UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2022

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

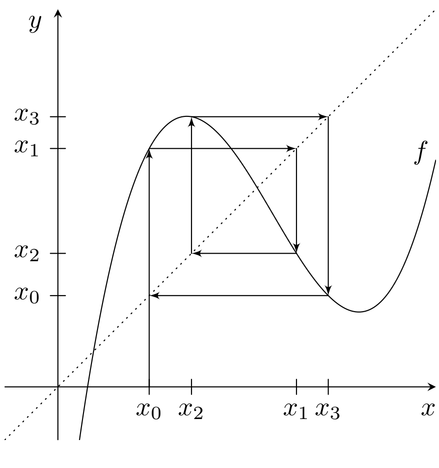
Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2. definicije in formulacija izreka

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ povezana podmnožica realnih števil. Takim množicam bomo rekli intervali. Interval ne rabi biti zaprt ali omejen in lahko v nekaterih primerih predstavlja kar celotno množico realnih števil. Naj bo $f : I \to I$ zvezna funkcija, ki slika interval I nazaj vase. Ker funkcija f slika interval I nazaj vase, si jo lahko predstavljamo kot diskreten dinamični sistem. S f^n bomo označevali kompozitum:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ponovitev } f},$$

kjer f^0 predstavlja identično funkcijo. Lahko si izberemo neko točko x_0 iz intervala I in s pomočjo iteracij funkcije f definiramo zaporedje s splošnim členom $x_n = f^n(x_0)$. Točke v tem zaporedju lahko ponazorimo v koordinatnem sistemu tako, da začnemo na abscisni osi pri točki x_0. Potujemo navpično do grafa funkcije f in se premaknemo v vodoravni smeri do simetrale lihih kvadrantov. Ta točka nam pove, kje leži točka x_1, saj ima obe koordinati enaki x_1. Sedaj se zopet premaknemo navpično do grafa funkcije f in nato vodoravno do simetrale lihih kvadrantov. Pridemo do točke, ki ima obe koordinati enaki x_2. Postopek lahko nadaljujemo. Postopek je skiciran na sliki 1. Na tem primeru vidimo, da se točka x_3 slika v točko x_0. To pomeni, da ima zaporedje samo 4 različne člene, ki se ponavljajo.



Slika 1. Slika prikazuje, iteracije funkcije f.

V takem dinamičnem sistemu ena iteracija funkcije predstavlja en diskreten korak v času, točka $x_0 \in I$ pa začetni položaj točke v sistemu. Množici, ki vsebuje vse člene zaporedja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ bomo rekli *f-orbita točke x_0* ali samo orbita točke x_0. Z matematičnimi simboli jo lahko zapišemo tako:

$$\{\mathcal{O} := f^m(x_0); m \in \mathbb{N}\}.$$

Izrek Šarkovskega preučuje take točke $x_0 \in I$, ki se po nekaj iteracijah s funkcijo f slikajo nazaj vase. Takim točkam rečemo *periodične točke. Perioda točke* x_0 je tako naravno število m, za katero je $f^m(x_0) = x_0$. Najmanjše naravno število n, za katerega je $f^n(x_0) = x_0$ je najmanjša perioda točke x_0. Ekvivalentno lahko sklepamo, da je orbita periodične točke x_0 končna množica, število različnih elementov v orbiti pa je enako najmanjši periodi točke x_0. *Negibna točka* (včasih ji rečemo tudi fiksna točka) je periodična točka s periodo 1, torej taka točka x_0, za katero je $f(x_0) = x_0$. Če obstaja periodična točka s periodo n, rečemo tudi, da ima funkcija f periodo n.

Pri danem dinamičnem sistemu se lahko vprašamo, katere periode lahko ima funkcija. Šarkovski si je postavil prav to vprašanje in prišel do ureditve množice naravnih števil, ki pove, katere periode lahko ima funkcija.

2.1. **Izrek Šarkovskega.**

Definicija 2.1. Množico naravnih števil lahko uredimo na naslednji način:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \cdots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft \cdots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft \cdots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

Ureditev, imenujemo jo ureditev Šarkovskega, določa relacijo $\triangleleft$. Naravni števili m in n sta v relaciji $m \triangleleft n$ natanko tedaj, ko m leži levo od n ali je $m = n$. Opazimo, da je ureditev sestavljena tako, da najprej po vrsti naštejemo liha števila večja od 1, nato dodamo ta števila po vrsti pomnožena z 2. Sledijo liha števila večja od 1 pomnožena z 2^2 itn. Na koncu so zapisane potence števila 2 v padajočem vrstnem redu. Zaradi vrstnega reda števil pomislimo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila. To pomeni, da lahko poljubni naravni števili m in n zapišemo na naslednji način:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1), \tag{1}$$

kjer so števila $m_1, n_1, k, l \in \mathbb{N}_0$. Števili sta v relaciji $m \triangleleft n$, če je:

(R1) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(R2) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
(R3) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(R4) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

Trditev 2.2. *Relacija $\triangleleft$, ki smo jo definirali, je relacija linearne urejenosti.*

Dokaz. Za dokaz potrebujemo tri poljubna naravna števila:

- $m = 2^k(2m_1 + 1)$,
- $n = 2^l(2n_1 + 1)$ in
- $s = 2^h(2s_1 + 1$.

Dokazati moramo refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost in sovisnost relacije. Refleksivnost: če je število m liho, točka (R3) zagotavlja, da je $m \triangleleft m$. Če je število m sodo, pa relacija $m \triangleleft m$ sledi iz točke (R2).

Antisimetričnost: denimo, da za števili m in $n$vveljata relaciji $m \triangleleft n$ in $n \triangleleft m$. Pogoja (R1) in (R4) za relacijo $m \triangleleft n$ sta v protislovju z vsemi pogoji relacije $n \triangleleft m$. Edina možnost, ki zadosti vsem potrebnim pogojem relacij je $k = l$ in $m_1 = n_1$. Torej je $m = n$.

Tranzitivnost: obravnavamo števila m, n in s, ki zadoščajo relacijam $m \triangleleft n$ in $n \triangleleft s$. Radi bi videli sta števili m in s v relaciji $m \triangleleft s$. Ker imamo 4 pogoje za relacijo $m \triangleleft n$ in 4 pogoje za relacijo $n \triangleleft s$, moramo obravnavati 16 možnih kombinacij. Vse kombinacije pogojev za relacije so zapisane v tabeli 1. V drugem stolšcu so zapisani pogoji, ki jih dobimo iz relacije $m \triangleleft n$, v tretjem stoplcu so pogoji, ki jih preberemo iz relacije $n \triangleleft s$. V četrti stolpec smo zapisali pogoj, ki sledi iz pogojev v drugem in tretjem stolpcu. Opazimo, da v devetih primerih pogoja ne moreta biti izpolnjena istočasno, zato pridemo do protislovja. V ostalih primerih, pa dobimo enega od pogojev za relacijo $m \lhd s$, zato sta števili m in s v relaciji $m \lhd s$.

Col1	$m \lhd n$	$n \lhd s$	$\Rightarrow$
1	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
2	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l = h$ in $0 < n_1 \leq s_1$	$k < h$ in $m_1, s_1 \neq 0$
3	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
4	$k < l$ in $m_1, n_1 \neq 0$	$n_1 = 0$, $s_1 > 0$	$m_1 = 0$, $s_1 > 0$
5	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
6	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	$k = h$ in $0 < m_1 \leq s_1$
7	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	protislovje
8	$k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$	$k < l$ in $n_1 = 0$, $s_1 > 0$	$m_1 = 0$, $s_1 > 0$
9	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
10	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
11	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$k \geq h$ in $m_1 = s_1 = 0$
12	$k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$	$k < l$ in $n_1 = 0$, $s_1 > 0$	protislovje
12	$m_1 = 0$, $n_1 > 0$	$l < h$ in $n_1, s_1 \neq 0$	protislovje
14	$m_1 = 0$, $n_1 > 0$	$l = h$ in $0 < n_1, s_1$	protislovje
15	$m_1 = 0$, $n_1 > 0$	$l \geq h$ in $n_1 = s_1 = 0$	$m_1 = 0$, $s_1 > 0$
16	$m_1 = 0$, $n_1 > 0$	$k < l$ in $n_1 = 0$, $s_1 > 0$	protislovje

Tabela 1. Vseh 16 možnosti.

Sovisnost: prepričati se moramo, da za vsaki dve naravni števili m, n velja $m \lhd n$ ali $n \lhd m$. Torej velja en od pogojev:

(i) $k < l$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(ii) $k = l$ in $0 < m_1 \leq n_1$ ali
(iii) $k \geq l$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(iv) $m_1 > 0$ in $n_1 = 0$.

ali

(v) $l < k$ in $m_1 \neq 0$ in $n_1 \neq 0$ ali
(vi) $l = k$ in $0 < n_1 \leq m_1$ ali
(vii) $l \geq k$ in $m_1 = n_1 = 0$ ali
(viii) $n_1 > 0$ in $m_1 = 0$.

Denimo, da števili m in n nista v relaciji. Iz (iv) in (viii) ugotovimo, da mora biti $m_1 = n_1 = 0$ ali $m_1, n_1 \neq 0$. Ker števili ne ustrezata pogoju (iii) niti pogoju (vii) ugotovimo, da morata biti števili m_1 in n_1 različni od 0. Iz pogojev (i) in (v) sklepamo, da mora biti $k = l$. Sedaj pa števili zagotovo zadoščata enemu od pogojev (ii) ali (vi). To je preotislovje s predpostavko, da števili m in n nista v relaciji. Torej res za vsaki dve naravni števili m, n velja relacija $m \lhd n$ ali relacija $n \lhd m$. □

Relacija $\lhd$ ima še eno zanimivo in za dokaz izreka Šarkovskega zelo pomembno lastnost.

Trditev 2.3. *Števili m in n sta v relaciji $m \lhd n$ natanko tedaj, ko sta velja relacija $2m \lhd 2n$. Zapisano z matematičnimi simboli:*

$$\text{za } \forall m, n \in \mathbb{N} : m \lhd n \Leftrightarrow 2m \lhd 2n.$$

Dokaz. Zapišimo števili m in n kot produkt potence števila 2 in nekega lihega števila:

$$m = 2^k(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^l(2n_1 + 1).$$

Če števili pomnožimo z 2, dobimo:

$$m = 2^{k+1}(2m_1 + 1) \text{ in } n = 2^{l+1}(2n_1 + 1).$$

Sedaj lahko preverimo, da so pogoji za relacijo $m \lhd n$ in relacijo $2m \lhd 2n$ ekvivalentni. To je očitno takoj, ko opazimo, da se števili m_1 in n_1 nista spremenili. Neenačbi $k < l$ in $k + 1 < l + 1$ pa sta ekvivalentni. Podobno ugotovimo za neenačbi $k \geq l$ in $k + 1 \geq l + 1$ in enačbi $k = l$ in $k + 1 = l + 1$. □

Sedaj smo definirali vse potrebne pojme in spoznali tudi ureditev Šarkovskega. Čas je, da si poglejdamo na kakšen način ureditev Šarkovskega določa periode funkcije.

Izrek 2.4 (The Sharkovsky forcing theorem)**.** *Če ima $f : I \to I$ točko periode m in velja $m \lhd l$, potem obstaja tudi točka periode l.*

Izrek pove, da je množica period zvezne funkcije na intervalu I rep ureditve Šarkovskega. Rep ureditve Šarkovskega je taka množica $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$, za katero je $m \lhd n$ za vsaki naravni števili $m \notin \mathcal{T}$ in $n \in \mathcal{T}$. Obstajajo trije različni tipi repov: Za neko naravno število m je rep množica $\{n \in \mathbb{N}; m \lhd n\}$, množica $\{\ldots, 16, 8, 4, 2, 1\}$ vseh potenc števila 2 in $\emptyset$. Naslednji izrek je neke vrste obrat zgornjega izreka.

Izrek 2.5 (The Sharkovsky realization theorem)**.** *Za vsak rep $\mathcal{T}$ v zaporedju Šarkovskega obstaja taka funkcija f, katere množica period je enaka $\mathcal{T}$.*

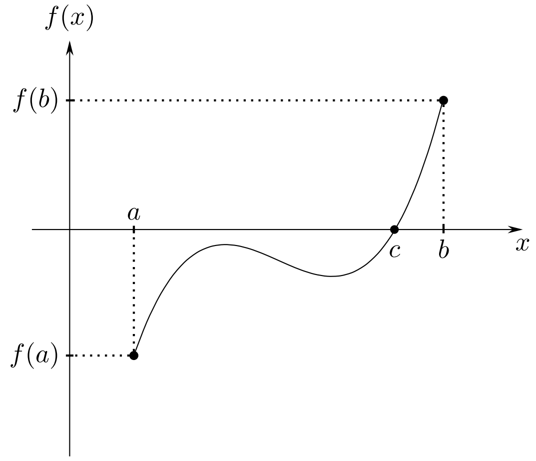
Izrek Šarkovskega je unija izreka 2.4 in izreka 2.5. Podmnožica naravnih števil je množica period zvezne funkcije $f : I \to I$, če in samo če je množica rep ureditve Šarkovskega. Nasledja poglavja so namenjena pripravi na dokaz izreka 2.4, v poglavju 8 pa je predstavljen dokaz izreka 2.5.

3. Intervali, relacija pokritja in cikli

Vsi dokazi izreka Šarkovskega so si podobni po tem, da so elementarni. Ne glede na to, kako zvito se lotimo dokaza, je ključnega pomena lastnost zveznih funkcij, ki ob določenih predpostavkah zagotavlja obstoj ničle funkcije. To je izrek o vmesni vrednosti.

Izrek 3.1 (izrek o vmesni vrednosti)**.** *Funkcija f, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$ in je na krajiščih intervala različno predznačena, torej velja neenačba $f(a) \cdot f(b) < 0$, ima vsaj v eni točki tega intervala vrednost 0.*

Dokaz. Naj bo funkcija $f : [a, b] \to [a, b]$ zvezna in naj bo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $f(a) < 0 < f(b)$. Ničlo funkcije f bomo iskali s pomočjo deljenja intervalov oziroma z bisekcijo. Izračunamo razpolovišče $p_0 = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a, b]$.Če je $f(p_0) = 0$, smo ničlo že našli, sicer razmišljamo tako: če je $f(p_0) > 0$, označimo $[a_1, b_1] = [a, p_0]$, sicer označimo $[a_1, b_1] = [p_0, b]$. Nato izračunamo razpolovišče p_1 intervala $[a_1, b_1]$. Če je $f(p_1) = 0$ postopek ustavimo, saj smo ničlo našlio, v nasprotnem primeru pogledamo predznak $f(p_1)$. Če je $f(p_1) > 0$, označimo $[a_2, b_2] = [a_1, p_1]$, drugače označimo $[a_2, b_2] = [p_1, b_1]$. Postopek



SLIKA 2. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K.

nadaljujemo dokler ne najdemo ničle p_i funkcije f. Če ničle ne najdemo, dobimo neskončno zaporedje vloženih intervalov

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

Lahko se prepričamo, da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ in $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Števila a_n tvorijo naraščajoče zaporedje, števila b_n pa padajoče zaporedje. Limiti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ sta enaki, saj je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Označimo $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Točka c je večja od vseh členov zaporedja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in manjša od vseh členov zaporedja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, zato je za vsak $n \in \mathbb{N}$ vsebovana v intervalu $[a_n, b_n]$. Torej velja: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$. Ker je funkcija zvezna je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(c)$ in $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = f(c)$. Za vsako naravno število n velja $f(a_n) < 0$, zato je $f(c) \le 0$. Podobn je $f(b_n) > 0$ za vsako naravno število n, iz česar sklepamo, da je $f(c) \ge 0$. Torej je $f(c) = 0$, kar zaključi dokaz. □

Definicija 3.2. Pravimo, da interval I pokrije interval J, če je $J \subseteq f(I)$. Relacijo zapišemo kot $I \xrightarrow{f} J$. Kadar je jasno, katera funkcija nastopa, lahko nadpis, ki označi katero funkcijo imamo v mislih tudi izpustimo in pišemo samo $I \to J$. Če velja $f(I) = J$, zapišemo $I \rightarrowtail J$.

S pomočjo izreka o vmesni vrednosti in poznavanja, kako se intervali slikajo s funkcijo f lahko izvemo, ali obstajajo periodične točke. Kako lahko potrdimo obstoj periodičnih točk, nam povejo naslednje leme.

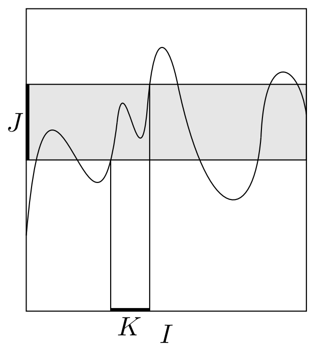
Lema 3.3. *Če je $[a, b] \to [a, b]$, potem ima funkcija f fiksno točko na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Interval $[a, b]$ je podmnožica slike $f([a, b])$, zato obstajata taki točki $a_1, b_1 \in [a, b]$, da je $f(a_1) = a$ in $f(b_1) = b$. Če je $a_1 = a$ ali $b_1 = b$, smo fiksno točko že našli. Če je $a_1 \neq a$ in $b_1 \neq b$, definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - x$. Prepričajmo se, da je vrednost funkcije g v točki b_1 negativna, v točki a_1 pa pozitivna. Računamo: $g(b_1) = f(b_1) - b_1 = b - b_1 < 0$. Podobno je $g(a_1) = f(a_1) - a_1 = a - a_1 > 0$. Zvezna funkcija g je na krajiščih intervala $[a, b]$ različno predznačena. Po izreku 3.1 obstaja točka $c \in [a, b]$, pri kateri je $g(c) = 0$, torej je $f(c) = c$. □

Pri iteracijah funkcije lahko opazujemo, kako se premika točka. To smo počeli na sliki 1. Lahko pa opazujemo, kako se s f slikajo celi intervali. Na ta način dobimo zaporedje relacij pokritja npr. $I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots$. Enako kot pri periodičnih točkah lahko pri zaporedu relacij pokritja po nekaj korakih zopet pridemo do prvotnega intervala. Dobimo naslednje zaporedje relacij pokritja $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to I_0$. Če je začetni interval enak končnemu intervalu, zaporedju intervalov in pripadajočim relacijam pokritja pravimo *zanka intervalov* ali samo zanka. Od tu naprej bo interval predstavljal zaprto, omejeno in povezano podmnožico realnih števil.

Lema 3.4. *Če so intervali $I_0, \ldots, I_{n-1}$ intervali, za katere veljajo naslednje relacije pokritosti: $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$, potem obstaja taka točka $c \in I_0$, za katero je $f^i(x) \in I_i$ za $0 \leq i < n$ in $f^n(c) = c$. Pravimo, da točka c sledi zanki.*

Dokaz. Če velja relacija pokritosti $I \to J$, obstaja tak interval $K \subset I$, da je $K \rightarrowtail J$. Interval K poiščemo tako, da iz preseka funkcije f s pravokotnikom $I \times J$ izberemo



Slika 3. Slika prikazuje, kako poiščemo interval K.

povezan del grafa, ki povezuje spodni in zgornji del pravokotnika. Tak del zagotovo obstaja, saj je $J \subset f(I)$. Projekcijo tega dela na interval I označimo s K. To znanje uporabimo na zanki intervalov $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$. Ker velja relacija pokritja $I_{n-1} \to I_0$, vemo, da obstaja tak interval $K_{n-1} \subset I_{n-1}$, da je $K_{n-1} \rightarrowtail I_0$. Velja relacija pokritosti $I_{n-2} \to K_{n-1}$, zato obstaja tak interval $K_{n-2} \subset I_{n-2}$, da je $K_{n-2} \rightarrowtail K_{n-1}$. S postopkom nadaljujemo in dobimo naslednje relacije:

$$K_0 \rightarrowtail K_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail K_{n-1} \rightarrowtail I_0.$$

Za vsako točko $x \in K_0$ in za vsak $i \in [0, n)$ velja $f^i(x) \in K_i \subset I_i$ in $f^n(x) \in I_0$. Ker je $K_0 \subset I_0 = f^n(K_0)$, lahko s pomočjo leme 3.3 sklepamo, da ima f^n fiksno točko c na intervalu K_0. Točka c sledi zanki $I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$. □

Obravnavajmo zvezno funkcijo $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$. Na tem intervalu sta samo dve točki, ki sledita 2-zanki. To sta točki 0 in 1, ki imata najmanjšo periodo 1. Zato se z obstojem periodičnih točk za enkrat še ne moremo zadovoljiti. Radi bi vedeli, da je najmanjša perioda točke enaka dolžini zanke in ne kakšen pravi delitelj dolžine.

Definicija 3.5. Zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ je elementarna, če ima vsaka točka, ki sledi zanki, najmanjšo periodo n.

Posledica 3.6. *Vsaka elementarna zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ vsebuje točko x_0, ki sledi zanki in ima najmanjšo periodo n.*

Zaradi zgornje posledice bi bilo dobro, če bi poznali kakšen dober kriterij za prepoznavanje elementarnih zank. Najlažji kriterij je število intervalov v zanki. Če nastopa samo en interval, dobimo zanko $I_0 \to I_0$. Z uporabo leme 3.3 ugotovimo, da je zanka elementarna. Naslednja lema poda še en kriterij za prepoznavanje elementarnih zank:

Lema 3.7. *Zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$ je elementarna, če ji ne sledi nobena robna točka intervala I_0 in je notranjost intervala $\mathrm{int}(I_0)$ disjunktna z intervali $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Torej, $\mathrm{int}(I_0) \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i = \emptyset$.*

Dokaz. Točka x_0, ki sledi zanki ne more biti robna točka intervala I_0. Torej je $x_0 \in \mathrm{int}(I_0)$. Za vsak $i = 1, \ldots, n-1$ je $x_0 \neq f^i(x_0)$, saj je $f^i(x_0) \in I_i$, notranjost intervala I_0 pa je disjunktna z intervalom I_i. Ker točka x_0 sledi zanki, je $f^n(x_0) = x_0$. Točka x_0 ima najmanjšo periodo n. □

Definicija 3.8. Zaprt in omejen interval, katerega krajišči pripadata ciklu $\mathcal{O}$ imenujemo $\mathcal{O}$-interval.

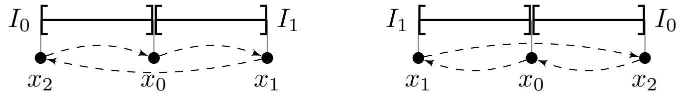
V nadaljevanju bomo zgornje leme uporabili na $\mathcal{O}$-intervalih. Tako bomo poenostavili obravnavo periodičnih točk funkcije f, saj bomo uporabili samo informacije, ki jih lahko pridobimo iz delovanja funkcije f na ciklu $\mathcal{O}$. Zato bodo naši sklepi veljali za vse zvezne funkcije s ciklom $\mathcal{O}$. Relaciji pokritja $I \to J$ rečemo $\mathcal{O}$-vsiljena, če interval J leži v $\mathcal{O}$-intervalu M katerega krajišči sta skrajno leva in skrajno desna točka množice $f(I \cap \mathcal{O})$. Ker je funkcija f zvezna, lahko s pomočjo izreka 3.1 ugotovimo, da je množica $f(I)$ interval. Velja $J \subset M \subset f(I)$. V nadaljevanju dela bodo vse relacije pokritja $\mathcal{O}$-vsiljene. Zanka intervalov $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$, v kateri vsaka puščica predstavlja $\mathcal{O}$-vsiljeno relacijo pokritja, se imenuje $\mathcal{O}$-vsiljena zanka $\mathcal{O}$-intervalov.

V nadaljevanju bodo vse relacije pokritja, o katerih bomo govorili, $\mathcal{O}$-vsiljene, zato bodo vse relacije pokritja, ki jih bomo označili s simbolom ''$\to$'', predstavljale $\mathcal{O}$-vsiljene relacije pokritja.

4. Primeri

V tem poglavju si bomo zaradi lažjega razumevanja pogledali nekaj posebnih primerov. Najprej si bomo pogledali najbolj znan poseben primer izreka Šarkovskega. V naslednjih dveh primerih bomo postopek iz prvega primera razširili na daljše cikle. V zadnjem primeru bomo nakazali kako lahko iz periodičnih točk funkcije f^2 ugotovimo katere periode ima funkcija f, kar igra pomembno vlogo pri dokazu izreka 2.4.

Primer 4.1 (3-cikel)**.** Perioda 3 implicira obstoj vseh ostalih period. Točka lahko tvori 3-cikel na dva različna načina, ki sta v resnici zrcalna podoba drug drugega. Slika prikazuje oba primera. Črtkane puščice nakazujejo, kam se s funkcijo f slikajo



Slika 4. Zrcalna podoba ciklov

točke. Velja:

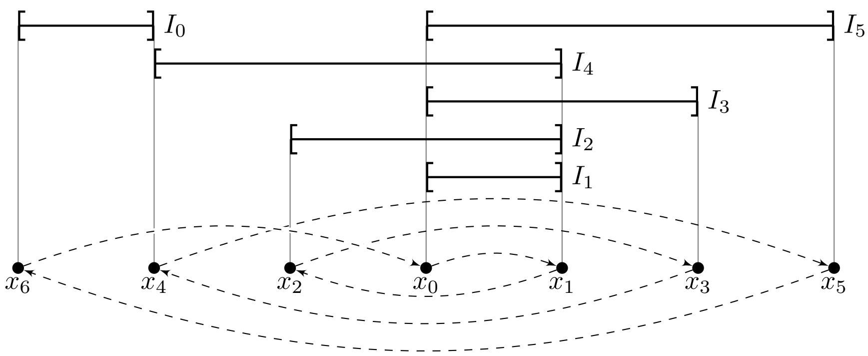
$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \text{ in } x_0 = f(x_2).$$

V obeh primerih smo z I_1 označili $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_1, z I_0 pa $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_2. Krajišči intervala I_1 se slikata v skrajno levo in skrajno desno točko cikla, zato imamo $\mathcal{O}$-vsiljeni pokritji $I_1 \to I_1$ in $I_1 \to I_0$. Krajišči intervala I_0 se slikata v krajišči intervala I_1, zato je tudi pokritje $I_0 \to I_1$ $\mathcal{O}$-vsiljeno. Ugotovljena pokritja lahko strnemo v diagram $\circlearrowright I_1 \leftrightarrows I_0$. Iz relacije pokritosti $I_1 \to I_1$ in leme 3.3 sklepamo, da interval I_1 vsebuje negibno točko. Krajišči intervala I_0 ne morejo slediti zanki $I_0 \to I_1 \to I_0$, saj sta periodični točki s periodo 3. Točke, ki sledijo zanki, pa imajo periodo 1 ali 2. Ker je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, lahko s pomočjo leme 3.7 sklepamo, da je zanka elementarna. Torej lahko v intervalu I_0 poiščemo točko s periodo 2. Za dokaz obstoja točke s periodo $l \geq 4$ si poglejmo zanko

$$I_0 \to \overbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}^{l-1 \text{ ponovitev intervala } I_0} \to I_0. \tag{2}$$

V tej zanki nastopajo vsaj 3 kopije intervala I_1, v katerem ležita samo dve točki $\mathcal{O}$-intervala. Ker imajo točke iz cikla $\mathcal{O}$ najmanjšo periodo 3, v intervalu I_1 ne morejo ležati trije zaporedni členi iz cikla $\mathcal{O}$, torej tudi tri zaporedne iteracije funkcije f na krajiščih intervala I_0 ne morejo ležati v intervalu I_1. To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne moreta slediti zanki. Že prej smo ugotovili, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, zato je zanka (2) elementarna zanka dolžine l. Zato ima funkcija f periodo l za vsak $l \geq 4$. Pokazali smo, da je vsako naravno število perioda funkcije f. $\diamondsuit$

Primer 4.2 (7-cikel)**.** Sedaj bomo obravnavali 7-cikel $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$-intervale prikazane na sliki 5. Podobno kot pri prejšnjem primeru označimo točke $x_i = f^i(x_0)$ ter intervale



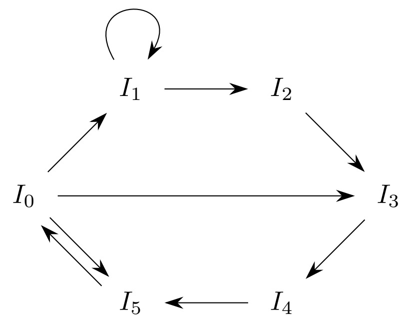
Slika 5. Primer 7-cikla.

$I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$ in tako naprej kot prikazuje slika 5. Za to izbiro intervalov dobimo naslednje $\mathcal{O}$-vsiljene relacije pokritosti:

(1) $I_1 \to I_1$
(2) $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(3) $I_0 \to I_1$, $I_0 \to I_3$ in $I_0 \to I_5$

Zgornje relacije pokritosti lahko prikažemo z diagramom, ki ga prikazuje slika 6. Iz grafa preberemo naslednje zanke.

(1) $I_1 \to I_1$

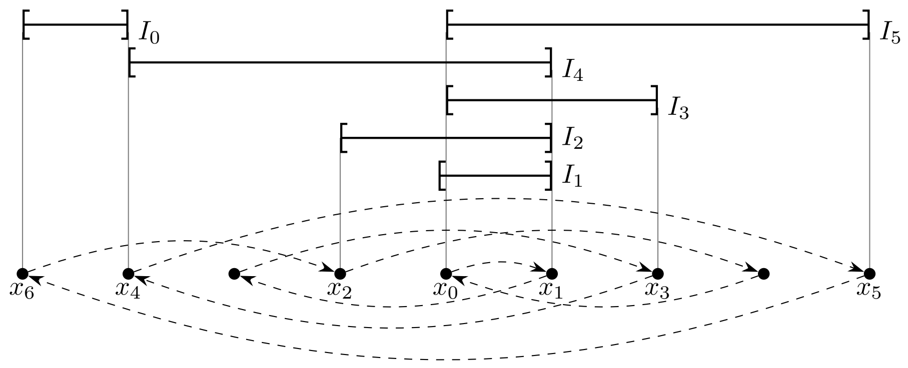


SLIKA 6. diagram

(2) $I_0 \to I_5 \to I_1$
(3) $I_0 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(4) $I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$
(5) $I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{l \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$, kjer je $l \geq 3$.

Zanka $I_1 \to I_1$ je elementarna, saj je elementarna vsaka zanka dolžine 1. Pri ostalih zankah lahko najprej ugotovimo, da za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ velja $\mathrm{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Pri zankah 2, 3 in 4 nobena robna točka intervala I_0 ne more slediti zanki, saj je najmanjša perioda robnih točk 7, perioda točk, ki sledijo zankam 2, 3 in 4 pa je manjša ali enaka 6. Podobno kot v primeru 4.1 ugotovimo, da nobene tri zaporedne iteracije funkcije f na točkah cikla $\mathcal{O}$ ne ležijo v intervalu I_1, zato v tem intervalu tudi ne morejo ležati tri zaporedne iteracije funkcije f na robnih točkah intervala I_0. To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne sledita zanki 5. S tem razmislekom so izpolnjeni pogoji leme 3.7, zato lahko sklepamo, da so zanke elementarne. Torej lahko na podlagi prisotnosti 7-cikla na sliki 5 sklepamo, da so prisotne vse periode l, za katere je $l \lhd 7$ $\diamondsuit$

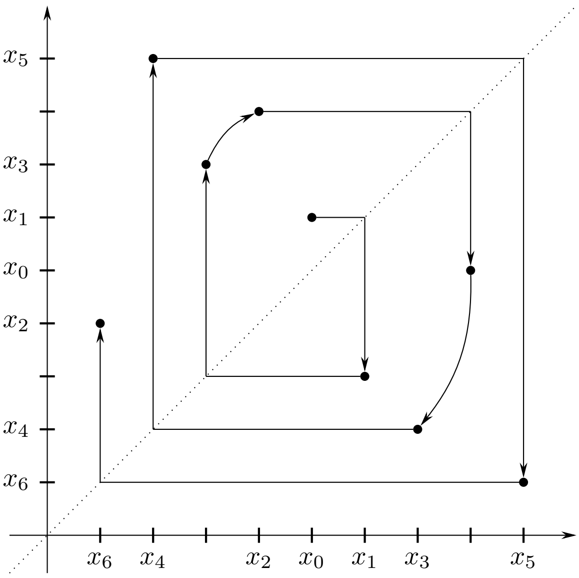
Primer 4.3 (9-cikel)**.** Predpostavimo, da ima funkcija f 9-cikel $\mathcal{O}$, ki je prikazan na sliki 7. Opazimo lahko, da smo določili šest $\mathcal{O}$-intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_5$, za katere velja,



SLIKA 7. Primer 9-cikla.

da je notranjost intervala I_0 disjunktna z ostalimi intervali. Torej za $j = 1, 2, \ldots, 5$ velja: $\mathrm{int}\,(I_0) \cap I_j \neq \emptyset$. Za tako izbrane intervale dobimo enake relacije pokritja kot v primeru 4.1 in lahko s pomočjo enakih sklepov ugotovimo prisotnost enakih elementarnih zank in posledično periodičnih točk s periodami 1, 2, 4, 6 in vse periode večje od 7.

Zaporedje števil $x_0, x_1, \ldots, x_6$ smo določili tako, da se spiralno oddaljujejo od centra $c := \frac{x_0+x_1}{2}$, kar je prikazano na sliki 8. S tako izbiro točk pa v zaporedju ne nastopajo vse točke cikla $\mathcal{O}$ in tudi ne velja enakost $f(x_i) = x_{i+1}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, 5$ kot je to veljalo v primeru 4.2



Slika 8. Primer 9-cikla.

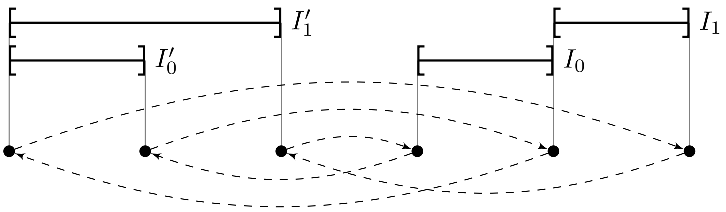
V poglavju 6 je predstavljen algoritem za izbiro zaporedja točk $x_0, x_1, \ldots, x_6$. Glavna ideja algoritma je, da za naslednji člen zaporedja ne izberemo vedno sliko prejšnjega člena na način: $x_{i+1} = f(x_i)$, vendar včasih izberemo točko, ki je bližje centru c. Točko x_{i+1}, ki je bližje centra c kot točka $f(x_i)$ izberemo, če je slika $f(x_{i+1})$ bolj oddaljena od centra kot točka $f(f(x_i))$. Postopka izbire naslednje točke na sliki 1 in na sliki 8 sta podobna. V obeh primerih se pomikamo navpično do grafa funkcije in nato vodoravno do simetrale lihih kvadrantov. Sprememba se zgodi na sliki 8, ko lahko izberemo še neizbrano točko tako, da se v vodoravni smeri pomaknemo proti centru c, v navpični smeri pa stran od centra c. To se na sliki 8 zgodi dvakrat in je prikazano s krivimi puščicami. Postopek se ustavi, ko pridemo do točke x_j, katere slika $f(x_j)$ je na isti strani centra c kot točka sama. V primeru na sliki 8 je to točka x_6.

V poglavju 5 si bomo natančno pogledali kakšne lastnosti mora imeti zaporedje točk $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, ki predstavlja krajišča intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$.

$\diamondsuit$

Primer 4.4 (6-cikel)**.** Obravnavali bomo 6-cikel, ki je na sliki 9. Bistveno pri tem primeu je, da se tri točke na levi strani slikajo v tri točke na desni in obratno. Torej, tri točke na desni tvorijo 3-cikel za funkcijo f^2. Podobno kot v primeru 4.1 lahko določimo intervala I_0 in I_1 ter opazujemo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$ za intervala I_0 in I_1, ki sta prikazana na sliki 9. Enako kot prej lahko zaključimo, da ima funkcije f^2 elementarne zanke vseh dolžin in zato je vsako naravno število $l \in N$ perioda funkcije f^2. Za funkcijo f določimo še dva intervala. Interval I_0' naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_0 \cup \mathcal{O})$, interval I_1' pa naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice

$f(I_1 \cup \mathcal{O})$. Sedaj bomo prikazali rekurzivno metodo, ki jo bomo uporabili kasneje v dokazu. Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo elementarne k-zanke za funkcijo f^2 poiščemo elementarno $2k$-zanko za funkcijo f. V primeru, ki ga obravnavamo, bo to pomenilo, da je vsako sodo naravno število perioda funkcije f. Poglejmo si elementarno k-zanko za funkcijo f^2, v kateri nastopajo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$. Vsak zapis $I_1 \xrightarrow{f^2}$ v zanki lahko zamenjamo z $I_1 \xrightarrow{f} I_1' \xrightarrow{f}$, vsak zapis $I_0 \xrightarrow{f^2}$ pa z $I_0 \xrightarrow{f} I_0' \xrightarrow{f}$. S to spremembo dobimo $2k$-zanko za funkcijo f, ki ni samo dvakrat ponovljena k-zanka. Prepričajmo se, da je $2k$-zanka elementarna. Denimo, da točka p sledi $2k$-zanki za funkcijo f. Pokazati moramo, da ima periodo $2k$ za funkcijo f. Opazimo, da točka p sledi prvotni k-zanki za funkcijo f^2 in ima zato periodo k za funkcijo f^2. Po drugi strani pa iteracije točke p s funkcijo f ležijo alternirajoče enkrat na levi in enkrat na desni strani srednjega intervala, saj $2k$-zanka za f alternira med intervali s črtico in intervali brez črtice. Zato je orbita točke p sestavljena iz $2k$ različnih točk. Na desni strani srednjega intervala leži k sodih iteracij, na levi strani pa leži k lihih iteracij. To pomeni, da ja perioda točke p za f enaka $2k$. Ker smo dolžino začetne elementarne k-zanke izbrali poljubno, smo pokazali, da je vsako sodo število perioda za f. Ker interval $[x_0, x_1]$ s funkcijo f pokrije samega sebe, pa obstaja fiksna točka. Torej ima f tudi periodo 1.



SLIKA 9. Primer 6-cikla.

$\diamondsuit$

5. ŠTEFANOVO ZAPOREDJE

Definicija 5.1. Naj bo p najbolj desna točka intervala $\mathcal{O}$, za katero je $f(p) > p$ in $q \in \mathcal{O}$ prva točka desno od p. Center c cikla $\mathcal{O}$ definiramo kot $c = \frac{p+q}{2}$. Za vsako točko $x \in \mathcal{O}$ označimo množico točk iz cikla $\mathcal{O}$, ki ležijo v zaprtem intervalu omejenem z x in c, z $\mathcal{O}_x$. Natančneje, $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [x, p]$, če je $x \leq p$ in $\mathcal{O}_x = \mathcal{O} \cap [q, x]$, če je $x \geq q$. Pravimo, da točka $x \in \mathcal{O}$ menja strani, če točka c leži med točkama x in $f(x)$.

Definicija 5.2. Zaporedje točk $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je Štefanovo, če:

(Š1) $\{x_0, x_1\} = \{p, q\}$,
(Š2) točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ležijo alternirajoče na levi oziroma desni strani točke c.
(Š3) Zaporedji x_{2j} in x_{2j+1} sta strogo monotoni in se oddaljujeta od točke c.
(Š4) Če je $1 \leq j \leq n-1$, potem x_j menja stran in $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$.
(Š5) Točka x_n ne menja strani.

Opomba 5.3. Štefanofo zaporedje dobimo tako, da iz množice m točk, ki tvorijo $\mathcal{O}$-cikel izberemo $(n+1)$-o točko, ki zadoščajo zgornjim pogojem. Pogoj $x_{j+1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$ v (Š4) pomeni, da je točka x_{j+1} bližje centru kot slika $f(x_j)$ točke x_j. Velja ena od neenakosti: $c < x_{j+1} \leq f(x_j)$ ali $f(x_j) \leq x_{j+1} < c$. Pogoja (Š2) in (Š3) zagotavljata, da so točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne. Ker pa lahko pri izbiri točk iz $\mathcal{O}$-cikla tudi kakšno točko izpustimo, je število $n+1$ izbranih točk manjše ali enako številu vseh točk v $\mathcal{O}$-ciklu. Če se vrnemo na primere iz prejšnjega poglavja, lahko vidimo, da v primerih 4.1, 4.2 in 4.4 Štefanovo zaporedje sestavljajo vse točke $\mathcal{O}$-cikla. V primeru 4.3 pa smo dve točki $\mathcal{O}$-cikla ne nastopata v Štefanovem zaporedju. Na slikiIz pogoja (Š2) lahko razberemo, da so točke $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paroma različne. Torej je $n+1 \leq m$ in zato $n < m$. Sliki 5

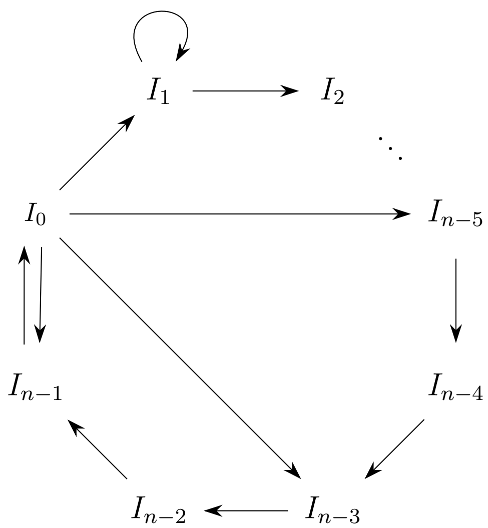
Trditev 5.4. *Predpostavimo, da m-cikel $\mathcal{O}$ vsebuje Štefanovo zaporedje. Če je $l \lhd m$, potem funkcija f vsebuje $\mathcal{O}$-vsiljeno elementarno l-zanko $\mathcal{O}$-intervalov in posledično tudi periodično točko z najmanjšo periodo l.*

Pri danem Štefanovem zaporedju $x_0, x_1, \ldots, x_n$ definiramo intervale $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ na naslednji način: Za $1 \leq j < n$, označimo z I_j najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_j, medtem ko z I_0 označimo $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_{n-2} in x_n. Iz lastnosti (Š2) lahko sklepamo, da je $\operatorname{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$ za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Trditev 5.5. *Za intervale izbrane na zgoraj opisan način veljajo naslednje relacije pokritja:*

(1) $I_1 \to I_1$ *in* $I_0 \to I_1$,
(2) $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$,
(3) $I_0 \to I_{n-1}, I_{n-3}, I_{n-5} \ldots$.

Zaradi boljše predstave ponazorimo relacije pokritja na sliki 14.



Slika 10. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Dokaz trditve 5.5. Dokazovali bomo vsako točko posebej.

Pri dokazu točke 1 bomo dokazali še močnejšo trditev, ki nam bo v pomoč tudi pri dokazu druge točke. Pokazali bomo, da za vsak $j = 0, 1, \ldots, n-1$ velja relacija pokritja $I_j \to I_1$. Za dokaz je dovolj, če se prepričamo, da vsak interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1. V primeru intervala $I_0 = [x_n, x_{n-2}]$ ugotovimo, da obe krajišči I_0 ležita na isti strani točke c. Lastnost (Š4) pove, da krajišče x_{n-2} menja stran, medtem ko lastnost (Š5) pravi, da točka x_n ne menja strani, zato točki $f(x_n)$ in $f(x_{n-2})$ ležita na nasprotnih straneh točke c. V primeru intervala I_j za $j = 1, 2, \dots, n-1$ upoštevamo lastnost (Š2) in pridemo do zaključka, da krajišči intervala ležita na nasprotnih straneh točke c. Lastnost (Š4) pove, da obe krajišči menjata stran. Torej za vsak $j = 0, 1, \dots, n-1$ interval $f(I_j)$ vsebuje točke $\mathcal{O}$-cikla, ki ležijo na obeh straneh centra c. Zagotovo vsebuje točki x_0 in x_1 in zato tudi interval I_1.

Naj bo j tako naravno število, za katerega velja $1 \leq j \leq n-1$. Interval J vsebuje interval I_j natanko tedaj, ko vsebuje točke x_0, x_1 in x_j. Želimo pokazati, da interval $f(x_j)$ vsebuje interval I_{j+1}. Vemo že, da interval $f(I_j)$ vsebuje točki x_0 in x_1. Za dokaz točke 3 moramo pokazati samo še vsebovanost točke x_{j+1} v intervalu $f(I_j)$.

Za dokaz točke 2 moramo pokazati, da so intervali $I_{n-1}, I_{n-3}, \dots$ vsebovani v intervalu $f(I_0)$. Ker že vemo, da $f(I_0)$ vsebuje točki x_0 in x_1, preostane za dokazati še, da vsebuje točke $x_{n-1}, x_{n-3}, \dots$ Zaradi lastnosti (Š2) ležijo vse točke na drugi strani točke c kot točki x_{n-2} in x_n. Iz lastnoti (Š3) sklepamo, da je točka x_{n-1} najbolj oddaljena od točke c, zato vsak interval, ki vsebuje točke x_0, x_1 in x_{n-1}, vsebuje tudi vse točke $x_{n-3}, x_{n-5}, \dots$ Pokazati moramo samo še, da interval $f(I_0)$ vsebuje točko x_{n-1}. Pri lastnosti (Š4) namesto j pišemo $n-2$ in dobimo vsebovanost $x_{n-1} \in \mathcal{O}_{f(x_j)}$. Iinterval $f(I_n)$ vsebuje točke x_0, x_1 in $f(x_j)$,

□

Dokaz trditve 5.4. Naj veljajo predpostavke v trditvi 5.4. Radi bi pokazali, da ima funkcija f za vsako naravno število $l \lhd m$ točko periode l. Dokaz bomo razdelili na tri dele. Najprej bomo dokazali izrek za liha števila manjša od m, potem za soda števila manjša od n in na koncu še za vsa števila večja od n.

Edino liho število l manjše od m, za katerega lahko velja $l \lhd m$ je število 1. Za $l = 1$ uporabimo zanko l1, ki je zanka dolžine 1 in zato elementarna. Torej obstaja točka periode 1 v intervalu I_1.

Naravno število $l \leq n \leq m$ je lahko v relaciji $l \lhd m$ samo, če je sodo. Za vsako sodo število $l \leq n$ lahko iz slike 14 izpišemo l-zanko:

$$I_0 \to I_{n-(l-1)} \to I_{n-(l-2)} \to \cdots \to I_{n-2} \to I_{n-1} \to I_0.$$

Iz konstrukcije intervalov $I_0, I_1, \dots, I_n$ vemo, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_{n-(l-1)}, I_{n-(l-2)}, \dots, I_{n-2}, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 imata najmanjšo periodo m in zato ne moreta sledit zanki. Z uporabo leme 3.7 ugotovimo, da je l-zanka elementarna, zato obstaja točka iz I_0, ki ima najmanjšo periodo l.

V primeru, ko je $l > n$ iz slike 14 razberemo l zanko

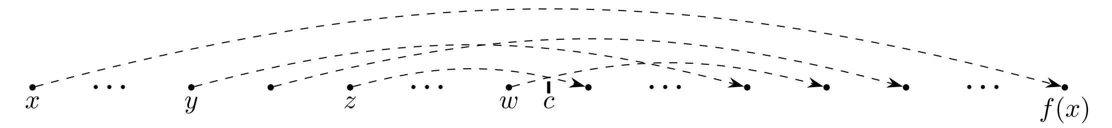
$$I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{l-n+1 \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0.$$

Če je $l = m$, potem lahko izberemo točko x_0, ki ima periodo m. Predpostavimo, da je $l \neq m$. Podobno kot v prejšnjem primeru je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervali $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$. Krajišči intervala I_0 pa ne moreta slediti zanki, saj imata periodo m, dolžina zanke pa je različna od m. Zopet lahko s pomočjo leme 3.7 sklepamo, da je l-zanka elementarna, kar zagotavlja obstoj točke iz I_0, ki ima najmanjšo periodo l. □

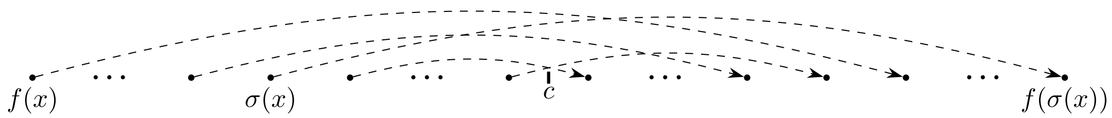
6. Konstrukcija Štefanovega zaporedja

Trditev 6.1. *Cikel, ki vsebuje vsaj dve točki, vsebuje Štefanovo zaporedje, če vsaj ena točka ne menja strani.*

Dokaz. Naj bo m naravno število večje ali enako 2 in naj bo $\mathcal{O}$ cikel sestavljen iz m različnih točk. Naj bo množica $\mathcal{M}$ največji tak $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točki p in q, da vsaka točka cikla $\mathcal{O}$, ki je vsebovana v $\mathcal{M}$ menja stran. To pomeni, da za poljubno točko $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ vse točke iz množice $\mathcal{O}_x$ menjajo stran. Če želimo konstruirati Štefanovo zaporedje, bomo Definiramo množico $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, ki vsebuje vse kandidate za



Slika 11. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



Slika 12. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.

Lema 6.2. *Če obstaja taka točka $x \in \mathcal{S}$, za katero je $\sigma^2(x) \in \mathcal{O}_x$, potem vse točke cikla $\mathcal{O}$ menjajo stran.*

Dokaz. Če želimo, da je $\sigma^2(x)$ definiran in da leži v $\mathcal{O}_x$, morajo x, $y = \sigma(x)$ in $z := \sigma(y) = \sigma^2(x)$ vsi ležati v množici $\mathcal{S}$. □

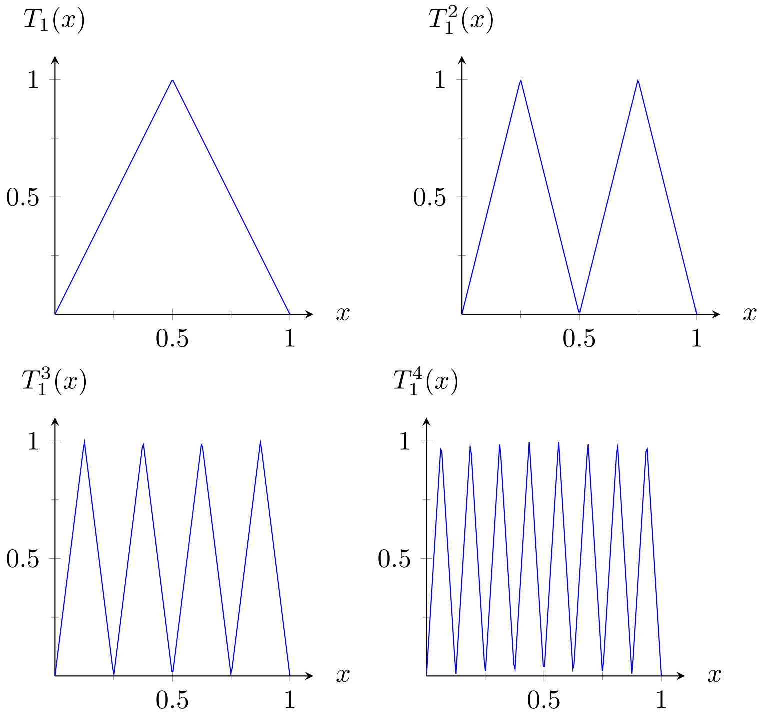
□

7. Dokaz izreka Šarkovskega

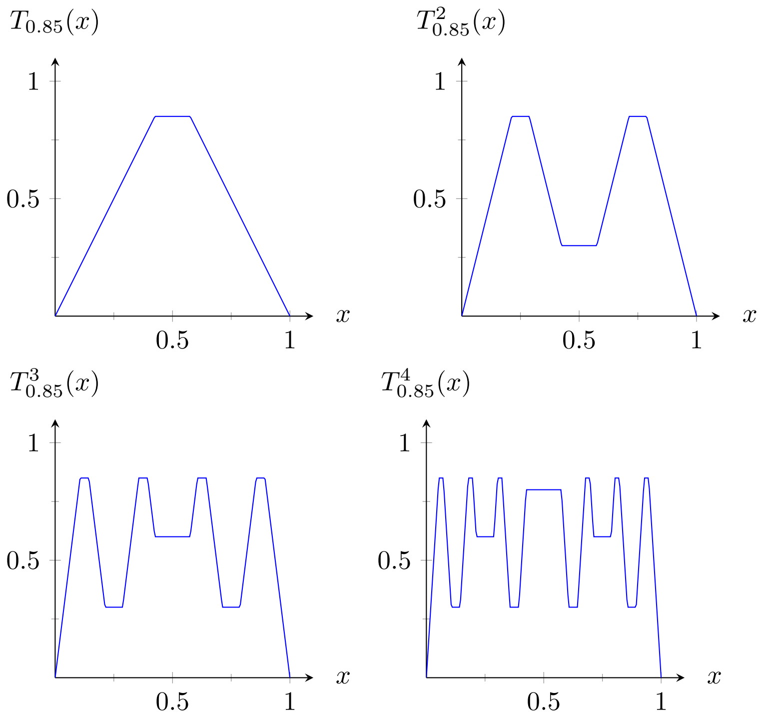
8. Realizacijski izrek Šarkovskega

9. Prostor sharkovskega

10. Linearni kontinuum je prostor šarkovskega



SLIKA 13. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.



SLIKA 14. Relacije pokritja v trditvi 5.5 lahko prikažemo z grafom.