theorem*, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica **39**(1) (1998) 127–136, dostopno tudi na `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/702050/ActaCarolinae_039-1998-1_10.pdf`.

[6] H. P. Manning, *Geometry of four dimensions*, The Manmillan company, New York, 1914.

[7] U. Schäfer, *From Sperner's Lemma to Differential Equations in Banach Spaces : An Introduction to Fixed Point Theorems and their Applications*, Karlsruher Institut für Technologie, 2014, doi: 10.5445/KSP/1000042944, dostopno tudi na `https://d-nb.info/106449790X/34`.

[8] *Simplex*, [ogled 22. 4. 2020], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex`.