



UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO.

Facultad de Ingeniería.



# Trabajo final de comunicación digital avanzada (Cod.33) Modulación y Demodulación M-DPSK

Alumno:

Gorordo, Lucas Ariel.

Fecha de entrega:06/07/2020



# Índice

Resumen	2
Introducción	3
Desarrollo	8
Antecedentes de M-DPSK	8
Análisis de M-DPSK	23
Fase recibida como función del retardo de propagación	23
Detección No coherente	23
BPSK diferencial detectado coherentemente	25
Simulación sistemas BDPSK	29
BPSK diferencial detectado diferencialmente coherentemente	38
Moduladores y demoduladores M-DPSK	40
Simulaciones sistemas QDPSK	43
Simulaciones sistemas 8DPSK	50



# Resumen

El presente informe tiene como propósito describir el funcionamiento de la técnica de modulación y demodulación M-aria por desplazamiento de fase diferencial comúnmente conocida como M-DPSK, destacando el rendimiento en un canal AWGN para distintos valores de M mediante una simulación en Matlab. Para ello, se hará una breve introducción con el objetivo de entender que es un sistema de comunicaciones, que procesos forman parte de él, cuál es la finalidad tanto del modulador como del demodulador, cuales son las distintas técnicas posibles de implementar y cuáles son las herramientas que caracterizan a este proceso y permiten entender por lo tanto su funcionamiento y performance.

Luego, se plantean conceptos teóricos acerca de sistemas B-DPSK, Q-DPSK y 8-DPSK para finalmente mostrar algunas implementaciones posibles en Simulink de dichos sistemas.



# Introducción

Lo primero que uno debería cuestionarse al tratar de entender cualquier técnica tanto de modulación y demodulación es si conoce la definición de un sistema de comunicación. Un sistema de comunicación es un conjunto de procesos interrelacionados que tiene como propósito transferir información desde un punto denominado origen de la información hasta otro punto denominado destino de la información con el menor grado de perturbación/degradación introducido por el canal de comunicaciones.

La información es el significado de lo que se quiere transmitir, es la interpretación de los mensajes. Es una cantidad intangible netamente relacionada con la incertidumbre. Todo aquello que ya se conoce no puede definirse como información y no es por lo general útil en los sistemas de comunicaciones. Entonces, de acuerdo al tratamiento de la información los sistemas pueden clasificarse en:

→ Sistemas de comunicación analógicos: son aquellos donde la información dentro del sistema es manipulada como una señal analógica (señal eléctrica de voltaje en función del tiempo). La misma puede adquirir infinidad de valores tanto antes del proceso de modulación como al ser transmitida por el canal de comunicaciones.

→ Sistemas de comunicación digital: son aquellos donde la información dentro del sistema es manipulada como un flujo de bits (unidad mínima de información lógica, que puede tener solo dos estados (“1” ó “0”)) y que al pasar por el proceso de modulación produce señales discretas es decir que solo pueden tomar un número finito de valores en función del tiempo.

En definitiva, ambos sistemas cuando envían información por un medio de transmisión manipulan señales analógicas. La diferencia radica en cómo se tratan los datos internamente, siendo que en los sistemas analógicos en todo momento se trabaja/utiliza señales analógicas y en los sistemas digitales toda información se transforma a un flujo de bits para ser manipulados y últimamente lograr inyectar sobre el canal una señal analógica de valores discretos. Esto último es fundamental, porque la razón de ser de las comunicaciones digitales a diferencia de las comunicaciones analógicas es que tanto el sistema modulador como demodulador conozcan todas las waveform posibles de transmitir (forma de onda en función del tiempo cuyas características espectrales son las adecuadas para el canal de comunicación en cuestión), por lo tanto, el demodulador realiza un trabajo de detección y no de estimación. Al conocer todos los posibles símbolos, debe utilizar algún procedimiento para comparar la forma de onda recibida (señal de interés perturbada con ruido) con todas las señales prototipo. El demodulador decidirá cuál fue la waveform transmitida a partir de la menor diferencia. Luego, obtendrá la cantidad de bits de información mediante un procedimiento muy parecido al que realiza el modulador para la asignación de flujo de bit a forma de onda.

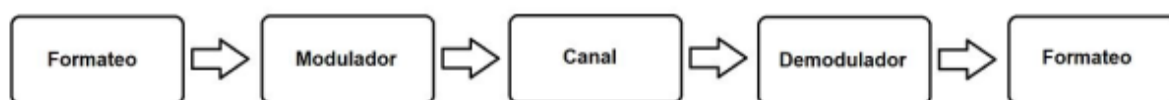
Finalmente, con los bits de información ya presentes en la estación receptora se computa lo que se denomina probabilidad de error de bits comúnmente conocida como BER que no es ni más ni menos que la razón entre bits errados y bits totales transmitidos.

Si todos los bits de información son correctos, dicha información es totalmente recuperada ya que no contiene ningún tipo de error. Esto no ocurre en los sistemas de

comunicación analógicos ya que el ruido y las distorsiones una vez presente en la forma de onda transmitida no pueden ser removidas en su totalidad por el receptor. Como consecuencia el sistema de comunicación analógico es más vulnerable a las características y distancias a recorrer a través del canal de transmisión.

Una vez aclarada la diferencia entre ambos sistemas, las técnicas de modulación y demodulación planteadas en el resumen son propias de los sistemas de comunicación digital y precisamente de los sistemas digitales de banda de paso. Esto significa que el proceso de modulación genera un desplazamiento en el dominio de la frecuencia de las características espectrales de la información para que sea compatible con las del canal de comunicación.

Un diagrama general de este tipo de sistemas es el siguiente:



Como primer proceso se encuentra el formateo, el cual consiste en la adaptación de todo tipo de información para que sea compatible con el sistema digital. Es decir, obtener un flujo de bits que sean lo más representativos de la información. Si la misma se encuentra en bits, no es necesario dicho proceso, si es textual es necesario el formateo, pero solo con el proceso de codificación y si resulta ser analógica, la misma debe atravesar un proceso de muestreo, cuantizado y codificado para finalmente obtener bitstream.

Luego, se encuentra el moduladora digital que es un proceso cuyo propósito es transformar el flujo de bits que entrega el formateo en formas de ondas en función del tiempo denominadas waveform cuyas características espectrales son las adecuadas para ser transmitidas por el canal de comunicación. El modulador tiene la posibilidad tomar de uno o varios bits para realizar la función de asignación. Si toma un bit, los sistemas son denominados binarios y si toma “k” bits son denominados M-arios. Esto se debe a que la cantidad de waveform posibles a transmitir están relacionadas con la cantidad de combinaciones distintas que se pueden generar con “k” bits, dando lugar a la relación:

$$M = 2^k \quad (1)$$

Además, las waveform se hacen presentes en el canal un tiempo equivalente a “Ts”, el cual se denomina tiempo de símbolo y está relacionado al tiempo de bit “Tb” mediante la siguiente ecuación

$$Ts = k \cdot Tb \quad (2)$$

Estos conceptos dejan en claro que todo modulador digital lee una cantidad fija de bits de longitud “k” denominado mensaje digital y asigna una forma de onda asociada, es decir, que podría pensarse a la modulación como una tabla que vincula mensajes digitales con waveform. Sin embargo, no todos los moduladores digitales pueden vincular dicha función de mapeo mediante una tabla de asignación. Tal es el caso de los moduladores digitales diferenciales, los cuales realizan una función de asignación mediante una regla. Estos moduladores y demoduladores en función de la observación de la forma de onda transmitida en el tiempo de símbolo anterior y la información actual (mensaje digital) deciden cual de todas las formas de



onda posibles es la que se va a transmitir. Las técnicas de modulación y demodulación M-DPSK pertenecen a este grupo.

Existen ciertos parámetros que no pueden pasarse por alto a la hora de describir un modulador digital y son el ancho de banda necesario y el factor de correlación cruzada. El primero depende de lo que se denomina pulso formador de onda y tasa de símbolo “ $R_s$ ” que es la cantidad de símbolos o waveform que se pueden transmitir por segundo. Resulta ser la inversa del tiempo de símbolo por lo tanto se verifica la siguiente ecuación

$$R_s = R_b/k \quad (3)$$

El pulso formador de onda en la mayoría de técnicas de modulación suele ser pulso rectangular ó raíz de coseno alzado. Dependiendo cual se implementa es el ancho de banda resultante y características espectrales de las waveform. El último parámetro, es decir, la correlación cruzada, es una herramienta que permite medir el grado de parecido de una señal respecto de la otra y puede adquirir valores entre -1 y 1. Se utiliza por los moduladores para hacer las waveform lo más distintas posibles una de otra ya que repercute directamente en la performance del sistema, es decir, en el cálculo de BER.

El siguiente proceso presente en un sistema de comunicaciones es el canal AWGN. El mismo es responsable de la transmisión de información desde la estación transmisora hasta la receptora y del deterioro de las comunicaciones. Para modelar un canal de comunicaciones debe considerarse que es ideal, lo cual significa que la magnitud de la respuesta en frecuencia es constante en la banda de paso y la fase resulta ser una función lineal de la frecuencia. En el dominio temporal, dichas características pueden verificarse cuando las señales recibidas resultan ser una versión escalada y retardada en el tiempo de la entrada, es decir, debe cumplirse que

$$y(t) = k \cdot x(t - t_d) \quad (4)$$

donde “ $y(t)$ ” es la señal resultante, “ $k$ ” es un factor de atenuación propio del canal, “ $x(t)$ ” es la señal de entrada y “ $t_d$ ” es el retardo introducido por el mismo.

Sumado a dicho comportamiento, los canales de comunicación tienen una fuente de ruido inevitable que se denomina ruido térmico, el cual es producido por el movimiento térmico de los electrones dentro de los conductores siendo independiente del voltaje aplicado y corrompe a la señal de forma aditiva, lo que significa que se suma a la señal de información que viaja por el canal de transmisión. En definitiva, es el ruido térmico presente en los canales de comunicación digital que se modela como AWGN ya que es la observación de un proceso de ruido blanco de banda limitada como resultado de aplicar un filtro acoplado en la etapa receptora. El ruido tiene densidad espectral de potencia plana en el dominio de la frecuencia, pero está limitada al ancho de banda de las señales de información, por lo tanto, el ruido no tiene las características espectrales suficientes para lograr en tiempos infinitesimales cambiar de amplitudes muy pequeñas a muy grandes. Como consecuencia, su función de distribución de probabilidad es gaussiana con media nula y su potencia está caracterizada por la varianza “ $\sigma^2$ ”.

Luego, la etapa receptora es la encargada de recuperar a partir de la forma de onda recibida (waveform más ruido) los bits de información. Para que sea eficiente y funcione correctamente es necesario tener presente tres procesos interrelacionados dentro de lo que se



denomina demodulador. Por un lado, está el filtro acoplado el cual es característico de los sistemas de comunicación digital ya que es la mejor manera de implementar un filtro receptor. Este filtro se denomina acoplado porque es diseñado en función de cada una de las waveform esperadas por el demodulador para obtener a su salida la máxima relación señal a ruido cuando se haga presente en la entrada del receptor dicha señal.

La expresión particular con la cual se define a la respuesta impulsional de un filtro acoplado es la siguiente:

$$h(t) \begin{cases} k \cdot s(Ts - t) & 0 \leq t \leq Ts \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (5)$$

Al realizar el proceso de convolución entre la forma de onda recibida y la respuesta impulsional del filtro se encuentra que el resultado definido como  $z(t)$  es máximo cuando la convolución se realiza para  $t = Ts$  y si además se inspecciona como es la expresión analítica de la convolución para dicho instante de tiempo, se encuentra que es igual a la correlación cruzada.

$$z(t)|_{t=Ts} = \int_0^{Ts} r(\tau) \cdot s(\tau) d\tau \quad (6)$$

Como las decisiones del demodulador se toman en función de  $z(Ts)$ , donde el proceso de convolución y correlación cruzada arrojan iguales valores, podría utilizarse como filtro acoplado un correlador, es decir, una combinación entre un multiplicador e integrador. En definitiva, el demodulador contará con  $M$  filtros diseñados puramente y exclusivamente para cada una de las waveform ó  $M$  correladores. Sin embargo, es muy útil para sistemas  $M$ -arios utilizar el concepto de bases, para optimizar la implementación.

Las bases son un conjunto de funciones linealmente independientes que permiten representar cualquier waveform que genera el modulador digital mediante una combinación lineal de las mismas. Estas funciones para que sean denominadas funciones bases deben cumplir el criterio de ortogonalidad, es decir, que la correlación cruzada entre dos funciones bases diferentes cualesquiera sean cero. Entonces, en lugar de utilizar  $M$  correladores con señales de referencia iguales a las waveform esperables, se utiliza las bases.

Luego del filtro acoplado, se puede incorporar un filtro ecualizador, cuyo objetivo es contrarrestar las distorsiones introducidas por un canal no ideal. Finalmente, se toman muestras cada tiempo de símbolo luego del filtro acoplado o filtro ecualizador (si se decide implementar) definidas como  $z(Ts)$  que es una variable aleatoria. La misma es modelada como la suma de dos variables aleatorias. Por un lado, las diferentes waveform que son señales determinísticas pero lo aleatorio es el tiempo de arribo y, por otro lado, el propio ruido térmico presente todo el tiempo en el sistema, pero con una forma totalmente aleatoria entre tiempos de símbolo. Estas muestras  $z(Ts)$  son valores de voltaje directamente relacionado con la energía de símbolo recibido y son las utilizadas en el bloque de toma de decisión para determinar cuáles fueron las waveform a transmitir. Este proceso, necesita resolver ecuaciones de probabilidades condicionales a posteriori dado que conoce el valor de  $z(Ts)$  pero no sabe cuál fue la waveform que se quiso enviar. La resolución de dichas ecuaciones de probabilidad implica una dificultad matemática asociada demasiado elevada, por lo tanto, se plantea que mediante teorema de bayes de forma simplificada ya que el ruido en el canal afecta de forma independiente a cada



símbolo, la resolución de otro conjunto de ecuaciones de probabilidad que permiten simplificar el proceso de toma de decisiones para el demodulador.

Un análisis detallado de la toma de decisiones y verificando la manera en la cual se comenten menos errores, se llega a la conclusión de que a mayor “ $E_b/N_0$ ” definido como razón entre energía de bit recibido y densidad espectral de potencia de ruido, existe menos probabilidad de error de bit, es decir, mejora la performance o BER. Por esta razón es que el filtro receptor planteado a la entrada de la etapa de recepción debe obtener a la salida la máxima relación señal a ruido.



# Desarrollo

## Antecedentes de M-DPSK

Las modulaciones y demodulaciones M-DPSK son un grupo de técnicas basadas en los conceptos de PSK (Modulación por desplazamiento de fase) que proponen una solución a los problemas de coherencia (necesidad de tener referencia de fase de la señal recibida) que presentan las técnicas de las cuales se basa su funcionamiento.

Partiendo del hecho de que en las técnicas de modulación digital en banda de paso se necesitan que los pulsos formadores de onda (pulso rectangular ó raíz de coseno alzado) sean transportados en una señal más rápida o de mayor frecuencia, denominada portadora, esta señal se encarga de adaptar el contenido espectral de los pulsos dentro del ancho de banda disponible en el canal de transmisión.

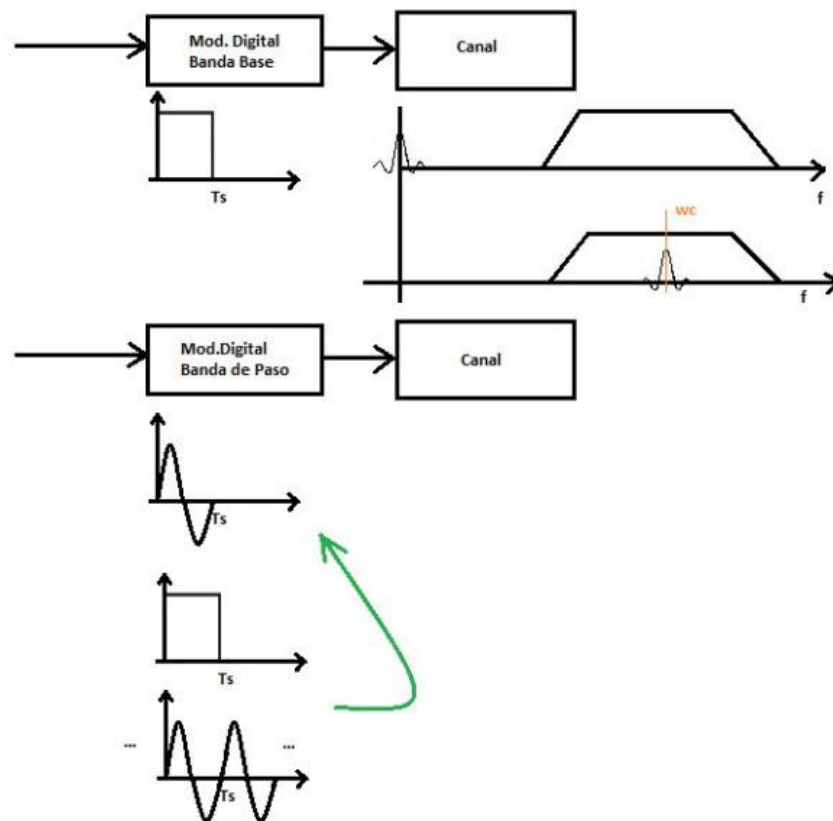


Ilustración 1: Concepto de Modulación en banda de paso

Aunque la señal portadora puede ser cualquier señal periódica, en general se prefiere a las señales sinusoidales, ya que no necesitan ningún tipo de proceso de filtrado adicional para generar el proceso de modulación. Considerando que se utiliza un pulso formador de onda rectangular, las waveforms se obtienen como el producto de la portadora con el pulso. La expresión de las waveforms de forma genérica es la siguiente:



$$s(t) = A(t)\cos(\theta(t)) \quad 0 \leq t \leq Ts \quad (7)$$

donde “A(t)” es la función que describe la variación de la amplitud en el tiempo y “ $\theta(t)$ ” es la función que describe la variación del argumento del coseno también en función del tiempo.

Es necesario destacar que  $\theta(t)$  está compuesto por dos variables, frecuencia instantánea definida como “ $w_o$ ” y “ $\varphi$ ” definida como fase de la señal. De esta forma se puede expresar  $\theta(t)$  de la siguiente manera:

$$\theta(t) = w_o t + \varphi \quad (8)$$

De esta manera, los moduladores digitales de banda de paso se basan en el uso de waveform del tipo sinusoidal modificadas de alguna manera por los pulsos formadores de onda para definir a cada símbolo durante un intervalo de tiempo “Ts”. Diferenciándose por cambios en los parámetros de amplitud, frecuencia o fase. Dependiendo cuál de los parámetros se tome como referencia, se pueden definir técnicas de modulación y demodulación del tipo PSK (Phase Shift Keying) Modulación por desplazamiento de Fase, FSK (Frequency Shift Keying) Modulación por desplazamiento de Frecuencia y ASK (Amplitude-shift keying) modulación por desplazamiento de amplitud.

En particular, la modulación digital PSK consiste en la modificación de la fase de la señal sinusoidal para la transmisión de diversas waveform. Esto significa que la información está contenida en la fase de la señal transmitida. Analíticamente, considerando que el pulso formador de onda es un pulso rectangular de duración “Ts” la expresión de cada una de las waveform es la siguiente:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2Es}{Ts}} \cos(w_o t + \theta_i) \quad 0 \leq t \leq Ts \quad (9)$$

donde “ $\theta_i$ ” va a cambiar de acuerdo al mensaje digital presente a la entrada del modulador.

De esta forma, manteniendo la amplitud constante y la frecuencia también, existen M valores diferentes de fase posibles de asignar a cada una de las waveform a partir de la siguiente relación:

$$\theta_i = \frac{2\pi}{M} i \quad i = 1, 2, 3, \dots, M \quad M = 2^k \quad (10)$$

A partir de este punto es donde se empieza a plantear de qué manera se pueden elegir las diversas fases de las señales a transmitir, es decir de las waveform, de manera tal, que en un tiempo de símbolo sean lo más diferentes posibles. La herramienta que permite analizar el grado de parecido de una señal respecto a la otra ya ha sido presentada en la introducción y es la correlación cruzada.

Formalmente la correlación cruzada es definida de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{1}{Es} \int_0^{Ts} s_i(t) \cdot s_j(t) \cdot dt \quad i, j : 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

donde “Es” es la energía de símbolo y tanto “ $s_i(t)$ ” como “ $s_j(t)$ ” son funciones miembros del set posibles a transmitir. Ambas waveform solo contienen cambios de fase una respecto a la

otra, así que se mostrará para una determinada señal sinusoidal como dicho cambio afecta en el grado de parecido de una señal respecto a la otra. El objetivo es lograr un conjunto de  $M$  señales desfasadas que resulten lo más distintas posibles para contribuir a mejorar la performance del sistema.

Dada la señal sinusoidal de la forma  $s(t) = 1 \sin(2\pi \cdot 100 t)$   $0 \leq t \leq 0.01$  se plantean 8 fases distintas como si se tratara de un sistema 8PSK. Por lo tanto, los valores de fase son:  $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$  siguiendo la relación planteada anteriormente de " $\theta_i$ " en función de  $M$ .

A continuación, se presentan algunas líneas de código en programa Matlab con la finalidad de mostrar cómo sería el cálculo práctico de la correlación cruzada entre dos señales.

```
>> Ts=1/100;
>> Tsampling=Ts/1000;
>> tiemp=[0:Tsampling:Ts-Tsampling];
>> Es=((1^2)*Ts)/2;
>> x=1*sin(2*pi*100.*tiemp);
>> x2=1*sin(2*pi*100.*tiemp-pi/4);
>> Int1=(1/Es)*sum((x.*x2).*Tsampling)

Int1 =

    0.7071
```

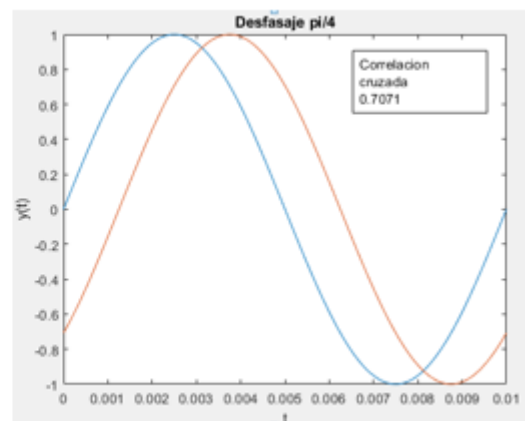


Ilustración 2:Ejemplo Correlación cruzada Matlab

Como se mencionó anteriormente, la referencia para el cálculo de correlación cruzada era la señal con fase  $\theta_i=0$ . A partir de la siguiente imagen se puede ver cómo a medida que el desfase entre dos señales aumenta desde 0 hasta llegar a  $\pi$  el valor de correlación cruzada disminuye desde 1 hasta -1. Sin embargo, quedaría probar el resto de valores posibles de fase, es decir, entre  $\pi$  y  $2\pi$ . Los cálculos no fueron planteados porque se repetirán los valores ya que se alcanza la máxima diferencia entre señales cuando el desfase es  $\pi$ .

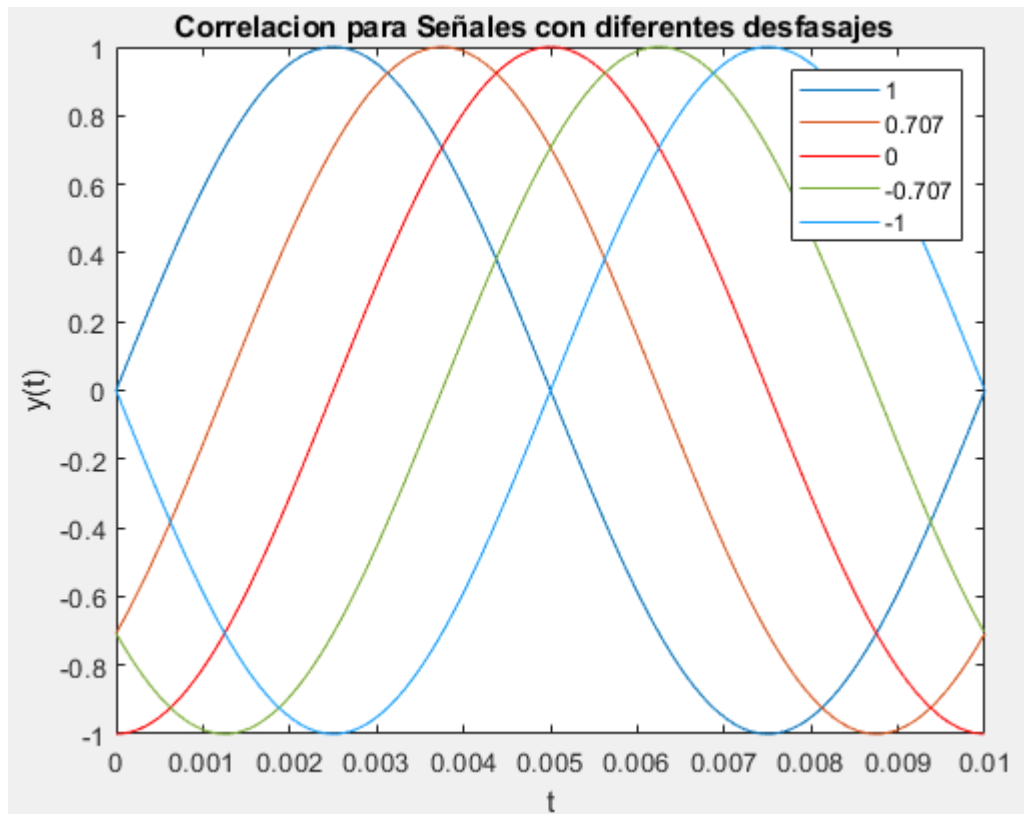


Ilustración 3: Valores típicos de correlación cruzada para 8PSK

Entonces, para el caso BPSK las fases que deberían elegirse para las waveform son  $\theta_1=0$  y  $\theta_2=\pi$ . Esto garantiza que ambas señales prototipo presentes en el modulador digital sean lo más distintas posibles. ¿Pero qué ocurre si aumenta el orden del sistema modulador/demodulador, es decir, aumenta “k” y por lo tanto la cantidad de señales posibles a transmitir (siguiendo la relación planteada en la introducción  $M=2^k$ )? Las diferentes señales empiezan a amontonarse en el plano espacial definido por dos bases (fase y cuadratura) ya que la diferencia de fase es cada vez menor y la distancia entre señales prototipo empieza a disminuir si no se aumenta la potencia. Esto repercutirá sobre la performance del sistema ya que un vector de ruido cada vez menor resulta ser suficiente para producir errores en la toma de decisión haciendo que la probabilidad de error de bit aumente, pero garantizando mayor eficiencia, ya que la razón entre tasa de bit “Rb” y ancho de banda ocupado por la técnica de modulación “W” crece. A medida que en los esquemas PSK y DPSK aumenta el orden del sistema, el tiempo de símbolo aumenta y como las waveform tienen la misma amplitud todo el tiempo y la misma frecuencia, al durar más (pulso formador de onda más ancho) el ancho de banda disminuye. Además, puede pensarse como que en el mismo ancho de banda o menor se pueden transportar más bits.

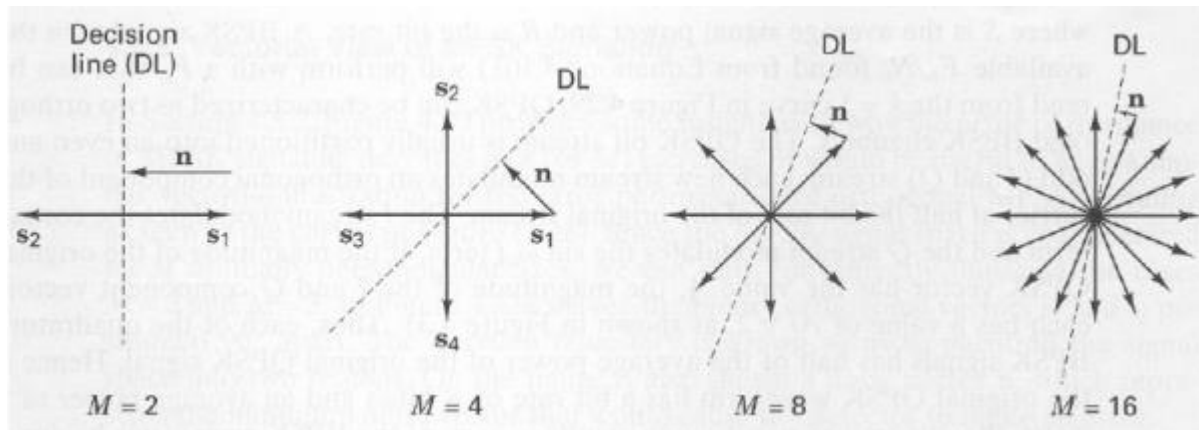


Ilustración 4: Constelaciones para diferentes sistemas MPSK

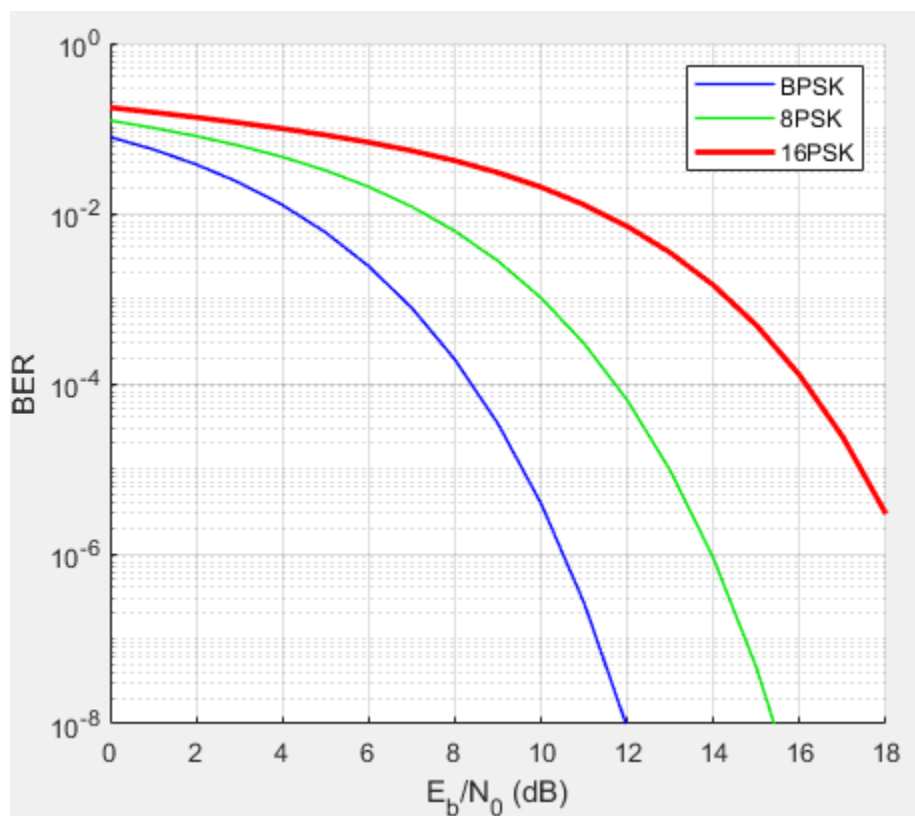


Ilustración 5: Comparación de performance para sistemas MPSK

La siguiente pregunta a responder sería establecer un método mediante el cual se pueda calcular el ancho de banda. Para obtener las características espectrales de las formas de onda a transmitir y determinar el ancho de banda, debe utilizarse una herramienta denominada densidad espectral de potencia. Esta permite observar cómo se distribuye la potencia en cada una de las frecuencias. Por lo tanto, se observa la mayoría de las veces, un gráfico donde el eje de las ordenadas está rotulado como “Watts/Hz” (vatios por Hertz) y el eje de las abscisas como “f (Hz)” (frecuencia en Hertz) . Lo interesante de esta herramienta es que para obtener valores

de potencia se debe integrar dentro de un intervalo, no debe tomarse a la potencia como la función valuada en un punto, a menos que se haga presente en la gráfica de densidad espectral un impulso ya que por propiedades de la función delta dirac tiene amplitud infinita, duración prácticamente nula y área unitaria.

Existen dos métodos para calcular la densidad espectral de potencia o comúnmente definida como PSD ya que el procedimiento es diferente de acuerdo al tipo de señal. Para señales determinísticas la PSD se obtiene mediante el módulo de la transformada de Fourier al cuadrado y para procesos aleatorios y en particular aquellos al menos débilmente estacionarios (WSS) se obtiene como transformada de Fourier de la función de autocorrelación asociada al proceso.

Para todo esquema de modulación, como los bits de información que conforman los mensajes digitales son aleatorios, los mensajes también lo serán y como consecuencia las formas de onda que se hacen presente en el canal, si bien son determinísticas, se generarán aleatoriamente. La manera más simple de resolver este problema, es decir, el cálculo de la densidad espectral de potencia, consiste en considerar aquella sucesión continua de formas de onda que exijan del sistema el máximo ancho de banda, es decir, plantear el caso crítico para calcular la transformada de Fourier. Para sistemas BPSK, por ejemplo, debería plantearse una secuencia de bits de información del siguiente tipo: [1,0,1,0,1,0,1,0...] que no será igual para el caso de BDPSK.

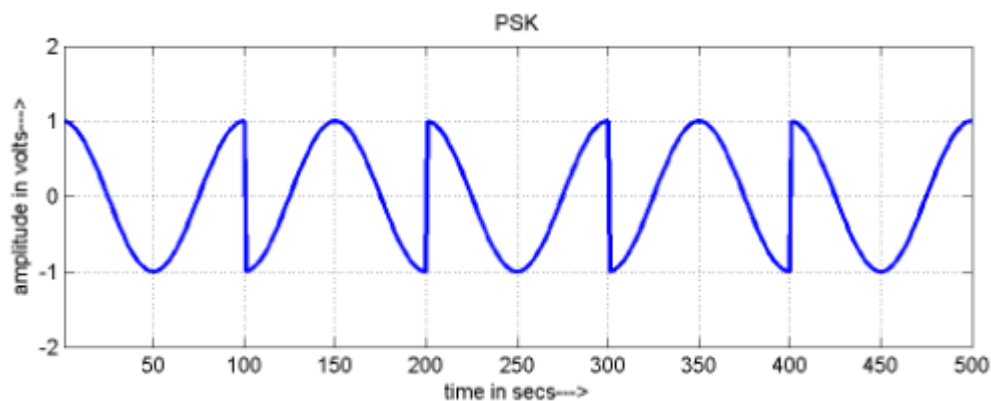


Ilustración 6: secuencia de formas de onda para el peor caso BPSK

Matemáticamente, podrían pensarse como una suma de señales coseno enventanadas en el tiempo por los pulsos formadores de onda, donde cada una de ellas tiene una fase diferente y además están desplazadas en el tiempo. Sin embargo, los desplazamientos y desfases no afectan al módulo de la transformada de Fourier ya que es información que pertenece a la fase de la transformada. En la sección MDPSK se mostrarán algunos ejemplos de cómo es la densidad espectral de potencia para dicha técnica de modulación.

Lo importante de obtener estas gráficas es que permiten visualizar dónde está la mayor concentración de potencia asociada a la forma de onda analizada. Resulta que, para un pulso formador de onda del tipo rectangular, la mayor cantidad de potencia, definida como el 90% de la potencia total (es un criterio), está contenida en lo que se denomina lóbulo principal. ¿A qué se debe esto? precisamente a las características del pulso formador de onda.

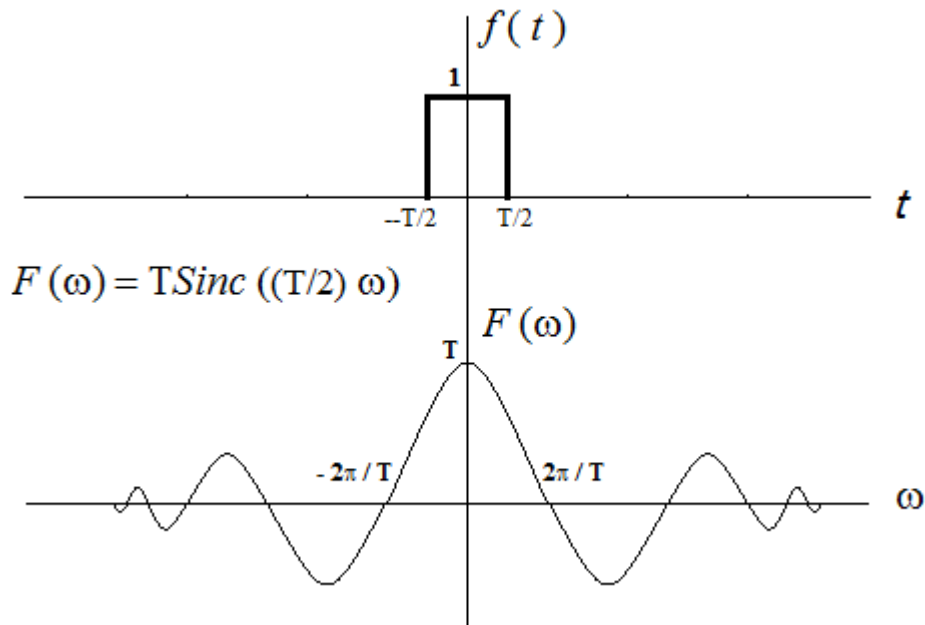


Ilustración 7: Características de un pulso formador de onda rectangular

El pulso formador de onda, como puede observarse en la imagen se encuentra centrado en cero y tiene un ancho de “Ts” ya que es distinto de cero para valores comprendidos entre “-Ts/2” y “Ts/2” en el dominio temporal. Al realizar la transformada de Fourier de dicha señal se encuentra una sinc, cuyo lóbulo principal tiene cruces por cero en  $\frac{2\pi}{Ts}$  y  $-\frac{2\pi}{Ts}$  pero si se realiza un cambio de frecuencia angular a frecuencia lineal, dichos valores están en “1/Ts” y “-1/Ts” o lo que es lo mismo decir “Rs”. De esta forma, cuando se aplica la señal sinusoidal al pulso formador de onda, mediante una multiplicación en el dominio del tiempo se produce una convolución en el dominio de la frecuencia. Esto genera que el espectro del pulso formador de onda se traslade y centre sobre la frecuencia de la portadora. En definitiva, el ancho de banda de la modulación es definido como “2Rs”.

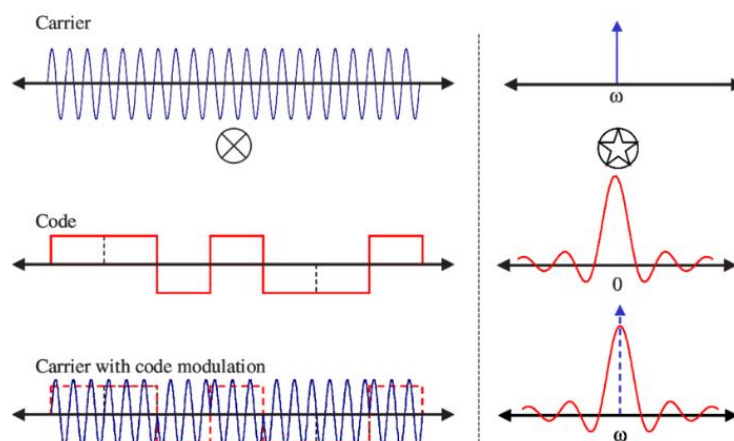


Ilustración 8: Forma analítica de obtener la densidad espectral de potencia

La imagen presentada anteriormente hace explícito el procedimiento por el cual se analiza matemáticamente la densidad espectral de potencia.



Una vez presente los conceptos básicos acerca de PSK puede pensarse en la forma eficiente de representar las señales, ya que como se mencionó en la introducción, el demodulador necesitará  $M$  correladores donde las señales de referencia sean las propias waveform. Sin embargo, puede utilizarse en concepto de bases para simplificar la construcción del demodulador tanto para sistemas MPSK como MDPSK. ¿Cómo se encuentran el conjunto de señales bases para las técnicas de modulación en cuestión? siguiendo el criterio de ortogonalidad. En la introducción se planteó la definición de las bases. Las mismas son un conjunto de funciones linealmente independientes que permiten representar mediante una combinación lineal a las diferentes waveform. ¿Cómo se generan dichas señales? En primer lugar, deben tener una forma asociada a las waveform que desean representar. Por lo tanto, las funciones bases son señales sinusoidales. Pero también tienen que ser mutuamente ortogonales, lo que lleva a plantear que las dos funciones bases posibles son las componentes en fase y cuadratura. La componente en fase es un coseno y la componente en cuadratura es un seno, por lo tanto, mediante una combinación lineal de ambas señales se puede generar cualquier rotación angular. El demodulador implementará correladores con las bases para obtener las componentes en fase y cuadratura y posterior obtener el ángulo respectivo.

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(w_o t) & 0 \leq t \leq T_s \\ \psi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(w_o t) & 0 \leq t \leq T_s\end{aligned} \quad (12)$$

Al implementar los conceptos mencionados anteriormente, resulta importante entender cuál será el valor esperado a la salida del filtro acoplado. Al utilizarse dos bases se debe realizar el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned}\rho\sqrt{E_s} &= Z(T_s) = \int_0^{T_s} s_i(t) \cdot \psi_j(t) \cdot dt \quad i: 1, 2, \dots, M \quad j: 1, 2 \\ Z_x(T_s) &= \rho_x \sqrt{E_s} = \int_0^{T_s} s_i(t) \cdot \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(w_o t) \cdot dt \\ Z_y(T_s) &= \rho_y \sqrt{E_s} = \int_0^{T_s} s_i(t) \cdot \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(w_o t) \cdot dt \\ \rho_x &= \cos(\theta) \\ \rho_y &= \sin(\theta)\end{aligned} \quad (13)$$

Las siguientes imágenes plantean como sería la salida de dos filtros acoplados cuando se utiliza el concepto de bases. La señal propuesta es:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 10}{1/100}} \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t - \frac{\pi}{4}) \quad (14)$$



donde  $T_s=1/100$  segundos por símbolo,  $E_s=10$  Joule por símbolo y la frecuencia de la portadora es  $f=100$  Hertz. En función de la información, se espera que la salida de los filtros acoplados sea  $0.707\sqrt{E_s}$  tanto para la componente en fase como cuadratura, ya que  $\rho_x = \cos(\theta)$  y  $\rho_y = \sin(\theta)$  son iguales, lo cual resultaría en un valor correspondiente a 2.2361 tanto para una operación como para la otra.

```
>> Ts=1/100;
>> Tsampling=Ts/1000;
>> tiemp=[0:Tsampling:Ts-Tsampling];
>> Es=10;
>> A=sqrt((2*Es)/Ts);
>> Ab=sqrt(2/Ts);
>> Base=Ab*cos(2*pi*100.*tiemp);
>> BaseCuadr=Ab*sin(2*pi*100.*tiemp);
>> signal=A*cos(2*pi*100.*tiemp - pi/4);

>> IntFase=sum((signal.*Base).*Tsampling)

IntFase =

    2.2361

>> IntCuadr=sum((signal.*BaseCuadr).*Tsampling)

IntCuadr =

    2.2361
```

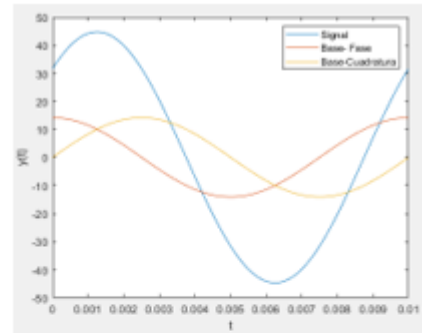


Ilustración 9: Porción de código Matlab para obtener valores esperados a la salida del filtro acoplado

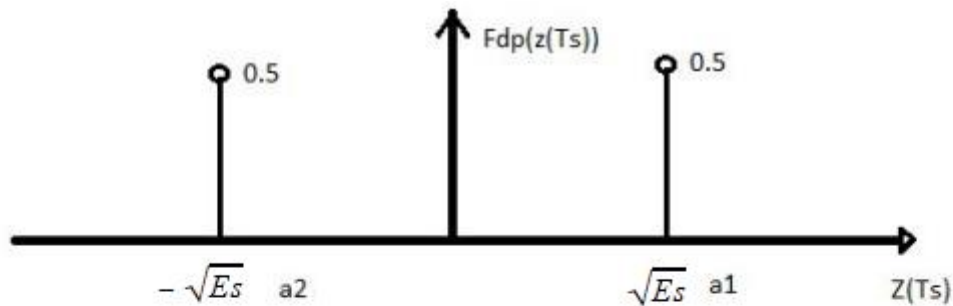
Sin embargo, para entender la parte conceptual de cómo toma las decisiones el demodulador e interpretar cómo se equivoca conviene plantear el caso BPSK porque se necesita solamente una base y existen dos valores esperados para la misma. Esto se debe a que la información está en las fases " $\theta$ " 0 y  $\pi$ .

Se podría confeccionar la siguiente tabla que muestra los valores esperados a las salidas de los filtros acoplados.

**TABLA 1** Valores esperados a la salida de los filtros acoplados

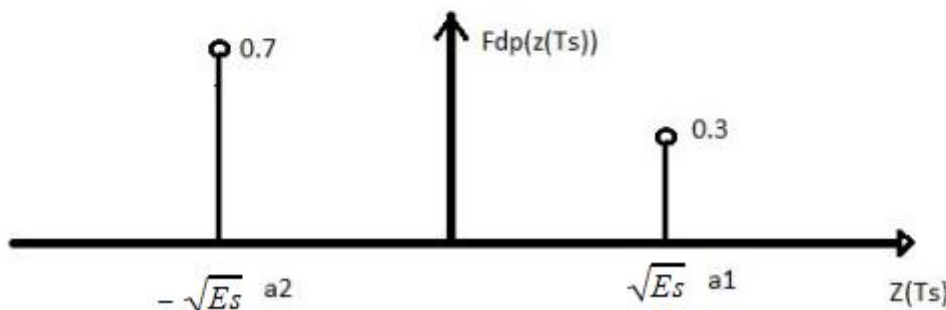
Información presente en la fase " $\theta$ "	Salida del filtro acoplado con señal referencia $\psi_1$ $\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(w_o t)$	Salida del filtro acoplado con señal referencia $\psi_2$ $\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sen(w_o t)$
$\theta=0$	$\sqrt{E_s}$	0
$\theta=\pi$	$-\sqrt{E_s}$	0

Dado que las waveform son señales que arriban al demodulador de forma aleatoria, en el caso de que no exista ruido podría construirse la siguiente función de distribución de probabilidad para la variable aleatoria  $Z(T_s)$  que en este caso particular se denomina  $a_i(T_s)$  presente en la base  $\psi_1$ , ya que la base  $\psi_2$  no es necesaria en este esquema de modulación.



\* La amplitud de los palitos son las probabilidades de cada  $Z(T_s)$ , Nunca olvidar que en el eje vertical estamos graficando FDP.

\* En el eje horizontal es donde van los valores particulares de  $Z(T_s)$ , que al no haber ruido siempre va a llegar o  $a_1$  o  $a_2$  cuyos valores son magnitudes de voltaje proporcionales a la energía de símbolo **RECIBIDO**



En este caso, la energía para los símbolos recibidos es la misma pero no son equisprobable

**Ilustración 10:** Función de distribución de probabilidad para los valores esperados a la salida del filtro acoplado sin la presencia de ruido

Luego, si de alguna manera se tuviera control de la fuente de ruido, se podría plantear para conocer su comportamiento: “Apago la fuente de información, es decir dejó de modular y prendo la fuente de ruido” entonces con el demodulador prendido se analiza cómo es la variable aleatoria  $Z(T_s)$  recibida, que solo se conforma de ruido y al cual puede definirse como  $n(T_s)$ .

- $\mu$ : es la media de la distribución
- $\sigma$ : es la desviación típica

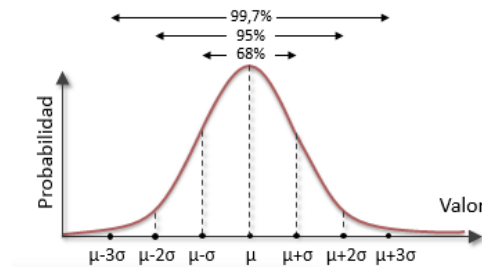


Ilustración 11: Función de distribución gaussiana para modelado del ruido

Como puede observarse en la imagen anterior, el ruido es caracterizado en su función de distribución de probabilidad por parámetros como la media " $\mu$ " y la desviación estándar " $\sigma$ ". Es importante remarcar que para conocer los valores de probabilidad de ocurrencia de un evento particular es necesario integrar sobre la función de distribución de probabilidad, no puede asumirse la probabilidad de ocurrencia de un evento solo evaluando la función en el punto. La función de distribución de probabilidad sigue la siguiente ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (15)$$

donde  $x$  es la variable aleatoria en cuestión y " $\mu$ " es la media que para el ruido es nula y " $\sigma$ " es la desviación estándar. Además, con respecto a este último valor existe una relación importante para los sistemas de comunicación que habla de la potencia de ruido presente a la salida del filtro acoplado. Se puede mencionar que la potencia del ruido es  $\mu^2 + \sigma^2$  y como la media es nula, la potencia resulta solo depender de la varianza del ruido. La varianza se obtiene como la integral en todo el dominio de la frecuencia de la función densidad espectral de potencia de ruido, el cual se sabe que es una función constante en la frecuencia con valor  $N_0/2$ . Al integrar en el ancho de banda de la señal de información, que es la región en frecuencia en el cual afecta el ruido, ya que el resto es filtrado, se encuentra que la potencia de ruido resultante es:

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} 2W \quad (16)$$

donde " $W$ " es la frecuencia máxima del filtro receptor. De esta forma, resulta:

$$N = \sigma^2 = N_0 \cdot W \quad (17)$$

Una vez que se ha entendido el comportamiento del ruido, se plantea la forma de expresar la variable aleatoria  $Z(Ts)$  y se encuentra que puede pensarse como superposición de las variables aleatorias  $n(Ts)$  y  $a_i(Ts)$ .

$$Z(Ts) = a_i(Ts) + n(Ts) \quad (18)$$

¿Cómo se vincula dicho análisis con la toma de decisiones? La respuesta a la pregunta es que el demodulador para decidir qué símbolo se transmitió tiene que resolver la siguiente ecuación:

$$P(S_1/Z(T_s)) \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} P(S_2/Z(T_s)) \quad (19)$$

Es decir, en función de una observación  $Z(T_s)$  tiene que decidir qué símbolo se transmitió. Si “S1” o “S2”, es decir, resolver una ecuación de probabilidades condicionales a posteriori, donde si la probabilidad de que se transmitió S1 dado  $Z(T_s)$  es mayor que la probabilidad que se transmitiera S2 dado  $Z(T_s)$ , se va a decidir por la hipótesis  $H_1$  que significa que se transmite S1 y si ocurre al revés, es decir, la probabilidad de que se transmitió S2 dado  $Z(T_s)$  es mayor, se decide por S2. Sin embargo, resolver estas ecuaciones es muy difícil y ni siquiera se pueden graficar las probabilidades. ¿Por qué? Porque para plantear estas probabilidades se debería armar un experimento aleatorio donde  $Z(T_s)$  valga siempre lo mismo de manera tal que se pudiera observar cómo se distribuyen los valores de S1 y S2. Resulta que hacer que  $Z(T_s)$  valga siempre lo mismo es imposible ya que representa la salida del filtro acoplado cuando la entrada es una señal ruidosa y no existe posibilidad de controlar el ruido.

La única forma de solucionar esta situación es analizando otras probabilidades, es decir, imponer sobre el canal que se va a transmitir muchas veces el símbolo S1 o S2 y observar en el receptor como se distribuyen los valores.

¿Cómo se encuentran las probabilidades antes mencionadas? Usando el Teorema de Bayes en su forma más simple ya que no existe probabilidad conjunta. Esto se debe a las características del ruido del canal que resulta ser independiente. De esta manera se puede plantear que:

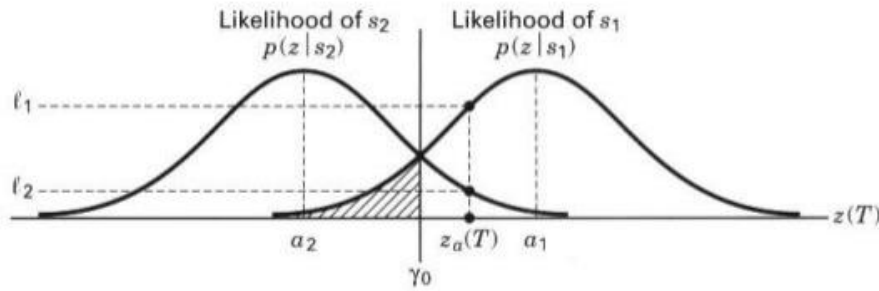
$$\begin{aligned} P(S_1/Z(T_s)) &= P(Z(T_s)/S_1) \cdot P(S_1) \\ P(S_2/Z(T_s)) &= P(Z(T_s)/S_2) \cdot P(S_2) \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $P(S_1)$  y  $P(S_2)$  son probabilidades conocidas por el demodulador, ya que son las probabilidades de ocurrencia de las waveform y es información que genera el modulador digital. Si los bitstream son equiprobable, los mensajes digitales también y por lo tanto las waveform presentes en el canal. Las probabilidades mencionadas como “ $P(Z/S_1)$ ” y “ $P(Z/S_2)$ ” pueden interpretarse de igual manera que las anteriores, es decir, pensar: “cuál es la probabilidad de  $Z(T_s)$  dado que se transmitió S1” y de forma similar podría interpretarse la otra probabilidad.

Utilizando las ecuaciones en (20) y reemplazándola en (19), se obtiene:

$$\frac{P(Z(T_s)/S_1)}{P(Z(T_s)/S_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \frac{P(S_2)}{P(S_1)} \quad (21)$$

Entonces a partir de la última ecuación se puede analizar el siguiente gráfico:



**Ilustración 12:** Función de distribución de probabilidad de los valores esperados de  $Z(Ts)$  cuando existe ruido en el canal dado que se sabe que se transmitió un símbolo particular

Se van a calcular la probabilidad de  $Z(Ts)$  dado que se transmitió un Símbolo determinado. Entonces, ya se sabe con certeza que se transmitió el símbolo Si y se va a calcular la probabilidad de  $Z$ .

Matemáticamente hablando significa que:

$$\begin{aligned} Z(Ts) &= a_1(Ts) + n(Ts) \text{ Transmision del símbolo } S_1 \\ Z(Ts) &= a_2(Ts) + n(Ts) \text{ Transmision del símbolo } S_2 \\ n(Ts) &= a_1(Ts) - Z(Ts) \text{ Para el caso de la transmision del símbolo } S_1 \\ n(Ts) &= a_2(Ts) - Z(Ts) \text{ Para el caso de la transmision del símbolo } S_2 \\ pdf(n(Ts)) &= \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{n(Ts)}{\sigma_o} \right)^2} \quad (22) \end{aligned}$$

Entonces reemplazando  $n(Ts)$  para el caso de que se transmita el símbolo “S1” o “S2” resulta en:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{Z(Ts)}{S_1}\right) &= \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{Z(Ts) - a_1}{\sigma_o} \right)^2} \\ P\left(\frac{Z(Ts)}{S_2}\right) &= \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{Z(Ts) - a_2}{\sigma_o} \right)^2} \quad (23) \end{aligned}$$

Una vez planteadas las respectivas probabilidades, se llega a lo que se conoce como criterio de decisión, pero para obtenerlo, se deberá de plantear lo siguiente:

$$\frac{P\left(\frac{Z(Ts)}{S_1}\right)}{P\left(\frac{Z(Ts)}{S_2}\right)} = \frac{\frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{Z(Ts) - a_1}{\sigma_o} \right)^2}}{\frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{Z(Ts) - a_2}{\sigma_o} \right)^2}} \underset{H_2}{>} \underset{H_1}{\frac{P(S_2)}{P(S_1)}} \quad (24)$$

Trabajando matemáticamente se llega a una expresión simplificada que utiliza el demodulador para tomar decisiones. Esta ecuación resultante ya no está en función del cálculo de probabilidades, sin embargo, es fundamental entender de donde proviene, porque el problema de origen que resulta en tomar decisiones en función de  $Z(Ts)$  que es el dato disponible implica siempre la resolución de un problema de probabilidades.



Para el caso particular de waveform equiprobables se demuestra que:

$$\ln\left(\frac{P(S_2)}{P(S_1)}\right) = 0$$

$$Z(Ts) \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \frac{a_1^2 - a_2^2}{2(a_1 - a_2)} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_o \quad (25)$$

$$Z(Ts) \underset{H_2}{\overset{H_1}{>}} \gamma_o \quad (26)$$

¿Qué ocurre si  $Z(Ts)$  es igual al umbral? si esto ocurre, significa que al calcular las probabilidades condicionales  $P(Z(Ts)/S_1)$  y  $P(Z(Ts)/S_2)$  son iguales, entonces la probabilidad de que se haya transmitido “S1” o “S2” son iguales dado la muestra que se tiene. Hay verdaderos problemas porque la regla de decisión ya no sirve ¿Qué se debe realizar? Hay que decirle al demodulador “Tira una moneda en este caso para determinar que waveform fue transmitida” (Considerando que ambos símbolos son equiprobables), si esto último no se cumple ¿para qué se va a tirar una moneda ?, se elige la hipótesis que sea más probable, porque la decisión está sesgada.

Ahora, cuando  $Z(Ts)$  no es igual al umbral, es fácil saber qué decidir, porque las probabilidades condicionales son distintas entonces se elige por la mayor. Aclaración: de la misma manera que se calcula  $P(Z/S_1)$  y  $P(Z/S_2)$  se calculan las probabilidades de error. Sin embargo, las probabilidades de error sólo sirve calcularlas en el umbral. ¿Por qué? porque la probabilidad de decidir sobre  $Z$  dado un símbolo u otro es la misma.

En definitiva, la probabilidad de error se calcula como:

$$P_B = P(S_1) \cdot P(H_2/S_1) + P(S_2) \cdot P(H_1/S_2) \quad (27)$$

donde “ $P(H_2/S_1)$ ” se interpreta como la probabilidad de decidir por el símbolo “S2” dado que se transmitió el símbolo “S1” y la probabilidad “ $P(H_1/S_2)$ ” se interpreta como la probabilidad de que se decida por el símbolo “S1” dado que se transmitió el símbolo “S2”.

$$P_B = P(S_1) \cdot \int_{-\infty}^{\gamma} P(Z(Ts)/S_1) \cdot dZ(Ts) + P(S_2) \cdot \int_{\gamma}^{\infty} P(Z(Ts)/S_2) \cdot dZ(Ts)$$

$$P_B = \int_{(a_1 - a_2)/\sigma}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}(u)^2)} \cdot du = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2 \cdot \sigma_o}\right)$$

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2 \cdot \sigma_o}\right) \quad (28)$$

Lo importante en esta instancia más que la ecuación analítica es pensar ¿Cómo minimizar la probabilidad de error? Para ello existen dos opciones. En primer lugar, lograr que

la energía de símbolo recibida sea más grande. De manera tal de poder distanciar las campanas gaussianas y el área encerrada por ambas curvas será menor (Siempre considerando símbolos equiprobable) y en segundo lugar lograr disminuir la potencia de ruido lo más que se pueda (ya está garantizado mediante la implementación del filtro acoplado) para que la campana sea más angosta. Es decir, modificar y variar ambas opciones genera los siguientes efectos sobre las funciones de distribución de probabilidad.

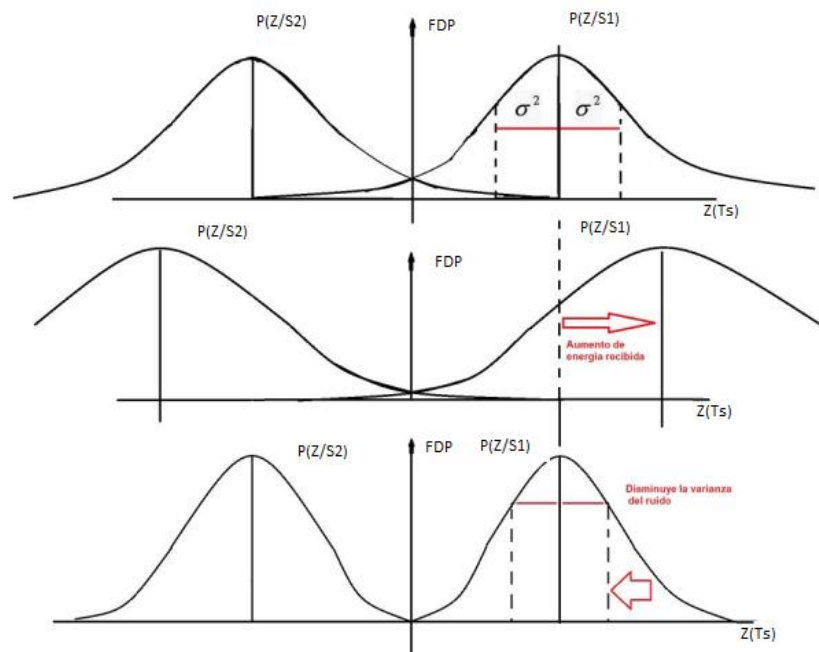


Ilustración 13: Efectos de modificar la energía de símbolo recibido y la potencia de ruido

Pensándolo bien, lo que se está diciendo es que modificar la Energía del símbolo recibida y la potencia de ruido influyen sobre la performance. Por eso se trabaja en todo sistema de comunicaciones con la relación  $E_b/N_0$  para hablar de performance.

Para el caso particular de BPSK, se puede demostrar que los efectos sobre la función de distribución de probabilidad que logran minimizar el error están vinculados a la energía de bit y el factor de correlación cruzada ya que hay que lograr maximizar la energía de la diferencia.

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)E_b}{N_0}}\right) \quad (29)$$

Por último, puede mencionarse que la performance para los sistemas digitales de banda de paso está netamente ligada a la forma de demodulación, la cual puede ser de dos maneras. Coherente y no coherente. La explicación de esta sección se centró sobre técnicas de demodulación coherente donde se tiene referencia de fase de la señal recibida. ¿Qué significa esto? que el demodulador en su proceso de recepción conoce cuál es el desfase introducido por el canal y puede de esta manera conocer la información. Comúnmente se suele decir que el demodulador tiene referencia de fase.

La fase de la señal recibida sería así:

$$\theta_R = \theta_I + \theta_C \quad (30)$$



donde  $\theta_R$  es la fase recibida,  $\theta_I$  es la fase de la información y  $\theta_C$  es el desfase introducido por el canal. Es decir, no llega directamente la información en la fase. Entonces si no se conoce el desfase que introduce el canal, el demodulador debería consultar al modulador que información quiso transmitir para poder hacerle la diferencia a la fase recibida y obtener dicha referencia. Pero, uno debería cuestionarse lo siguiente: “Si el demodulador debe consultar la fase de la información ¿para que se transmite?”. Queda en evidencia que el sistema de comunicación de esta forma no funciona, por lo tanto, surge una nueva técnica de demodulación denominada no coherente, es decir, que no necesita referencia de fase para funcionar.

## Análisis de M-DPSK

### Fase recibida como función del retardo de propagación

Se viene detallando sobre la importancia que tiene el conocimiento o no de la fase para la determinación del modo de demodulación, esto es debido a los posibles desplazamientos que puede sufrir la señal, en donde se puede destacar el desfase que genera los filtros que se implementan y además el canal por el que se transmite. En el primer caso se puede esperar que los desplazamientos a generarse sobre las señales de interés sean conocidas, pero en el canal se podría sufrir distintos desfases que pueden variar para diferentes tiempos como también si se modifica la distancia, ya sea alejando o acercando los sistemas modulador y demodulador. Por lo que la señal recibida, con respecto a la transmitida se observará de la siguiente manera:

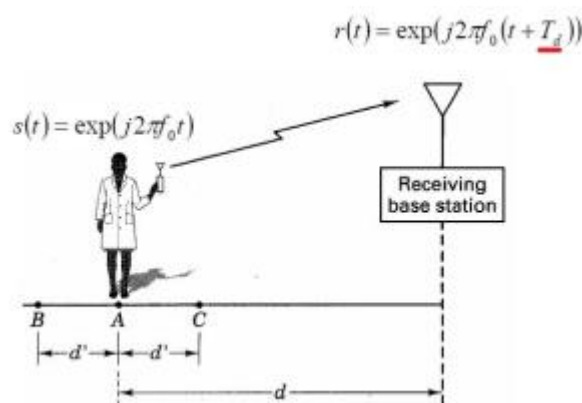


Ilustración 14: Defase producto de la distancia entre transmisor y receptor

### Detección No coherente

Para la descripción de este modo de detección primero se debe hacer una diferencia entre lo que es la codificación diferencial y la detección diferencial. Para lograr esquemas PSK no coherentes se debe hacer uso de ambos conceptos. En el caso de la codificación de los datos diferencialmente, es un proceso que se realiza en el modulador digital y es cuando se utiliza un



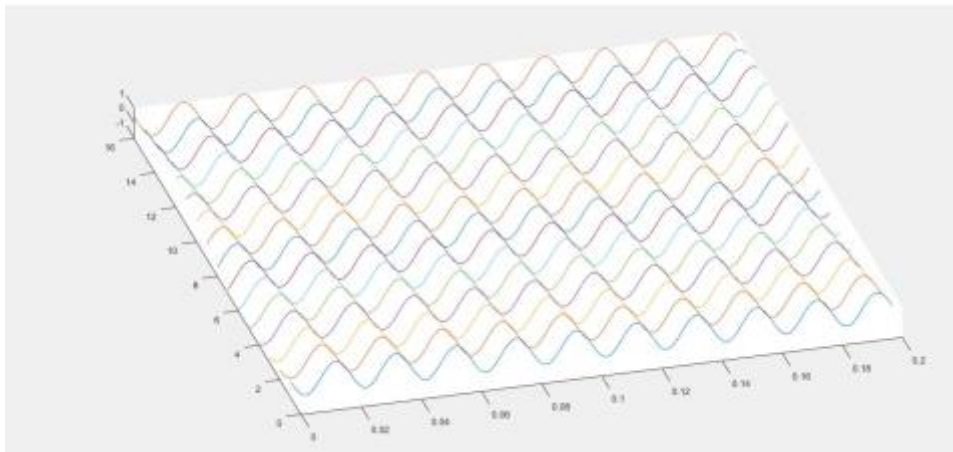
uno o cero binario para manifestar que se va a transmitir un símbolos similar o distinto con respecto al símbolo precedente. Respecto a detección diferencial, la cual es la que interesa describir en este momento, es cuando no se necesita conocimiento previo de la fase, sino que se necesita observar la fase de la señal que se recibió en un tiempo de símbolo “Ts” anterior con la fase recibida en el tiempo de símbolo “Ts” actual, en donde el dato a considerar es la variación o no de fase entre estos dos tiempos. Las señales a transmitirse para este tipo de detección, tendrán la misma forma que en PSK coherente, siendo:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2Es}{T_s}} \cos(w_o t + \theta_i(t)) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad i: 1, 2, \dots, M \quad (31)$$

En la recepción, la señal original transmitida puede verse afectada por ruido representado por  $n(t)$  siendo un proceso AWGN y también verse modificada por una constante arbitraria  $\alpha$ , la cual es tomada como una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y  $2\pi$ . De esta manera, la señal recibida puede describirse de la siguiente forma:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2Es}{T_s}} \cos(w_o t + \theta_i(t) + \alpha) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad i: 1, 2, \dots, M \quad (32)$$

La siguiente imagen muestra el modelado del proceso aleatoria asociado a  $r(t)$  en función de la variable aleatoria en la fase:



**Ilustración 15: Modelado del proceso aleatorio  $r(t)$  producto de la variable aleatoria en la fase**

En estos casos no podría utilizarse directamente filtros acoplados para determinar la fase porque resultaría ser un valor dependiente de  $\alpha$ , el cual es una variable aleatoria. Pero, teniendo en cuenta que las variaciones de  $\alpha$  son muy pequeñas en la transmisión de dos símbolos sucesivos, se considera que es un valor relativamente constante. Esto se debe principalmente por la tasa de transmisión y las velocidades que manejan los sistemas de comunicación digital.

$$[(\theta_k(T_2) + \alpha) - (\theta_k(T_1) + \alpha)] = \theta_k(T_2) - \theta_k(T_1) = \phi_i(T_2) \quad (33)$$

¿Se ha logrado el objetivo? Si por objetivo se hace referencia a obtener la información presente en la fase, la verdad es que no. No se debe olvidar que para detectar diferencialmente no hay que meter la información en la fase de la señal, sino en la diferencia de las fases entre las

waveform que se mandan en los instantes de tiempo de 0 a  $2T_s$ . Se trabaja siempre con el  $\Delta\theta$ . Esto obliga a que cuando se obtenga la diferencias entre  $\theta_k(T_2) - \theta_k(T_1)$  resulte en un único valor posible. Si la información está en la fase misma, podrían producirse múltiples combinaciones de diferencias de fases que resulten en el mismo valor.

Esta técnica de demodulación se denomina comúnmente como “Codificación diferencial PSK detectada Coherentemente”. En donde su nombre se debe a que, si bien la información de un bit la obtiene luego de dos tiempos de símbolo, en cada uno de ellos mide la fase y posteriormente calcula cuánto cambia.

Pero además de esta técnica, existe también otra con nombre bastante parecido la cual es “Codificación diferencial PSK detectada diferencialmente coherentemente”, en donde nuevamente luego de dos tiempos de símbolos se toma una decisión, pero en este caso se decide si hubo o no hubo cambio de fase.

Estos tipos de detectores se diferencian por su probabilidad de error respecto a “PSK Coherente”, en donde la implementación de diferenciales hace que se reduzca la performance del sistema porque los errores pueden propagarse. Es por esto que la reducción en los costos de complejidad de los sistemas diferenciales, se ve reflejada en su performance.

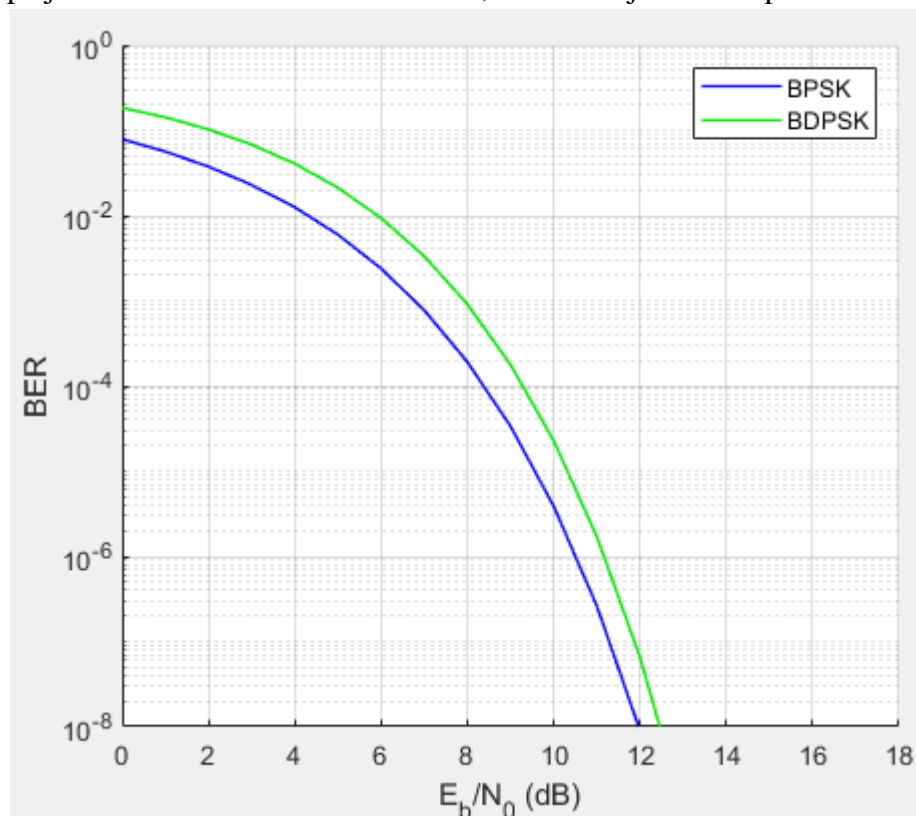


Ilustración 16: Comparacion de performance entre BPSK y BDPSK

## BPSK diferencial detectado coherentemente

Para el caso particular de BDPSK (PSK binario diferencial detectado coherentemente) primero se debe codificar las formas de onda a transmitir de manera diferencial. Para ello, si se asocia la diferencia de fase a  $\pi$  con el mensaje codificado “1” y a la diferencia de fase “0” con el

mensaje codificado “0”, si en un tiempo de símbolo “Ts” el mensaje de información “m(k)” coincide con la codificación diferencial del  $T_{s-1}$  “c(k-1)” se envía la misma fase, pero si hay una variación, la fase a enviarse será la contraria. Esto quiere decir que podemos expresar la regla de codificación mediante una ecuación que implica una suma de módulo 2 negada.

$$c(k) = \overline{c(k-1) \oplus m(k)}$$

Sample index, $k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Information message, $m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
Differentially encoded message (first bit arbitrary), $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
Corresponding phase shift, $\theta(k)$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0	0	$\pi$	$\pi$	$\pi$	0	$\pi$	$\pi$

Suma de Modulo dos Negada

$$\overline{0 \oplus 0} = 1$$

$$\overline{0 \oplus 1} = 0$$

$$\overline{1 \oplus 0} = 0$$

$$\overline{1 \oplus 1} = 1$$

$$c(k) = \overline{c(k-1) \oplus m(k)}$$

$c(k)$	$\theta(k)$
0	0
1	$\pi$

Ilustración 17: Modo de funcionamiento del modulador digital en DBPSK detectado coherentemente

Como puede observarse en las figuras presentadas anteriormente, cuando se analiza el mensaje digital a enviar y la fase que realmente se envía, encuentra que los “1” binarios significan que la fase que se transmitió en el intervalo de tiempo “Ts” anterior se debe mantener. En cambio, si el mensaje digital es un “0” significa que la fase para dicho intervalo de tiempo debe cambiar. Esto es una regla, no hay tabla de modulación. La única forma de entender la tabla de modulación es observando en lugar de mensaje digital y fase de las waveform, observar mensaje codificado y fases.

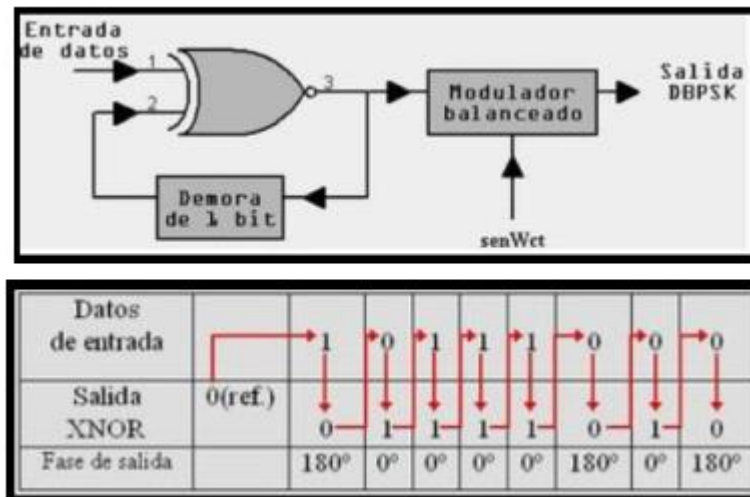


Ilustración 18: Implementación digital del modulador digital BDPK

Existen dos esquemas de demodulación posibles, uno definido como sub-óptimo ya que no elimina previamente las componentes de ruido para comparar y otro definido como óptimo que primero filtra, logrando eliminar la mayor cantidad de ruido posible y después compara. En el caso del demodulador subóptimo obtendremos una menor performance, causa de su simplicidad en el sistema, teniendo la vulnerabilidad de verse afectado por el ruido en el canal para la hora de la decisión en el demodulador. La waveform del Ts anterior le servirá al sistema para poder tomar de ella la referencia de fase.

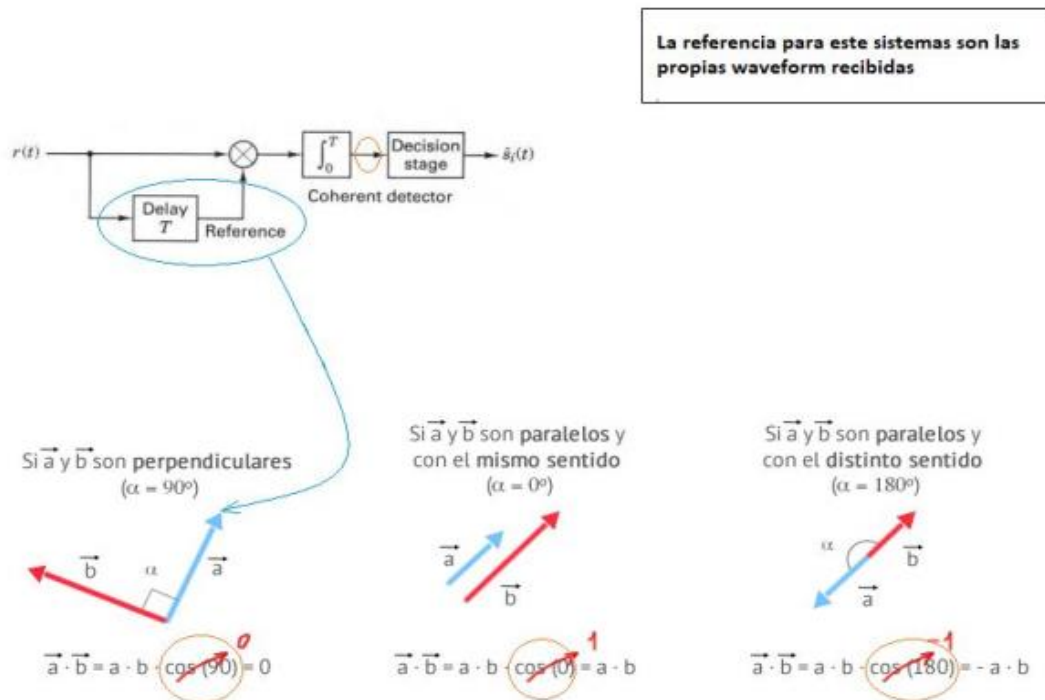


Ilustración 19: Demodulador Suboptimo BDPK detectado coherentemente

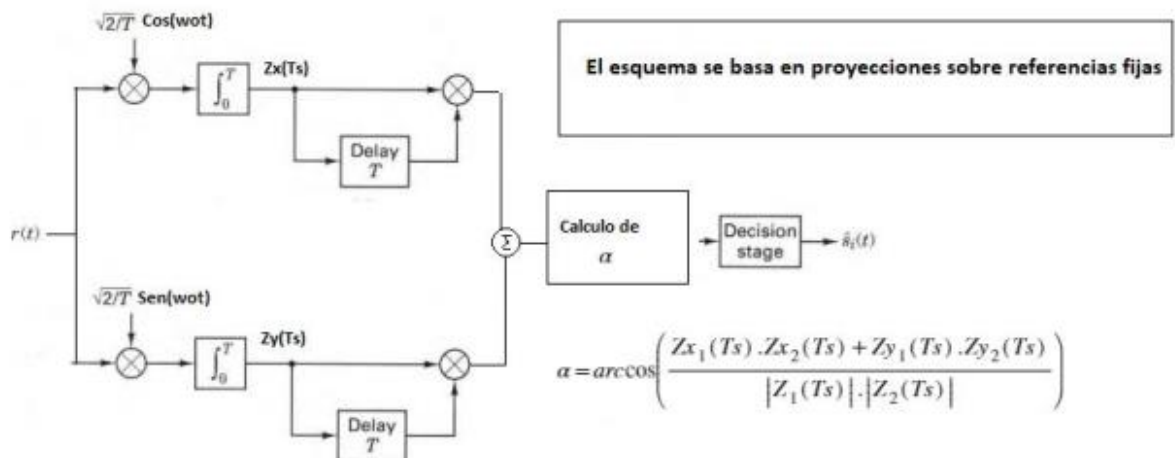


Ilustración 20: Demodulador optimo BDPSPK detectado coherentemente

En la figura anterior se puede apreciar que están presentes  $Z_1(Ts)$  y  $Z_2(Ts)$  y no existen referencias de dichos datos en la imagen. Resulta que  $Z_1(Ts)$  es el resultado de la correlación de la primer waveform recibida que se le ha calculado el módulo teniendo en cuenta componentes en fase y cuadratura. Esta variable es retardada “Ts” segundos hasta que llega la segunda waveform y se realiza un procedimiento similar para obtener  $Z_2(Ts)$ .

En conclusión, el objetivo es calcular el ángulo presente entre ambos vectores en función de la referencia otorgada por las bases, pero esto no es posible de visualizar porque la imagen se encuentra incompleta. Sin embargo, se hará su implementación en Simulink, lo que permitirá mostrar resultados y como es diagramado el sistema.

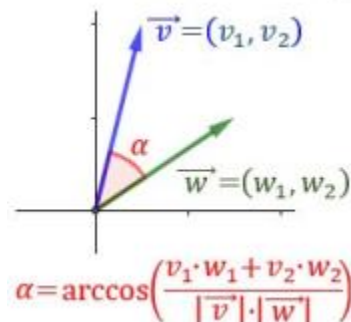


Ilustración 21: Operacion que realiza el demodulador BDPSPK optimo

Es importante remarcar que el demodulador utiliza el concepto de bases, donde se utiliza una rama para las componentes en fase y otra rama para las componentes en cuadratura.

En conclusión, sin los efectos del ruido ambos sistemas tienen la misma performance. Pero cuando se incorpora en el análisis dicha variable, el último sistema mostrado, al filtrar primero (Aplicar filtro acoplado mediante correladores con referencia de bases) y luego realizar todas las operaciones con los valores óptimos de  $z(Ts)$  obtiene una performance mucho mejor que el primer sistema que utiliza como filtro acoplado la propia waveform recibida con ruido y errores de fase.

Respecto a la performance de estos sistemas, el análisis es muy similar a PSK Coherente, solo que cada decisión representa un “1” o “0” binario producto de analizar cuánto cambió un símbolo respecto al otro en su fase. Considerando que estos esquemas de modulación/demodulación trabajan con codificación de la información de forma diferencial y detectan coherentemente, la probabilidad de error se degrada respecto a BPSK coherente. ¿Por qué? Porque cualquier simple error determinará por lo general dos decisiones erróneas ya que siempre se decide en función del símbolo anterior. La ecuación de la probabilidad de error

$$P_B = 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) \cdot \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)\right] \quad (33)$$

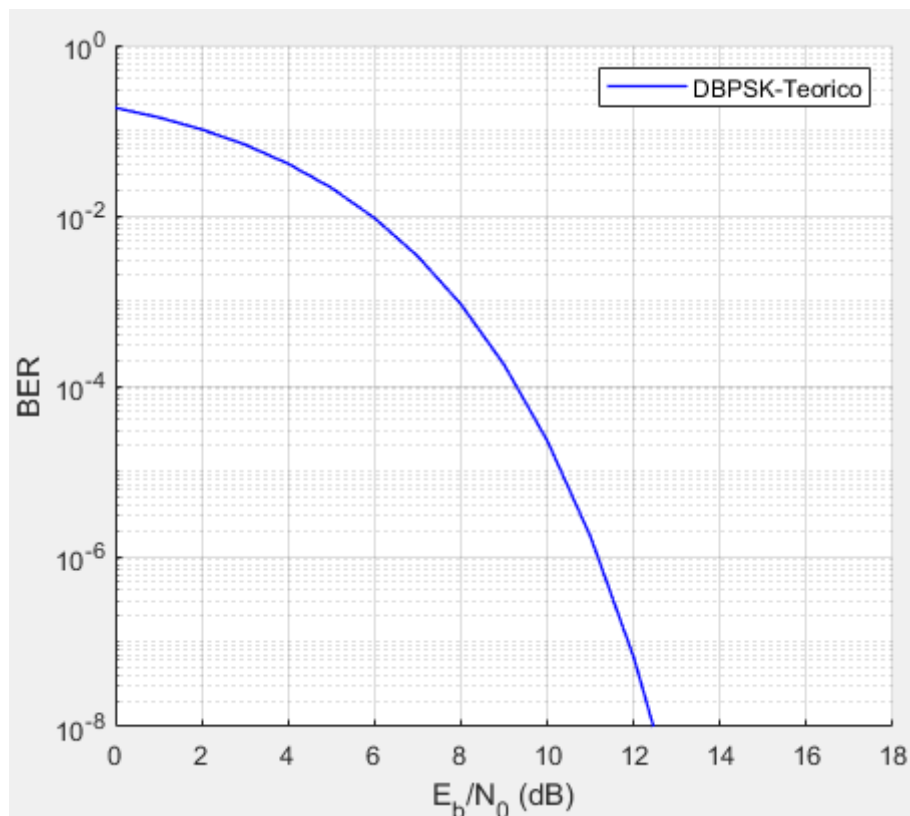


Ilustración 22: Performance de un sistema DBPSK optimo

### Simulación sistemas BDPSK

Este apartado tiene la finalidad de mostrar la implementación de un sistema DBPSK sub-óptimo y óptimo respectivamente. Para llevar a cabo las simulaciones se ha utilizado la versión de Matlab R2018b y la versión de Simulink respectiva (R2018b).

Dentro de la paquetería de programas necesarios para ejecutar la simulación se encuentra un archivo de extensión “.m” definido como “BDPSK.m” que permite el ingreso de muchos parámetros necesarios para ejecutar la simulación. El archivo se encuentra documentado y cada parámetro está detallado en el caso de necesidad de modificar para ejecutar una simulación particular. También dentro del mismo entorno (carpeta) debe



encontrarse un archivo de extensión “.xls” que contiene la simulación propiamente dicha. El nombre es “DBPSK\_FormaEficiente.slx” y en su interior plantea el siguiente esquema:

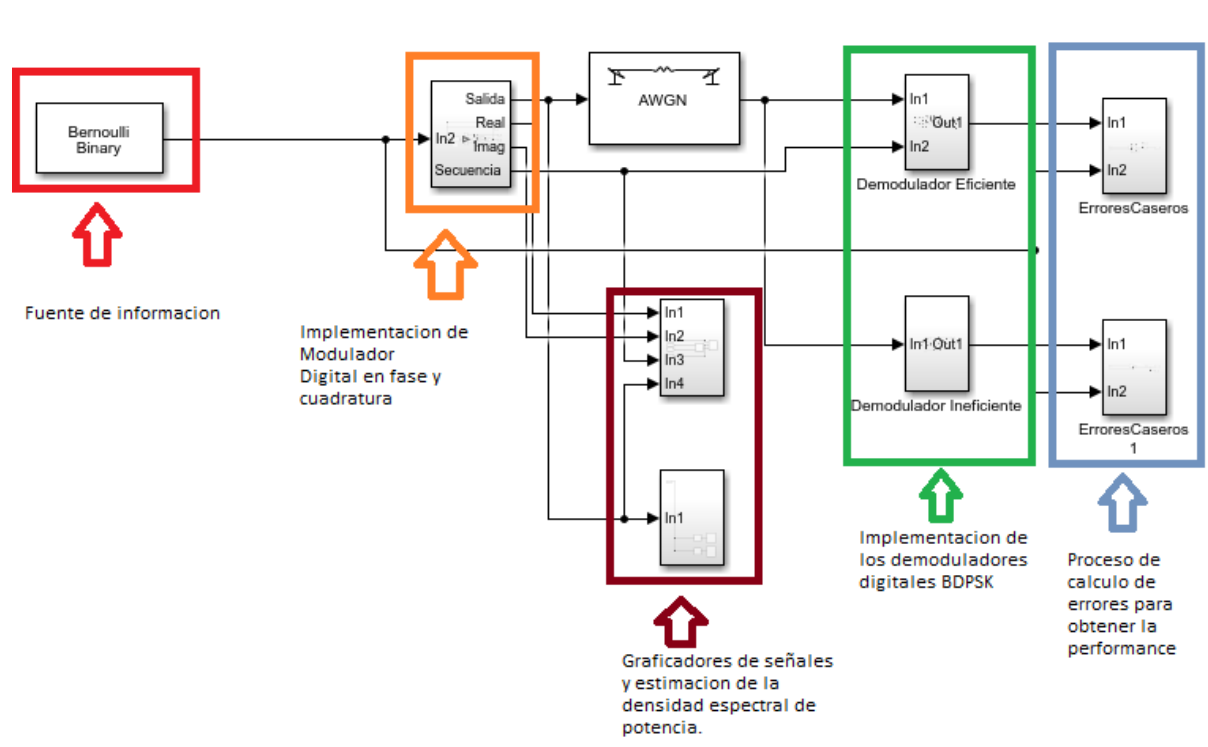


Ilustración 23:Esquema general BPSK

Comenzando con la fuente de información, la cual es representada como un generador binario de Bernoulli. Tiene los siguientes parámetros de configuración:

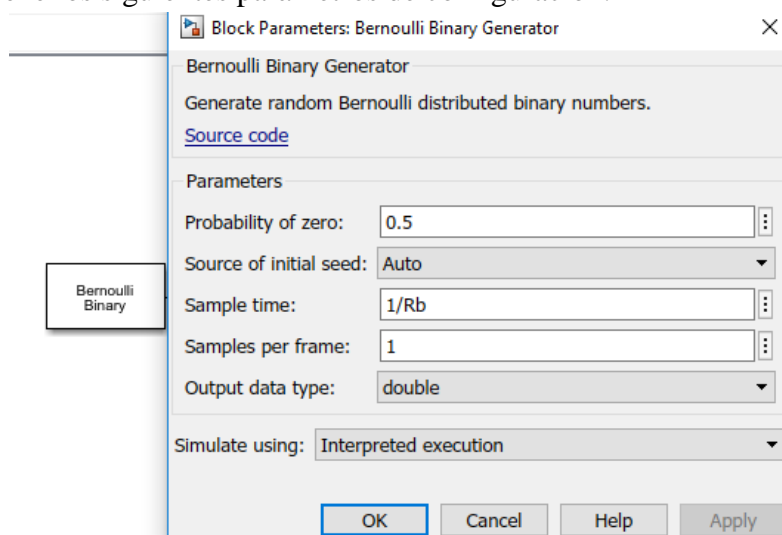


Ilustración 24:Configuracion de fuente de información

Se consideró que la probabilidad de ocurrencia tanto de unos como de ceros binarios es 0.5. Sin embargo, el bloque de Simulink solo permite computar la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos, pero como la probabilidad de ceros binarios más la probabilidad de unos binarios tiene que ser la unidad, puede plantearse la siguiente ecuación:

$$P(Bit_{cero}) + P(Bit_{uno}) = 1$$

$$1 - P(Bit_{cero}) = P(Bit_{uno}) \quad (34)$$

Esto se debe a que en un tiempo de bit si o si debe existir una unidad lógica mínima portadora de información con solo dos valores posibles.

Además, estos bits son generados a una tasa de información definida como “Rb” que no es ni más ni menos que la inversa del tiempo de bit. La implementación de esta fuente generadora de información binaria supone ya de entrada que para el sistema de comunicación digital a implementar se cumplió con todas las pautas de formateo, es decir, se cumplió correctamente con muestreo, cuantización y codificación y se logró una secuencia de bits equiprobables.

El siguiente bloque que se observa en la figura presentada corresponde a la implementación de un modulador digital en fase y cuadratura.

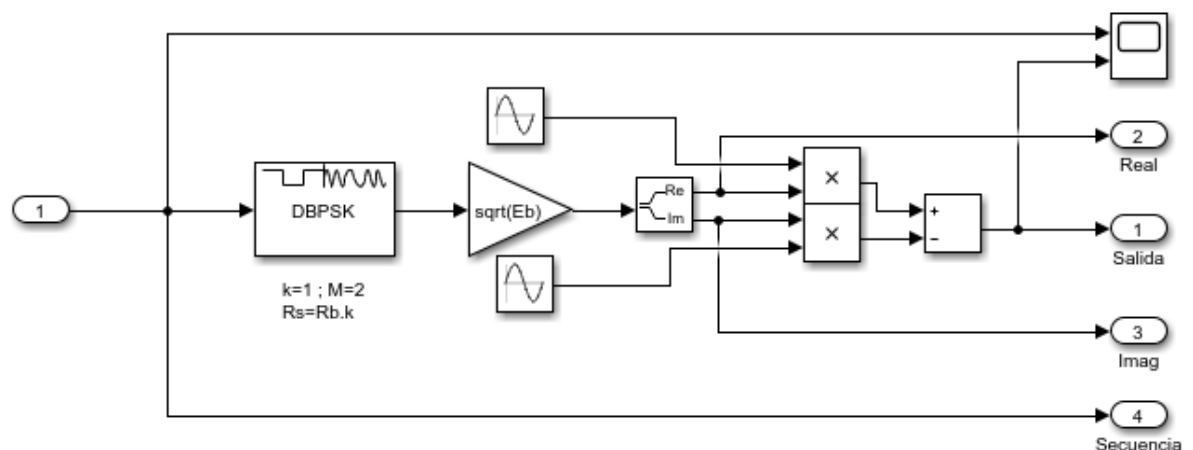


Ilustración 25: Implementación de modulador digital en fase y cuadratura

Esto es posible gracias a la teoría de implementación de notación compleja en la modulación. Para ser preciso, la información que genera el modulador digital puede entenderse como una secuencia continua compleja de la forma:  $g(t) = x(t) + jy(t)$  que se describe por una secuencia de pulsos ideales  $x(t)$  e  $y(t)$  que van apareciendo a tiempos discretos  $k = 1, 2, \dots$ . De esta manera, se puede describir a  $g_k = x_k + jy_k$ , en donde sí se asigna un valor de amplitud para los pulsos, como puede ser  $0.707 A$ . Las componentes complejas quedarían expresadas como:

$$g_k = x_k + jy_k = 0.707A + j0.707A \quad (35)$$

Como preparación para el próximo paso,  $x_k$  e  $y_k$  son tratados como un par ordenado. En donde el pulso  $x_k$  es multiplicado por  $\cos(\omega_0 t)$  (componente en fase) y el pulso  $y_k$  es multiplicado por  $\sin(\omega_0 t)$  (componente en cuadratura).



$$s(t) = \text{Re}\{[x(t) + j \cdot y(t)] \cdot [\cos(w_o t) + j \cdot \sin(w_o t)]\}$$

$$s(t) = x(t) \cos(w_o t) - y(t) \sin(w_o t) \quad (36)$$

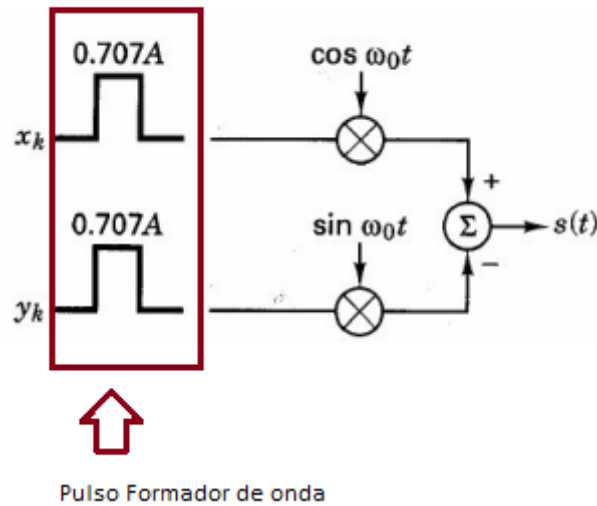


Ilustración 26: Concepto teórico de la implementación de un modulador digital en fase y cuadratura

$$s(t) = \text{Re}\{g_k e^{jw_o t}\}$$

$$s(t) = x_k \cos(w_o t) - y_k \sin(w_o t)$$

$$s(t) = 0.707 \cdot A \cdot \cos(w_o t) - 0.707 \cdot A \cdot \sin(w_o t)$$

$$s(t) = A \cos(w_o t + \frac{\pi}{4}) \quad (37)$$

Lo expresado anteriormente sirve para construir cualquier modulador PSK, ya que como se detalló previamente, en esta técnica de modulación cualquier esquema MPSK puede lograrse utilizando solamente dos bases. Estas bases en definitiva son las componentes en fase y cuadratura que utiliza el modulador para construir las waveform.

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y_k}{x_k} \right)$$

$$s(t) = A \cos(\theta) \cdot \cos(w_o t) - A \sin(\theta) \cdot \sin(w_o t)$$

$$s(t) = A \cos(w_o t + \theta) \quad (38)$$

Una vez expuesto estos conceptos se presentará una captura de uno de los osciloscopios presentes en el archivo Simulink que muestra la secuencia de bit de información, las waveform resultantes en el canal de comunicaciones y las componentes en fase y cuadratura del modulador digital.

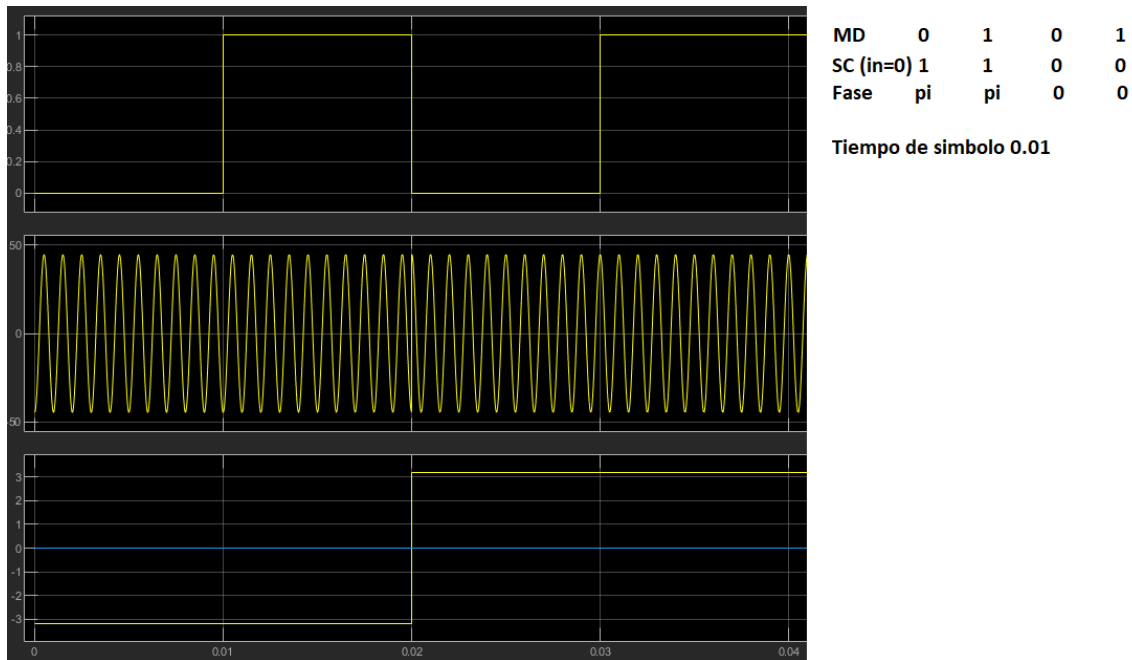


Ilustración 27: Visualización de osciloscopio de Simulink

La primera gráfica representa los mensajes digitales generados cada 0.01 segundos. En la imagen se puede visualizar 4 de ellos. En la segunda gráfica están las waveforms que se hacen presentes en el canal. La primera de ellas lleva la fase  $\pi$  debido a que el primer bit codificado es “0” y la información digital es “0”, entonces aplicando suma módulo 2 negada, el bit codificado resultante es “1”. También puede interpretarse como que los ceros binarios de información generan cambios en la fase a transmitir y los unos binarios mantienen la fase transmitida anteriormente. La última gráfica de la imagen muestra las componentes en fase y cuadratura que entrega el modulador digital (componente en fase, curva amarilla y componente en cuadratura, curva celeste).

Antes de presentar la estructura de los demoduladores, es necesario mostrar cómo se configura el bloque de canal AWGN, el cual tiene los siguientes parámetros:

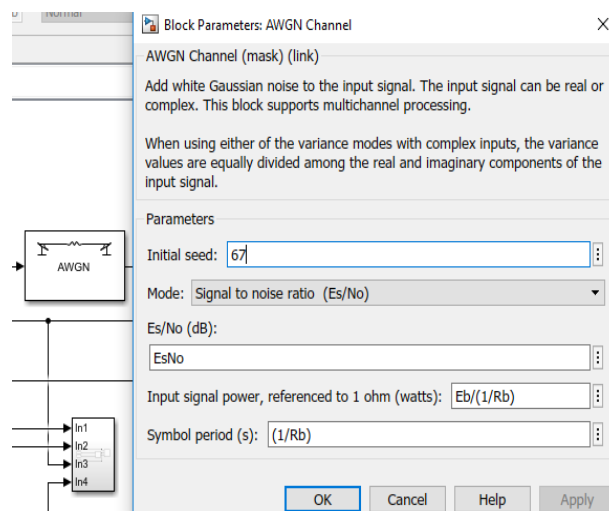


Ilustración 28: Configuración canal AWGN en Simulink

Tiene la posibilidad de elegir el modelo a simular para representar el ruido presente en un canal de comunicación. Dentro de las opciones, se encuentra el modelo Es/No, es decir, razón entre energía de símbolo y densidad espectral de ruido, también el modelo Eb/No que representa la misma razón, pero teniendo en cuenta la energía de bit. Otra forma de aplicar dicho bloque es modelando al ruido en función de su varianza, que como se sabe es la potencia.

Dicho proceso también requiere como dato la potencia de la señal de entrada referenciada a un Ohm. Para obtener dicho valor debe realizarse el siguiente análisis:

$$P_m = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s_i(t)^2 \cdot dt$$

$$P_m = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \left( \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos(\theta) \right)^2 \cdot dt$$

$$P_m = \frac{E_s}{T_s} \quad (39)$$

Donde Es y Ts forman parte de la amplitud de la señal a transmitir. Además, como la cantidad de energía por forma de onda transmitida puede ser asociada a la energía de bit, es decir, la cantidad de energía que aporta cada bit para la modulación, se puede plantear una relación que vincula ambos conceptos. Dicha relación es la siguiente:

$$E_s = k \cdot E_b$$

$$T_s = k \cdot T_b \quad (40)$$

Para la simulación mostrada en imágenes, se utilizó una tasa de bit Rb de 100 bits por segundo y una energía de bit de 10 Joule por bit. Por lo tanto, la potencia promedio es de 1000 Watts. Este valor se corrobora mediante la densidad espectral de potencia asociada a cada waveform

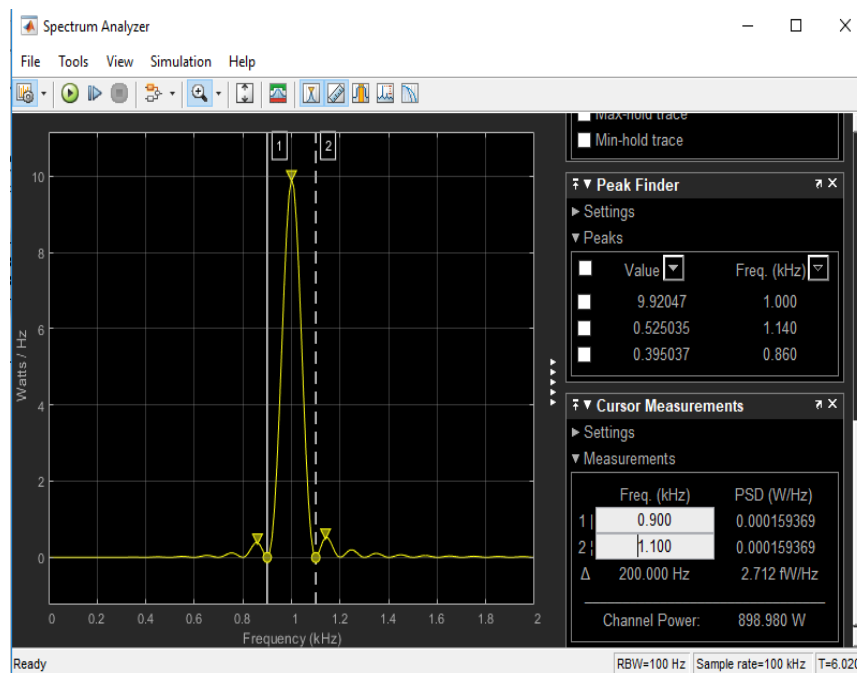


Ilustración 29:Densidad espectral de potencia para una waveform en BDPSK

Si realmente la potencia fuera 1000 Watts debería observarse en el ancho del lóbulo principal de la sinc (centrada sobre la frecuencia de portadora que para este caso es 10 veces  $R_b$ , es decir 1000 Hertz) el 90% de la potencia asociada la forma de onda. Evidentemente como acusa la imagen, eso se cumple, ya que, a ambos lados de la portadora, precisamente entre 900 Hertz " $F_p - R_b$ " y 1100 Hertz " $F_p + R_b$ " al integrar se encuentran aproximadamente 900 Watts.

La forma particular de la densidad espectral de potencia cumple con lo que se esperaba conceptualmente. Una función sinc en el dominio de la frecuencia centrada sobre la portadora.

Es interesante en este punto, mostrar cómo resulta la densidad espectral de potencia para toda la secuencia de símbolos que se hacen presentes en el canal.

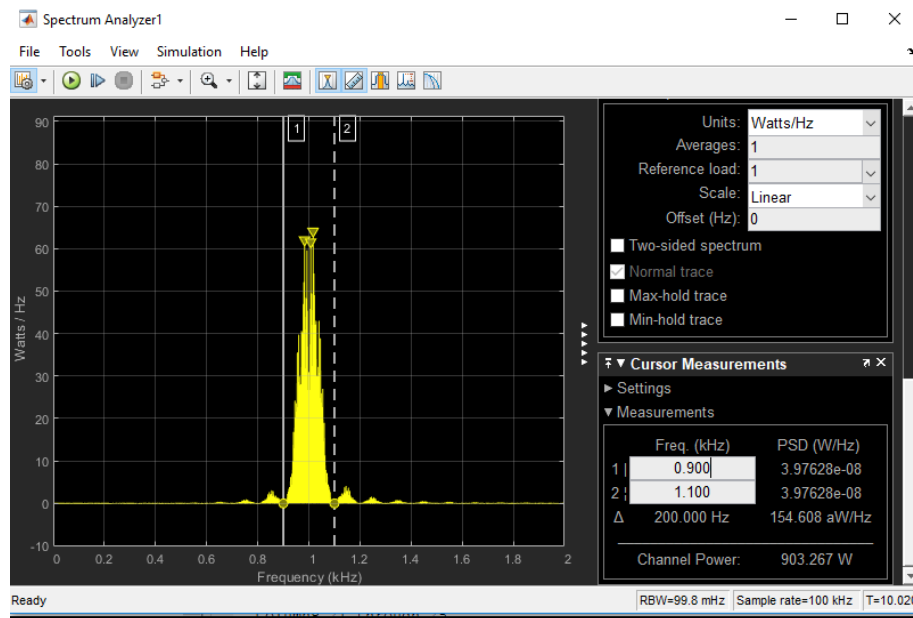


Ilustración 30:Densidad espectral de potencia de la secuencia sucesiva de waveform

Como se verifica en la imagen, la envolvente de la densidad espectral sigue la misma forma que la PSD para cada waveform particular. A pesar de los cambios abruptos de fase que puede tener una waveform respecto a otra, la densidad espectral de potencia de la secuencia completa de símbolos contiene el 90% de la potencia en el ancho del lóbulo principal, definido para el caso binario de " $2R_b$ " respecto de la portadora.

A continuación, se presenta la estructura implementada en Simulink para el demodulador subóptimo:

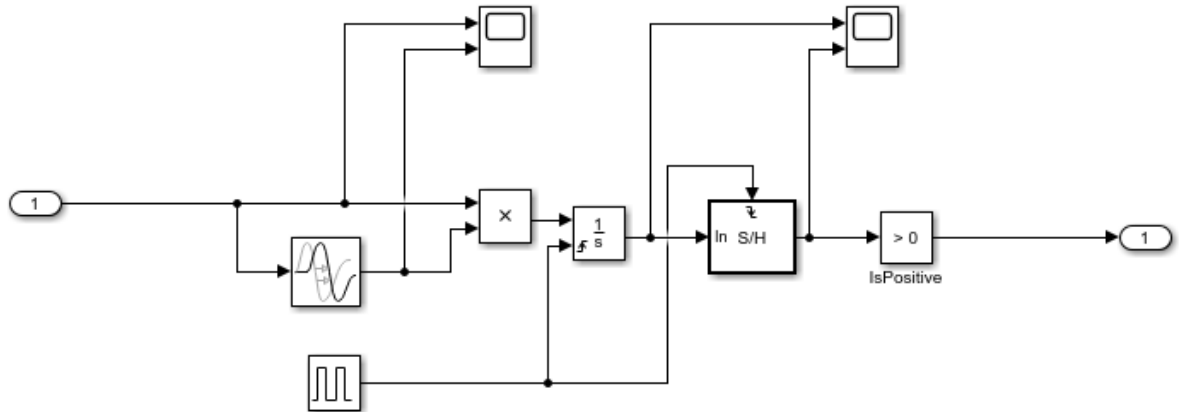


Ilustración 31: Esquema Simulink demodulador BDPK subóptimo

Al comparar dicha imagen con la figura de demodulador subóptimo de forma teórica, se encuentra que es sencillo de implementar. Consta de un bloque que se encarga de retardar las señales recibidas un tiempo de símbolo para usarlas como referencia en la correlación cruzada en el tiempo de símbolo posterior. Luego, incluye un multiplicador e integrador que está vinculado a un generador de pulsos que se encarga de iniciar el periodo de integración y resetear el valor a cero luego de terminar el tiempo de símbolo. Sin embargo, también está vinculado a un muestreador y retenedor para no perder entre tiempos de símbolos sucesivos los valores de  $Z(T_s)$  obtenidos.

Al analizar los valores esperados a la salida del filtro acoplado, se encuentra que serán “Es” cuando las waveform sucesivas no presenten un cambio de fase y “-Es” cuando lo hagan. Además, se sabe que cuando se hace presente un mensaje digital cero se genera un cambio de fase y cuando es un uno no hay cambio de fase, entonces el bloque implementado es un comparador con cero. Si el nivel es positivo entrega un “1” binario y si es negativo entrega un “0” binario.

La siguiente imagen muestra como se ha implementado el demodulador eficiente.

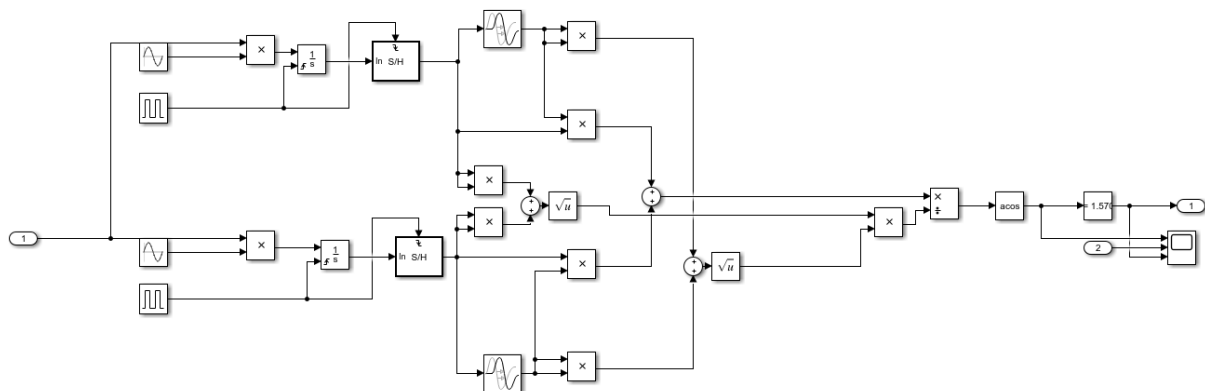


Ilustración 32: Esquema Simulink demodulador BDPK optimo

Este demodulador está basado en el uso de bases para obtener el desfase entre dos waveform sucesivas. Como puede observarse en la imagen existe a grandes rasgos dos ramas,

una para trabajar con las componentes en fase y otra para trabajar con las componentes en cuadratura. Ambas ramas, tienen sus señales de referencia (Fase y cuadratura) que esperan las diferentes waveform para hacer correlación cruzada. Luego se guardan el valor de  $Z(T_s)$  obtenidos en cada rama y se arma la siguiente expresión mediante sumadores, multiplicadores, divisores y raíces.

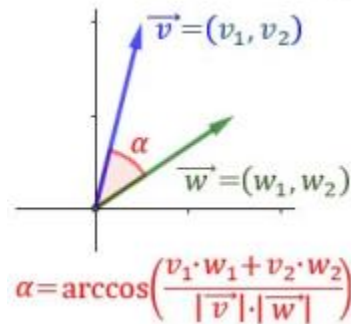


Ilustración 33: Operaciones con vectores para obtener el ángulo entre ellos

A partir de la obtención del ángulo entre ambos vectores, se ingresa a un comparador, donde se verifica si el valor resulta ser menor o igual a  $\pi/2$ . Si esto ocurre, al igual que el demodulador subóptimo, significa que se transmitió un “1” binario como información digital. Si el valor es mayor a  $\pi/2$  significa que se hizo presente a la entrada del modulador digital un “0” binario.

Finalmente, se generan vectores con los errores respecto a la cantidad de símbolos transmitidos y se importan a Matlab para calcular la probabilidad de error de bit. A continuación, se presentan las gráficas de performance.

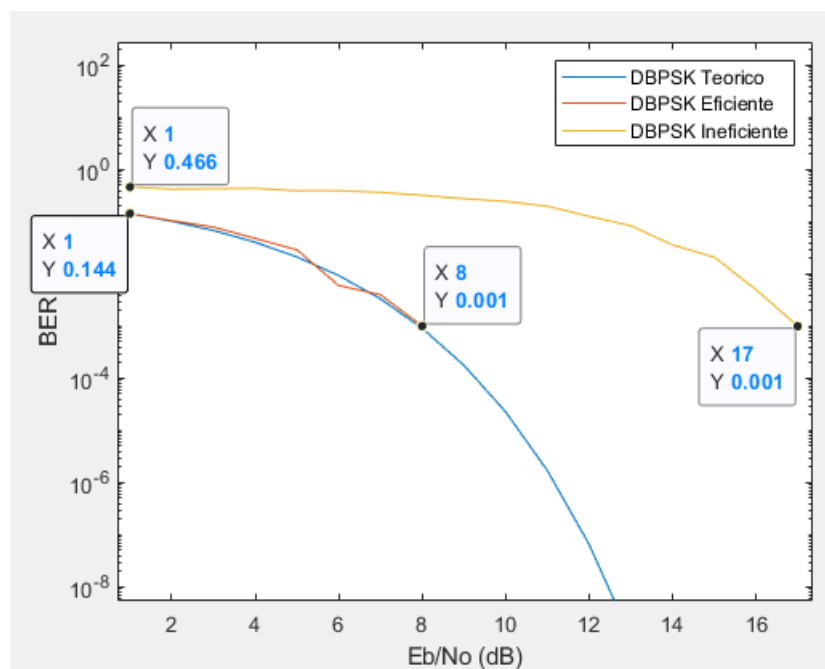


Ilustración 34: Curva de performance obtenidas a partir de Simulink

La curva azul representa el cálculo teórico de la probabilidad de error de bit para un sistema BDPSK detectado coherentemente. La curva roja es la probabilidad de error de bit en función de  $E_b/N_0$  para el demodulador óptimo BDPSK y la curva amarilla es la performance para el demodulador subóptimo. Ante la presencia de ruido, el sistema basado en el uso de bases tiene una probabilidad de error de bit mucho menor y requiere menos  $E_b/N_0$  para obtener la misma performance. Uno podría preguntarse ¿por qué las gráficas se cortan en 8 dB en un caso y 17 dB en ambos casos? Esto está relacionado a la cantidad de símbolos simulados.

La cantidad mínima de símbolos errados distinto de cero para el caso de 1000 símbolos transmitidos es  $1/1000$  o lo que es lo mismo 0.001. Esta es la resolución mínima que es posible de lograr con la simulación, porque a mayores valores de  $E_b/N_0$  la cantidad de bits errados es nula. Si se requiere una gráfica mucho más fiel a la teórica deberá simularse una cantidad mayor de símbolos. Esto es posible modificando el parámetro de simulación asociado a la cantidad de símbolos.

### BDPSK diferencial detectado diferencialmente coherentemente

Estos esquemas de modulación/demodulación trabajan al igual que BDPSK detectado coherentemente con respecto al modulador. Es decir, utilizan codificación diferencial de la información digital. Sin embargo, en el receptor, en vez de medir cuánto cambió la fase de un símbolo o waveform recibida respecto a otra, se preocupa por analizar simplemente si cambio o no. No interesa la magnitud del cambio, sólo si existió.

Para entender más en detalle lo expresado anteriormente, se define en primer lugar las señales a transmitir:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \sqrt{\frac{2Es}{T_s}} \cos(\omega_o t + \phi) & 0 \leq t \leq T_s \\x_2(t) &= \sqrt{\frac{2Es}{T_s}} \cos(\omega_o t + \phi \pm \pi) & 0 \leq t \leq T_s \quad (41)\end{aligned}$$

Recordando que las decisiones en BDPSK se basan en la diferencia de fase entre señales recibidas sucesivamente, cada bit deberá obtenerse a partir de la observación de un par de señales recibidas:

$$\begin{aligned}s_1(t) &= (x_1, x_1) \text{ o } (x_2, x_2) & \text{para } 0 \leq t \leq 2T_s \\s_2(t) &= (x_1, x_2) \text{ o } (x_2, x_1) & \text{para } 0 \leq t \leq 2T_s \quad (42)\end{aligned}$$

De esta forma, la correlación cruzada debe realizarse cada “ $2T_s$ ”, es decir, dos tiempos de símbolo, a diferencia de BDPSK detectado coherentemente donde la correlación se realiza cada “ $T_s$ ”. Esto se debe a que como el demodulador detecta cambios, solo son 4 combinaciones

posibles de señales a transmitir en dos tiempos de símbolo sucesivos. Entonces el demodulador está esperando alguna de estas combinaciones.

$$Z(2Ts) = \int_0^{2Ts} s_1(t) \cdot s_2(t) \cdot dt = \int_0^{Ts} [x_1(t)]^2 \cdot dt - \int_0^{Ts} [x_1(t)]^2 \cdot dt = 0 \quad (43)$$

La ecuación en (43) muestra una de las posibilidades, resulta que se tienen 4 de ellas. Por lo tanto, en principio se debe de tener un demodulador con 4 canales, donde cada uno de ellos responde a una de las posibles waveform a transmitir.

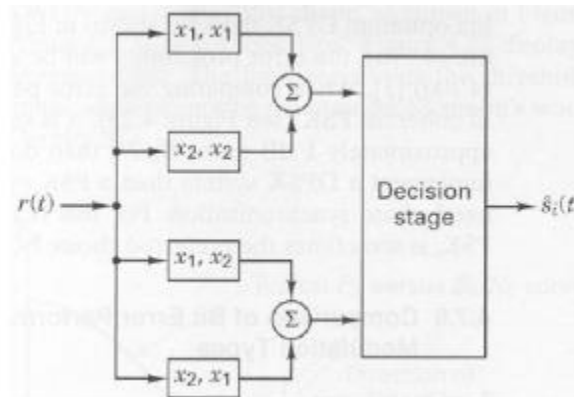


Ilustración 35: Mitad del esquema BDPSK detectado diferencialmente coherentemente de 8 ramas

Es decir, que para transmitir mensajes digitales binarios donde teóricamente se necesitan 2 waveform, se está utilizando un esquema de demodulación de 4 canales, donde cada canal tiene un correlador para cubrir alguna de las tantas posibles combinaciones entre las dos waveform. En definitiva, un sistema muy ineficiente. Encima, este esquema permite tomar decisiones cada “2Ts”, pero ¿Qué ocurre con el dato en “3Ts”? Resulta que este esquema sólo responde a los datos pares porque obtiene resultados en múltiplos pares de “2Ts”. Por lo tanto, se deberían armar 4 canales más para analizar las decisiones en “3Ts”, “5Ts”, “7Ts” ... Conclusión, con M=2 transportando la información en la diferencia de fase se requiere un esquema de demodulación con 8 canales.

Surge una alternativa a estos esquemas. Utilizar solamente dos canales, uno para analizar la transmisión de una waveform que no contenga cambios en el periodo de tiempo “2Ts” y otro canal para analizar si la waveform transmitida contiene algún cambio en dicho periodo. No importa cuál sea el cambio, solo es necesario saber si existe. De esa manera, se reduce la cantidad de ramas de 8 a 4.

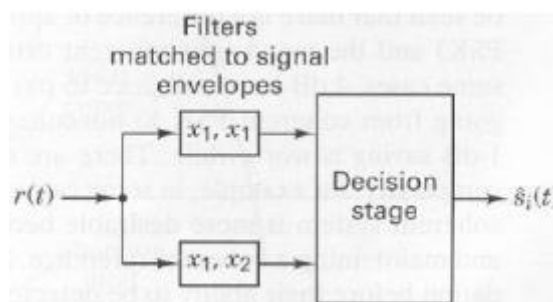


Ilustración 36: Mitad del esquema BDPSK detectado diferencialmente coherentemente de 4 ramas



Es decir, el esquema simplifica el análisis de cada una de las ramas, ya que anteriormente había un detalle excesivo sobre las distintas combinaciones de las señales que generaban las waveform. Cuando se transmitía, por ejemplo  $(x_2, x_2)$ , la primera rama acoplada a  $(x_1, x_1)$  daba a su salida un resultado  $-2\sqrt{E_s}$  mientras que para el caso de la rama contraria, acoplada a  $(x_2, x_2)$  daba el resultado máximo, siendo este  $2\sqrt{E_s}$ . Con respecto a las dos ramas restantes y que son inversas  $(x_1, x_2 ; x_2, x_1)$  su resultado a la salida es de “0”.

Algo muy importante de entender es que el modulador digital utiliza señales antipodales en “Ts” para trabajar, pero el esquema de detección transforma dicha estructura de señales antipodales en una equivalente de señales ortogonales en un intervalo de tiempo de 0 a 2Ts. Esto se produce desde que se implementa el primer sistema con las 8 ramas, ya que el mismo basa su funcionamiento en la correlación cruzada entre las diferentes  $s_i(t)$  en dos tiempos de símbolo. Esta forma de detección que transforma un esquema antipodal en ortogonal reduce la performance.

$$P_B = \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)} \quad (44)$$

## Moduladores y demoduladores M-DPSK

Como primer punto, para la implementación de esquemas diferenciales que no son binarios, no se puede utilizar una regla sencilla de codificación como se hizo en BDPSK. En aquel caso, se planteaba que un bit codificado dependía del bit codificado anteriormente y el mensaje digital actual. Es decir, se aplica una suma negada en módulo dos de la siguiente forma  $c(k) = \overline{c(k-1) \oplus m(k)}$  y luego dependiendo del valor de  $c(k)$  es que se elegía la waveform a transmitir. Pero, cuando  $M > 2$  existe un pequeño problema, el mensaje digital ya no contiene 1 bit, contiene “k” bits, entonces aplicar la regla de codificación es muy complicado. Sin embargo, se puede seguir aplicando los conceptos genéricos de codificación diferencial. ¿Qué significa esto? Mandar la información en la diferencia de la fase “ $\Delta\theta$ ”, es decir, lo que realmente se transmite es  $\phi_k = \Delta\theta_k + \phi_{k-1}$ . Siendo “ $\phi_k$ ” la fase a transmitir actualmente y “ $\phi_{k-1}$ ” la fase para el tiempo de símbolo inmediatamente anterior.

Entonces, el modulador lo que obtiene es “ $\Delta\theta$ ” para cada combinación de “k” bits de información y luego lo que transmite es “ $\phi_k$ ”. Esta diferencia debe quedar bien clara, porque es el principio de los esquemas diferenciales independientemente si se puede aplicar reglas más sencillas o no de codificación.

Por otro lado, el demodulador utilizará la misma ecuación  $\phi_k = \Delta\theta_k + \phi_{k-1}$  pero con otro enfoque, ya que él desea obtener “ $\Delta\theta$ ”, por lo tanto,  $\Delta\theta_k = \phi_k - \phi_{k-1}$ .

A continuación, se muestra un ejemplo de un esquema 8DPSK, donde el modulador y demodulador aplican además de la técnica de codificación mencionada anteriormente, código de Gray. Esta codificación implica una distribución distinta de los mensajes digitales sobre las waveform a transmitir. La finalidad es lograr algunas ventajas en esquemas PSK.

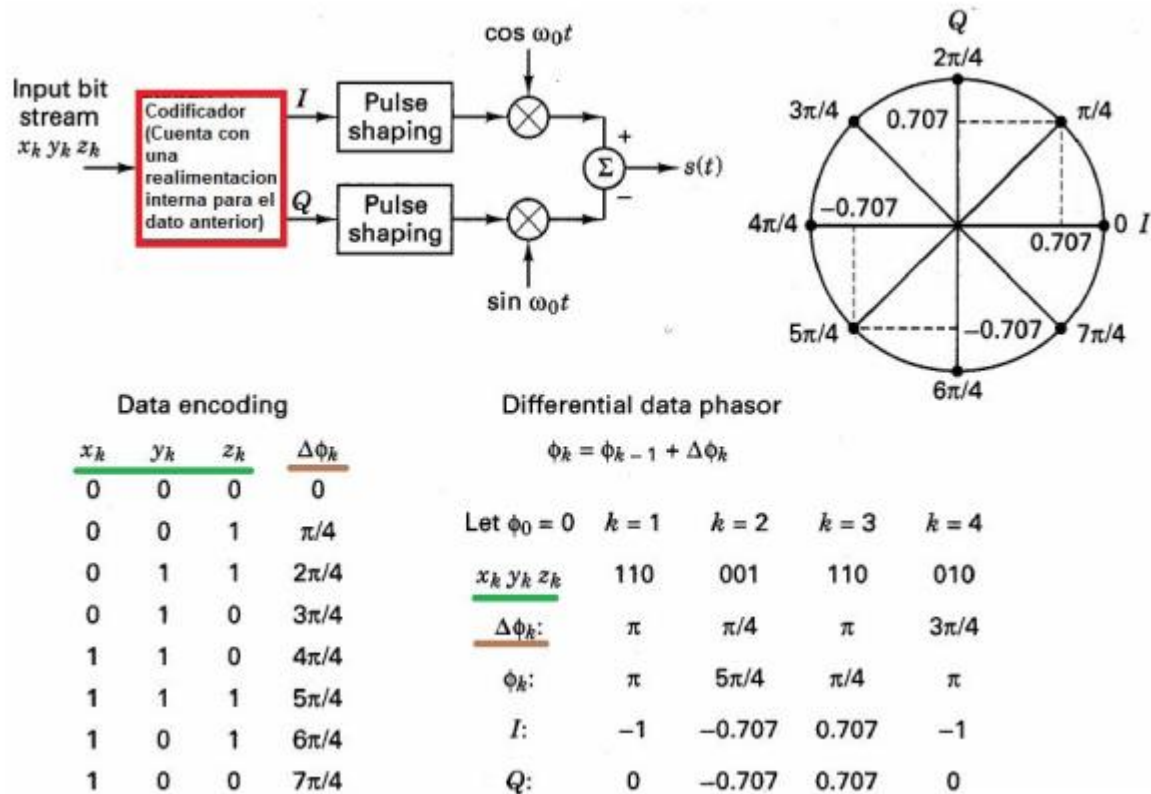


Ilustración 37: Implementación de un Modulador 8DPSK

Una observación importante de estas técnicas de modulación es que cualquier fasor en el plano es transmitido como una modulación en amplitud tanto en fase como en cuadratura, implicando una proyección del pulso formador de onda hacia las componentes de seno y coseno de la portadora. Para facilitar el análisis se omitió la especificación del pulso formador de onda y se asumió cuadrado. Tranquilamente se podría haber elegido una forma de onda del tipo raíz de coseno alzado para solucionar problemas de ISI.

¿Por qué se utilizó este tipo de codificación denominada Gray? En sistemas MPSK, cada vector de señal o waveform no es equidistante con los  $(M-1)$  símbolos restantes, por lo tanto, la probabilidad de error de símbolo no es igual para todas las combinaciones, es decir, que depende del par de vectores que esté comparando. Entonces, mediante una asignación convencional de los mensajes digitales a las waveform, en determinados instantes de tiempo un error de símbolo podría implicar el error de 2 o más bits.

De esta forma, a menudo en sistemas MPSK se utiliza un código binario M-ario tal que la secuencia binaria correspondiente al símbolo adyacente (Fase cambiada) difiere en una sola posición de bit, entonces cuando un símbolo erróneo M-ario ocurrió es muy probable que se haya errado solamente un bit.

Esta forma de construir los modelos de modulación/demodulación para esquemas MPSK se denomina Codificación de Gray. Esta forma de codificar tiene como propósito distribuir correctamente la probabilidad de error de bit respecto a la probabilidad de error de

símbolo, es decir, asegurarse la mayoría de las veces que cuando se erra un símbolo se esté errando 1 bit, no 2,3 o 4 dependiendo de la asignación de los mensajes digitales.

Es una técnica que no tiene ningún costo adicional sobre el sistema y no va a evitar que se tengan errores, solo va a hacer que la probabilidad de error de bit no sea una variable aleatoria respecto a la probabilidad de error de símbolo.

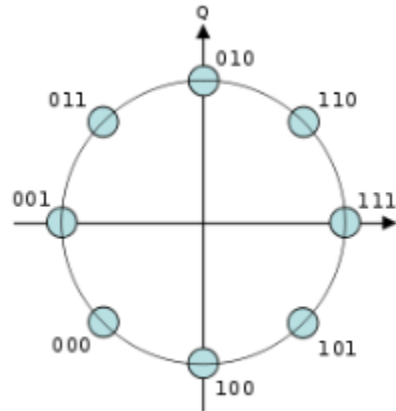


Ilustración 38: Ejemplo de una posible constelación de 8DPSK utilizando codificación de Gray

El proceso de demodulación está netamente relacionado con el proceso de modulación. Para modular, se consideró a la información como una señal compleja de la forma  $g(t)=x(t) + j y(t)$  y a la portadora como  $e^{j\omega_0 t}$ , entonces al multiplicar ambas funciones y sacar parte real se obtiene la señal a transmitir, es decir,  $s(t)$ . De esta forma, la demodulación consiste en multiplicar la señal recibida por otra exponencial compleja pero de la forma  $e^{-j\omega_0 t}$ . Esto permite obtener la señal en banda base

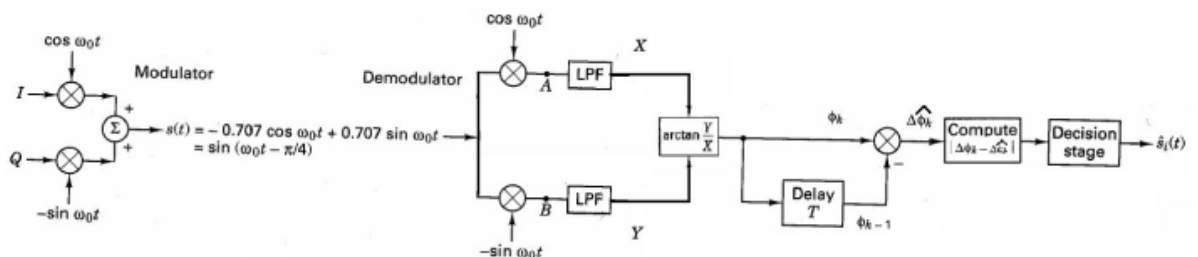


Ilustración 39: Modelo de demodulador M-DPSK

Como ejemplo, suponiendo que el modulador 8DPSK transmite en un instante de tiempo la señal

$$s(t) = -0.707 \cdot \cos(\omega_0 t) - (-0.707) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$s(t) = -0.707 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.707 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

$$s(t) = A \cos\left(\omega_0 t + \frac{5\pi}{4}\right) \quad (45)$$



¿Que se obtiene en el punto X (A') y Y (B') del demodulador? Para empezar, se analiza el punto A:

$$A = (-0.707 \cdot \cos(w_o t) + 0.707 \cdot \sin(w_o t)) \cdot \cos(w_o t) \quad (46)$$

entonces, al trabajar la expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned} A &= -0.707 \cdot \cos(w_o t)^2 + 0.707 \cdot \sin(w_o t) \cdot \cos(w_o t) \\ A &= \frac{-0.707}{2} (1 + \cos(2w_o t)) + \frac{0.707}{2} (\sin(2w_o t)) \quad (47) \end{aligned}$$

Se puede observar de dicha expresión que existe un término en banda base y otros dos términos que corresponden a una señal modulada en el doble de la frecuencia de la portadora. Entonces se podría aplicar un filtro pasabajos para obtener los valores correspondientes.

$$A = -0.707$$

Para obtener los valores en B, se deberá hacer el mismo procedimiento, pero multiplicando la señal recibida por “-sin(wot)”. ¿Por qué -sin(wot)? Porque proviene de  $e^{-jw_o t}$ .

$$\begin{aligned} B &= (-0.707 \cdot \cos(w_o t) + 0.707 \cdot \sin(w_o t)) \cdot (-\sin(w_o t)) \\ B &= \frac{0.707}{2} (\sin(2w_o t)) - \frac{0.707}{2} (1 - \cos(2w_o t)) \quad (48) \end{aligned}$$

Al filtrar se encuentra que:

$$B = -0.707$$

Con dichos valores se debe calcular mediante  $\arctg(B/A)$  o  $\arctg(Y/X)$  a “φk”, el cual corresponde a la fase de la señal en el instante de tiempo “Ts”. Luego, dicho valor debe guardarse para hacer la diferencia con la fase obtenida en el próximo tiempo de símbolo.

### Simulaciones sistemas QDPSK

Para realizar las simulaciones correspondientes a QDPSK es necesario ejecutar el archivo “CodigoQDPSK.m” en la misma ubicación (carpeta) que el archivo “QDPSK.slx”. La estructura general de la simulación es la que se detalla a continuación

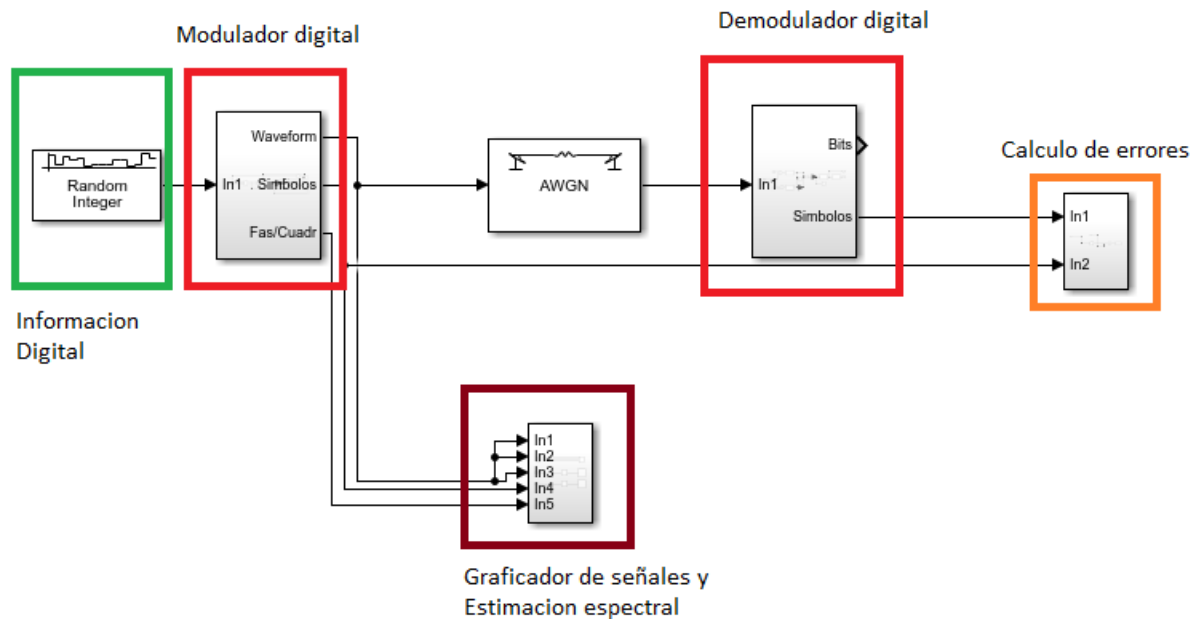


Ilustración 40: Esquema general QDPSK

A continuación, se detalla la estructura del subsistema presente en la figura cuyo nombre es “Modulador digital”

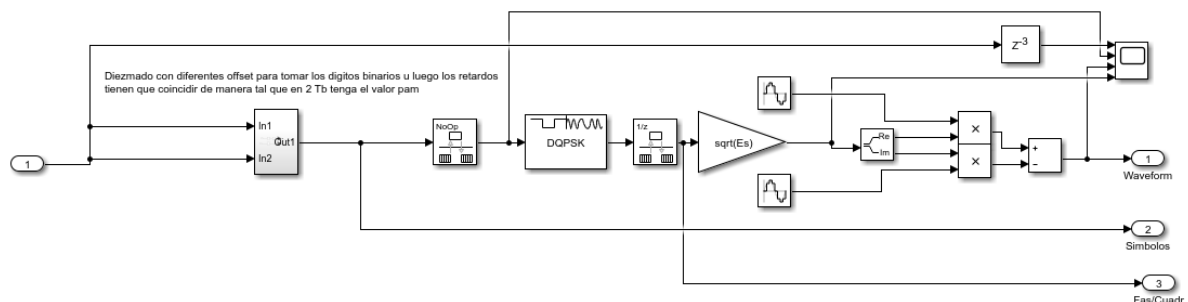


Ilustración 41: Esquema Modulador QDPSK implementado mediante fase y cuadratura

Como se observa en la imagen, dicho modulador tiene una implementación típica en fase y cuadratura como se describió en la sección “Simulación sistemas BDPSK” ya que las waveform posibles a transmitir contienen las siguientes fases:  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$ . Entonces es necesario la vinculación de ambas componentes para lograr la transmisión de la información en la fase. A dicho esquema ya comentado, se agregan 3 nuevos bloques, dos de ellos inmediatamente antes y después del modulador digital denominados “Rate transición” y uno al principio del modulador que tiene como propósito transformar la secuencia de bits “k” en un número entero del 0 al 3. Para ello, es necesario tomar cada uno de los bits de información considerando que el primero de ellos es el más significativo y el último el menos significativo dentro de los “k” asociados. Una vez obtenidos los valores mediante diezmadores con diferentes offset (permiten obtener los bits de información para armar el mensaje digital cada

“k” bits de entrada) se aplican ganancias con valores relacionados a potencia de dos si es que corresponde y posteriormente un sumador.

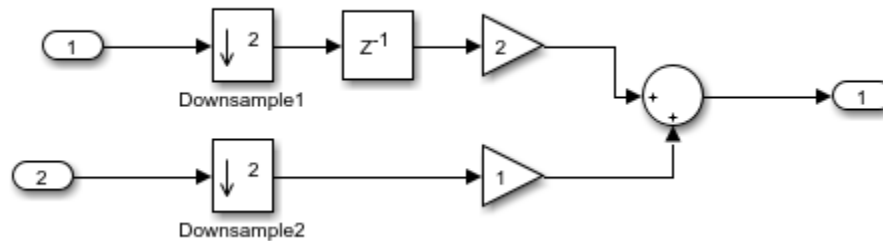
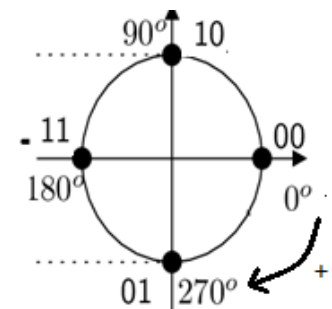
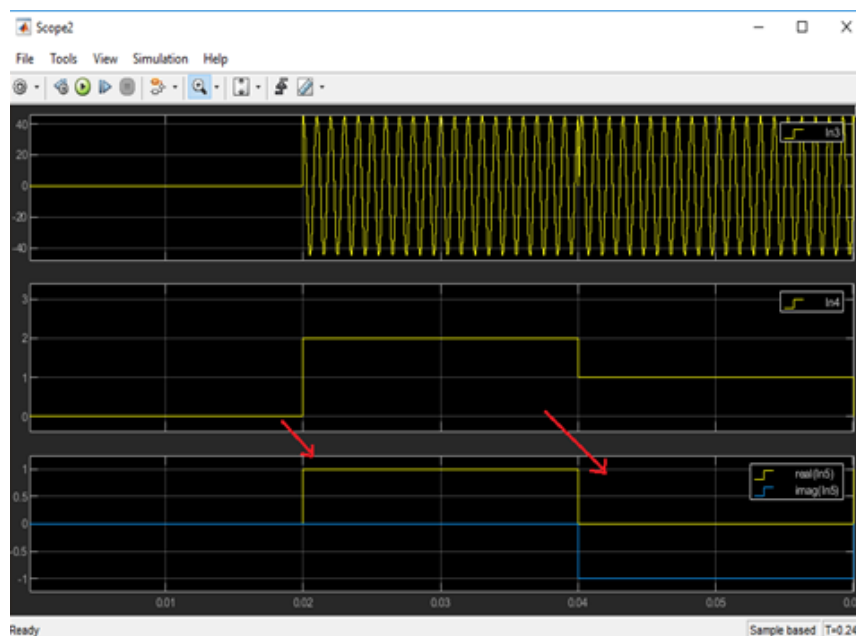


Ilustración 42: Generación de niveles

Los bloques “Rate transicion” tienen como propósito adaptar la tasa de transmisión de información. ¿A qué se debe esto? En primer lugar, a que es necesario mantener el valor obtenido del mensaje digital que represente la información de los dos bits durante el tiempo de símbolo. De esta forma, el modulador digital durante dicho intervalo de tiempo estará generando una waveform asociada. Posteriormente, como la configuración del sistema Simulink es discreta, debe adaptarse la tasa de transmisión para poder graficar las señales resultantes de la modulación mediante muestras discretas. Resulta que, si no se adapta dicha tasa, las señales al ser graficadas por los osciloscopios (interpolan muestras) arrojan resultados inentendibles.



$$\text{FasePost} = \text{DeltFase} + \text{FaseAct}$$

MD=	00	10	01
DeltFase=	0	90	270
FaseAct =	0	0	270
FasePost=	0	270	0

Ilustración 43: Visualización del Funcionamiento QDPSK

Como puede observarse en la imagen anterior, en la primera gráfica se encuentra la señal a transmitir con sus desfasajes. En la segunda imagen, están presentes los mensajes digitales, los cuales se representan con niveles desde el 0 hasta el 3 como se comentó anteriormente. Estos tienen una duración equivalente a dos tiempos de bit, por lo tanto, es 0.02

segundos, ya que se utilizó un tiempo de bit de 0.01 segundos. Además, en la imagen, a la derecha se muestra la regla de asignación para la fase posterior que resulta función del desfasaje introducido por el mensaje digital y la fase actual.

En el primer tiempo de símbolo el nivel es 0, por lo tanto, el mensaje digital a la entrada del modulador QDPSK es “00”. Esta secuencia de bits tiene asignada un  $\Delta\theta$  de 0 grados, por lo tanto, considerando que la fase de la señal inicial es 0 grados, la fase en el tiempo posterior que se obtiene como el delta de fase actual producto del mensaje digital y la fase actual propiamente dicha resultara nuevamente en 0 grados. Para el segundo tiempo de símbolo, el mensaje digital asociado es “10” ya que el nivel que se observa en el osciloscopio entre los instantes de tiempo de 0.02 segundos y 0.04 segundos es 2. Para el mensaje digital en cuestión, como se aplica codificación de Gray corresponde a un  $\Delta\theta$  de 90 grados, por lo tanto, utilizando la misma lógica que para el primer símbolo se deduce que la fase de la waveform para el tiempo inmediato posterior es 270 grados.

Respecto a PSD, es de destacar que el 90% de la potencia asociada a la forma de onda que se propaga por el canal se encuentra en la mitad del ancho de banda en relación a BDPSK. Esto se debe a que ambos sistemas fueron simulados con la misma tasa de bits. Para el caso de BDPSK la tasa de símbolos es igual a la tasa de bit y por lo tanto el ancho de banda ocupado es el doble del ancho de banda de QDPSK. En este último, la tasa de símbolo resulta ser la mitad de la tasa de bit. La siguiente imagen muestra la PSD para ambos

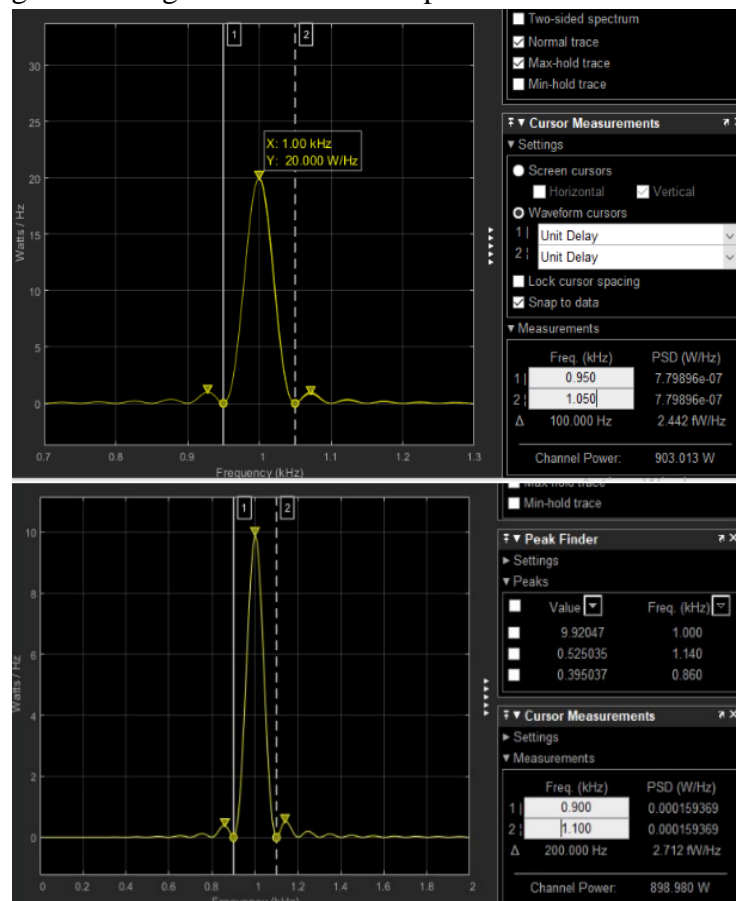


Ilustración 44: Comparación de densidad espectral de potencia entre QDPSK y BDPSK

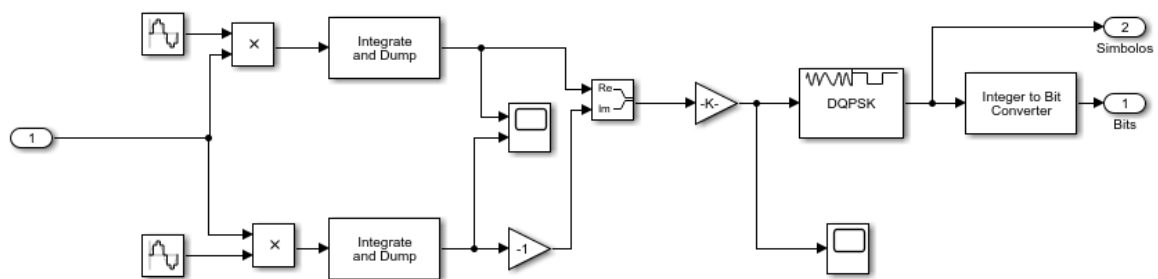


La imagen presentada anteriormente pone en comparación la densidad espectral de potencia para un sistema QDPSK versus un sistema BDPSK para una misma tasa de bit y energía de bit. En particular, la tasa de bits es 100 bits por segundo, la energía de bit es 10 Joule por bit y la frecuencia de la portadora 1000 Hertz. La potencia es la misma para ambas técnicas y resulta en 1000 Watts.

La primera gráfica corresponde a la densidad espectral de potencia del sistema QDPSK y la segunda a un sistema BDPSK para cada símbolo en particular. Mediante una inspección rápida, puede observarse que sin importar la cantidad de desfases que tengan las señales, la densidad espectral de potencia en su forma no cambia, ya que es información propiamente de la fase y no está presente en la PSD.

Además, puede observarse que al comparar ambas técnicas tienen la misma potencia a pesar de reducir el uso del ancho de banda. Para que esto ocurra es necesario que en QDPSK la amplitud asociada al pico del lóbulo principal sea el doble que en BDPSK.

A continuación, se presenta el esquema de demodulación:



**Ilustración 45: Implementación demodulador QDPSK**

Como puede observarse en la imagen, el proceso de recepción que es caracterizado por la utilización de un filtro acoplado está implementado con correladores. En particular, dos de ellos, uno para cada base (Fase y Cuadratura) las cuales deben tener la misma amplitud y frecuencia utilizada por el modulador digital. Estos correladores, son construidos con dos bloques de Simulink. Un multiplicador y un bloque definido como “Integrate and Dump” que realiza el proceso de integración de la señal de entrada durante una determinada cantidad de muestras discretas. Para implementar dicho proceso es necesario configurar la cantidad de muestras de simulación por waveform. Este bloque reemplaza lo que se mostró en demodulación BDPSK mediante los bloques “integrator”, “Pulse generator” y “Sample and Hold”.

Luego de obtener ambas componentes, se aplica el bloque “Real-Imag to Complex” para generar una señal compleja y poder entrar al demodulador DQPSK de Simulink.

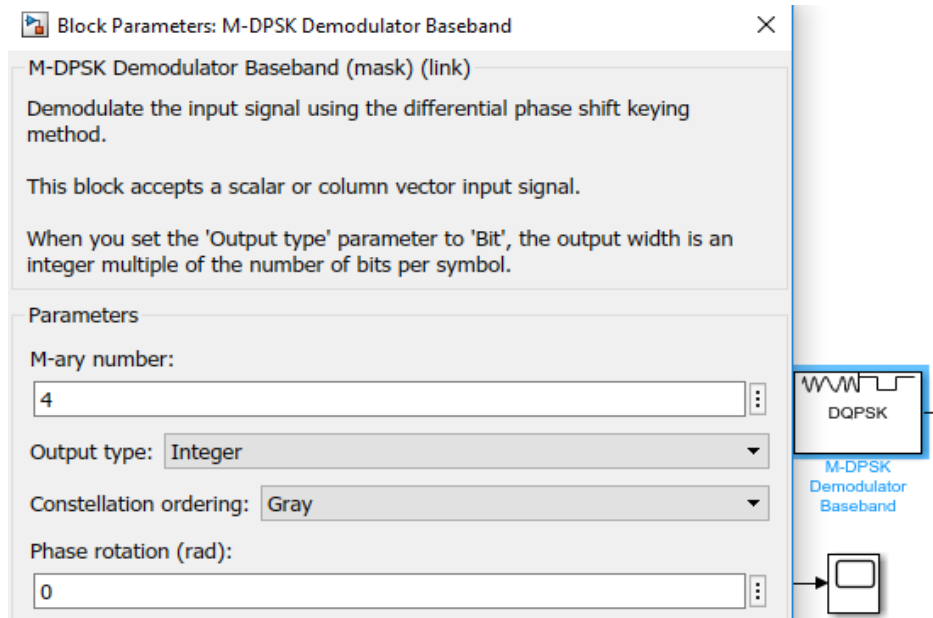


Ilustración 46: Parámetros de configuración de BDPSK

La configuración de este bloque requiere que se especifique la cantidad de símbolos posibles a recibir, el tipo de salida, que puede ser en símbolos o bits y como está construida la constelación, si utiliza codificación de Gray o no.

El último parámetro se refiere a la rotación de la constelación completa a partir de la constelación clásica que ya se conoce para este tipo de sistemas. A continuación, se presenta una constelación donde la rotación de fase es  $\pi/4$ .

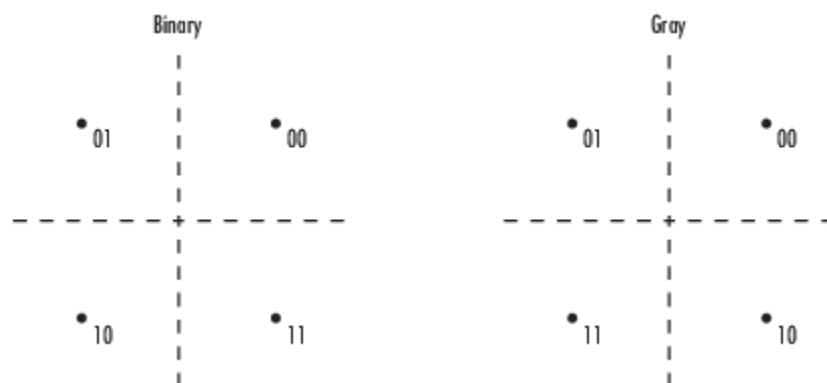


Ilustración 47: Como afectan el parámetros rotación de fase de Simulink

Respecto a la probabilidad de error de bit, debe tenerse en cuenta que a la salida del demodulador se obtendrán niveles de 0 a 3 al igual que a la entrada del modulador digital, lo cual implica símbolos. La forma de obtener la probabilidad de error de bit es utilizando la relación planteada en codificación de Gray que vincula la probabilidad de error de símbolo con la probabilidad de error de bit, ya que la mayoría de las veces es más probable que los errores de símbolo impliquen un error en un solo bit. De esta forma, se importa a Matlab un vector con los errores de símbolo y luego, dentro del script que manipula los datos, se aplica la relación que plantea Gray para obtener la probabilidad de error de bit.

$$P_B = \frac{P_E}{\log_2 M} \quad (49)$$

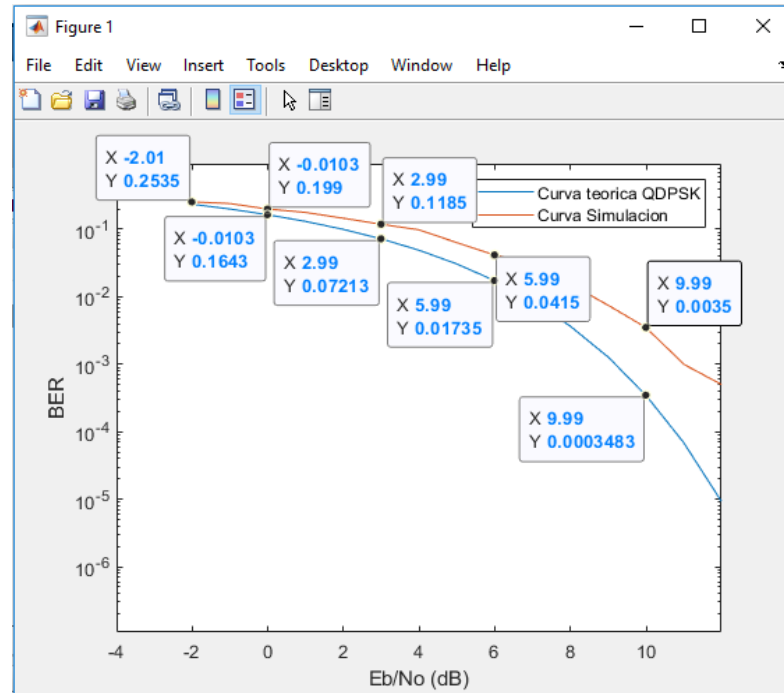


Ilustración 48: Comparación curvas performance QDPSK teorica versus simuladas

La curva que se observa en la figura anterior, rotulada como curva teórica, responde al modelado que hace Simulink para sistemas QDPSK. De acuerdo a la documentación presente en la página oficial de Matlab, la expresión que caracteriza a la probabilidad de error de símbolo es la siguiente:

$$P_s = \frac{\sin(\pi/M)}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\exp(-(kE_b/N_0)(1 - \cos(\pi/M)\cos\theta))}{1 - \cos(\pi/M)\cos\theta} d\theta \quad (50)$$

$$P_b = \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^{M/2} (w'_i) A_i \right) \quad (51)$$

$$w'_i = w_i + w_{M-i}, \quad w'_{M/2} = w_{M/2}, \quad (52)$$

donde “wi” es la distancia de hamming asignado a los símbolos.

$$A_i = F\left((2i+1)\frac{\pi}{M}\right) - F\left((2i-1)\frac{\pi}{M}\right)$$

$$F(\psi) = -\frac{\sin\psi}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\exp(-kE_b/N_0(1 - \cos\psi\cos t))}{1 - \cos\psi\cos t} dt \quad (53)$$

Para el caso particular de M=2 se obtiene:

$$P_B = \frac{1}{2} e^{(-\frac{E_b}{N_0})} \quad (54)$$

Esta última expresión ya se mencionó anteriormente en la sección de “BPSK diferencial detectado diferencialmente coherentemente”. Resulta, que la probabilidad de error de símbolo para este tipo de sistemas cuando el valor de “k” es mayor a uno, puede aproximarse mediante la siguiente ecuación

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}M}\right) \quad E_s = E_b(\log_2 M) \quad \text{energía de símbolo} \quad (55)$$

teniendo en cuenta que dicha aproximación sólo es posible para grandes valores de  $E_s/N_0$ .

En función de dichas fórmulas matemáticas, Matlab posee algunas herramientas que permite observar la performance de distintos esquemas de modulación/demodulación para un canal AWGN teniendo en cuenta varios parámetros. Dicha herramienta se define como “berawgn”. Las gráficas definidas como teóricas para el presente trabajo fueron elaboradas con la misma. También puede consultarse sobre el uso y manejo de la herramienta “bertool”.

Esta última mencionada, simplifica la implementación de las simulaciones, gracias a una herramienta denominada “Monte Carlo”. Si bien en este trabajo no se utiliza, resultaría de interés corroborar su funcionamiento.

### Simulaciones sistemas 8DPSK

Las simulaciones de sistemas 8DPSK pueden llevarse a cabo a partir de la ejecución del archivo “Codigo8DPSK.m” que debe encontrarse en la misma carpeta que el archivo “MDPSK.slx”. La estructura general de la simulación es la siguiente

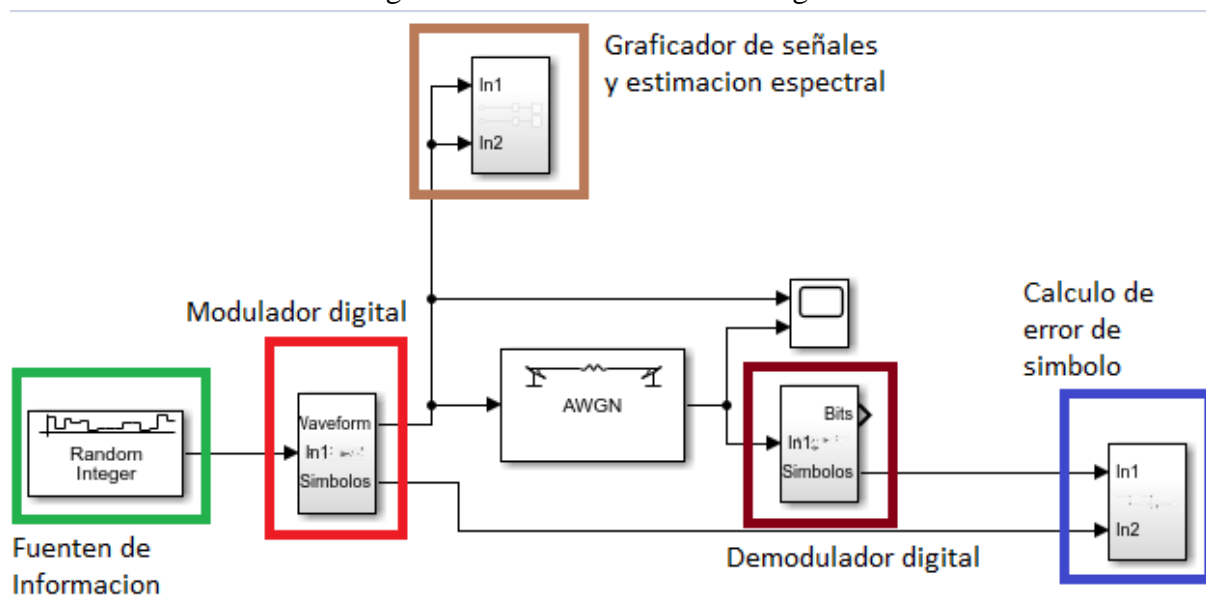
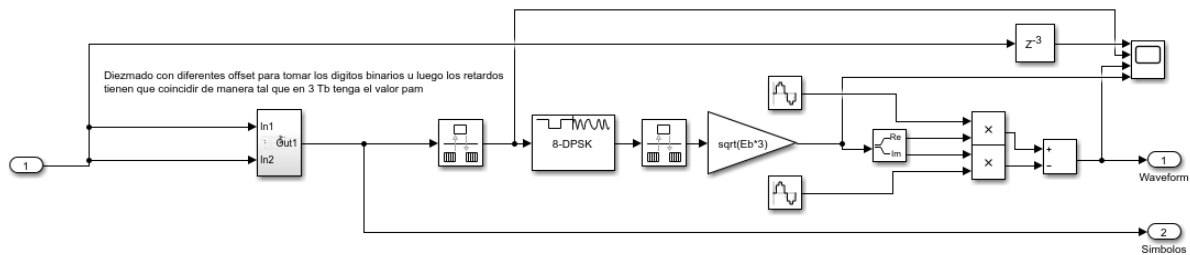


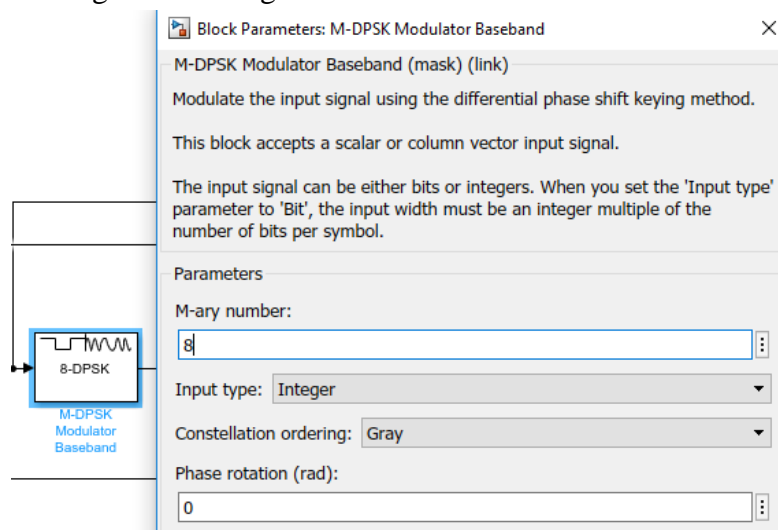
Ilustración 49: Esquema general de 8DPSK

Como puede observarse en la imagen, la estructura del sistema es muy similar a QDPSK. A continuación, se muestra la estructura del modulador digital.



**Ilustración 50: Implementación del Modulador 8DPSK**

El único cambio que presenta este sistema respecto a QDPSK es que deben tomarse 3 bits por tiempo de símbolo para asignar niveles. En este sistema los niveles pueden asumir valores desde 0 hasta 7 y son usados junto con el “rate transicion” para alimentar al modulador digital 8-DPSK que tiene la siguiente configuración



**Ilustración 51: Configuración de Modulador banda base 8DPSK**

Se especifica que se van a generar 8 waveform distintas, la entrada estará dada como un nivel del 0 al 7 y además se utilizará una constelación ordenada según Gray.

Current Input	Binary-Coded Phase Difference	Gray-Coded Phase Difference
[0 0 0]	$j\theta$	$j\theta$
[0 0 1]	$j\theta + j\pi/4$	$j\theta + j\pi/4$
[0 1 0]	$j\theta + j\pi 2/4$	$j\theta + j\pi 3/4$
[0 1 1]	$j\theta + j\pi 3/4$	$j\theta + j\pi 2/4$
[1 0 0]	$j\theta + j\pi 4/4$	$j\theta + j\pi 7/4$
[1 0 1]	$j\theta + j\pi 5/4$	$j\theta + j\pi 6/4$
[1 1 0]	$j\theta + j\pi 6/4$	$j\theta + j\pi 4/4$
[1 1 1]	$j\theta + j\pi 7/4$	$j\theta + j\pi 5/4$

**Ilustración 52: Regla de asignación de fase en función del mensaje digital**

La imagen presentada anteriormente hace referencia a la regla de modulación utilizada por el modulador digital 8-DPSK para determinar la fase actual de la señal a transmitir. La misma está en función de la fase anterior y el desfase producto del mensaje digital.

La densidad espectral de potencia tiene la siguiente forma cuando la  $E_b=10$  Joule/bit, la tasa de bit  $R_b=100$  bits/seg y la frecuencia de la portadora 1000 Hertz.

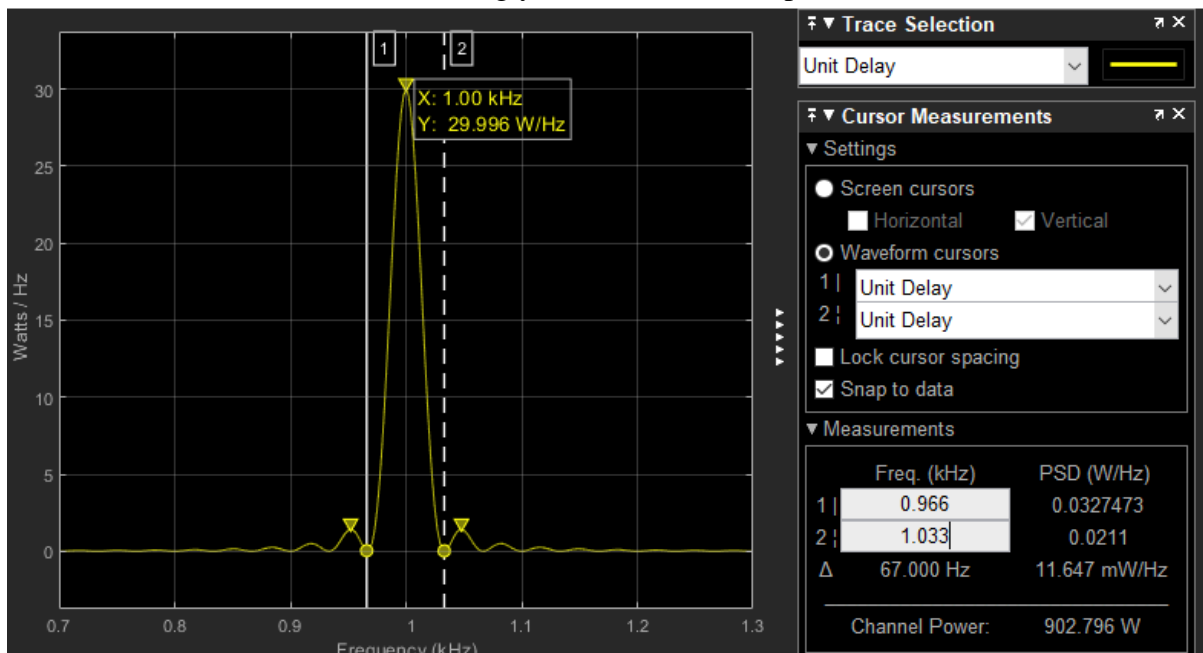


Ilustración 53: Densidad espectral de potencia de una waveform en esquema 8DPSK

Los efectos de incrementar el orden del sistema ya fueron comentados en la simulación de QDPSK. Se observa que el 90% de la potencia se encuentra entre las frecuencias 966 Hertz y 1033 Hertz que corresponden a la tasa de símbolo “ $R_s$ ” desplazado desde la portadora.

Algo importante de agregar es que esta herramienta funciona mediante la Transformada de Fourier de tiempo reducido o comúnmente conocida como STFT. La cual emplea una ventana deslizante que toma las muestras de la señal y realiza FFT. De esta forma, fue necesario determinar la cantidad de muestras de simulación por símbolo y elegir alguno de los tipos de ventana disponibles (rectangular) para configurar este bloque.

Respecto a la performance se procedió de una forma muy similar a QDPSK para obtener la probabilidad de error de bit. Las simulaciones en este caso particular se realizaron con 1000 símbolos, lo cual implica que si simularon 3000 bits.

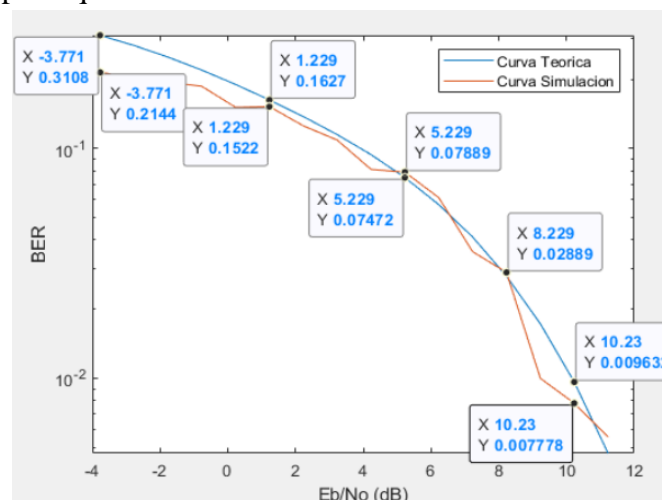


Ilustración 54: Comparación performance 8DPSK teórico versus simulado

## Conclusión

Las simulaciones resultan ser una herramienta muy útil para aplicar los conceptos asociados a los sistemas de comunicación digital. Sin embargo, no resulta ser una tarea sencilla la de modelar un sistema. El manejo de diversas herramientas y conceptos de forma fluida en las distintas áreas lleva a los estudiantes a realizar un trabajo sumamente integral. Sin embargo, es un paso totalmente necesario en el aprendizaje y proporciona una instancia muy buena para afianzar conocimiento.

Las técnicas de modulación/demodulación que se mencionan y explican en el informe constituyen un grupo que posee un comportamiento particular cuando los sistemas escalan en orden. A medida que los mensajes digitales son más grandes y la cantidad de waveform también, si la potencia no se aumenta, la performance de los sistemas empeora, pero obtienen mayor eficiencia, es decir tienen la posibilidad de transmitir más bits por segundo en menor cantidad de Hertz. Esto lo verifican las curvas de performance de los distintos sistemas, las cuales se han mostrado a lo largo del informe y que remarcan que a medida que “k” aumenta se desplazan hacia la derecha dando a entender que para la misma  $E_b/N_0$  la probabilidad de error de bit es más grande. Las gráficas de densidad espectral de potencia permiten verificar la eficiencia espectral de los sistemas MDPSK ya que se va reduciendo el ancho del lóbulo principal de la sinc en la frecuencia donde se encuentra el 90% de la potencia de la forma de onda transmitida a medida que aumenta “k”.

El comportamiento teórico de los sistemas ante la variación de dicho parámetro se confirma mediante las simulaciones.

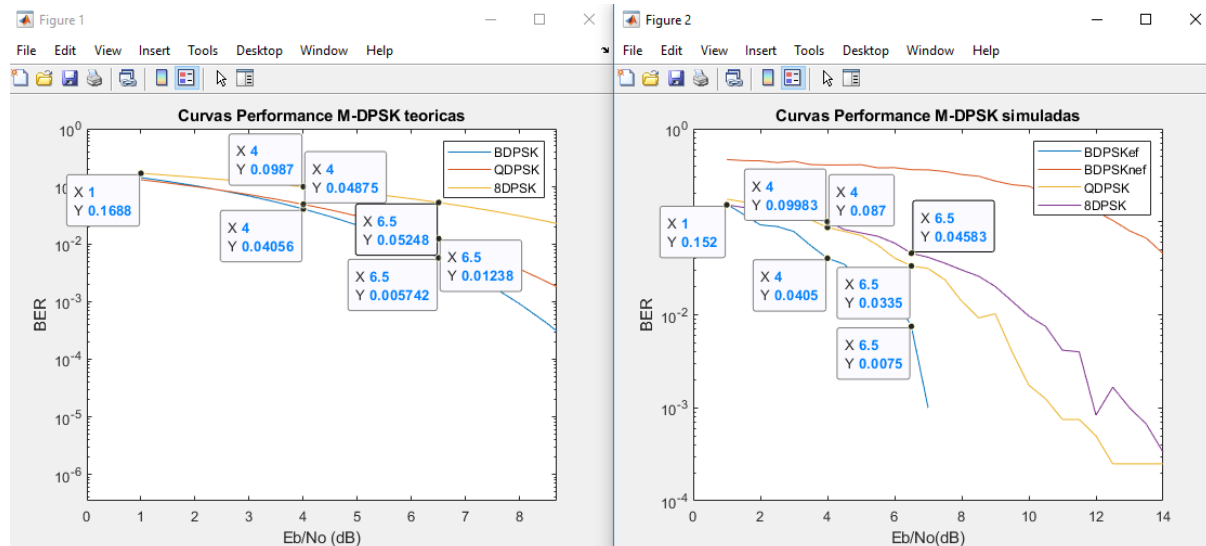


Ilustración 55: Comparación entre el comportamiento de la performance de manera teórica versus las simuladas

Los sistemas diferenciales ya de por si tienen peor performance que los sistemas MPSK porque el error en un símbolo por lo general arrastra a más errores, pero no necesitan referencia de fase, por lo tanto, funcionan correctamente en la presencia de sistemas lineales que introducen desfases sobre las señales transmitidas.





Si bien no fue abordado en este informe, para sistemas MDPSK podría aplicarse técnicas de codificación con la finalidad de otorgar a la secuencia de bit de la fuente de información, una estructura más robusta definida como codeword, cuyas características como secuencia permite para hacer frente a los errores introducidos por el canal. Esto mejoraría la performance del sistema a costas de requerir mayor ancho de banda. Algunos esquemas de codificación permiten la corrección de errores (FEC) y otros permiten detectar errores y requerir retransmisiones (ARQ).

Respecto a la implementación del sistema se podría cuestionar la utilización de un pulso formador de onda rectangular ya que tiene infinitas componentes espectrales y ante la presencia de un canal real que tiene ancho de banda limitado, por más que se permita el paso del lóbulo principal, el filtrado produce lo que se denomina interferencia intersimbólica. Este fenómeno que afecta a los sistemas de comunicación por la falta de ancho de banda disponible, lo cual genera que los símbolos se dispersen en el tiempo, es decir, ocupen más de un tiempo de símbolo, perjudicando a los waveform posteriores. Debería utilizarse tanto para el sistema modulador como demodulador un pulso formador de onda del tipo raíz de coseno alzado, de manera que las características espectrales de las waveform se encuentren únicamente contenidas en un ancho de banda finito definido por la siguiente ecuación  $W = Rs(1 + r)$