UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2022

Kazalo

1.	Uvod	4
2.	definicije in formulacija izreka	4
2.1.	Izrek Šarkovskega	5
3.	Intervali, relacija pokritja in cikli	7
4.	Primeri	11
5.	Štefanovo zaporedje	15
6.	Konstrukcija Štefanovega zaporedja	17
7.	Dokaz izreka Šarkovskega	19
8.	Dokaz realizacijskega izrek Šarkovskega	20
9.	Prostor sharkovskega	22
10.	Linearni kontinuum je prostor šarkovskega	22

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

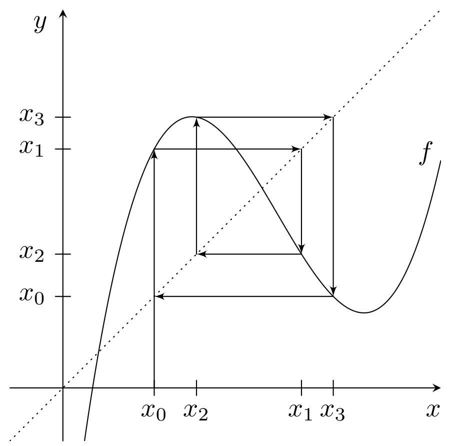
Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2. definicije in formulacija izreka

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ povezana podmnožica realnih števil. Takim množicam bomo rekli intervali. Interval ne rabi biti zaprt ali omejen in lahko v nekaterih primerih predstavlja kar celotno množico realnih števil. Naj bo $f : I \to I$ zvezna funkcija, ki slika interval I nazaj vase. Ker funkcija f slika interval I nazaj vase, si jo lahko predstavljamo kot diskreten dinamični sistem. S f^n bomo označevali kompozitum:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ponovitev } f},$$

kjer f^0 predstavlja identično funkcijo. Lahko si izberemo neko točko x_0 iz intervala I in s pomočjo iteracij funkcije f definiramo zaporedje s splošnim členom $x_n = f^n(x_0)$. Točke v tem zaporedju lahko ponazorimo v koordinatnem sistemu tako, da začnemo na abscisni osi pri točki x_0. Potujemo navpično do grafa funkcije f in se premaknemo v vodoravni smeri do simetrale lihih kvadrantov. Ta točka nam pove, kje leži točka x_1, saj ima obe koordinati enaki x_1. Sedaj se zopet premaknemo navpično do grafa funkcije f in nato vodoravno do simetrale lihih kvadrantov. Pridemo do točke, ki ima obe koordinati enaki x_2. Postopek (skiciran je na sliki 1) lahko nadaljujemo. Na tem primeru vidimo, da se točka x_3 slika v točko x_0. To pomeni, da ima zaporedje samo 4 različne člene, ki se ponavljajo.



Slika 1. Slika prikazuje, iteracije funkcije f.

V takem dinamičnem sistemu ena iteracija funkcije predstavlja en diskreten korak v času, točka $x_0 \in I$ pa začetni položaj točke v sistemu. Množici, ki vsebuje vse člene zaporedja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bomo rekli *f-orbita točke* x_0 ali samo orbita točke x_0. Z matematičnimi simboli jo lahko zapišemo tako:

$$\{\mathcal{O} := f^m(x_0); m \in \mathbb{N}\}.$$

Izrek Šarkovskega preučuje take točke $x_0 \in I$, ki se po nekaj iteracijah s funkcijo f slikajo nazaj vase. Takim točkam rečemo *periodične točke*. *Perioda točke* x_0 je najmanjše tako naravno število m, za katero je $f^m(x_0) = x_0$. Ekvivalentno lahko sklepamo, da je orbita periodične točke x_0 končna množica, število različnih elementov v orbiti pa je enako periodi točke x_0. Predvsem, ko želimo povdariti, da govorimo o periodični točki x_0, bomo f-orbito točke x_0 imenovali tudi cikel točke x_0. Cikel dolžine m bomo krajše zapisali m-cikel. *Negibna točka* (včasih ji rečemo tudi fiksna točka) je periodična točka s periodo 1, torej taka točka x_0, za katero je $f(x_0) = x_0$. Če obstaja periodična točka s periodo n, rečemo tudi, da ima funkcija f periodo n.

Pri danem dinamičnem sistemu se lahko vprašamo, katere periode lahko ima funkcija. Šarkovski si je postavil prav to vprašanje in prišel do ureditve množice naravnih števil, ki pove, katere periode lahko ima funkcija.

2.1. **Izrek Šarkovskega.**

Definicija 2.1. Množico naravnih števil lahko uredimo na naslednji način:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Ureditev, imenujemo jo ureditev Šarkovskega, določa relacijo $\triangleright$. Naravni števili m in n sta v relaciji $m \triangleright n$ (ali $n \triangleleft m$) natanko tedaj, ko m leži levo od n ali je $m = n$. Relacijo $m \triangleright n$ lahko zapišemo tudi z $n \triangleleft m$. Opazimo, da je ureditev sestavljena tako, da najprej po vrsti naštejemo liha števila večja od 1, nato dodamo ta števila po vrsti pomnožena z 2. Sledijo liha števila večja od 1 pomnožena z 2^2 itn. Na koncu so zapisane potence števila 2 v padajočem vrstnem redu. Zaradi vrstnega reda števil pomislimo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila. To pomeni, da lahko poljubni naravni števili m in n zapišemo na naslednji način:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1), \tag{1}$$

kjer so števila $m_1, n_1, k, l \in \mathbb{N}_0$. Števili sta v relaciji $m \triangleright n$, če je:

(R1) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(R2) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
(R3) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(R4) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

Trditev 2.2. *Relacija $\triangleright$, ki smo jo definirali, je relacija linearne urejenosti.*

Dokaz. Za dokaz potrebujemo tri poljubna naravna števila:

- $m = 2^k(2m_1 + 1)$,
- $n = 2^l(2n_1 + 1)$ in
- $s = 2^h(2s_1 + 1$.

Dokazati moramo refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost in sovisnost relacije. Refleksivnost: če je število m liho, točka (R3) zagotavlja, da je $m \triangleright m$. Če je število m sodo, pa relacija $m \triangleright m$ sledi iz točke (R2).

Antisimetričnost: denimo, da za števili m in n veljata relaciji $m \triangleright n$ in $n \triangleright m$. Pogoja (R1) in (R4) za relacijo $m \triangleright n$ sta v protislovju z vsemi pogoji relacije $n \triangleright m$. Edina možnost, ki zadosti vsem potrebnim pogojem relacij je $k = l$ in $m_1 = n_1$. Torej je $m = n$.

Tranzitivnost: obravnavamo števila m, n in s, ki zadoščajo relacijam $m \triangleright n$ in $n \triangleright s$. Radi bi videli sta števili m in s v relaciji $m \triangleright s$. Ker imamo 4 pogoje za relacijo $m \triangleright n$ in 4 pogoje za relacijo $n \triangleright s$, moramo obravnavati 16 možnih kombinacij. Vse kombinacije pogojev za relacije so zapisane v tabeli 1. V drugem stolpcu so zapisani pogoji, ki jih dobimo iz relacije $m \triangleright n$, v tretjem stoplcu so pogoji, ki jih preberemo iz relacije $n \triangleright s$. V četrti stolpec smo zapisali pogoj, ki sledi iz pogojev v drugem in tretjem stolpcu. Opazimo, da v devetih primerih pogoja ne moreta biti izpolnjena istočasno, zato pridemo do protislovja. V ostalih primerih, pa dobimo enega od pogojev za relacijo $m \triangleright s$, zato sta števili m in s v relaciji $m \triangleright s$.

Col1	$m \triangleright n$	$n \triangleright s$	$\Rightarrow$
1	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
2	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l = h$ in $0 < n_1 \leq s_1$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
3	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
4	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$n_1 = 0,\ s_1 > 0$	$m_1 = 0,\ s_1 > 0$
5	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
6	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	$k = h$ in $0 < m_1 \leq s_1$
7	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
8	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$k < l$ in $n_1 = 0,\ s_1 > 0$	$m_1 = 0,\ s_1 > 0$
9	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
10	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
11	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$k \geq h$ in $m_1 = s_1 = 0$
12	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$k < l$ in $n_1 = 0,\ s_1 > 0$	protislovje
12	$m_1 = 0,\ n_1 > 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
14	$m_1 = 0,\ n_1 > 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
15	$m_1 = 0,\ n_1 > 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$m_1 = 0,\ s_1 > 0$
16	$m_1 = 0,\ n_1 > 0$	$k < l$ in $n_1 = 0,\ s_1 > 0$	protislovje

Tabela 1. Vseh 16 možnosti.

Sovisnost: prepričati se moramo, da za vsaki dve naravni števili m, n velja $m \triangleright n$ ali $n \triangleright m$. Torej velja en od pogojev:

(i) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(ii) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
(iii) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(iv) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$

ali

(v) $l < k$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(vi) $l = k$ in $0 < n_1 \leq m_1$ ali
(vii) $l \geq k$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(viii) $n_1 > 0$ in $m_1 = 0$.

Denimo, da števili m in n nista v relaciji. Iz (iv) in (viii) ugotovimo, da mora biti $m_1 = n_1 = 0$ ali $m_1, n_1 \neq 0$. Ker števili ne ustrezata pogoju (iii) niti pogoju (vii) ugotovimo, da morata biti števili m_1 in n_1 različni od 0. Iz pogojev (i) in (v) sklepamo, da mora biti $k = l$. Sedaj pa števili zagotovo zadoščata enemu od pogojev (ii) ali (vi). To je preotislovje s predpostavko, da števili m in n nista v relaciji. Torej res za vsaki dve naravni števili m, n velja relacija $m \triangleright n$ ali relacija $n \triangleright m$. $\square$

Relacija $\triangleright$ ima še eno zanimivo in za dokaz izreka Šarkovskega zelo pomembno lastnost.

Trditev 2.3. *Števili m in n sta v relaciji $m \triangleright n$ natanko tedaj, ko velja relacija $2m \triangleright 2n$. Zapisano z matematičnimi simboli:*

$$\text{za } \forall m, n \in \mathbb{N} : m \triangleright n \Leftrightarrow 2m \triangleright 2n.$$

Dokaz. Zapišimo števili m in n kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1).$$

Če števili pomnožimo z 2, dobimo:

$$2m = 2^{k+1}(2m_1 + 1) \text{ in } 2n = 2^{l+1}(2n_1 + 1).$$

Sedaj lahko preverimo, da so pogoji za relacijo $m \triangleright n$ in relacijo $2m \triangleright 2n$ ekvivalentni. To je očitno takoj, ko opazimo, da se števili m_1 in n_1 nista spremenili. Neenačbi $k < l$ in $k + 1 < l + 1$ pa sta ekvivalentni. Podobno ugotovimo za neenačbi $k \geq l$ in $k + 1 \geq l + 1$ ter enačbi $k = l$ in $k + 1 = l + 1$. □

Sedaj smo definirali vse potrebne pojme in spoznali tudi ureditev Šarkovskega. Čas je, da si poglejdamo, na kakšen način ureditev Šarkovskega določa periode funkcije.

Izrek 2.4 (The Sharkovsky forcing theorem)**.** *Če ima $f : I \to I$ točko periode m in velja $m \triangleright l$, potem obstaja tudi točka periode l.*

Izrek pove, da je množica period zvezne funkcije na intervalu I rep ureditve Šarkovskega. *Rep ureditve Šarkovskega* je taka množica $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{N}$, za katero je $m \triangleright n$ za vsaki naravni števili $m \notin \mathcal{T}$ in $n \in \mathcal{T}$. Obstajajo trije različni tipi repov: Za neko naravno število m je rep množica $\{n \in \mathbb{N}; m \triangleright n\}$, množica $\{\ldots, 16, 8, 4, 2, 1\}$ vseh potenc števila 2 in $\emptyset$. Naslednji izrek je neke vrste obrat zgornjega izreka.

Izrek 2.5 (The Sharkovsky realization theorem)**.** *Za vsak rep $\mathcal{T}$ v zaporedju Šarkovskega obstaja taka funkcija f, katere množica period je enaka $\mathcal{T}$.*

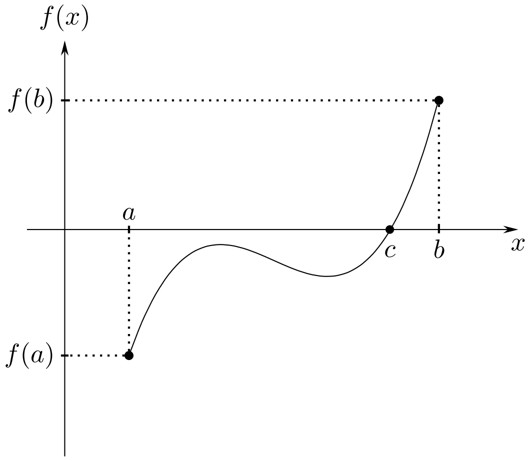
Izrek Šarkovskega je unija izreka 2.4 in izreka 2.5. Podmnožica naravnih števil je množica period zvezne funkcije $f : I \to I$, če in samo če je množica rep ureditve Šarkovskega. Nasledja poglavja so namenjena pripravi in dokazu izreka 2.4, v poglavju 8 pa je predstavljen dokaz izreka 2.5.

3. Intervali, relacija pokritja in cikli

Vsi dokazi izreka Šarkovskega so si podobni po tem, da so elementarni. Ne glede na to, kako zvito se lotimo dokaza, je ključnega pomena lastnost zveznih funkcij, ki ob določenih predpostavkah zagotavlja obstoj ničle funkcije. To je izrek o vmesni vrednosti.

Izrek 3.1 (izrek o vmesni vrednosti)**.** *Funkcija f, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$ in je na krajiščih intervala različno predznačena, torej velja neenačba $f(a) \cdot f(b) < 0$, ima vsaj v eni točki tega intervala vrednost 0.*

Dokaz. Naj bo funkcija $f : [a, b] \to [a, b]$ zvezna in naj bo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $f(a) < 0 < f(b)$. Ničlo funkcije f bomo iskali s pomočjo deljenja intervalov oziroma z bisekcijo. Izračunamo razpolovišče $p_0 = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a, b]$.Če je $f(p_0) = 0$, smo ničlo že našli, sicer razmišljamo tako: če je $f(p_0) > 0$, označimo $[a_1, b_1] = [a, p_0]$, sicer označimo $[a_1, b_1] = [p_0, b]$. Nato izračunamo razpolovišče p_1 intervala $[a_1, b_1]$. Če je $f(p_1) = 0$ postopek ustavimo, saj smo ničlo našlio, v nasprotnem primeru pogledamo predznak $f(p_1)$. Če je $f(p_1) > 0$, označimo $[a_2, b_2] = [a_1, p_1]$, drugače označimo $[a_2, b_2] = [p_1, b_1]$. Postopek



SLIKA 2. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K.

nadaljujemo dokler ne najdemo ničle p_i funkcije f. Če ničle ne najdemo, dobimo neskončno zaporedje vloženih intervalov

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots$$

Lahko se prepričamo, da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ in $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Števila a_n tvorijo naraščajoče zaporedje, števila b_n pa padajoče zaporedje. Limiti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ sta enaki, saj je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Označimo $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Točka c je večja od vseh členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^\infty$ in manjša od vseh členov zaporedja $(b_n)_{n=1}^\infty$, zato je za vsak $n \in \mathbb{N}$ vsebovana v intervalu $[a_n, b_n]$. Torej velja: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{c\}$. Ker je funkcija zvezna je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(c)$ in $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = f(c)$. Za vsako naravno število n velja $f(a_n) < 0$, zato je $f(c) \leq 0$. Podobn je $f(b_n) > 0$ za vsako naravno število n, iz česar sklepamo, da je $f(c) \geq 0$. Torej je $f(c) = 0$, kar zaključi dokaz. □

Posledica 3.2. *Naj bo funkcija $f : [a,b] \to [a,b]$ zvezna funkcija. Za vsako točko k, ki leži med točkama $f(a)$ in $f(b)$, obstaja točka $c \in (a,b)$, za katero je vrednost funkcije $f(c)$ enaka k.*

Dokaz. Definiramo zvezno funkcijo $g(x) = f(x) - k$. Ker točka k leži med točkama $f(a)$ in $f(b)$, je funkcija g na krajiščih intervala $[a,b]$ različno predznačena. Po izreku 3.1 obstaja točka c, za katero je $g(c) = 0$. To pomeni, da je $f(c) = k$. □

Posledica pove, da zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$ zavzame vse vrednosti med $f(a)$ in $f(b)$. V resnici pove še več. Naj bosta $[a,b]$ in $[c,d]$ intervala v realnih številih in $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a,b]$, za kateri velja $f(a_1) \leq c$ in $f(b_1) \geq d$, potem interval $[c,d]$ leži v sliki $f([a,b])$. To je res, saj funkcija f na intervalu $[a_1,b_1]$ zavzame vse vrednosti med $f(a_1)$ in $f(b_1)$. Torej, $[c,d] \subset f([a_1,b_1]) \subset f([a,b])$.

Definicija 3.3. Pravimo, da interval I pokrije interval J, če je $J \subseteq f(I)$. Relacijo zapišemo kot $I \xrightarrow{f} J$. Kadar je jasno, katera funkcija nastopa v relaciji, lahko nadpis, ki označi katero funkcijo imamo v mislih tudi izpustimo in pišemo samo $I \to J$. Če velja $f(I) = J$, zapišemo $I \rightarrowtail J$.

S pomočjo izreka o vmesni vrednosti in poznavanja, kako se intervali slikajo s funkcijo f lahko izvemo, ali obstajajo periodične točke. Kako lahko potrdimo obstoj periodičnih točk, nam povejo naslednje leme.

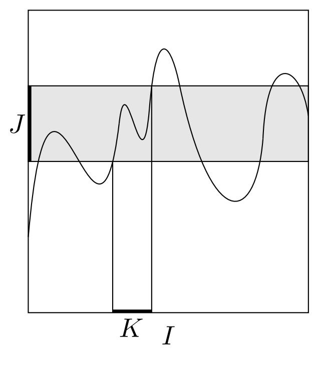
Lema 3.4. *Če velja $[a,b] \xrightarrow{f} [a,b]$, potem ima funkcija f negibno točko na intervalu $[a,b]$.*

Dokaz. Interval $[a,b]$ je podmnožica slike $f([a,b])$, zato obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a,b]$, da je $f(a_1) = a$ in $f(b_1) = b$. Če je $a_1 = a$ ali $b_1 = b$, smo negibno točko že našli. Če je $a_1 \neq a$ in $b_1 \neq b$, definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Prepričajmo se, da je vrednost funkcije g v točki a_1 negativna, v točki b_1 pa pozitivna. Računamo: $g(a_1) = f(a_1) - a_1 = a - a_1 < 0$. Podobno je $g(b_1) = f(b_1) - b_1 = b - b_1 > 0$. Zvezna funkcija g je na krajiščih intervala $[a,b]$ različno predznačena. Po izreku 3.1 obstaja točka $c \in [a,b]$, pri kateri je $g(c) = 0$, torej je $f(c) = c$. □

Pri iteracijah funkcije lahko opazujemo, kako se premika točka. To smo počeli na sliki 1. Poglejmo, kako se s f slikajo celi intervali. Lahko se zgodi, da nek interval I_0 pokrije interval I_1, interval I_1 pa pokrije interval I_2 itn. Na ta način dobimo zaporedje relacij pokritja npr. $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots$ Enako kot pri periodičnih točkah lahko pri zaporedu relacij pokritja po nekaj korakih zopet pridemo do prvotnega intervala. Dobimo naslednje zaporedje relacij pokritja $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to I_0$. Če je začetni interval enak končnemu intervalu, zaporedju intervalov in pripadajočim relacijam pokritja pravimo *zanka intervalov* ali samo zanka. Od tu naprej bo, razen če ne povemo drugače, interval predstavljal zaprto, omejeno in povezano podmnožico realnih števil.

Lema 3.5. *Če za intervale $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ veljajo naslednje relacije pokritosti: $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$, potem obstaja taka točka $c \in I_0$, za katero je $f^i(x) \in I_i$ za $0 \leq i < n$ in $f^n(c) = c$. Pravimo, da točka c sledi zanki.*

Dokaz. Če velja relacija pokritosti $I \to J$, obstaja tak interval $K \subset I$, da je $K \rightarrowtail J$. Interval K poiščemo tako, da iz preseka funkcije f s pravokotnikom $I \times J$ izberemo



Slika 3. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K.

povezan del grafa, ki povezuje spodni in zgornji del pravokotnika. Tak del zagotovo obstaja, saj je $J \subset f(I)$. Projekcijo tega dela na interval I označimo s K. To znanje uporabimo na zanki intervalov $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$. Ker velja relacija pokritja $I_{n-1} \to I_0$, vemo, da obstaja tak interval $K_{n-1} \subset I_{n-1}$, da je $K_{n-1} \rightarrowtail I_0$.

Velja relacija pokritosti $I_{n-2} \to K_{n-1}$, zato obstaja tak interval $K_{n-2} \subset I_{n-2}$, da je $K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1}$. S postopkom nadaljujemo in dobimo naslednje relacije:

$$K_0 \rightarrowtail K_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail I_0.$$

Za vsako točko $x \in K_0$ in za vsak $i \in [0, n)$ velja $f^i(x) \in K_i \subset I_i$ in $f^n(x) \in I_0$. Ker je $K_0 \subset I_0 = f^n(K_0)$, lahko s pomočjo leme 3.4 sklepamo, da ima f^n negibno točko c na intervalu K_0. Točka c sledi zanki $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$. □

Pri dokazovanju izreka bomo dokazali obstoj zank različnih dolžin. Želeli bi si, da je perioda točke, ki sledi zanki, enaka dolžini zanke.

Definicija 3.6. Zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ je elementarna, če ima vsaka točka, ki sledi zanki, periodo n.

Posledica 3.7. *Vsaka elementarna zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ vsebuje točko x_0, ki sledi zanki in ima periodo n.*

Zaradi zgornje posledice bi bilo dobro, če bi poznali kakšen dober kriterij za prepoznavanje elementarnih zank. Najlažji kriterij je število intervalov v zanki. Če nastopa samo en interval, dobimo zanko $I_0 \to I_0$. Z uporabo leme 3.4 ugotovimo, da je zanka elementarna. Naslednja lema poda še en kriterij za prepoznavanje elementarnih zank:

Lema 3.8. *Zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ je elementarna, če ji ne sledi nobena robna točka intervala I_0 in je notranjost intervala* $\mathrm{int}(I_0)$ *disjunktna z intervali $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Torej,* $\mathrm{int}(I_0) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i = \emptyset$.

Dokaz. Točka x_0, ki sledi zanki, ne more biti robna točka intervala I_0. Torej je $x_0 \in \mathrm{int}(I_0)$. Za vsak $i = 1, \ldots, n-1$ je $x_0 \neq f^i(x_0)$, saj je $f^i(x_0) \in I_i$, notranjost intervala I_0 pa je disjunktna z intervalom I_i. Ker točka x_0 sledi zanki, je $f^n(x_0) = x_0$. Točka x_0 ima periodo n. □

Poglejmo si dva primera, ki pokažeta, da nobene predpostavke v lemi 3.8 ne moremo izpustiti.

Primer 3.9. Obravnavajmo zvezno funkcijo $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ in 2-zanko intervalov $[0, \frac{1}{2}] \leftrightarrows [-\frac{1}{2}, 0]$. Samo ena točka sledi tej zanki, to je točka 0. Perioda točke 0 ni enaka enaka dolžini zanke, saj je točka 0 negibna točka in je njena perioda enaka 1. ♢

Primer 3.10. Funkcija $f(x) = -x^2$ tvori 2-zanko $[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}] \leftrightarrows [\frac{1}{2}, 4]$. Tej zanki sledi zgolj točka 1, ki je negibna točka, torej je njena perioda različna od dolžine zanke. ♢

Zanka v primeru 3.9 ni elementarna, saj ji sledi robna točka začetnega intervala. V primeru 3.10 pa zanka ni elementarna, saj točka 1 leži v preseku notranjosti prvega intervala in drugega intervala.

Definicija 3.11. Zaprt in omejen interval, katerega krajišči pripadata ciklu $\mathcal{O}$ imenujemo $\mathcal{O}$-interval.

V nadaljevanju bomo zgornje leme uporabili na $\mathcal{O}$-intervalih. Tako bomo poenostavili obravnavo periodičnih točk funkcije f, saj bomo uporabili samo informacije, ki jih lahko pridobimo iz delovanja funkcije f na ciklu $\mathcal{O}$. Zato bodo naši sklepi veljali za vse zvezne funkcije s ciklom $\mathcal{O}$. Relaciji pokritja $I \to J$ rečemo $\mathcal{O}$-vsiljena, če interval J leži v $\mathcal{O}$-intervalu M, katerega krajišči sta skrajno leva in skrajno desna točka množice $f(I \cap \mathcal{O})$. Ker je funkcija f zvezna, lahko s pomočjo izreka 3.1

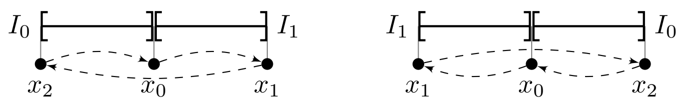
ugotovimo, da je množica $f(I)$ interval. Velja $J \subset M \subset f(I)$. V nadaljevanju dela bodo vse relacije pokritja $\mathcal{O}$-vsiljene. Zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$, v kateri vsaka puščica predstavlja $\mathcal{O}$-vsiljeno relacijo pokritja, se imenuje $\mathcal{O}$-vsiljena zanka $\mathcal{O}$-intervalov.

Vse relacije pokritja, o katerih bomo govorili od sedaj naprej in jih bomo označevali s simbolom '$\to$' bodo $\mathcal{O}$-vsiljene.

4. Primeri

V tem poglavju si bomo zaradi lažjega razumevanja pogledali nekaj posebnih primerov. Najprej si bomo pogledali najbolj znan poseben primer izreka Šarkovskega. V naslednjih dveh primerih bomo postopek iz prvega primera razširili na daljše cikle. V zadnjem primeru bomo nakazali kako lahko iz periodičnih točk funkcije f^2 ugotovimo katere periode ima funkcija f, kar igra pomembno vlogo pri dokazu izreka 2.4.

Primer 4.1 (3-cikel)**.** Prepričajmo se, da perioda 3 implicira obstoj vseh ostalih period. Točka lahko tvori 3-cikel na dva različna načina, ki sta v resnici zrcalna podoba drug drugega. Slika prikazuje oba primera. Črtkane puščice nakazujejo,



Slika 4. Zrcalna podoba ciklov.

kam se s funkcijo f slikajo točke. Velja:

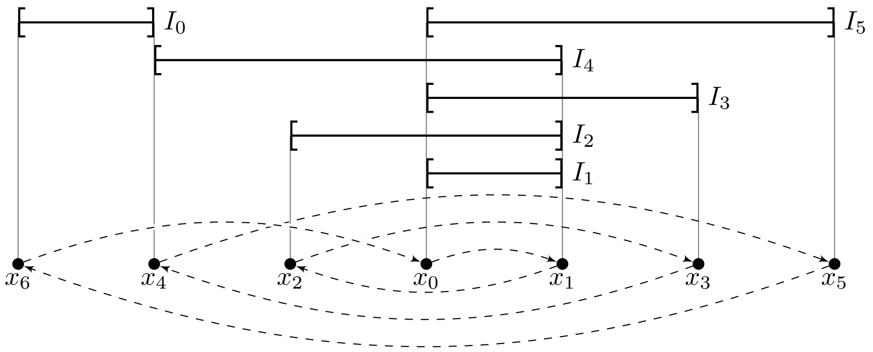
$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \text{ in } x_0 = f(x_2).$$

V obeh primerih smo z I_1 označili $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_1, z I_0 pa $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_2. Krajišči intervala I_1 se slikata v skrajno levo in skrajno desno točko cikla, zato imamo $\mathcal{O}$-vsiljeni pokritji $I_1 \to I_1$ in $I_1 \to I_0$. Krajišči intervala I_0 se slikata v krajišči intervala I_1, zato je tudi pokritje $I_0 \to I_1$ $\mathcal{O}$-vsiljeno. Ugotovljena pokritja lahko strnemo v diagram $\circlearrowright I_1 \leftrightarrows I_0$. Iz relacije pokritosti $I_1 \to I_1$ in leme 3.4 sklepamo, da interval I_1 vsebuje negibno točko. Krajišči intervala I_0 ne morejo slediti zanki $I_0 \to I_1 \to I_0$, saj sta periodični točki s periodo 3. Točke, ki sledijo zanki, pa imajo periodo 1 ali 2. Ker je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, lahko s pomočjo leme 3.8 sklepamo, da je zanka elementarna. Torej lahko v intervalu I_0 poiščemo točko s periodo 2. Za dokaz obstoja točke s periodo $l \geq 4$ si poglejmo zanko

$$I_0 \to \overbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}^{l-1 \text{ ponovitev intervala } I_0} \to I_0. \tag{2}$$

V tej zanki nastopajo vsaj 3 kopije intervala I_1, v katerem ležita samo dve točki $\mathcal{O}$-intervala. Ker imajo točke iz cikla $\mathcal{O}$ periodo 3, v intervalu I_1 ne morejo ležati trije zaporedni členi iz cikla $\mathcal{O}$, torej tudi tri zaporedne iteracije funkcije f na krajiščih intervala I_0 ne morejo ležati v intervalu I_1. To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne moreta slediti zanki. Že prej smo ugotovili, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, zato je zanka (2) elementarna zanka dolžine l. Elementarna l-zanka vsebuje točko periode l, torej ima funkcija f periodo l za vsak $l \geq 4$. Pokazali smo, da je vsako naravno število perioda funkcije f. $\diamondsuit$

Primer 4.2 (7-cikel)**.** Sedaj bomo obravnavali 7-cikel $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$-intervale prikazane na sliki 5. Podobno kot pri prejšnjem primeru označimo točke $x_i = f^i(x_0)$ ter intervale

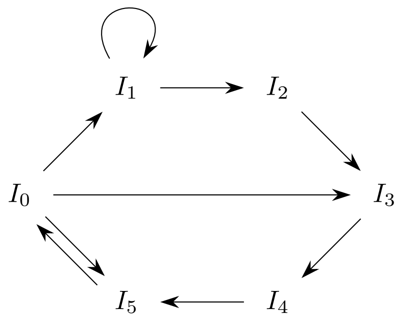


SLIKA 5. Primer 7-cikla.

$I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$ in tako naprej kot prikazuje slika 5. Za to izbiro intervalov dobimo naslednje $\mathcal{O}$-vsiljene relacije pokritosti:

(1) $I_1 \to I_1$
(2) $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(3) $I_0 \to I_1$, $I_0 \to I_3$ in $I_0 \to I_5$

Zgornje relacije pokritosti lahko prikažemo z diagramom, ki ga prikazuje slika 6. Iz



SLIKA 6. diagram

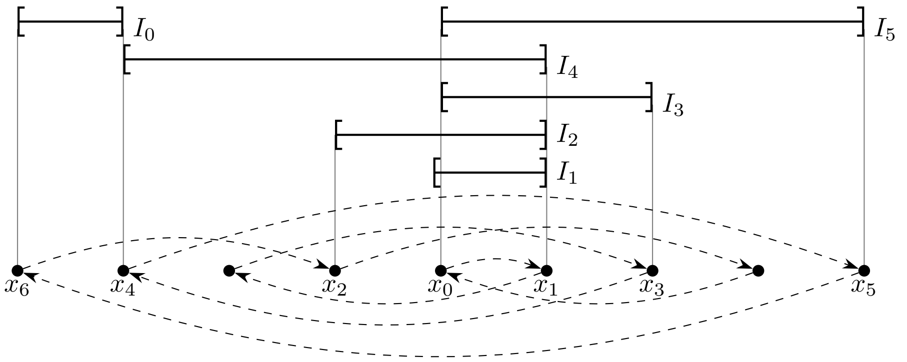
grafa preberemo naslednje zanke.

(1) $I_1 \to I_1$
(2) $I_0 \to I_5 \to I_1$
(3) $I_0 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(4) $I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(5) $I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{r \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$, kjer je $r \geq 3$.

Zanka $I_1 \to I_1$ je elementarna, saj je elementarna vsaka zanka dolžine 1. Pri ostalih zankah lahko najprej ugotovimo, da za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ velja $\operatorname{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Pri zankah 2, 3 in 4 nobena robna točka intervala I_0 ne more slediti zanki, saj je perioda robnih točk 7, perioda točk, ki sledijo zankam 2, 3 in 4 pa je manjša ali enaka 6. S tem so izpolnjeni pogoji leme 3.8 in so zanke elementarne. V teh zankah lahko poiščemo točke s periodami 2, 4, ali 6. Podobno kot v primeru 4.1 ugotovimo, da nobene tri zaporedne iteracije funkcije f na točkah cikla $\mathcal{O}$ ne ležijo v intervalu

I_1, zato v tem intervalu tudi ne morejo ležati tri zaporedne iteracije funkcije f na robnih točkah intervala I_0. To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne sledita zanki 5. S tem razmislekom so izpolnjeni pogoji leme 3.8, zato je zanka 5 elementarna. Za dolžino zanke 5 lahko izberemo katerokoli naravno število večje od 7. Torej lahko na podlagi prisotnosti 7-cikla na sliki 5 sklepamo, da so prisotne vse periode l, za katere je $l \lhd 7$ ♢

Primer 4.3 (9-cikel)**.** Predpostavimo, da ima funkcija f 9-cikel $\mathcal{O}$, ki je prikazan na sliki 7. Določili smo šest $\mathcal{O}$-intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_5$, za katere velja, da je notranjost



Slika 7. Primer 9-cikla.

intervala I_0 disjunktna z ostalimi intervali. Torej za $j = 1, 2, \ldots, 5$ velja enakost: $\operatorname{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Za tako izbrane intervale dobimo enake relacije pokritja kot v primeru 4.1 in lahko s pomočjo enakih sklepov ugotovimo prisotnost enakih elementarnih zank in posledično periodičnih točk s periodami 1, 2, 4, 6 in vse periode večje od 7.

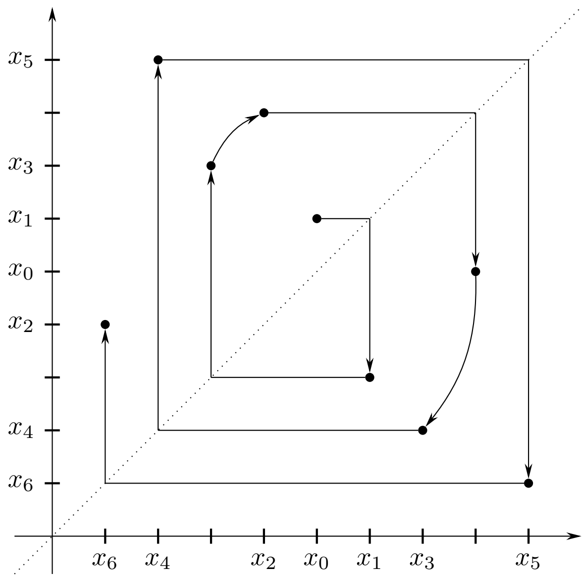
Zaporedje števil $x_0, x_1, \ldots, x_6$ smo določili tako, da se spiralno oddaljujejo od centra $c := \frac{x_0+x_1}{2}$, kar je prikazano na sliki 8. S tako izbiro točk pa v zaporedju ne nastopajo vse točke cikla $\mathcal{O}$ in tudi ne velja enakost $f(x_i) = x_{i+1}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, 5$ kot je to veljalo v primeru 4.2.

V poglavju 6 je predstavljen algoritem za izbiro zaporedja točk $x_0, x_1, \ldots, x_6$. Glavna ideja algoritma je, da za naslednji člen zaporedja ne izberemo vedno sliko prejšnjega člena na način: $x_{i+1} = f(x_i)$, vendar včasih izberemo točko, ki je bližje centru c. Točko x_{i+1}, ki je bližje centra c kot točka $f(x_i)$ izberemo, če je slika $f(x_{i+1})$ bolj oddaljena od centra kot točka $f(f(x_i))$. Postopka izbire naslednje točke na sliki 1 in na sliki 8 sta podobna. V obeh primerih se pomikamo navpično do grafa funkcije in nato vodoravno do simetrale lihih kvadrantov. Sprememba se zgodi na sliki 8, ko lahko izberemo še neizbrano točko tako, da se v vodoravni smeri pomaknemo proti centru c, v navpični smeri pa stran od centra c. To se na sliki 8 zgodi dvakrat in je prikazano s krivimi puščicami. Postopek se ustavi, ko pridemo do točke x_j, katere slika $f(x_j)$ je na isti strani centra c kot točka sama. V primeru na sliki 8 je to točka x_6.

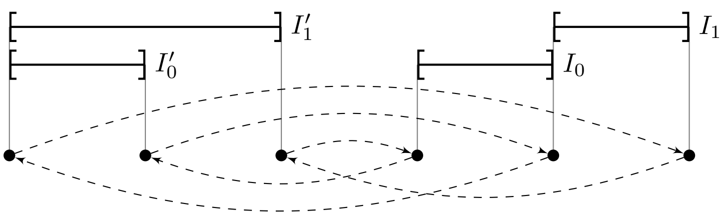
V poglavju 5 si bomo natančno pogledali kakšne lastnosti mora imeti zaporedje točk $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, ki predstavlja krajišča intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$. Izvedeli bomo tudi, kako taka izbira točk in intervalov zagotavlja obstoj elementarnih zank.

♢

Primer 4.4 (6-cikel)**.** Obravnavali bomo 6-cikel, ki je na sliki 9. Bistveno pri tem



SLIKA 8. Primer 9-cikla.



SLIKA 9. Primer 6-cikla.

primeru je, da se tri točke na levi strani slikajo v tri točke na desni in obratno. Torej, tri točke na desni tvorijo 3-cikel za funkcijo f^2. Podobno kot v primeru 4.1 lahko določimo intervala I_0 in I_1 ter opazujemo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$ za intervala I_0 in I_1, ki sta prikazana na sliki 9. Enako kot prej lahko zaključimo, da ima funkcije f^2 elementarne zanke vseh dolžin in zato je vsako naravno število $l \in \mathbb{N}$ perioda funkcije f^2. Za funkcijo f določimo še dva intervala. Interval I_0' naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_0 \cup \mathcal{O})$, interval I_1' pa naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_1 \cup \mathcal{O})$. Sedaj bomo prikazali rekurzivno metodo, ki jo bomo uporabili kasneje v dokazu izreka Šarkovskega. Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo elementarne k-zanke za funkcijo f^2 poiščemo elementarno $2k$-zanko za funkcijo f. V primeru, ki ga obravnavamo, bo to pomenilo, da je vsako sodo naravno število perioda funkcije f. Poglejmo si elementarno k-zanko za funkcijo f^2, v kateri nastopajo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$. Vsak zapis $I_1 \xrightarrow{f^2}$ v zanki lahko zamenjamo z $I_1 \xrightarrow{f} I_1' \xrightarrow{f}$, vsak zapis $I_0 \xrightarrow{f^2}$ pa z $I_0 \xrightarrow{f} I_0' \xrightarrow{f}$. S to spremembo dobimo $2k$-zanko za funkcijo f, ki ni samo dvakrat ponovljena k-zanka. Prepričajmo se, da je $2k$-zanka elementarna. Denimo, da točka p sledi $2k$-zanki za funkcijo f. Pokazati moramo, da ima periodo $2k$ za funkcijo f. Opazimo, da točka p sledi prvotni k-zanki za funkcijo f^2 in ima zato periodo k za funkcijo f^2. Po drugi strani pa iteracije točke p s funkcijo f ležijo alternirajoče enkrat na levi in enkrat na desni strani srednjega intervala, saj

$2k$-zanka za f alternira med intervali s črtico in intervali brez črtice. Zato je orbita točke p sestavljena iz $2k$ različnih točk. Na desni strani srednjega intervala leži k sodih iteracij, na levi strani pa leži k lihih iteracij. To pomeni, da je perioda točke p za f enaka $2k$. Ker smo dolžino začetne elementarne k-zanke izbrali poljubno, smo pokazali, da je vsako sodo število perioda za f. Ker interval $[x_0, x_1]$ s funkcijo f pokrije samega sebe, pa obstaja negibna točka. Torej ima f tudi periodo 1. $\diamondsuit$

5. Štefanovo zaporedje

V tem poglavju podamo definicijo Štefanovega zaporedja točk. Pokažemo, da te točke določajo intervale, s pomočjo katerih zapišemo relacije pokritja in ustrezne zanke, ki zagotavljajo obstoj periodičnih točk. Če f-orbita vsebuje samo eno točko, je ta točka fiksna točka funkcije f. Perioda te točke je 1, kar je zadnji člen ureditve Šarkovskega in pri tej orbiti nimamo kaj dokazovati. Zato bomo obravnavali samo orbite oziroma cikle, ki vsebujejo vsaj dve točki. Naj bo $m \geq 2$ in $\mathcal{O}$ m-cikel zvezne funkcije f. Preden definiramo štefanovo zaporedje moramo spoznati nekaj pojmov.

Definicija 5.1. Naj bo p najbolj desna točka intervala $\mathcal{O}$, za katero je $f(p) > p$ in $q \in \mathcal{O}$ prva točka desno od p. Center c cikla $\mathcal{O}$ definiramo kot $c = \frac{p+q}{2}$. Za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ označimo množico točk iz cikla $\mathcal{O}$, ki ležijo v zaprtem intervalu omejenem z x in c, z $\mathcal{O}_x$. Natančneje, $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [x, p]$, če je $x \leq p$ in $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [q, x]$, če je $x \geq q$. Pravimo, da točka $x \in \mathcal{O}$ menja strani, če točka c leži med točkama x in $f(x)$.

Poglejmo si še definicijo Štefanovega zaporedja.

Definicija 5.2. Iz m-cikla $\mathcal{O}$ izbrane točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tvorijo Štefanovo zaporedje, če je:

(Š1) $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$,
(Š2) točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ležijo alternirajoče na levi oziroma desni strani točke c.
(Š3) Zaporedji $\{x_{2j}\}_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ in $\{x_{2j+1}\}_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ sta strogo monotoni in se oddaljujeta od točke c.
(Š4) Če je $0 \leq j \leq n-1$, potem x_j menja stran in $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$.
(Š5) Točka x_n ne menja strani.

Opomba 5.3. Štefanovo zaporedje dobimo tako, da iz množice m točk, ki tvorijo $\mathcal{O}$-cikel izberemo $n+1$ točk, ki zadoščajo zgornjim pogojem. Pogoj $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$ v (Š4) pomeni, da je točka x_{j+1} bližje centru kot slika $f(x_j)$ točke x_j. Velja ena od neenakosti: $c < x_{j+1} \leq f(x_j)$ ali $f(x_j) \leq x_{j+1} < c$. Pogoja (Š2) in (Š3) zagotavljata, da so točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne. Ker pa lahko pri izbiri točk iz cikla $\mathcal{O}$ tudi kakšno točko izpustimo, je število $n+1$ izbranih točk manjše ali enako številu vseh točk v $\mathcal{O}$-ciklu. Če se vrnemo na primere iz prejšnjega poglavja, lahko vidimo, da v primerih 4.1, 4.2 in 4.4 Štefanovo zaporedje sestavljajo vse točke $\mathcal{O}$-cikla. V primeru 4.3 pa dve točki $\mathcal{O}$-cikla ne nastopata v Štefanovem zaporedju.

Trditev 5.4. *Predpostavimo, da m-cikel $\mathcal{O}$ vsebuje Štefanovo zaporedje. Če je $l \triangleleft m$, potem funkcija f vsebuje $\mathcal{O}$-vsiljeno elementarno l-zanko $\mathcal{O}$-intervalov in posledično tudi periodično točko s periodo l.*

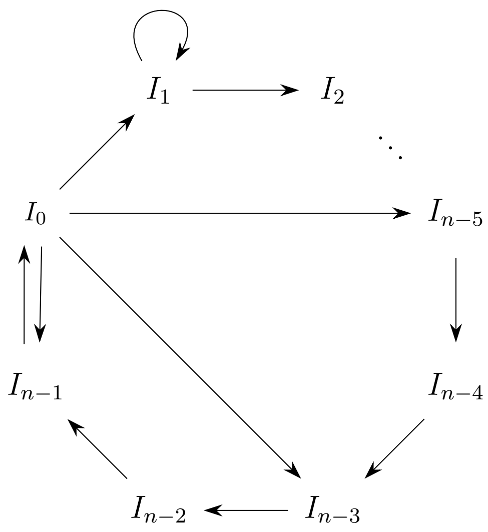
Pri danem Štefanovem zaporedju $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definiramo intervale $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ na nasledni način: Za $1 \leq j < n$, najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in

x_j, označimo z I_j, medtem ko z I_0 označimo $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_{n-2} in x_n. Iz lastnosti (Š2) lahko sklepamo, da je $\mathrm{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Trditev 5.5. *Za intervale izbrane na zgoraj opisan način veljajo naslednje relacije pokritja:*

(1) $I_1 \to I_1$ *in* $I_0 \to I_1$*,*
(2) $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$*,*
(3) $I_0 \to I_{n-1}, I_{n-3}, I_{n-5} \ldots$*.*

Zaradi boljše predstave ponazorimo relacije pokritja na sliki 10.



SLIKA 10. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Dokaz trditve 5.5. Dokazovali bomo vsako točko posebej.

Pri dokazu točke 1 bomo dokazali še močnejšo trditev, ki nam bo v pomoč tudi pri dokazu druge točke. Pokazali bomo, da za vsak $j = 0, 1, \ldots, n-1$ velja relacija pokritja $I_j \to I_1$. Za dokaz je dovolj, če se prepričamo, da za vsak $j = 0, 1, \ldots, n-1$ množica $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1. To je res, saj posledica 3.2 zagotavlja, da so v množici $f(I_j)$ vsebovane tudi vse točke iz intervala (x_0, x_1). V primeru intervala $I_0 = [x_n, x_{n-2}]$ ugotovimo, da obe krajišči I_0 ležita na isti strani točke c. Lastnost (Š4) pove, da krajišče x_{n-2} menja strani, medtem ko lastnost (Š5) pravi, da točka x_n ne menja strani, zato točki $f(x_n)$ in $f(x_{n-2})$ ležita na nasprotnih straneh točke c. V primeru intervala I_j za $j = 1, 2, \ldots, n-1$ iz lastnosti (Š2) izvemo, da krajišči intervala I_j ležita na nasprotnih straneh točke c. Lastnost (Š4) pove, da obe krajišči menjata strani. Torej za vsak $j = 0, 1, \ldots, n-1$ interval $f(I_j)$ vsebuje točke cikla $\mathcal{O}$, ki ležijo na obeh straneh centra c. Zagotovo vsebuje točki x_0 in x_1 in zato tudi interval I_1.

Naj bo j tako naravno število, za katerega velja $1 \le j \le n-1$. Želimo pokazati, da množica $f(I_j)$ vsebuje interval I_{j+1}. Vemo že, da interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1. Za dokaz točke 2 moramo pokazati samo še vsebovanost točke x_{j+1} v množici $f(I_j)$. Podobno kot prej posledica 3.2 zagotavlja, da je v množici $f(I_j)$ vsebovan celoten interval I_{j+1}. V množici $f(I_j)$ so vsebovane točke x_0, x_1 in $f(x_j)$, zato je v tej množici vsebovana tudi množica točk $\mathcal{O}_{f(x_j)}$. Iz lastnosti (Š3) ugotovimo točka

x_{j+1} leži v množici $\mathcal{O}_{f(x_j)}$, zato velja $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)} \subset f(I_j)$. Torej je interval I_{j+1} res vsebovan v množici $f(I_j)$.

Za dokaz točke 3 moramo pokazati, da je za vsako liho število $1 \leq l \leq n$ interval I_{n-l} vsebovan v množici $f(I_0)$. Ker že vemo, da $f(I_0)$ vsebuje točki x_0 in x_1, preostane za dokazati še, da vsebuje točko x_{n-l} Zaradi lastnosti (Š2) leži točka na drugi strani točke c kot točki x_{n-2} in x_n. Iz lastnoti (Š3) sklepamo, da je točka x_{n-1} bolj oddaljena od točke c, kot točka x_{n-l} za liho število $3 \leq l \leq n$ interval I_{n-l}, zato vsak interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_{n-1}, vsebuje tudi vse točko x_{n-l} Pokazati moramo samo še, da množica $f(I_0)$ vsebuje točko x_{n-1}. Pri lastnosti (Š4) namesto j pišemo $n-2$ in dobimo vsebovanost $x_{n-1} \in \mathcal{O}_{f(x_{n-2})}$. Interval $f(I_n)$ vsebuje točke x_0, x_1 in $f(x_j)$, □

Dokaz trditve 5.4. Naj veljajo predpostavke v trditvi 5.4. Radi bi pokazali, da ima funkcija f za vsako naravno število $l \lhd m$ točko periode l. Dokaz bomo razdelili na tri dele. Najprej bomo dokazali izrek za liha števila manjša od m, potem za soda števila manjša od m in na koncu še za vsa števila večja od m.

Edino liho število l manjše od m, za katerega lahko velja $l \rhd m$ je število 1. Za $l = 1$ uporabimo zanko $I_1 \to I_1$, ki je zanka dolžine 1 in zato elementarna. Torej obstaja točka periode 1 v intervalu I_1.

Naravno število $1 < l \leq m$ je lahko v relaciji $l \lhd m$ samo, če je sodo. Za vsako sodo število $l \leq n$ lahko iz slike 10 izpišemo l-zanko:

$$I_0 \to I_{n-(l-1)} \to I_{n-(l-2)} \to \cdots \to I_{n-2} \to I_{n-1} \to I_0.$$

Iz konstrukcije intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_n$ vemo, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_{n-(l-1)}, I_{n-(l-2)}, \ldots, I_{n-2}, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 imata periodo m in zato ne moreta sledit zanki. Z uporabo leme 3.8 ugotovimo, da je l-zanka elementarna, zato obstaja točka iz I_0, ki ima periodo l.

V primeru, ko je $l > n$ iz slike 10 razberemo l zanko

$$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{l-n+1 \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0.$$

Če je $l = m$, potem lahko izberemo točko x_0, ki ima periodo m. Predpostavimo, da je $l \neq m$. Podobno kot v prejšnjem primeru je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 pa ne moreta slediti zanki, saj imata periodo m, dolžina zanke pa je različna od m. Zopet lahko s pomočjo leme 3.8 sklepamo, da je l-zanka elementarna, kar zagotavlja obstoj točke iz I_0, ki ima periodo l. □

6. Konstrukcija Štefanovega zaporedja

V tem poglavju pokažemo, da lahko v vsakem ciklu, ki vsebuje vsaj dve točki poiščemo Štefanovo zaporedje, razen če vsaka točka v ciklu menja stran. Dokaz izvedemo tako, da konstruiramo zaporedje in na koncu preverimo, da gre za Štefanovo zaporedje.

Trditev 6.1. *Cikel, ki vsebuje vsaj dve točki, vsebuje Štefanovo zaporedje, če vsaj ena točka ne menja strani.*

Dokaz. Naj bo m naravno število večje ali enako 2 in naj bo $\mathcal{O}$ cikel sestavljen iz m različnih točk. Naj bo množica $\mathcal{M}$ največji tak $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točki p in q, da vsaka točka cikla $\mathcal{O}$, ki je vsebovana v $\mathcal{M}$, menja strani. To pomeni, da za poljubno točko $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ vse točke iz množice $\mathcal{O}_x$ menjajo strani. Pri konstrukciji Štefanovega zaporedja, si bomo pomagali z množico $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, ki vsebuje vse točke, ki so kandidati za nekončne člene Štefanovega zaporedja. V množici $\mathcal{S}$ ležijo take točke $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{M}$, ki jih funkcija f slika dlje od točke c kot katerokoli drugo točko iz množice $\mathcal{O}_x$. Za vsak $x \in \mathcal{O} \cap \mathcal{M}$ velja, da je x iz množice $\mathcal{S}$, če je $\mathcal{O}_{f(w)} \subset \mathcal{O}_{f(x)}$ za vsako točko $w \in \mathcal{O}_x$. Množica $\mathcal{S}$ zagotovo ni prazna množica, saj vsebuje točki p in q. Sedaj lahko definiramo preslikavo $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{O}$, ki slika element Štefanovega zaporedja v naslednji člen tega zaporedja. Za $\sigma(x)$ vedno izberemo točko iz množice $\mathcal{O}_{f(x)}$. Točka x je vsebovana v množici $\mathcal{S}$, torej menja strani. To zagotavlja, da točki x in $\sigma(x)$ ležita na nasprotnih straneh točke c. Točko $\sigma(x)$ določimo na naslednji način:

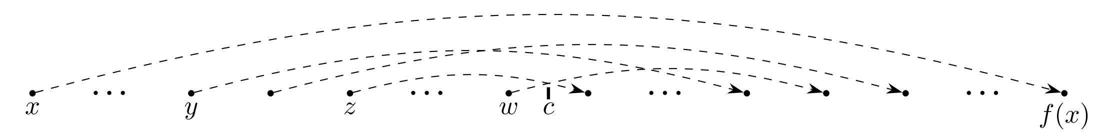
(1) Če $f(x) \notin \mathcal{M}$, potem za $\sigma(x)$ izberemo katero koli točko iz $\mathcal{O}_{f(x)}$, ki ne menja strani.

(2) Če $f(x) \in \mathcal{M}$, potem je $\sigma(x)$ tista točke iz množice $\mathcal{O}_{f(x)}$, ki se s funkcijo f slika najdlje od centra c. Velja vsebovanost:

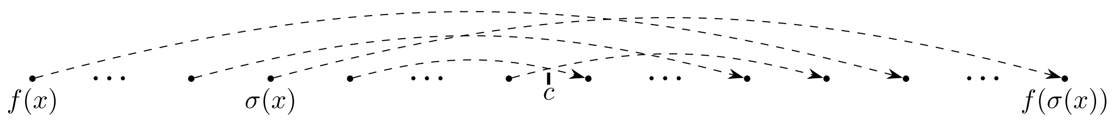
$$f(\mathcal{O}_{f(x)}) \subseteq \mathcal{O}_{f(\sigma(x))}.$$

Iz konstrukcije opazimo, da v primeru XX1XX $\sigma(x)$ ne leži v množici $\mathcal{S}$, saj ne menja strani, medtem ko v primeru XX2XX $\sigma(x)$ leži v množici $\mathcal{S}$, saj menja strani in se slika bolj stran od točke c kot katero koli drugo število iz množice $\mathcal{O}_{\sigma(x)}$. Primer XX2XX prikazuje slika LLLL.

Velja, da števili x in $\sigma(x)$ ležita na nasprotnih straneh točke c. Če je število $\sigma^2(x)$ dobro definirano, tudi števili $\sigma(x)$ in $\sigma^2(x)$ ležita na nasprotnih straneh točke c, kar pomeni, da točki x in $\sigma^2(x)$ ležita na isti strani točke c. Kot smo utemeljili v poglavju XXX, je za dokaz zelo pomembno, da se točke spiralno oddaljujejo od točke c kot kaže slika 8 in podrobneje opisano v definiciji Štefanovega zaporedja v točki (Š3). Za vsako točko x iz štefanovega zaporedja bi radi videli, da je $\sigma^2(x)$, če ta obstaja, boljs stran od točke c kot točka x. Torej, $\sigma^2(x) \notin \mathcal{O}_x$.



Slika 11. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



Slika 12. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Lema 6.2. *Če obstaja taka točka $x \in \mathcal{S}$, za katero je $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$, potem vse točke cikla $\mathcal{O}$ menjajo stran.*

Dokaz. Denimo, da je za neko točko $x \in \mathcal{O}$ točka $\sigma^2(x)$ dobro definirana in da je vsebovana v množici $\mathcal{O}_x$. Potem so dobro definirane vse točke $x, y := \sigma(x)$ in $z := \sigma(y) = \sigma^2(x)$. Da lahko izračunamo $\sigma(x)$ ali $\sigma(y)$, morata točki x in y ležati v množici $\mathcal{S}$. Točka $y = \sigma(x)$ je izračunana po pravilu XX2XX v definiciji preslikave σ, iz česar lahko sklepamo na vsebovanost:

$$f(\mathcal{O}_{f(x)}) \subset \mathcal{O}_{f(\sigma(x))} = \mathcal{O}_{f(y)}.$$

Točka x je vsebovana v množici $\mathcal{M}$, zato vse točke iz množice $\mathcal{O}_x$ menjajo strani. To pomeni, da točka $z = \sigma(y) \in \mathcal{O}$ menja strani in je izračunano po pravilu XX2XX v definiciji preslikave σ. Torej tudi točka z leži v množici $\mathcal{S}$ in velja vsebovanost:

$$f(\mathcal{O}_{f(y)}) \subset \mathcal{O}_{f(\sigma(y))} = \mathcal{O}_{f(z)}.$$

Iz dejstva, da točka x pripada množici $\mathcal{S}$, sklepamo, da se x s funkcijo f slika dlje od centra c kot katera koli druga točka iz množice $\mathcal{O}_x$. Točka $z = \sigma^2(x)$ pripada množici $\mathcal{O}_x$, zato točka $f(z)$ leži bližje centru kot točka $f(x)$, kar lahko zapišemo tudi tako:

$$\mathcal{O}_{f(z)} \subset \mathcal{O}_{f(x)}.$$

Ugotovili smo, da je slika množice $\mathcal{O}_{f(x)}$ vsebovana v množici $\mathcal{O}_{f(y)}$ in da je slika množice $\mathcal{O}_{f(y)}$ vsebovana v množici $\mathcal{O}_{f(x)}$. Ker točki x in y ležita na nasprotnih straneh točke c in ker obe točki menjata strani tudi točki $f(x)$ in $f(y)$ ležita na nasprotnih straneh točke c. Sklepamo lahko, da sta množici $\mathcal{O}_{f(x)}$ in $\mathcal{O}_{f(y)}$ disjunktni in ležita na nasprotnih straneh točke c. To pomeni, da vse točke iz množice $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$ menjajo strani. Množica $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$ podmnožica cikla $\mathcal{O}$, ki se s funkcijo f slika nazaj vase. Edina podmnožica cikla $\mathcal{O}$, ki se s f slika nazaj vase je množica $\mathcal{O}$, zato je cikel $\mathcal{O}$ enak uniji $\mathcal{O}_{f(x)} \cup \mathcal{O}_{f(y)}$. To pomeni, da vsaka točka iz cikla $\mathcal{O}$ menja strani. □

Za dokončanje dokaza predpostavimo, da obstaja točka iz cikla $\mathcal{O}$, ki ne menja strani. Pokažimo, da potem obstaja Štefanovo zaporedje. Če za implikacjo v lemi XXX uporabimo pravilo kontrapozicije, dobimo naslednjo izjavo: Če obstaja točka iz cikla $\mathcal{O}$, ki ne menja strani, potem ne obstaja točka x, za katero velja $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$. To pomeni, da ne moreta biti hkrati izpoljneni enakosti $\sigma(p) = q$ in $\sigma(q) = p$. Lahko izberemo taki točki x_0 in x_1, da je $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ in $x_2 := \sigma(x_1) \neq x_0$. Dokler je x_i vsebovan v množici $\mathcal{S}$, dobimo naslednji člen s predpisom $x_{i+1} = \sigma(x_i)$. Za dokončanje dokaza se moramo prepričati, da tako definirano zaporedje ustreza vsem petim pogojem iz definicije 5.2. Zaradi izbire točk $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$ zaporedje ustreza pogoju (Š1) Točki x_0 in x_1 ležita na nasprotnih straneh točke c, ostale točke pa ležijo alternirajoče na levi oziroma desni strani točke c, saj zaporedni točki x_i in $x_{i+1}\sigma(x_i)$ ležita na nasprotnih straneh.

□

Trditev 6.3. *Naj bo m naravno število večje od 2. Če m-cikel vsebuje točko, ki ne menja strani, potem za vsako naravno število l, za katero velja $l \triangleright m$ obstaja elementarna $\mathcal{O}$-vsiljena l-zanka $\mathcal{O}$-intervalov in zato tudi točka s periodo l.*

7. Dokaz izreka Šarkovskega

V tem poglavju dokažemo glavni del izreka Šarkovskega. Vemo že, da izrek velja, če

Trditev 7.1. *Naj bosta m in l naravni števili v relaciji $m \triangleright l$ in naj bo $\mathcal{O}$ m-cikel. Potem obstaja $\mathcal{O}$-vsiljena elementarna l-zanka $\mathcal{O}$-intervalov in posledično točka s periodo l.*

Dokaz. Vemo že, da dokaz velja, če cikel $\mathcal{O}$ vsebuje Štefanovo zaporedje. To se zgodi vsakič, ko vsaj ena točka cikla $\mathcal{O}$ menja stran. Trditev moramo dokazati še v primeru, ko vsaka točka cikla $\mathcal{O}$ menja stran. Predpostavimo, da je cikel $\mathcal{O}$ tak, da vsaka točka iz cikla menja stran. Izrek bomo dokazali s pomočjo indukcije na število m.

Če je $m = 1$, je trditev avtomatično izpolnjena, saj je 1 zadnji člen zaporedja šarkovskega in je edino število l, za katerega velja $l \lhd 1$ je 1.

Predpostavimo, da izrek velja za vsa števila manjša ali enaka m.

Definiramo najmanjše in največje število cikla $\mathcal{O}$. □

8. Dokaz realizacijskega izrek Šarkovskega

Daljši in bolj zapleten del dokaza izreka Šarkovskega je za nami. Sedaj moramo dokazati še drugi del, ki pravi:

Izrek 8.1. *Vsak rep $\mathcal{T}$ ureditve Šarkovskega je množica period za neko zvezno funkcijo f, ki slika interval nazaj vase.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali tako, da bomo za vsak rep $\mathcal{T}$ poiskali funkcijo, katere množica period je enaka repu $\mathcal{T}$. Pri iskanju primerne funkcije si bomo pomagali z družino odrezanih šotorskih funkcij:

$$T_h : [0,1] \to [0,1]$$
$$T_h : x \mapsto \min\left(h, 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Ekvivalentno in mogoče lažje predstavljivo lahko predpis funkcije T_h zapišemo na naslednji način:

$$T_h(x) = \min(2x, 2 - 2x, h).$$

Pri dokazu bo zelo pomembna funkcija T_1. Zato so na sliki 14 prikazane funkcije T_1, T_1^2, T_1^3 in T_1^4. Iz slike preberemo, da ima funkcija T_1 dve presečišči s simetralo lihih kvadrantov in zato tudi dve negibni točki. Funkcija T_1^2 ima 4 negibne točke, funkcija T_1^3 jih ima 8, funkcija T_1^4 pa 16. Opazimo, da funkcija T_1^n seka simetralo lihih kvadrantov natanko 2^n-krat in ima prav toliko negibnih točk.

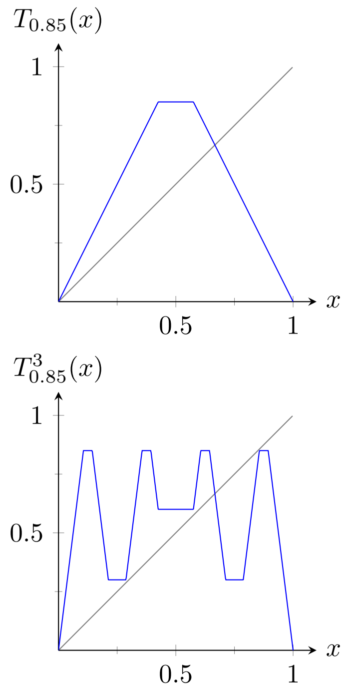
Za primer funkcije T_h smo na sliki 13 prikazali funkcijo $T_{0,85}$ in njene iteracije $T_{0,85}^2, T_{0,85}^3$ in $T_{0,85}^4$.

Za dokaz izreka bomo najprej pokazali, da obstaja funkcija, ki ima samo periodo 1. To je funkcija T_0. Za vsak $x \in [0,1]$ je vrednost funkcije T_h enaka 0, zato je 0 tudi edina periodična točka za to funkcijo. Točka 0 je negibna točka, zato je njena perioda enaka 1. Obravnavajmo funkcijo T_1. Dokazali bomo, da je vsako naravno število n perioda funkcije T_1. To najlažje dokažemo tako, da poiščemo cikel dolžine 3 in s pomočjo izreka 2.4 sklepamo, da ima funkcija T_1 vse periode. Vsaka točka ki ima za funkcijo T_1 periodo 3 je negibna točka funkcije T_1^3, zato si poglejmo negibne točke funkcije T_1^3. Iz grafa razberemo, da ima funkcija T_1^3 8 negibnih točk. Točki 0 in $\frac{2}{3}$ sta negibni točki funkcije T_1, točke $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ in $\frac{6}{7}$ tvorijo 3-cikel. Prav tako tvorijo 3-cikel točke $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ in $\frac{8}{9}$. S pomočjo izreka 2.4 ugotovimo, da funkcija T_1 vsebuje točke vseh period, saj vsebuje točko periode 3.

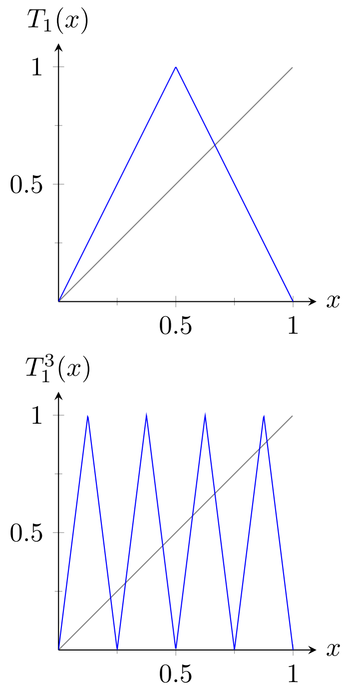
Funkciji T_1 in T_h sta vsaj na nekem delu intervala $[0,1]$ enaki, zato bi lahko imeli skupne cikle. O tem govori naslednja lema:

Lema 8.2. *Za funkciji T_1, T_h in njune cikle veljata naslednji dve trditvi:*

(1) Če je $\mathcal{O} \subseteq [0,h]$ cikel za funkcijo T_1, je tudi cikel za funkcijo T_h.



SLIKA 13. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



SLIKA 14. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

(2) Če je $\mathcal{O} \subseteq [0, h)$ cikel za funkcijo T_h, je cikel tudi za funkcijo T_1.

Dokaz. Funkciji T_1 in T_h se razlikujeta samo v tistih točkah x, za katere je $T_1(x) > h$. V vseh ostalih točkah, sta funkciji enaki. Privzemimo, da je $\mathcal{O} \subset [0, h]$ cikel za funkcijo T_1. Ker je cikel $\mathcal{O}$ vsebovan v intervalu $[0, h]$, za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ velja

$T_1(x) \leq h$. Torej velja $T_1(x) = T_h(x)$, kar pomeni, da je $\mathcal{O}$ tudi cikel za funkcijo T_h. Dokazali smo trditev 1

Za dokaz trditve 2 prespostavimo, da je $\mathcal{O} \subset [0, h)$ cikel za funkcijo T_h. Torej je za vsako točko x iz cikla $\mathcal{O}$ slika $T_h(x)$ manjša od h. Velja, da je tudi vrednost $T_1(x)$ manjša od h. To pomeni, da sta vrednosti funkcij T_1 in T_h v x enaki. Ker to velja za vsako točko cikla $\mathcal{O}$, je $\mathcal{O}$ tudi cikel za funkcijo T_1. □

V trditvi 2 polodprtega intervala $[0, h)$ ne moremo zamenjati z zaprtim intervalom $[0, h]$, saj ne moremo narediti sklepa, da iz neenakosti $T_h(x) \leq h$ sledi neenakost $T_1(x) \leq h$. Za primer si lahko pogledamo funkcijo $T_{\frac{1}{2}}$, ki ima negibno točko $\frac{1}{2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, vendar to ni negibna točka funkcije T_1. Ključna ideja tega dokaza je, da definiramo funkcijo $h(\cdot)$:

$$h : \mathbb{N} \to [0, 1], h(m) := \min\{\max \mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ je } m\text{-cikel funkcije } T_1\}$$

Prepričati se moramo, ali je definicija dobra. Očitno je, da maksimum m-cikla obstaja. Pokazati moramo še, da obstaja tudi minimum. Funkcija T_1^n seka simatralo lihih kvadratov 2^n-krat, kar pomeni, da ima funkcija T_1^n 2^n periodičnih točk. Ker je nabor točk končen, minimum obstaja.

Zvitost dokaza se skriva v tem, da pri funkciji $T_{h(m)}$ število $h(m)$ igra tri vloge. Pojavi se kot parameter, ki določi funkcijo iz družine funkcij. Predstavlja maksimum funkcije $T_{h(m)}$ in največjo točko neke orbite za funkcijo T_h. Pokazali bomo, da funkcija $h(m)$ razvrsti naravna števila na interval $[0, 1]$ natančno v obratnem vrstnem redu, kot ureditev Šarkovskega.

Funkcija T_h ima naslednje lastnosti:

(1) T_h vsebuje L-cikel $\mathcal{O}$, če in samo če je $h(l) < h$
(2)
(3)

□

Lema 8.3. *Naj bosta m in n naravni števili, ki sta v relaciji $m \triangleright n$. Potem velja ekvivalenca:*

$$h(m) \triangleright h(n) \iff m \triangleright n.$$

Dokaz. Dokaz... □

9. Prostor sharkovskega

V tem poglavju zapišemo definicijo prostora Šarkovskega. Pokažemo, da je lastnsot prostora Šarkovskega topološka lastnost (če je X prostor šarkovskega in je Y homeomorfen prostoru X, je tudi Y prostor šarkovskskega. Retrakt prostora Šarkovskega je prostor Šarkovskega. Prikažemo nekaj primerov in protiprimerov.

10. Linearni kontinuum je prostor šarkovskega

Zapišemo definicijo Linearnega kontinuuma in podamo nekaj primerov linearnih kontinuumov. Dokažemo, da je linearni kontinuum prostor šarkovskega.

Primer 10.1. Enotski kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ ♢