Содержание

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16 Деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена. Теорема единственности гиперповерхности с заданными первой и второй фундаментальными формами.

17 Условие совместности системы дифференциальных уравнений. Теорема о разрешимости.

18 Условия совместности для системы Гаусса-Вейнгартена. Равенства Гаусса и Петерсона-Майнарди-Кодацци. Блистательная теорема Гаусса

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

1

16 Деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена. Теорема единственности гиперповерхности с заданными первой и второй фундаментальными формами.

Теорема 1 (Деривационные формулы Г-В)**.**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} r_k + b_{ij} m \\ \dfrac{\partial m}{\partial x^j} = -\beta^k_j r_k, \beta^k_j = -g^{ik} b_{ij} \end{cases}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial r_s}{\partial x^i} = r_{si} = \Pi(r_{si}) + \nu_{si}, \text{где } \nu_{si} \perp T_P M$$

По определению $\Pi(r_{si}) = \Gamma^k_{si} r_k$ и $\nu_{si} = (r_{si}, m)m = b_{si} m$. Отсюда получаем первое равенство системы. Заметим, что $(m, r_s) = 0$. Тогда

$$(\frac{\partial m}{\partial x^i}, r_s) + (m, \frac{\partial r_s}{\partial x^i}) = \beta^k_i (r_k, r_s) + b_{is} = 0$$

так как $\frac{\partial m}{\partial x^i}$ является линейной комбинацией векторов r_k с какими-то коэффициентами β^k_i. $(r_k, r_s) = g_{ks}$ и следовательно

$$\beta^k_i = -g^{ks} b_{is}$$

где g^{ks} матрица обратная к g_{ks}. □

17 Условие совместности системы дифференциальных уравнений. Теорема о разрешимости.

Пусть $x \in D \subset \mathbb{R}^n, y, y_0 \in \mathbb{R}^m, f_j(x,y) : V \to \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x^j} = f_j(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{*}$$

Продифференцируем первое уравнение по x^i:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial y^\alpha} f_i^\alpha$$

Аналогично для $f_i(x,y)$ и x^j:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_i}{\partial y^\alpha} f_j^\alpha$$

Определение 1. *Система уравнений* $(*)$ *удовлетворяет в* V *условиям совместности, если* $\frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial y^\alpha} f_i^\alpha = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_i}{\partial y^\alpha} f_j^\alpha$.

Теорема 2. *Пусть* $(*)$ *удовлетворяет в* V *условиям совместности. Тогда в некоторой окрестности точки* x_0 $\exists!$ *гладкая функция* $y(x)$*, удовлетворяющая* $(*)$ *и условию* $y(x_0) = y_0$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial x^1} = f_1(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n, y^{(1)}) \\ y^{(1)}|_{x^1 = x_0^1} = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

По теореме единственности у данной задачи Коши есть единственное решение $y^{(1)}(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ на некотором интервале. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^{(2)}}{\partial x^2} = f_2(x^1, x^2, x_0^3 \dots, x_0^n, y^{(1)}) \\ y^{(2)}|_{x^2 = x_0^2} = y^{(1)}(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \end{cases} \tag{2}$$

Правые части системы (2) зависят от x^1 как от параметра. Пользуясь теоремой единственности и теоремой о гладкой зависимости от параметра, находим функцию $y^{(2)}(x^1, x^2, x_0^3, \dots, x_0^n)$, удовлетворяющую системе (2). Но данная функция также удовлетворяет системе (1) поскольку:

$$g = \frac{\partial y^{(2)}}{\partial x^1} - f_1(x^1, x^2, x_0^3, \dots, x_0^n, y^{(2)})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y^{(2)}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial f_1}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^{(2)\alpha}}{\partial x^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^{(2)\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial f_1}{\partial y^\alpha} f_2^\alpha \tag{**}$$

Из условий совместности следует, что $\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y^\alpha} f_2^\alpha - \frac{\partial f_2}{\partial y^\alpha} f_1^\alpha$. Тогда

$$(**) = \frac{\partial f_1}{\partial y^\alpha} f_2^\alpha - \frac{\partial f_2}{\partial y^\alpha} f_1^\alpha + \frac{\partial f_2}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^{(2)\alpha}}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial y^\alpha} f_2^\alpha = \frac{\partial f_2}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^{(2)\alpha}}{\partial x^1} - f_1^\alpha\right) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x^2} = \frac{\partial f_2}{\partial y^\alpha} g^\alpha$$

При $g|_{x^2 = x_0^2} = 0$. Поэтому по теоерме единственности система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y^\alpha} g^\alpha \\ g|_{x^2 = x_0^2} = 0 \end{cases}$$

имеет решение $g \equiv 0$ в некоторой окрестности точек x_0^1, x_0^2. Аналогично для функций $y^{(k)}, f_k$, где $k = 3, \dots, n$. В результате получаем функцию $y(x) = y^{(n)}(x)$, удовлетворяющую всем n системам.
Так как

$$\begin{aligned} y|_{x^n = x_0^n} &= y^{(n-1)}(x^1, \dots, x^{n-1}) \\ &\vdots \\ y|_{x^n = x_0^n, \dots, x^2 = x_0^2} &= y^{(1)}(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ y|_{x^n = x_0^n, \dots, x^1 = x_0^1} &= y^{(1)}(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) = y^{(1)}|_{x^1 = x_0^1} = y_0 \end{aligned}$$

то $y(x)$ удовлетворяет начальному условию.
Докажем единственность: пусть в некоторой окрестности x_0 $y(x)$ – решение $(*)$. Тогда рассмотрим функцию $y(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$, но это в точности $y^{(1)}$, так как она удовлетворяет системе (1), а у неё в свою очередь есть единственное решение. Далее: $y(x^1, x^2, x_0^3, \dots, x_0^n) = y^{(2)}$ поскольку она удовлетворяет (2) и (1) при $x^2 = x_0^2$. Таким образом в итоге получаем, что $y(x^1, \dots, x^n) = y^{(n)}$. □

18 Условия совместности для системы Гаусса-Вейнгартена. Равенства Гаусса и Петерсона-Майнарди-Кодацци. Блистательная теорема Гаусса

Условия совместности для уравнений Г и ПМК:

$$\frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i} r_k + \frac{\partial r_l}{\partial x^i}\Gamma^l_{sj} + \frac{\partial b_{sj}}{\partial x^i} m + \frac{\partial m}{\partial x^i} b_{sj} = \frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i} r_k + (\Gamma^k_{li} r_k + b_{li} m)\Gamma^l_{sj} + \frac{\partial b_{sj}}{\partial x^i} m - b_{sj}\beta^k_i r_k =$$
$$(\frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{li}\Gamma^l_{sj} - b_{sj}\beta^k_i) r_k + (b_{li}\Gamma^l_{sj} + \frac{\partial b_{sj}}{\partial x^i}) m$$

Поменяем местами индексы i, j и получим условия совместности:

$$\frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i} + \Gamma^k_{li}\Gamma^l_{sj} - b_{sj}\beta^k_i = \frac{\partial \Gamma^k_{si}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{lj}\Gamma^l_{si} - b_{si}\beta^k_j \tag{Г}$$

$$b_{li}\Gamma^l_{sj} + \frac{\partial b_{sj}}{\partial x^i} = b_{lj}\Gamma^l_{si} + \frac{\partial b_{si}}{\partial x^j} \tag{ПМК}$$

Определение 2 (Уравнения Г и ПМК)**.**

$$\frac{\partial \Gamma^k_{sj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{si}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{sj}\Gamma^k_{li} - \Gamma^l_{si}\Gamma^k_{lj} - \beta_{sj} b^k_i - \beta_{si} b^k_j = 0$$

$$\Gamma^l_{sj} b_{li} - \Gamma^l_{si} b_{lj} + \frac{\partial b_{sj}}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{si}}{\partial x^j} = 0$$

Теорема 3. *Система Гаусса-Вейнгартена совместна $\Leftrightarrow$ выполнены равенства Гаусса и Петерсона-Майнарди-Кодацци.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Уравнения Г и ПМК, очевидно, выполняются.

$$-\frac{\partial^2 m}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial \beta^k_j}{\partial x^i} r_k + \beta^l_j \frac{\partial r_l}{\partial x^i} = \frac{\partial \beta^k_j}{\partial x^i} r_k + \beta^l_j(\Gamma^k_{li} r_k + b_{li} m) = (\frac{\partial \beta^k_j}{\partial x^i} + \beta^l_j \Gamma^k_{li}) r_k + (\beta^l_j b_{li}) m$$

Тогда условия совместности для $\frac{\partial^2 m}{\partial x^j \partial x^i}$:

$$\frac{\partial \beta^k_j}{\partial x^i} + \beta^l_j \Gamma^k_{li} = \frac{\partial \beta^k_i}{\partial x^j} + \beta^l_i \Gamma^k_{lj} \tag{a}$$

$$\beta^l_j b_{li} = \beta^l_i b_{lj} \tag{b}$$

Уравнение (b) выполняется автоматически, так как

$$g^{sl} b_{sj} b_{li} - g^{sl} b_{si} b_{lj} = g^{sl} b_{sj} b_{li} - g^{ls} b_{li} b_{sj} = 0$$

А уравнение (a) выполняется, если выполняется ПМК

□