UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tom Gornik

Izrek Šarkovskega

Magistrsko delo

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2023

Kazalo

Izrek Šarkovskega

Povzetek

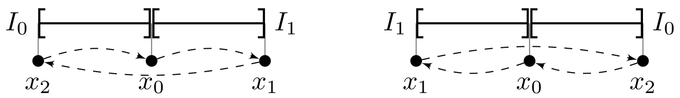
Sharkovsky theorem

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords: V tem poglavju si bomo zaradi lažjega razumevanja pogledali nekaj

posebnih primerov. Najprej si bomo pogledali najbolj znan poseben primer izreka Šarkovskega, ki obravnava funkcije s periodo 3. V naslednjih dveh primerih bomo postopek iz prvega primera razširili na daljše cikle. V zadnjem primeru bomo nakazali, kako lahko iz periodičnih točk funkcije f^2 ugotovimo, katere periode ima funkcija f, kar igra pomembno vlogo pri dokazu izreka **??**.

Primer 0.1 (3-cikel)**.** Prepričajmo se, da perioda 3 implicira obstoj vseh ostalih period. Točka lahko tvori 3-cikel na dva različna načina, ki sta v resnici zrcalna podoba drug drugega. Slika 1 prikazuje oba primera. Črtkane puščice nakazujejo,



Slika 1. Zrcalna podoba ciklov.

kam se s funkcijo f slikajo točke. Velja:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \text{ in } x_0 = f(x_2).$$

V obeh primerih smo z I_1 označili $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_1, z I_0 pa $\mathcal{O}$-interval s krajišči x_0 in x_2. Krajišči intervala I_1 se slikata v skrajno levo in skrajno desno točko cikla, zato imamo $\mathcal{O}$-vsiljeni pokritji $I_1 \to I_1$ in $I_1 \to I_0$. Krajišči intervala I_0 se slikata v krajišči intervala I_1, zato je tudi pokritje $I_0 \to I_1$ $\mathcal{O}$-vsiljeno. Ugotovljena pokritja lahko strnemo v diagram $\circlearrowleft I_1 \leftrightarrows I_0$. Iz relacije pokritosti $I_1 \to I_1$ in leme **??** sklepamo, da interval I_1 vsebuje negibno točko. Krajišči intervala I_0 ne morejo slediti zanki $I_0 \to I_1 \to I_0$, saj sta periodični točki s periodo 3. Točke, ki sledijo zanki, pa imajo periodo 1 ali 2. Ker je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, lahko s pomočjo leme **??** sklepamo, da je zanka elementarna. Torej lahko v intervalu I_0 poiščemo točko s periodo 2. Za dokaz obstoja točke s periodo $l \geq 4$ si poglejmo zanko

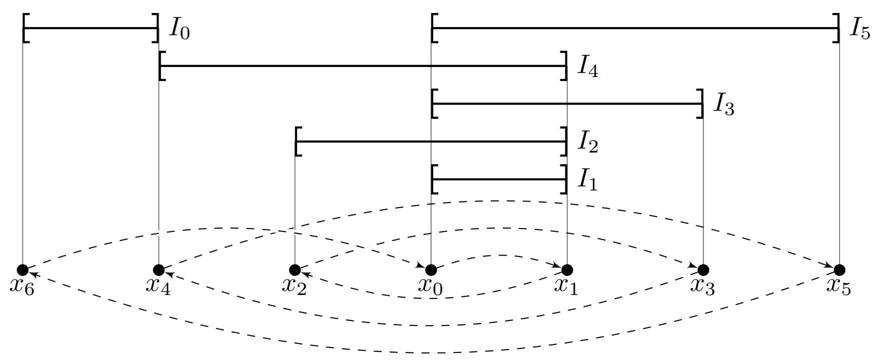
$$I_0 \to \overbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}^{l-1 \text{ ponovitev intervala } I_0} \to I_0. \tag{1}$$

V tej zanki nastopajo vsaj 3 kopije intervala I_1, v katerem ležita samo dve točki $\mathcal{O}$-intervala. Ker imajo točke iz cikla $\mathcal{O}$ periodo 3, v intervalu I_1 ne morejo ležati trije zaporedni členi iz cikla $\mathcal{O}$, torej tudi tri zaporedne iteracije funkcije f na krajiščih intervala I_0 ne morejo ležati v intervalu I_1. To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne moreta slediti zanki. Že prej smo ugotovili, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z intervalom I_1, zato je zanka (1) elementarna zanka dolžine l. Elementarna l-zanka vsebuje točko periode l, torej ima funkcija f periodo l za vsak $l \geq 4$. Pokazali smo, da je vsako naravno število perioda funkcije f. ♢

Primer 0.2 (7-cikel)**.** Sedaj bomo obravnavali 7-cikel $\mathcal{O}$ in $\mathcal{O}$-intervale prikazane na sliki 2. Podobno kot pri prejšnjem primeru označimo točke $x_i = f^i(x_0)$ ter intervale $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$ in tako naprej kot prikazuje slika 2. Za tako izbiro intervalov dobimo naslednje $\mathcal{O}$-vsiljene relacije pokritosti:

(1) $I_1 \to I_1$,
(2) $I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$,
(3) $I_0 \to I_1$, $I_0 \to I_3$ in $I_0 \to I_5$.

Zgornje relacije pokritosti lahko prikažemo z grafom, ki ga prikazuje slika 3. Iz grafa preberemo naslednje zanke.



SLIKA 2. Primer 7-cikla.

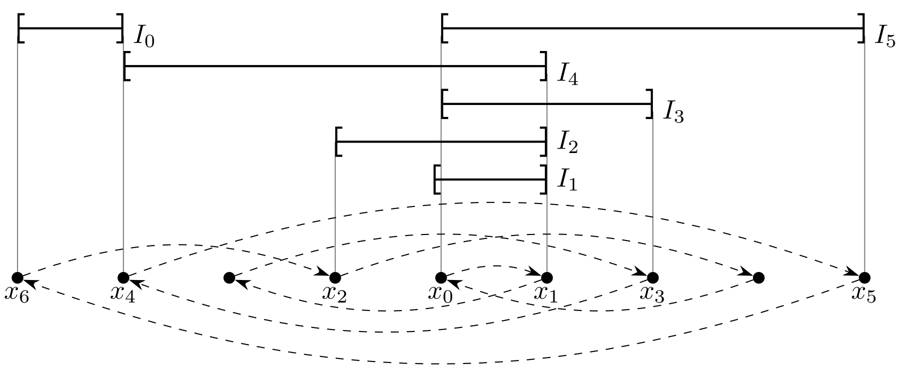
$$
\begin{tikzcd}
 & I_1 \arrow[loop above] \arrow[r] & I_2 \arrow[dr] & \\
I_0 \arrow[ur] \arrow[rrr] \arrow[dr, shift left] & & & I_3 \arrow[dl] \\
 & I_5 \arrow[ul, shift left] & I_4 \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

SLIKA 3. diagram

(1) $I_1 \to I_1$,
(2) $I_0 \to I_5 \to I_1$,
(3) $I_0 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$,
(4) $I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$,
(5) $I_0 \to \underbrace{I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1}_{r \text{ ponovitev intervala } I_1} \to I_2 \to I_3 \to I_4 \to I_5 \to I_0$, kjer je $r \geq 3$.

Zanka $I_1 \to I_1$ je elementarna, saj je elementarna vsaka zanka dolžine 1. Pri ostalih zankah lahko najprej ugotovimo, da za vsak $j \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ velja $\mathrm{int}(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Pri zankah (2), (3) in (4) nobena robna točka intervala I_0 ne more slediti zanki, saj je perioda robnih točk 7, perioda točk, ki sledijo zankam (2), (3) in (4) pa je manjša ali enaka 6. S tem so izpolnjeni pogoji leme **??** in so zanke elementarne. V teh zankah lahko poiščemo točke s periodami 2, 4, ali 6. Podobno kot v primeru 0.1 ugotovimo, da nobene tri zaporedne iteracije funkcije f na točkah cikla $\mathcal{O}$ ne ležijo v intervalu I_1, zato v tem intervalu tudi ne morejo ležati tri zaporedne iteracije funkcije f na robnih točkah intervala I_0. To pomeni, da krajišči intervala I_0 ne sledita zanki (5). S tem razmislekom so izpolnjeni pogoji leme **??**, zato je zanka (5) elementarna. Za dolžino zanke (5) lahko izberemo katerokoli naravno število večje od 7. Torej lahko na podlagi prisotnosti 7-cikla na sliki 2 sklepamo, da so prisotne vse periode l, za katere je $l \lhd 7$ $\diamondsuit$

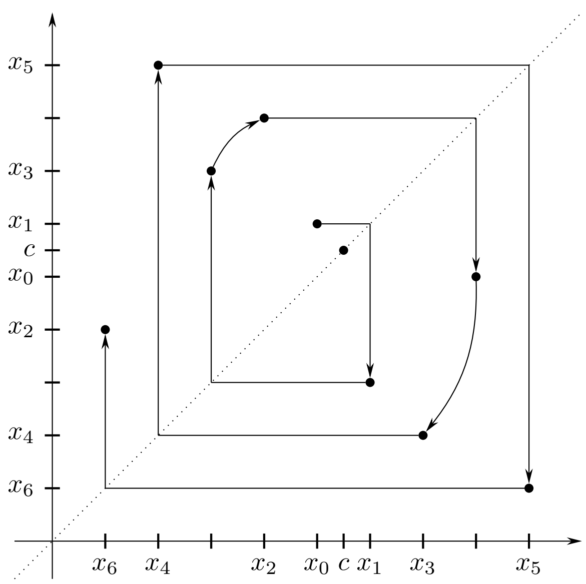
Primer 0.3 (9-cikel)**.** Predpostavimo, da ima funkcija f 9-cikel $\mathcal{O}$, ki je prikazan na sliki 4. Določili smo šest $\mathcal{O}$-intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_5$, za katere velja, da je notranjost intervala I_0 disjunktna z ostalimi intervali. Torej za $j = 1, 2, \ldots, 5$ velja enakost: $\mathrm{int}\,(I_0) \cap I_j = \emptyset$. Za tako izbrane intervale dobimo enake relacije pokritja kot v



SLIKA 4. Primer 9-cikla.

primeru 0.1 in lahko s pomočjo enakih sklepov ugotovimo prisotnost enakih elementarnih zank in posledično periodičnih točk s periodami 1, 2, 4, 6 in vse periode večje od 7.

Zaporedje števil $x_0, x_1, \ldots, x_6$ smo določili tako, da se spiralno oddaljujejo od centra $c := \frac{x_0+x_1}{2}$, kar je prikazano na sliki 5. S tako izbiro točk v zaporedju ne nastopajo vse točke cikla $\mathcal{O}$ in tudi ne velja enakost $f(x_i) = x_{i+1}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, 5$, kot je to veljalo v primeru 0.2.



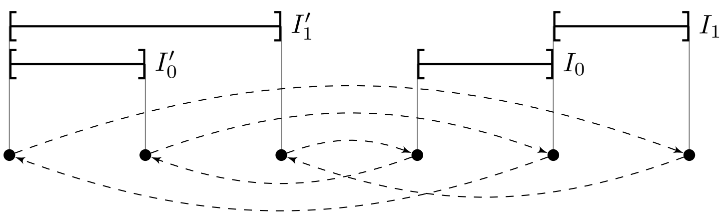
SLIKA 5. Izbira točk $x_0, \ldots, x_6$, ki se spiralno oddaljujejo od centra c.

V poglavju **??** je predstavljen algoritem za izbiro zaporedja točk $x_0, x_1, \ldots, x_6$. Glavna ideja algoritma je, da za naslednji člen zaporedja ne izberemo vedno sliko prejšnjega člena na način: $x_{i+1} = f(x_i)$, vendar včasih izberemo točko, ki je bližje centru c. Točko x_{i+1}, ki je bližje centra c kot točka $f(x_i)$, izberemo, če je slika $f(x_{i+1})$ bolj oddaljena od centra kot točka $f(f(x_i))$. Postopka izbire naslednje točke na sliki **??** in na sliki 5 sta podobna. V obeh primerih se pomikamo navpično do grafa funkcije in nato vodoravno do simetrale lihih kvadrantov. Sprememba se zgodi na sliki 5, ko lahko izberemo še neizbrano točko tako, da se v vodoravni smeri pomaknemo proti centru c in v navpični smeri stran od centra c. To se na sliki 5 zgodi dvakrat in je prikazano s krivimi puščicami. Postopek se ustavi, ko pridemo do točke x_j, katere slika $f(x_j)$ je na isti strani centra c kot točka sama. V primeru na sliki 5 je to točka x_6.

V poglavju **??** si bomo natančno pogledali kakšne lastnosti mora imeti zaporedje točk $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, ki predstavlja krajišča intervalov $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$. Izvedeli bomo tudi, kako taka izbira točk in intervalov zagotavlja obstoj elementarnih zank. V poglavju **??** se bomo naučili, kako iz točk cikla izberemo zaporedje, ki ima željene lastnosti.

$\diamondsuit$

Primer 0.4 (6-cikel)**.** Obravnavali bomo 6-cikel, ki je na sliki 6. Bistveno pri tem



SLIKA 6. Primer 6-cikla.

primeru je, da se tri točke na levi strani slikajo v tri točke na desni in obratno. Torej, tri točke na desni tvorijo 3-cikel za funkcijo f^2. Podobno kot v primeru 0.1 lahko določimo intervala I_0 in I_1 ter opazujemo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$ za intervala I_0 in I_1, ki sta prikazana na sliki 6. Enako kot prej lahko zaključimo, da ima funkcija f^2 elementarne zanke vseh dolžin in zato je vsako naravno število $l \in \mathbb{N}$ perioda funkcije f^2. Za funkcijo f določimo še dva intervala. Interval I_0' naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_0 \cup \mathcal{O})$, interval I_1' pa naj bo najkrajši $\mathcal{O}$-interval, ki vsebuje točke iz množice $f(I_1 \cup \mathcal{O})$. Sedaj bomo prikazali rekurzivno metodo, ki jo bomo uporabili kasneje v dokazu izreka Šarkovskega. Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo elementarne k-zanke za funkcijo f^2 poiščemo elementarno $2k$-zanko za funkcijo f. V primeru, ki ga obravnavamo, bo to pomenilo, da je vsako sodo naravno število perioda funkcije f. Poglejmo si elementarno k-zanko za funkcijo f^2, v kateri nastopajo relacije pokritja $I_1 \xrightarrow{f^2} I_1$, $I_1 \xrightarrow{f^2} I_0$ in $I_0 \xrightarrow{f^2} I_1$. Vsak zapis $I_1 \xrightarrow{f^2}$ v zanki lahko zamenjamo z $I_1 \xrightarrow{f} I_1' \xrightarrow{f}$, vsak zapis $I_0 \xrightarrow{f^2}$ pa z $I_0 \xrightarrow{f} I_0' \xrightarrow{f}$. S to spremembo dobimo $2k$-zanko za funkcijo f, ki ni samo dvakrat ponovljena k-zanka. Prepričajmo se, da je $2k$-zanka elementarna. Denimo, da točka p sledi $2k$-zanki za funkcijo f. Pokazati moramo, da ima periodo $2k$ za funkcijo f. Opazimo, da točka p sledi prvotni k-zanki za funkcijo f^2 in ima zato periodo k za funkcijo f^2. Po drugi strani pa iteracije točke p s funkcijo f ležijo alternirajoče enkrat na levi in enkrat na desni strani srednjega intervala, saj $2k$-zanka za f alternira med intervali s črtico in intervali brez črtice. Zato je orbita točke p sestavljena iz $2k$ različnih točk. Na desni strani srednjega intervala leži k sodih iteracij, na levi strani pa leži k lihih iteracij. To pomeni, da je perioda točke p za f enaka $2k$. Ker smo dolžino začetne elementarne k-zanke izbrali poljubno, smo pokazali, da je vsako sodo število perioda za f. Ker interval $[x_0, x_1]$ s funkcijo f pokrije samega sebe, pa obstaja negibna točka. Torej ima f tudi periodo 1. $\diamondsuit$