Resumen CDA

- <u>Conceptos Generales de los sistemas de comunicación</u>

En primer lugar, para hablar de los sistemas de comunicación digital es conveniente definir lo que es la ***Comunicación***. La *Comunicación* hace referencia al proceso mediante el cual se transfiere información en un determinado lapso de tiempo desde un punto en el espacio denominado fuente de información hasta otro punto denominado destino de la información. Considerando el mínimo grado de pérdidas o perturbaciones.
En líneas generales, un sistema de comunicación está conformado de la siguiente manera:

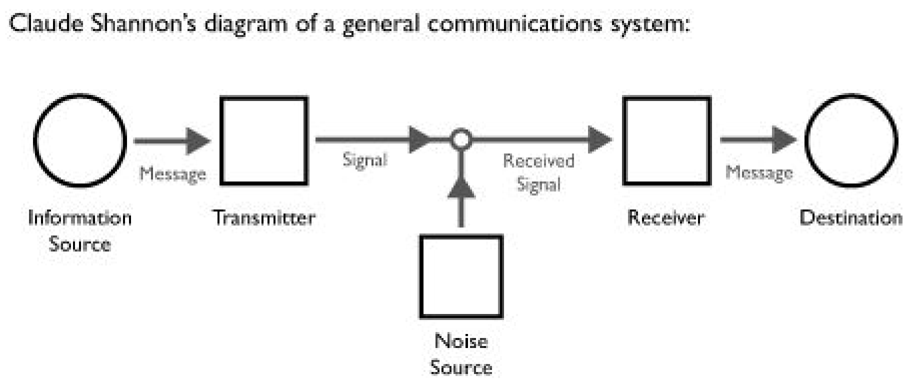


Figura 1 : Sistema de comunicación general.

La ***Fuente de información*** contiene mensajes/datos que resultan de interés para el destinatario, por eso se dice que es información. Esta puede ser *Digital, Textual o analogica.*
El ***Medio de transmisión*** es la vía por la cual se comunican los datos o mensajes. En este canal se degrada/perturba las comunicaciones o mejor dicho la transferencia de información por la presencia de varios factores. Entre ellos podemos mencionar ruido, atenuaciones, respuestas en frecuencia no ideales lo cual genera distorsiones.

Como conceptos importantes para todo sistema de comunicación genérico tenemos:

→ *Información*: Se puede definir como el significado de lo que se va a transmitir, es una cantidad intangible. Es la interpretación de los mensajes enviados.

→ *Mensaje:* Es la materialización de la información en una cantidad medible. Se puede definir como el soporte de la información.

→ *Señal:* es el resultado de la transformación de una cantidad no eléctrica portadora de información (mensaje) en una cantidad eléctrica o magnitud eléctrica variable en el tiempo.

● Clasificación y diferencias de los sistemas de comunicación

Los sistemas de comunicación pueden diferenciarse en dos grandes grupos:

→ ***Sistemas de comunicación analogica:*** Son aquellos donde la información dentro del sistema es manipulada como una señal analogica (Señal electrica de voltaje en función del tiempo). La misma puede adquirir infinidad de valores tanto antes del proceso de modulación como al ser transmitida por el canal de comunicación.
→ ***Sistemas de comunicación digital:*** Son aquellos donde la información dentro del sistema es manipulada como un flujo de bits (unidad mínima de información lógica, que puede tener solo dos estados → 1 ó 0) y que al pasar por el proceso de modulación produce señales discretas es decir que solo pueden tomar un número finito de valores en función del tiempo.

En definitiva ambos sistemas cuando transmiten por un medio de transmisión manipulan señales analogicas. La diferencia radica en cómo se tratan los datos internamente, siendo que en los sistemas analógicos en todo momento se trabaja/utiliza señales analogicas y en los sistemas digitales toda información se transforma a un flujo de bits para ser manipulados y últimamente lograr inyectar sobre el canal una señal analogica de valores discretos.

● ¿Dónde está la ventaja de utilizar sistemas de comunicación digital?

En primer lugar, todas las líneas de transmisión y circuitos tienen algunas no linealidades en frecuencia en su función de transferencia lo cual produce distorsiones sobre las señales transmitidas. *Idealmente, se busca que las señales recibidas sean una versión escalada de la entrada y retardada en el tiempo. Esto, implica en el dominio de la frecuencia que la función de transferencia del canal sea la siguiente:*

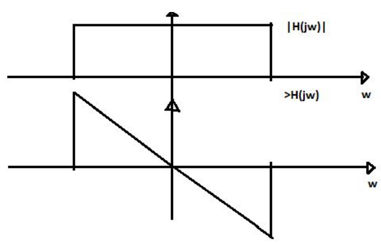


Figura 2: Transformada de Fourier de un filtro ideal

Podemos observar que el canal debe tener una respuesta en frecuencia plana en el módulo y una respuesta en fase lineal para que se produzca la salida esperada.

$$y(t) = k * x(t - t_0)$$

Sin embargo los canales por lo general presentan la siguiente respuesta:

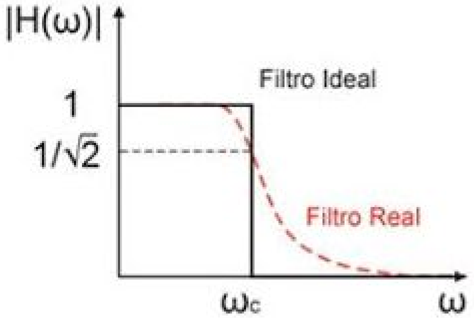


Figura 3: Filtro Ideal vs Real

La curva en rojo es el canal real, este no presenta una respuesta en frecuencia plana en todo el ancho de banda considerado. Por lo tanto, distorsiona mucho más las altas frecuencias que las bajas espectralmente hablando. Además, los canales de transmisión reales tienen atenuación y ruido eléctrico asociado que produce más distorsión sobre la forma de onda transmitida. La siguiente figura ilustra lo expuesto anteriormente:

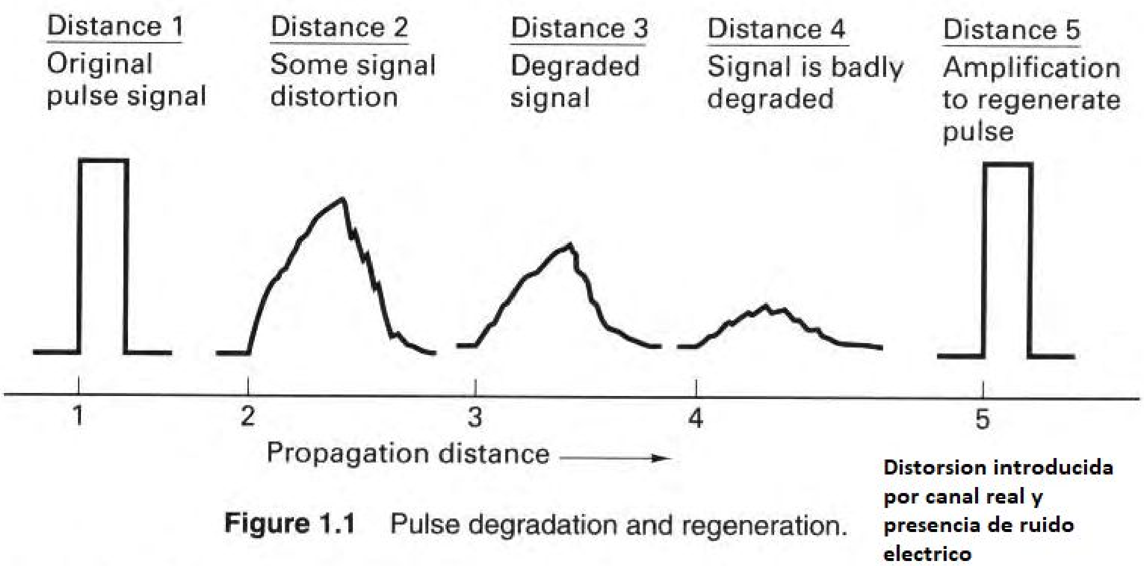


Figura 4: Distintas etapas de transmisión de un pulso

En definitiva, ambos sistemas de comunicación, ya sea, analógico o digital están sujetos a distorsiones, atenuaciones e interferencias. Sin embargo, como se puede observar en la figura 4, una de las principales ventajas de los digitales es la recuperación de las señales transmitidas sin distorsión y ruido alguno. Esto no ocurre con los sistemas analógicos, ya que el ruido y las distorsiones una vez presente en la forma de onda transmitida no pueden ser removidas en su totalidad por el receptor. Como consecuencia el sistema de comunicación analógico es más vulnerable a las características y distancias a recorrer a través del canal de transmisión. Esto se puede observar entre la etapa 2 y 4 de propagación de la figura 4.

Como Conclusión, con las técnicas digitales, se produce una señal de alta fidelidad respecto a la transmitida, por lo tanto tenemos una tasa de error extremadamente baja. Mientras que, la información transmitida por un sistema analógico nunca puede ser recuperada perfectamente.

Otra ventaja importante de la parte digital es que la combinación de señales digitales usando multiplexación en el dominio del tiempo (TDM) es más simple que la combinación de señales utilizando multiplexación en el dominio de la frecuencia (FDM) hablando precisamente de la implementación de hardware. Además, los sistemas digitales dan el mismo tratamiento a las diversas señales, transformando todo a flujo de bits. Lo que permite brindar independencia entre procesos dentro del sistema.

Pero...¿Cuáles son los costos de implementar un sistema digital?

Se realiza por lo general un procesamiento intensivo de la señal comparado con el analógico y se requiere una sincronización muy alta entre las diversas partes del sistema, en donde en los sistemas analógicos esto es mucho más simple. Example: Recordar que ocurre cuando en modulación/demodulación AM sin portadora existían errores de fase, es decir, las portadoras están desincronizadas… solo era una atenuación.

Apartado: Performance en analógico y digital

Al referirnos a los distintos sistemas ya citados, debemos hacer una distinción a la hora del reconocimiento de los datos recibidos por parte de nuestro receptor o demodulador. En principio, hay que considerar que en un Sistema Analógico se estima la forma de onda transmitida a partir de la observación de la señal recibida. La misma, por lo general, se encuentra contaminada por ruido y distorsionada.

El receptor analógico estima la forma de onda transmitida debido a que no tiene posibilidad de conocer todas las formas de ondas posibles. Existe una cantidad prácticamente infinita de formas de ondas posibles a transmitir que en diferenciales de tiempo pueden adquirir infinidad de valores aceptables.

Por otra parte, los Sistemas Digitales, al tener muy bien definidas las formas de onda a transmitir, siendo numerables y bien identificables, el receptor tendrá la tarea de detectar lo *que se ha enviado, lo cual significa que el mismo comparará la forma de onda recibida con el set de formas de ondas posibles a transmitir (tabla de valores predefinidos) con la finalidad de determinar a cuál se parece más para decidir qué se transmitió.*

En la estimación, se utiliza como parámetro la ***Relación señal ruido (So/No – Si/Ni).***

So/No → representa por magnitud de señal, cuanta magnitud de ruido existe a la salida del demodulador. Coeficiente de calidad a la salida para analógicas.

Si/Ni → representa por magnitud de señal, cuanta magnitud de ruido existe a la entrada del demodulador. Coeficiente de calidad a la entrada para analógicas una vez atravesado el filtro de recepción.

Hablar de So/No / Si/Ni es hablar de cómo varía la calidad a la salida, respecto a la calidad en la entrada. Es una relación característica para cada demodulador que lo identifica.

La diferencia entre estimación y detección es la eliminación completa de ruido, por parte de este último a la salida del demodulador. Entonces en detección no sirve la medida de calidad del demodulador como antes, es decir ***So/No / Si/Ni*** *porque* ***No=0 siempre,*** *independientemente si se decida bien o se decida mal. Es por eso que se utiliza otra medida de performance denominada* ***probabilidad de error de bit****. Esta cantidad refleja cuántas veces se equivoca el demodulador decidiendo respecto a la cantidad total de veces que se decidió.*

- Diagrama General de un sistema de comunicación Digital

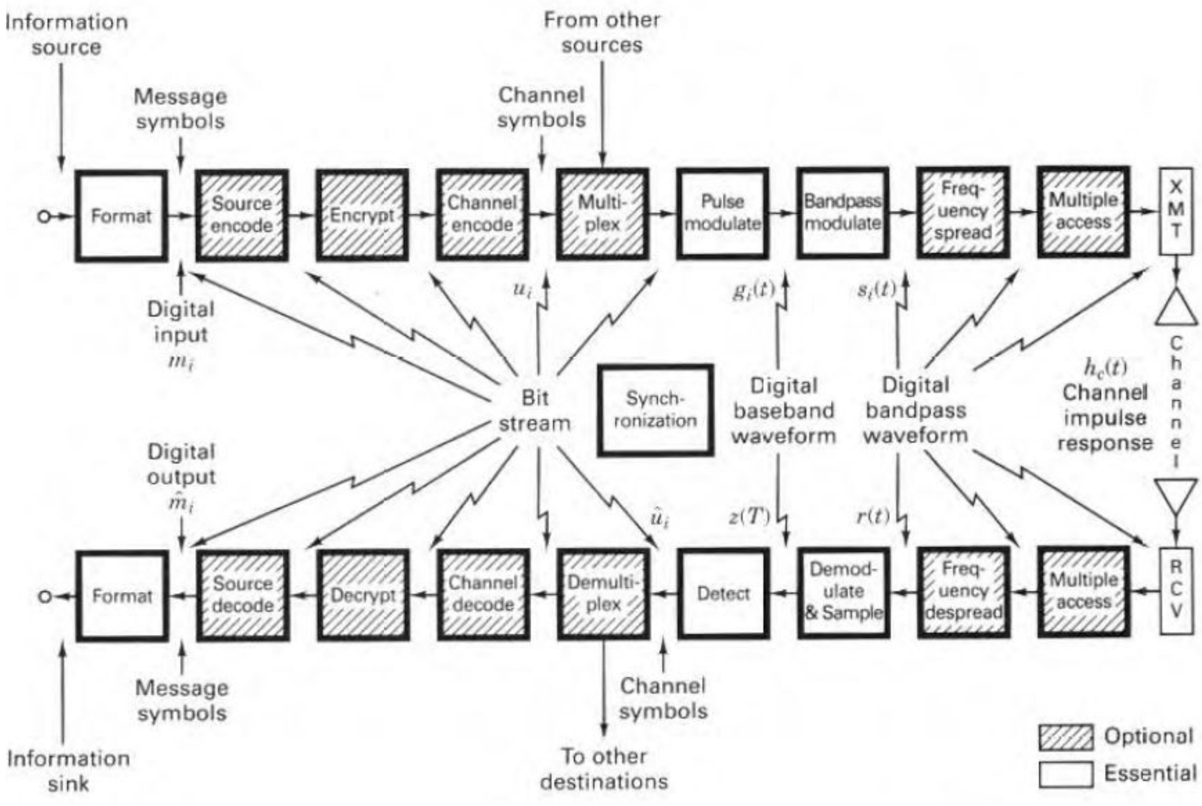


Figura 5: Esquema general y absoluto de un sistemas de comunicación.

Podemos observar que los bloques básicos/esenciales en todo sistema son:

- Formateo
- Modulador
  - Modulador Banda Base
  - Modulador Banda de Paso
- Canal de transmisión
- Demodulación/Detección
  - Transformación de la forma de onda a muestras. (demodulate & sample)
  - Toma de decisión en función de muestras.(detect)
- Formateo

En definitiva, un sistema de comunicación digital simplificado tiene las siguientes etapas:

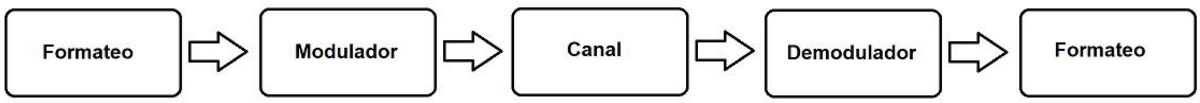


Figura 6: Diagrama de un sistema de comunicación simplificado.

● Formateo

El formateo es definido como aquel **proceso** encargado de garantizar la compatibilidad de la información con el proceso digital. ¿Qué significa esto? Que es el encargado de procesar las señales de entrada para entregar a la salida un flujo de bit o bit stream que requiere el modulador digital en su entrada.

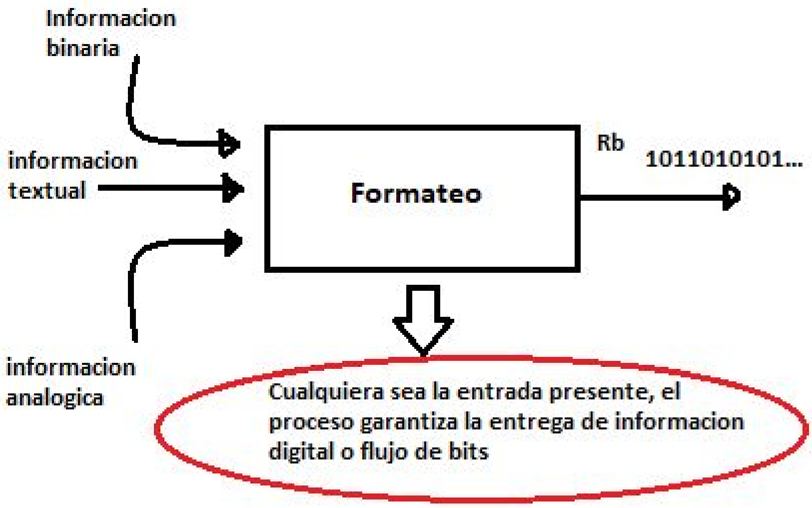


Figura 7: Presentación de formateo como un proceso necesario en los sistemas de comunicación digital.

Las señales de entrada se pueden diferenciar en 3 tipos de *información*, siendo estas Analogica, Textual o Digital.

→ *información Digital* es aquella que no necesita atravesar ninguna etapa del formateo ya que se encuentra en su manera debida para ingresar al sistema digital. Cuando nos referimos a información digital, estamos haciendo referencia a la unidad mínima de información lógica denominada bits, es decir, unos y ceros.

→ *Información Textual* es una fuente de información conformada por una colección finita de símbolos generados en tiempos discretos, entre los cuales se pueden encontrar letras, números, etc. Un generador de este tipo de información son los teclados de computadora. Es necesario aclarar que el único procesamiento que debemos hacer sobre dicha fuente consiste en aplicar codificación.

→ *Informacion Analogica* depende netamente de la etapa de formateo para poder hacer ingreso al sistema de comunicación, teniendo que atravesar las etapas de Muestreo y Cuantización, para obtener los mismos aspectos que la Información Textual (colección finita de símbolos generados en tiempos discretos) y así proseguir de la manera antes descripta.

Uno de los grandes problemas que nos presenta la información analógica puede definirse como problema ∞ por ∞. ¿Esto qué significa? que la información analógica en diferenciales de tiempo puede adquirir infinidad de valores posibles, por lo tanto, ya sea en el tiempo o en la amplitud existen infinitos valores. Debido a esta razón, la información analógica no es adecuada para un codificador, por lo tanto se debe procesar. ¿En qué consiste el procesado? En primer lugar de un muestreo. Este proceso transforma el problema de (∞ por ∞) a (∞ por Numerable), es decir, **discretiza el tiempo o eje de las abscisas** y luego un cuantizador para finalmente convertir el problema de (∞ por Numerable) a (Numerable por Numerable), es decir, **discretiza las amplitudes o eje de las ordenadas**. De esta manera, tenemos como resultado una señal discretizada tanto en el tiempo como en las amplitudes apta para ser procesada por el codificador.

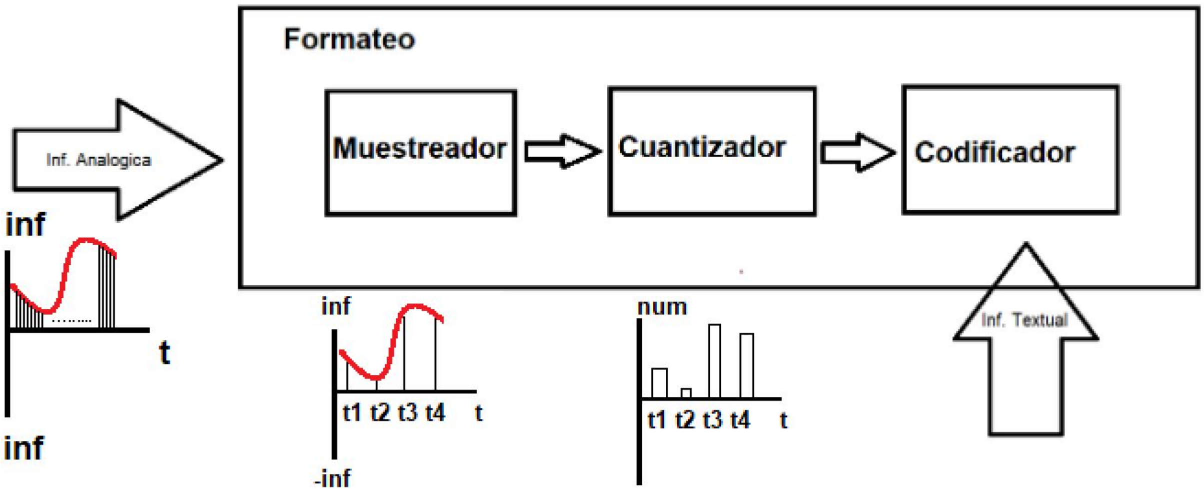


Figura 8: Interpretación gráfica del problema que generan las señales analogicas a los sistemas de comunicación digital.

- Codificador

El codificador puede definirse como un **proceso** cuya misión es entregar en la salida el código binario correspondiente a la entrada presente. Por lo tanto, es necesario mencionar cuántos símbolos posibles diferentes acepta el codificador. Para determinar dicho número debemos aplicar potencias de dos para saber la cantidad de posibilidades que podemos generar con N bits. Esto se obtiene realizando la siguiente operación: N bits de salidas aceptan 2^N símbolos de entrada. De esta manera, los 3 tipos de información a recibir serán convertidos a bits. Existe la posibilidad de implementar más bits, excediendo la relación antes mencionada, sin alterar la cantidad de símbolos o codeword a transmitir, esto impacta sobre la *performance del sistema*.

Si bien esto se detalla muy precisamente en el tema de codificación, podemos interpretar de antemano en este momento que al utilizar N bits y asignar cada combinación a símbolo válido o mensaje, la distancia que existe entre codeword válidas, es decir, en cuanto se diferencian una de la otra, es en 1 bit solamente. Por lo tanto, como el canal mete ruido, si cambian los bits de las codeword, cambiarán a otro mensaje válido sin detectar que hubo un error. Cuando la cantidad de bits utilizado por el codificador no responde a la relación 2^N , sino que es mayor, existe la posibilidad de distanciar mucho más las codeword válidas por mensaje, por lo

tanto si el canal de transmisión mete errores, generan codeword sin asignación a mensajes y esto permite identificar errores.
Otra característica luego del Codificador es la *Tasa de Bits* que generamos, siendo la velocidad con cual nuestro Formateador entrega información a nuestro Modulador en unidad de segundos.

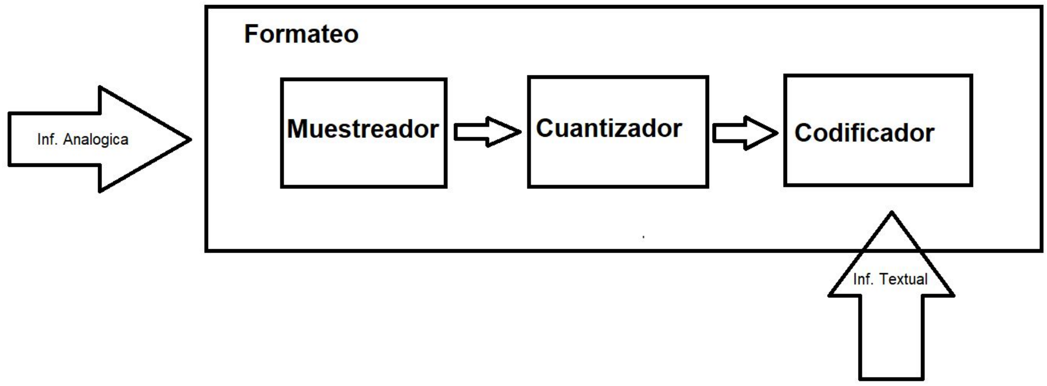


Figura 9: Diagrama en bloques de formateo

- <u>Muestreador</u>

El muestreador es un proceso que permite representar a las señales analogicas mediante valores discretos tomados en intervalos regulares de tiempo. Al quedar totalmente definida la señal mediante sus muestras, no es necesario enviar en todo instante de tiempo la señal de información para que pueda ser recuperable. Sólo basta con enviar las muestras discretas tomadas en dichos intervalos regulares de tiempo cumpliendo, como mínimo, con el *teorema de muestreo* definido por Nyquist. ¿Qué plantea el teorema de muestreo? Este teorema demuestra que la reconstrucción exacta de una señal continua en banda base a partir de sus muestras es matemáticamente posible si la **señal está limitada en banda** y **la tasa de muestreo es superior al doble de su ancho de banda**. Es decir, se puede resumir dichas condiciones a partir de dos enunciados:

$$|x(jw)|=0 \text{ para } |w| \geq wm \quad (Condicion\ señal\ de\ banda\ limitada)$$

$$Fs \geq 2fm \qquad Ts \leq \frac{1}{2fm}$$

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max} = B$ y la señal se muestrea a una tasa $F_s > 2F_{max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar **totalmente** a partir de sus muestras si las mismas se toman en intervalos regulares menores a $Ts \leq \frac{1}{2fm}$.

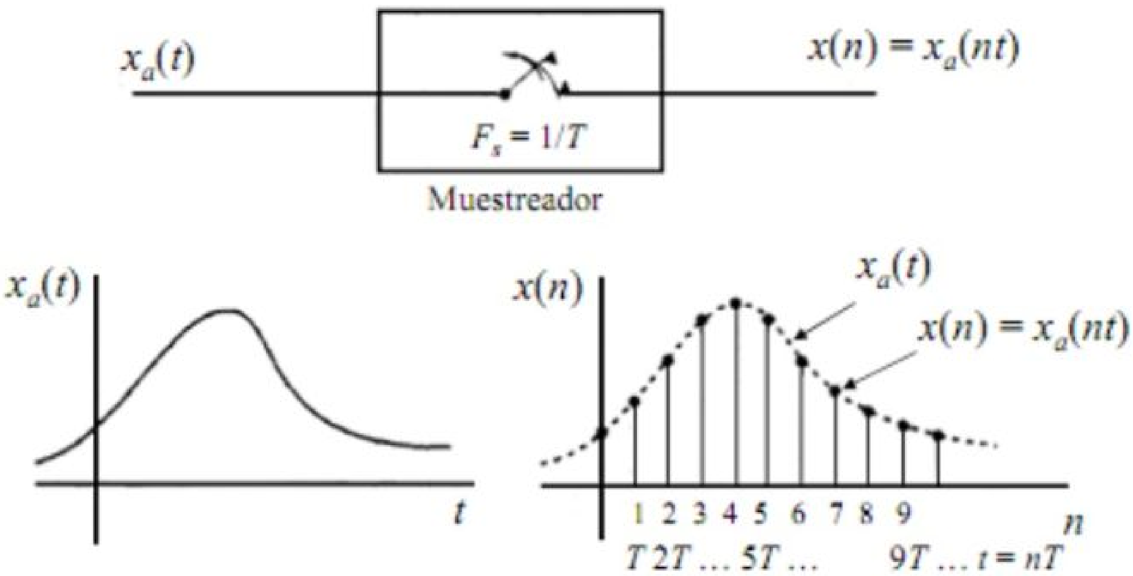


Figura 10: Concepto de muestreo

El teorema del muestreo tiene un planteo ideal mediante la utilización de un tren de impulsos en el dominio del tiempo que al multiplicarse por la señal de información, cada uno de los impulsos centrados en múltiplos del tiempo de muestreo adquieren el valor de la señal en dicho tiempo, es decir X(nTs). Sin embargo esta es una situación netamente teórica, ya que en la práctica nos resulta imposible generar un tren de impulsos. Por esta razón, se busca otras alternativas como lo son el *muestreo con tren de pulsos (Muestreo natural)* o el *muestreo y retención*. Planteandose la utilización de muestreo y retención como el modo práctico y realizable más eficiente para llevar a cabo el muestreo.

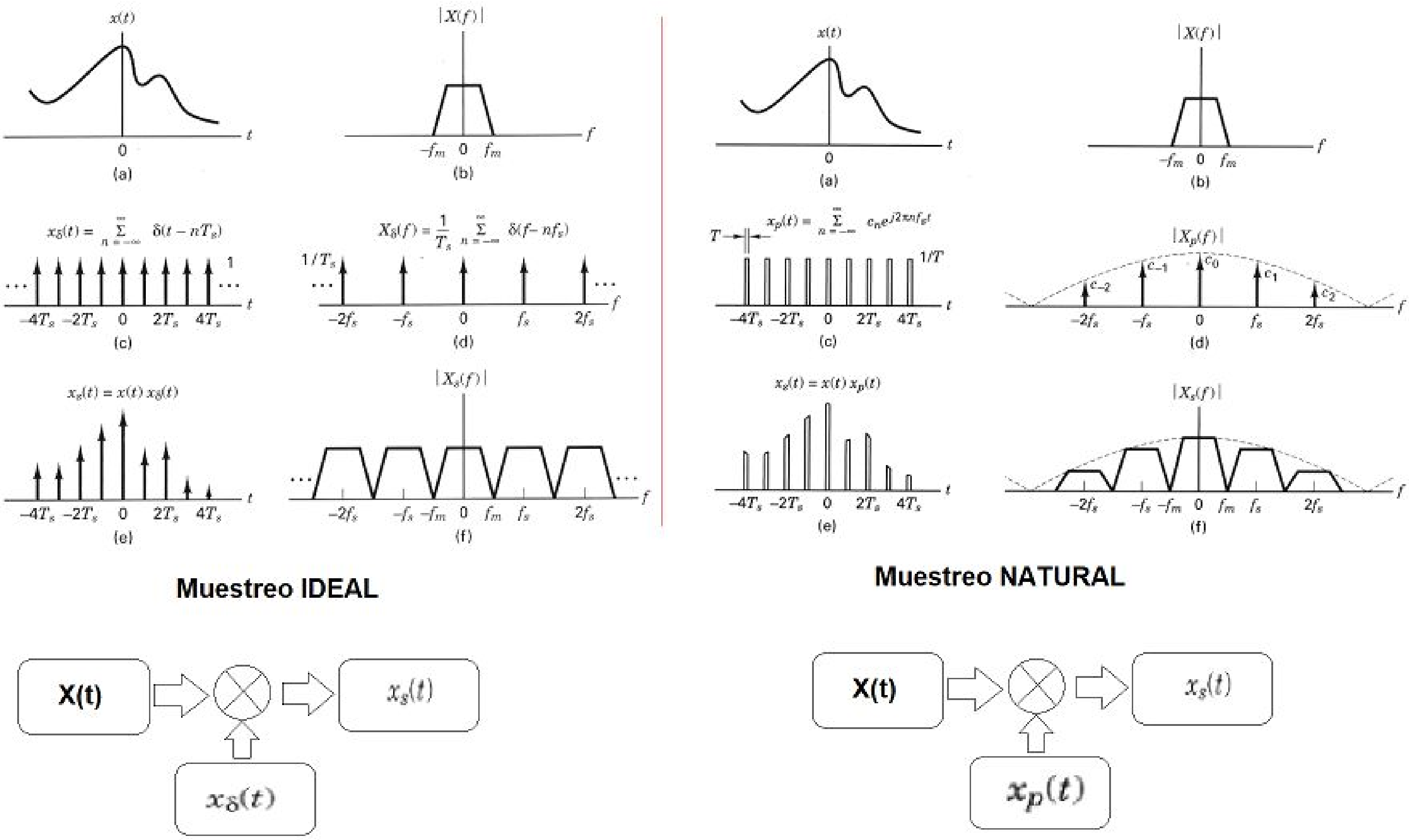


Figura :

El *muestreo y retención* se puede describir como la convolución de un tren de pulsos $[X(t) * X_\delta(t)]$ con un pulso p(t) de amplitud unitaria y ancho Ts. El resultado de la convolución es una **secuencia muestreada de cresta plana.**

$$\begin{aligned} x_s(t) &= p(t) * [x(t)x_\delta(t)] \\ &= p(t) * \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right] \end{aligned}$$

Espectralmente hablando, Xs(t) tiene un espectro similar al mostrado cuando se realiza muestreo natural, ya que p(t) tiene como transformada de fourier una Ts sinc(fTs).

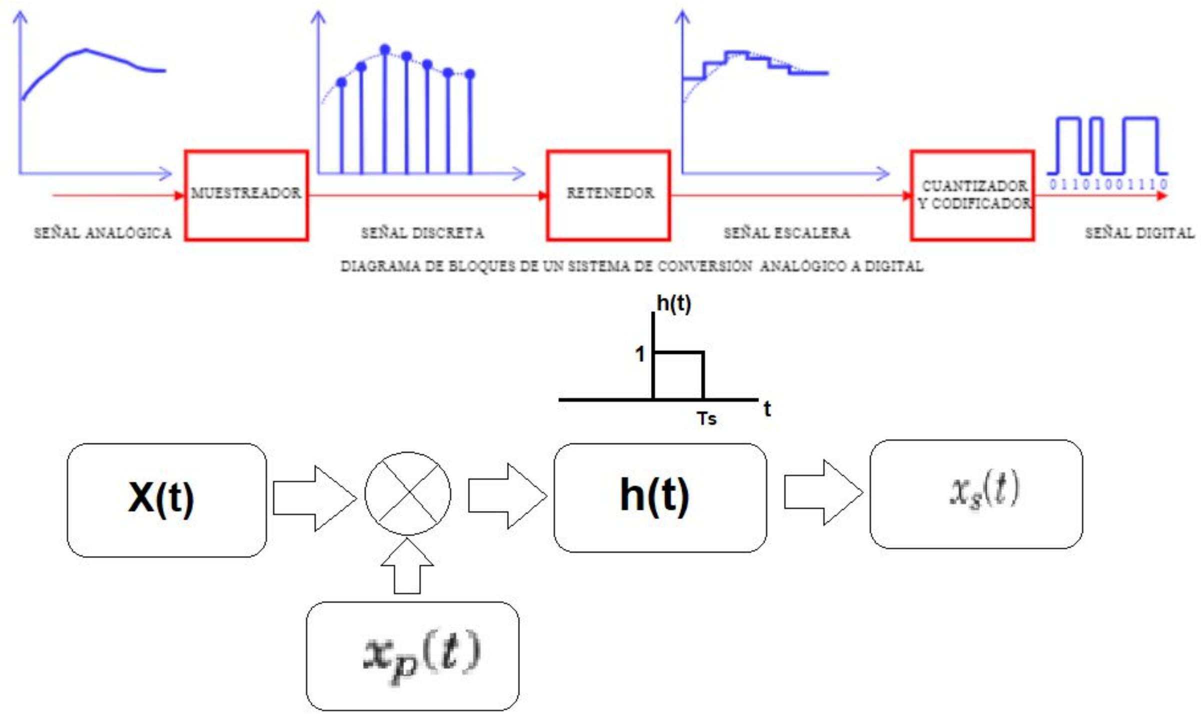


Figura 11: Muestreo y retención con tren de impulsos (Caso ideal)

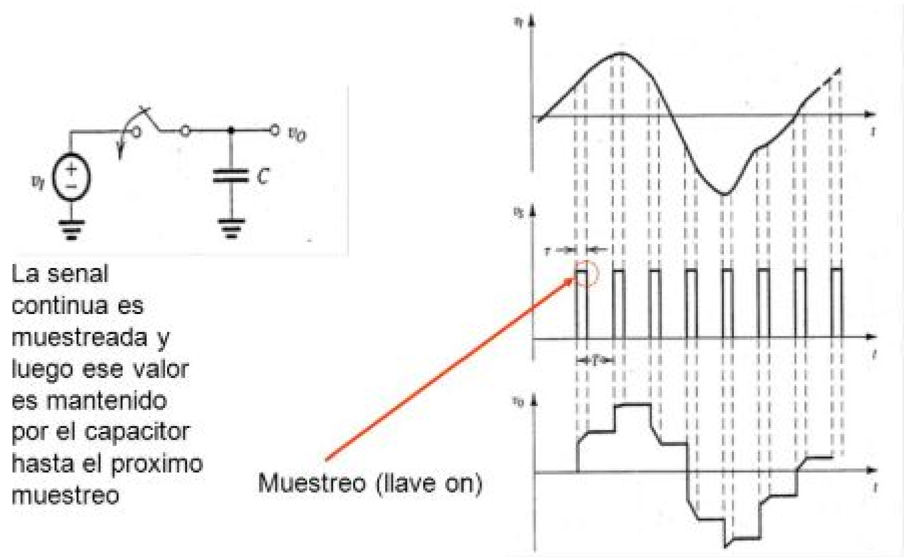


Figura 12: muestreo y retención con tren de pulsos (Caso real)

Siempre que nombremos al Muestreador como parte de un sistema de comunicación digital tenemos que entender el problema del aliasing, ya que el propio proceso de muestreo genera réplicas espectrales de la señal de información en múltiplos de Fs. Entonces ¿Qué es el aliasing? **Es cuando las réplicas espectrales se solapan en el dominio de la frecuencia**, por lo tanto distorsionan o dañan las componentes espectrales de la señal en cuestión.

Cuando estudiamos sistemas y señales, el análisis del muestreo parte de considerar una señal de banda limitada a *fm* y decir ¿Qué frecuencia de muestreo necesito para representar correctamente la señal mediante sus muestras discretas tomadas en intervalos regulares de tiempo Ts? La respuesta es siempre $Fs \geq 2fm \quad Ts \leq \frac{1}{2fm}$

y se analiza para cada señal de entrada, permitiéndonos cambiar Fs dependiendo el caso. Pero en los sistemas de comunicación digital los muestreadoress son procesos donde el **Ts es fijo**, no hay posibilidad de modificarlos. Esto significa que solo pueden representar señales cuyo espectro de información se encuentre contenido hasta Fs/2, no vamos a poder representar señales con contenido de frecuencia mayores (sin interferencia), por lo que la entrada al muestreador tiene que ser controlada. Esto se realiza mediante filtrado, para asegurarnos que cualquier señal que entre al proceso de muestreo tenga garantizado que no va a poseer componentes espectrales mayores a Fs/2 y no generamos el efecto de aliasing. Es decir, debemos aplicar siempre lo que se denomina FILTRO ANTIALIASING. Como diría Carri, es mejor ser desconfiado y siempre filtrar garantizando el funcionamiento del sistema.

Con esta breve explicación, deberemos detallar cómo diseñar e implementar dicho filtro antialiasing, el cual resulta ser un filtro analogico y pasabajos. Existen dos criterios dependiendo de la exigencias para el mismo. En el caso de **Muestreo con la mínima tasa**, deberemos generar un filtro analógico con una banda de transición muy estrecha, lo cual significa un **filtro de alta performance**, semejante o tendiendo al ideal. Para ello debe ser de alto orden, haciéndolo costoso y generando mucha posibilidad de que comience a oscilar por más que se elijan elementos de la más alta calidad. Además por lo general estos filtros analógicos son del tipo elíptico, ya que son mucho más exigentes que el resto de filtros.

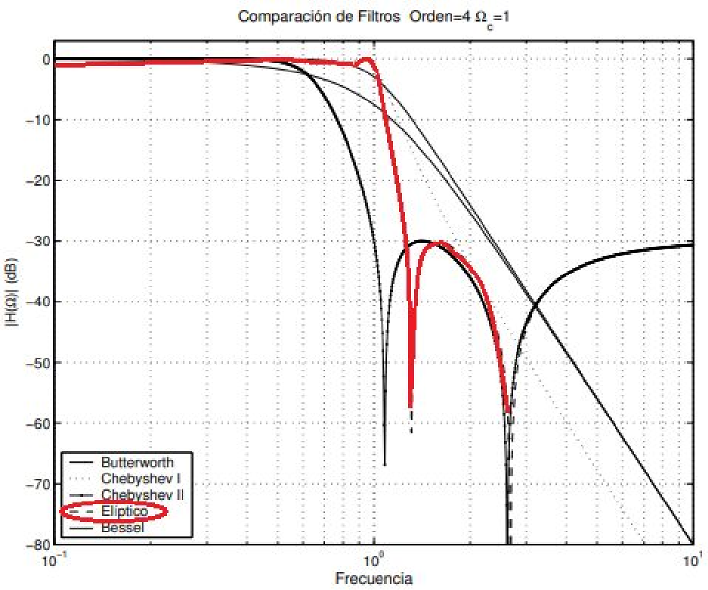


Figura :

La alternativa a esta situación es adquirir un muestreador que trabaje a una **frecuencia de muestreo mucho mayor a 2fm**, entonces produciremos un fenómeno denominado sobremuestreo. La característica del sobremuestreo es que las réplicas espectrales de la señal están suficientemente espaciadas como para aplicar un **filtro pasabajos más simple** y no tan exigente en cuanto a su performance, esto significa que tenga una banda de transición más grande. Sin embargo, la cantidad de muestras por segundo excede a las necesarias generando un incremento del ancho de banda lo que supone otro problema más. Entonces, lo que se propone una vez realizado el sobremuestreo es aplicar un **procesamiento digital** de la señal discretizada, **filtrandola** para solo quedarnos con las componentes en frecuencia de interés y posteriormente **diezmando** la señal filtrada para ajustar la cantidad de muestras por segundo generadas.

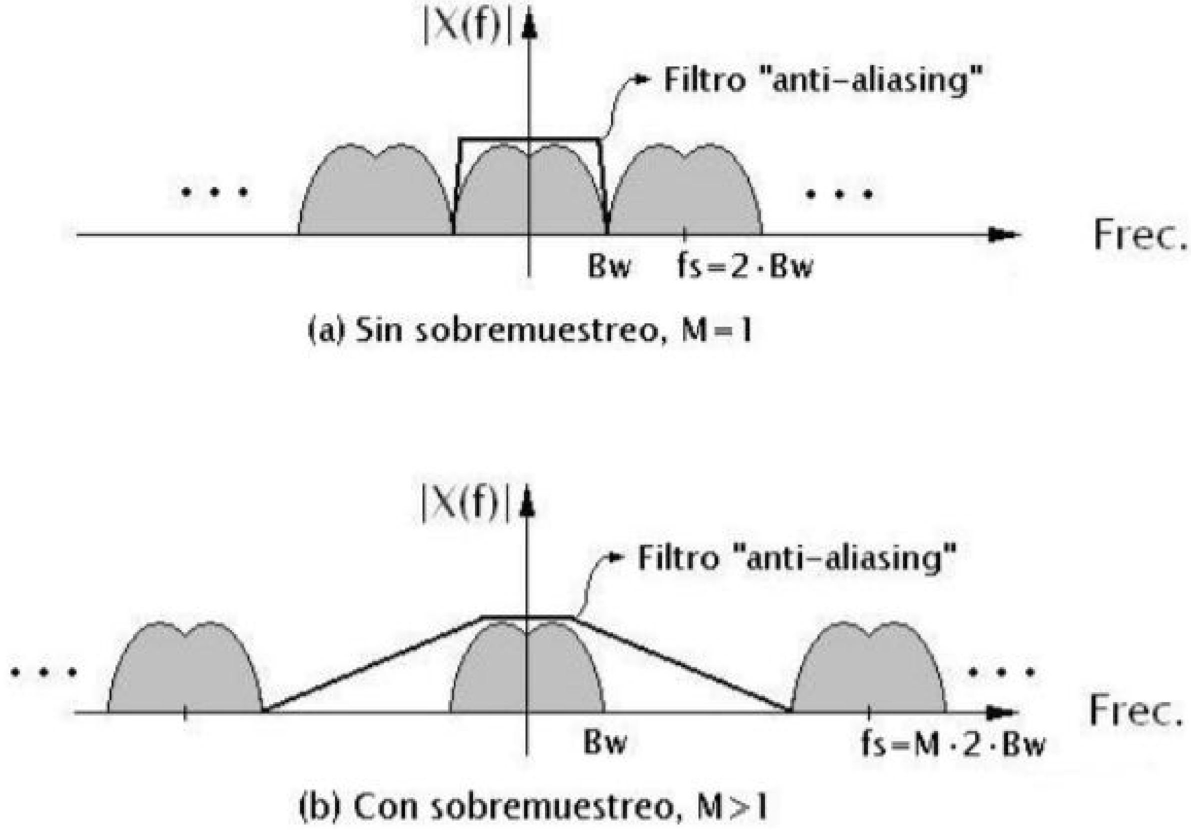


Figura :Ventaja que plantea el sobremuestreo permitiendo implementar filtros de baja performance.

Como podemos observar en la figura .. el filtro antialiasing implementado en el caso de sobremuestreo tiene una frecuencia de corte muy superior a la frecuencia máxima de interés, posicionado en la mitad de la banda de transición. Esto significa que el filtro **no atenúa** o mejor dicho deja pasar muchas componentes en frecuencia superiores a fm que no nos interesa. Por lo tanto, como se dijo anteriormente debemos resolver dicha situación. Para ello, se procesa digitalmente la señal. Como se puede observar en la figura .. (la que sigue) a la salida del filtro antialiasing tenemos el espectro de la señal de salida Xc(t) que contiene componentes en frecuencia no deseadas pintadas de rojo. Lo que se hace es aplicar un filtro digital ideal (Mucho más fácil de implementar y si bien es costoso, no oscila y requiere puramente un buen procesamiento computacional y una buena memoria, algo que es relativamente fácil de lograr comparado a los requerimientos de filtros analogicos de alta performance) diseñado para obtener a su salida solo las componentes en frecuencia de la señal de interés. Sin embargo, si bien quitamos los efectos de frecuencia no deseada, todavía tenemos una cantidad excesiva de muestras, por lo tanto se aplica diezmado como se observa en la figura.

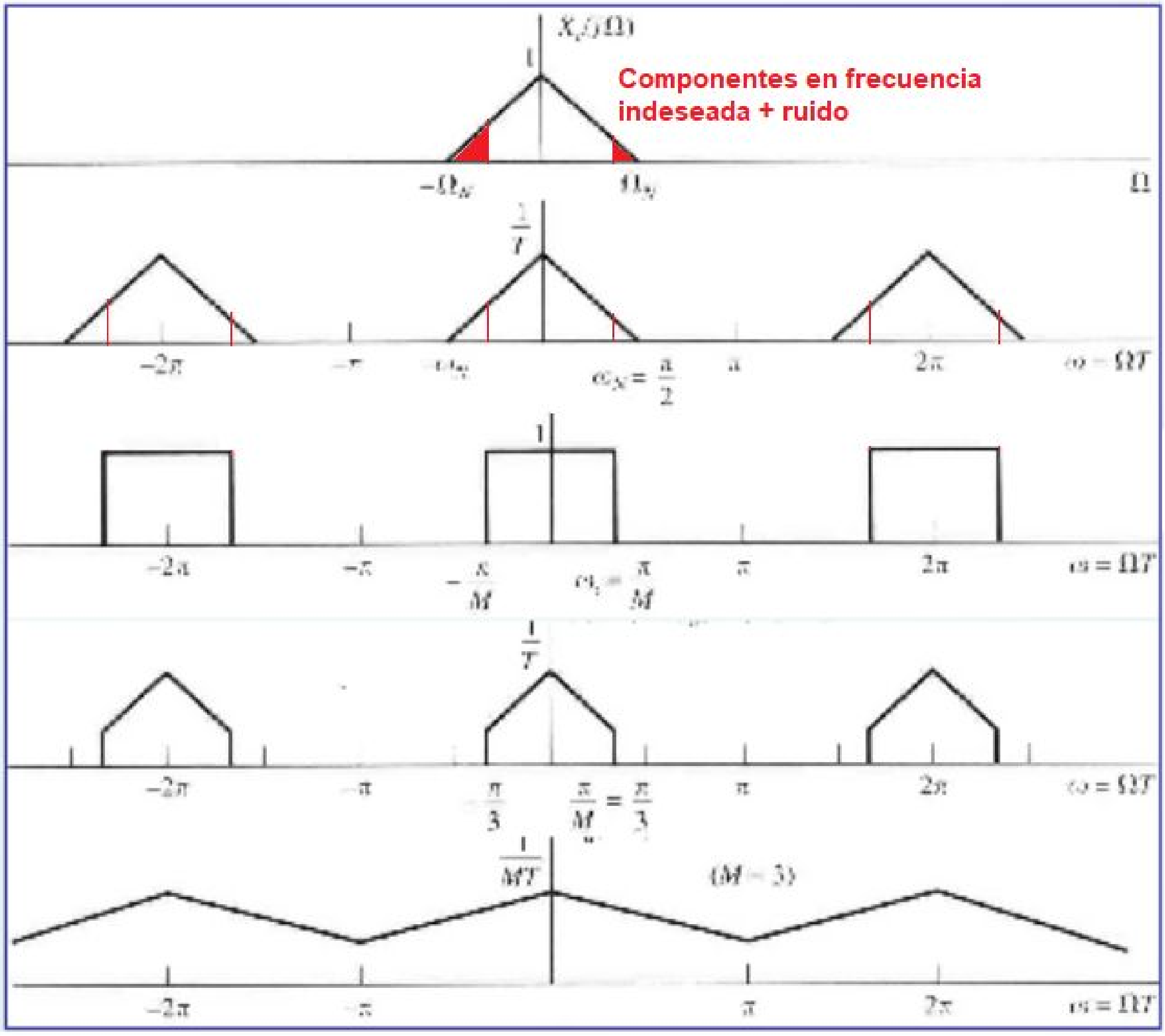


Figura :

- <u>Cuantizador</u>

La cuantificación es el segundo proceso dentro de la digitalización de una señal o formateo, precedido por el muestreo y seguido por la codificación, encargado de la discretización de un rango continuo de amplitudes por aproximación (*redondeo*) o *truncamiento* de valores. El resultado será un grupo más reducido de amplitudes discretas.

El cuantizador en definitiva es un proceso que se encarga de transformar las señales analógicas discretas en señales digitales. Durante el proceso se mide el nivel de tensión de cada una de las muestras, obtenidas en el proceso de muestreo, y se les asigna un valor discreto de amplitud, seleccionado dentro de un margen de niveles previamente fijado.

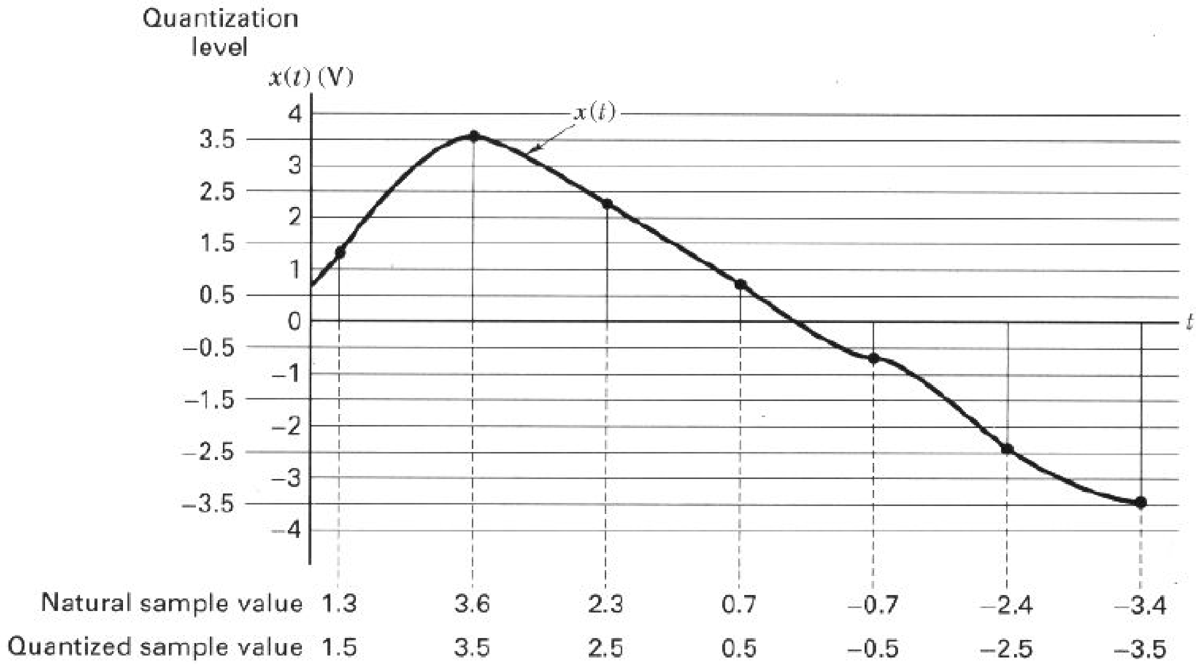


Figura :

Los parámetros más importantes de un cuantizador resultar ser: **El rango dinámico** o comúnmente conocido voltaje pico a pico, es decir, los valores máximos y mínimos que el cuantizador puede manejar, los cuales coinciden con los valores máximos y mínimos de la señal de entrada (no coincide con las amplitudes obtenidas del proceso de muestreo) esto se debe a que se garantiza que no sature y para ello se atenúan las amplitudes de la señal muestreada para que siempre entren en el rango dinámico del cuantizador. En definitiva, *la entrada al cuantizador es la señal muestreada atenuada*. De esta forma el proceso tiende a ser eficiente, si no, generamos el efecto de saturación y el error de cuantización se dispara.

Otro parámetro importante es **la cantidad de niveles de cuantización**, es decir, todos los posibles valores de amplitud distintos que se pueden obtener en la salida. Este último parámetro se denomina comúnmente como "L" y sigue la lógica binaria, es decir L es potencia de 2 porque posteriormente por cada muestra cuantizada se obtiene un mensaje digital binario en el encoder.

La siguiente pregunta sería ¿Cómo asignamos los niveles? Dependiendo si vamos a aplicar cuantización por redondeo o por truncamiento. En primer lugar, para cualquiera de las formas de cuantizar debemos obtener el *paso del cuantizador,* es decir, el valor de amplitud para el cual el cuantizador va a generar los niveles desde -vp a vp. Dicho valor suele conocerse como “q” ¿Cómo se obtiene dicho valor? Como queremos recorrer todo el rango dinámico con L niveles y queremos que estén **igualmente espaciados** realizamos la siguiente ecuación: $\Delta = \frac{v_p - (-v_p)}{L}$ donde $L = 2^l$ siendo “l” la cantidad de bits que va a utilizar el encoder posteriormente para asignar dichos niveles a codeword válidas. Para que se entienda el concepto, analicemos la figura anterior, en dicho caso, el rango dinámico varía entre -4 <-> 4 y “L” es 8, entonces Δ = 1 v , ahora, uno tendería a asignar los 8 niveles de la siguiente forma: -4,-3,-2,-1,0,1,2,3. Sin embargo esto no se realiza así porque dejaríamos los valores picos de la señal de entrada sin poder asignarlos a un nivel válido de amplitud, por lo tanto, se desplazan todos los niveles en $\Delta/2$ de manera tal que resulta: -3.5,-2.5,-1.5,-0.5,0.5,1.5,2.5,3.5 entonces todos los niveles tienen el mismo comportamiento de error y están igualmente espaciados.

Teniendo en cuenta los parámetros antes mencionados y el modo de implementación de estos, **nunca** debemos de olvidar que la utilización de un cuantizador siempre trae con él la inclusión de un error ya que los valores a la entrada de esta etapa, en la gran mayoría de sus veces, no coincidirá con su valor de salida. Esta diferencia traerá un error para la señal que se ha introducido en un principio al sistema de comunicación. A pesar de esto, se buscará siempre ir minimizando este error, para ello se introducen los conceptos de *cuantificación uniforme o lineal*, *cuantificación no uniforme y cuantificación logarítmica.*

Cuantificación Uniforme o Lineal:

Son aquellos en los que la distancia entre los niveles de reconstrucción es siempre la misma. Esto trae aparejado un error de cuantificación independiente de la amplitud de la muestra. ¿Qué significa esto último? Significa que se asume que la entrada al cuantizador tiene una distribución uniforme, es decir, igual probabilidad de asumir valores grandes en amplitud como valores chicos dentro del rango dinámico, de esta forma, el error de redondeo está distribuido uniformemente en cada uno de los niveles del cuantizador.

Cuantificación No Uniforme:

La cuantificación no uniforme es un proceso adaptado a la función de distribución de probabilidad de nuestra información, para generar errores de cuantificación proporcionales a las señales de entrada. En aquellos niveles de amplitud donde la señal de información se hace presente la mayoría de las veces esto significa, es más probable que se transmitan dichos niveles, quiero ser mas preciso, lo cual implica agregar más niveles en dicho sector y donde menos probable que transmita no me molesta equivocarme mucho.

Además, este proceso, cuantificación no uniforme genera error porcentual constante (Esto significa que cuando las amplitudes son pequeñas, las separaciones de niveles también, entonces el error disminuye)

En definitiva, ya no se considera igual separación entre los niveles de cuantificación, sino que se asignarán mayor cantidad de niveles, o menor diferencia entre ellos, para las amplitudes en donde conocemos o podemos esperar mayor probabilidad de aparición por parte de las amplitudes de las señales ingresadas.

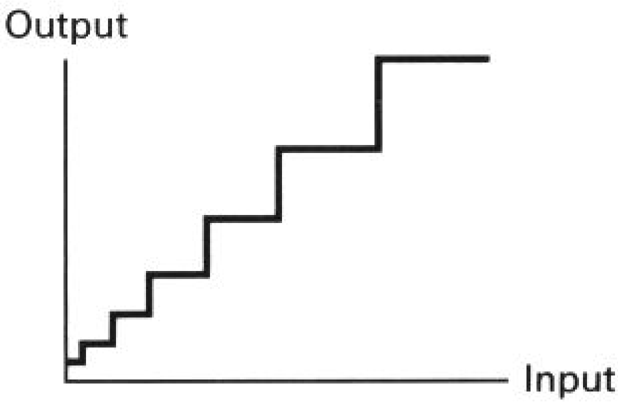
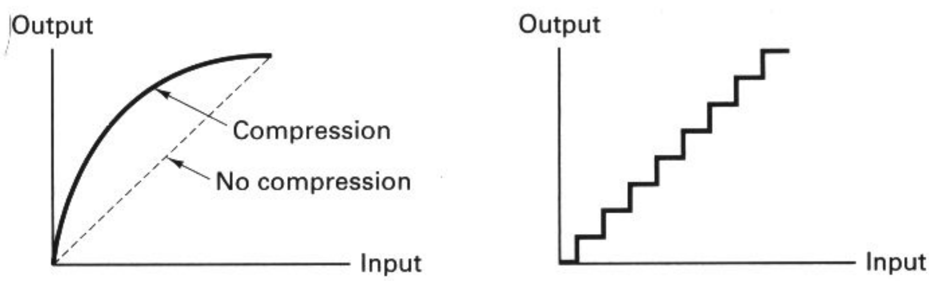


Figura :

Cuantificación Logarítmica:

Adiciona una etapa previa al *cuantificador uniforme*, el cual consiste en realizar una compresión logarítmica con la finalidad de modificar la función de distribución de probabilidad de las amplitudes de nuestra señal de entrada para que sea **uniforme**.

De esta manera para diferentes señales de entrada con distintas funciones de distribución de probabilidad lo único que hay que modificar es el factor de compresión dado por la ley americana o ley europea. Ojo, estos compresores si bien son logarítmicos tienen un único valor típico para no distorsionar las amplitudes de la entrada, es decir, en el caso de que la señal de entrada sea uniformemente distribuida en sus amplitudes,se elige un valor de MU o A tal que dicho proceso sea transparente, es decir, funciona para todo tipo de señal.



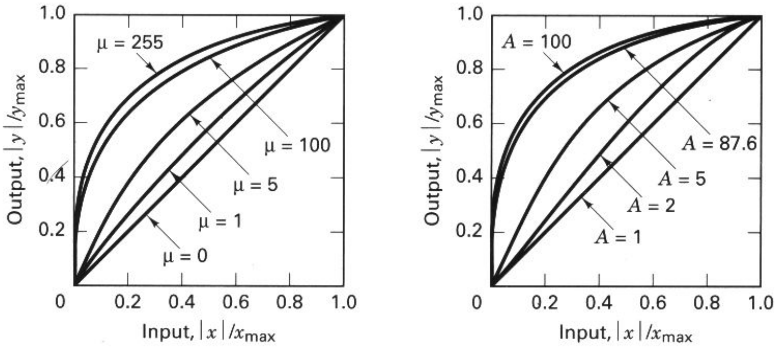


Figura :

Debemos tener en cuenta que el cuantizador a utilizar en el sistema de transmisión, debe de replicarse de manera inversa, si se utilizó No Uniforme o Logarítmica, en el sistema de recepción.

Teóricamente, la cuantificación de las señales analógicas resulta siempre en una pérdida de información (incluso en su caso ideal). Éste es el resultado de la ambigüedad introducida por la cuantificación. De hecho, la cuantificación es un proceso no reversible, *dado que a todas las muestras a un intervalo inferior a Δ/2 de un determinado nivel se les asignan el mismo valor*.

Sin embargo, ¿Uno podría plantearse hasta qué punto disminuir el error de cuantificación? ¿Realmente conviene minimizarlo y hacerlo prácticamente imperceptible? Estas preguntas se responden analizando el canal de transmisión de nuestro sistema de comunicación. De nada me sirve medir con muchísima precisión todas las muestras de información y gastar mucho dinero en diseñar un cuantizador muy preciso si luego el canal me va a distorsionar y arruinar toda la precisión con mucho ruido.

Por último, nos interesa saber ¿Cómo se calcula el error de cuantificación?.

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$

Esta diferencia, entendida como una secuencia de muestras de tiempo discreto pero de amplitud continua (al igual que la señal de entrada), puede ser interpretado en la práctica como una señal indeseada añadida a la señal original (motivo por el que se denomina ruido, aunque no siempre cumpla con todos los criterios necesarios para ser considerado así y no distorsión). Por esto se calcula como figura de mérito (S/N)q.

Asumiendo que el error de cuantificación e_q es una variable aleatoria que está uniformemente distribuido a lo largo de un intervalo de ancho q. Sabemos que si esta variable representa tensiones, la media es su potencia de continua y la varianza es su potencia de alterna. Recordar que la media se calcula como

$\mu = E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x * fdp(x).dx$ y la varianza se calcula como $\sigma^2 = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * fdp(x).dx$

Es decir, depende de el primer y segundo momento de la variable aleatoria en cuestión. Nota: Necesitamos conocer la función de distribución de probabilidad asociada a la variable en cuestión para poder integrar y los límites de la integración dependen de dicha función.

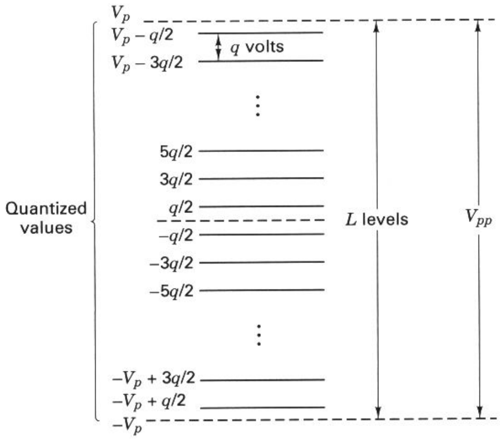


Figura :

¿Como es la función de distribución de probabilidad del error de cuantificación por redondeo?

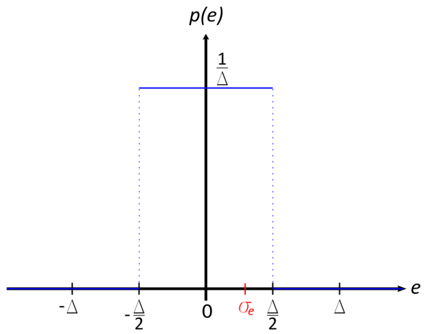


Figura :

Suponiendo que las entradas analogicas tienen igual probabilidad en asumir los diversos valores, la varianza del cuantizador se dice que es:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e * fdp(e).de = \int_{-q/2}^{q/2} e * \tfrac{1}{q} * de \quad = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 * fdp(e) * de \; = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 * \tfrac{1}{q} * de \; = \; \tfrac{q^2}{12}$$

Potencia de ruido = $\mu + \sigma^2 = \frac{q^2}{12}$ y potencia de la señal pico normalizada a una impedancia de un 1 Ohm es Vp^2 lo cual expresado en función de voltaje pico a pico tenemos $V_p^2 = \left(\frac{V_{pp}}{2}\right)^2 = \left(\frac{Lq}{2}\right)^2 = \frac{L^2q^2}{4}$ de modo que la relación señal a ruido es la relación de potencia entre la señal y el ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{L^2q^2/4}{q^2/12} = 3L^2$$

¿Ahora cuántos niveles elegir?¿Con qué criterio?

Existe otra forma de especificar el error de cuantización, que está precisamente asociado a que el error sea una fracción del voltaje pico-pico. Entonces, lo que se busca es que:

$$|e| \leq p.V_{pp}$$

Sabiendo además que el error de cuantización para una distribución uniforme es:

$$|e| \leq \frac{q}{2}$$

El error máximo será entonces:

$$|e|_{max} = p.V_{pp}$$

$$|e|_{max} = \frac{q}{2}$$

$$q = \frac{Vpp}{(L-1)}$$

$$\frac{q}{2} = \frac{Vpp}{2(L-1)} = \frac{Vpp}{2L}$$

El (L-1) puede ser tratado como L cuando la cantidad de niveles es muy grande. Luego reemplazamos la expresión de “q/2” en “e_{max}” e igualamos ambas expresiones de “e_{max}” encontradas

$$\frac{V_{pp}}{2L} \leq pV_{pp}$$

$$2^\ell = L \geq \frac{1}{2p} \quad \text{levels} \qquad \ell \geq \log_2 \frac{1}{2p} \quad \text{bits}$$

- ## Resumen de formateo

¿Para saber si entendimos bien formateo debemos analizar qué resolvimos en esta parte del sistema de comunicación digital? Logramos adaptar todo tipo de fuente de información para que sea compatible con el proceso digital. ¿Esto qué significaba? que todas las fuentes de información sean discretas tanto en el tiempo como en la cantidad de valores que podían adquirir en dichos tiempos, dicho en palabras que tenemos de clases, definir todos los problemas como (Numerables por numerables). Para el caso particular de señales analogicas continuas se presentaba la mayor de las dificultades para nuestro proceso porque dicho problema era en sus orígenes (∞ por ∞) entonces aplicamos muestreador para transformar el tiempo en una variable discreta convirtiendo el problema en (∞ por Numerable) y finalmente aplicábamos el cuantizador para concluir el problema en (Numerable por Numerable). Luego cada muestra en dichos tiempos discretos se aplicaban a un encoder que convertía esas muestras en flujos de bits. ¿Cómo sabemos que hicimos bien las cosas? Las hicimos bien si logramos hacer bien las cosas tanto en el muestreador, cuantizador y encoder.

→ ¿Que significa hacer bien las cosas en el Muestreador ? Diseñar filtro antialiasing sabiendo que vamos a sobremuestrear las señales de información para que el diseño sea sencillo. Luego filtrar digitalmente y diezmar la señal muestreada para no excedernos en el ancho de banda requerido por nuestro sistema.

→ ¿ Que significa hacer bien las cosas en el Cuantizador? Aplicar cuantización no uniforme mediante compresión logarítmica y cuantificación uniforme. Esto me permite adaptar un mismo sistema ante cualquier señal de entrada con cualquier función de distribución de probabilidad, lo que voy a tener que hacer es ajustar correctamente el factor de compresión. Además mediante un control automático de ganancia (AGC) asegurarme que siempre la entrada al cuantizador va a tener valores en amplitud menores o iguales al rango dinámico para no generar saturación.

Por otro lado, también voy a tener que analizar el ruido presente en el canal para saber si me conviene tomar una mayor cantidad de niveles en el rango dinámico, ya que como sabemos la relación señal a ruido de cuantización mejora con el cuadrado de la cantidad de niveles.

→ ¿Qué implica hacer las cosas bien en el encoder? Implementar un buen encoder sería realizar un análisis de la cantidad de bit utilizados para representar un set finito de símbolos N. Si utilizo la cantidad mínima, es decir, $2^{\wedge N}$ cuando el canal me introduzca ruido y cambie la decisión entre un 1 y un 0, como todas las posibilidades binarias están asignadas a codeword válidas voy a interpretar que es un mensaje correcto y en realidad me voy a estar equivocando. Esto se analiza más en profundidad en codificación pero para hacer bien las cosas en encoder se debe distanciar las codeword asociadas a mensajes válidos lo más que pueda, más de 1 bit de diferencia para que frente a errores introducidos por el canal al menos logre detectarlos.

● Modulador digital banda base

Una vez que la información, ya sea en cualquiera de los 3 modos mencionados, ha atravesado la etapa de formateo, tendremos en formato de bit stream la información la cual se buscará transformar en señales aptas y adecuadas para transportar por el canal de comunicación.

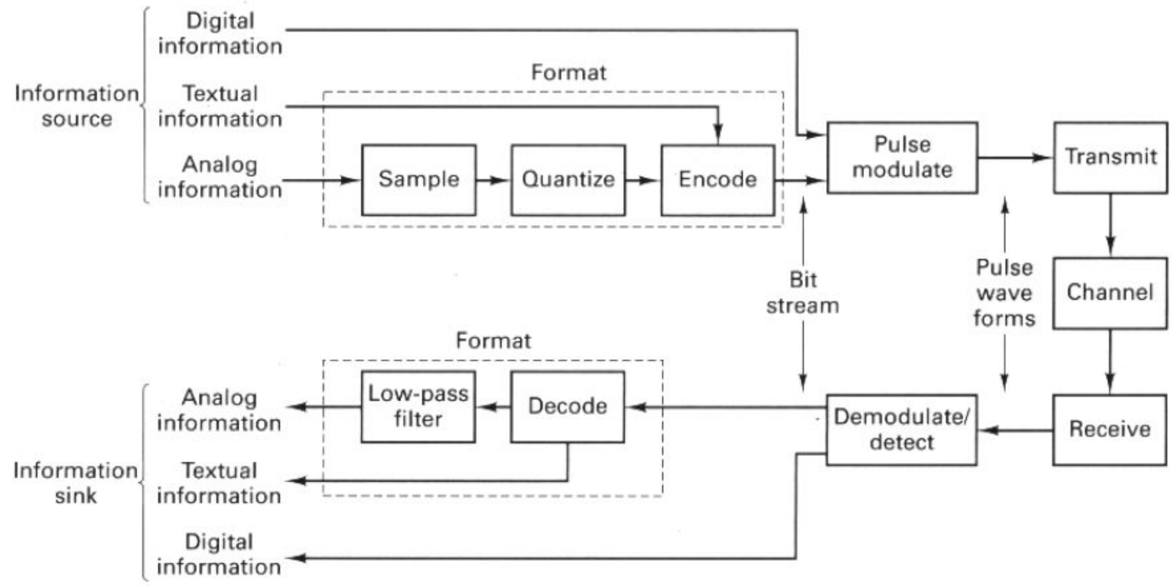


Figura :

Por lo que en este bloque contemplaremos el proceso de transformación de información digital o *bit stream* a formas de onda que son compatibles con el canal de comunicación, las cuales serán denominadas como *waveform*. Tanto los bit stream como las waveform tendrán una asociación previamente definida y de conocimiento por parte del modulador y demodulador que se utilizará en el sistema de comunicaciones. Además, todas las waveform para una forma de modulación, si bien son diferentes y se busca que sean lo más distintas posibles para facilitar la etapa de detección tienen algo en común que comparten todas. Esta característica común es que todas surgen de lo que se denomina pulso formador de onda. Este **pulso formador de onda en un principio es rectangular** y tiene las siguientes características:

- El pulso puede o no durar todo el tiempo de símbolo. Si lo hace mejora el proceso de detección, ya que transmitimos la mayor energía posible por símbolo en el tiempo correspondiente.

- Dependiendo del código de línea empleado es como manipulan para cada mensaje digital el pulso formador de onda.

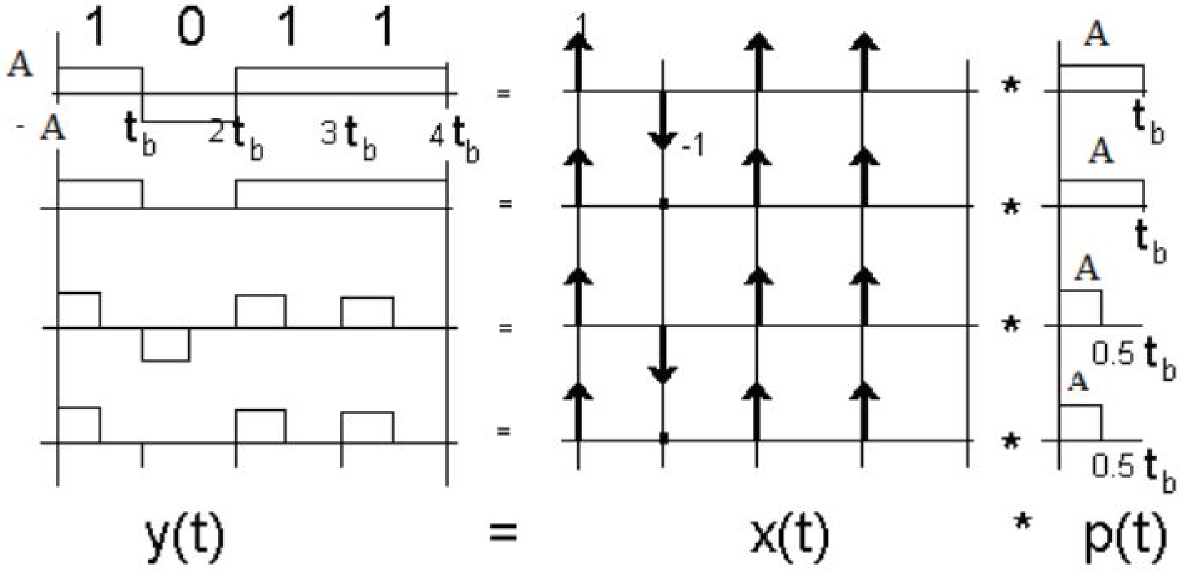


Figura :

De esta forma podríamos representar cada señal modulada por una señal y(t) la cual se puede representar matemáticamente como la convolución de una señal aleatoria constituida por trenes aleatorios de deltas de Dirac (x(t)) con una señal determinística que, para NRZ es un pulso de ancho tb y, para RZ es un pulso de ancho 0. 5tb

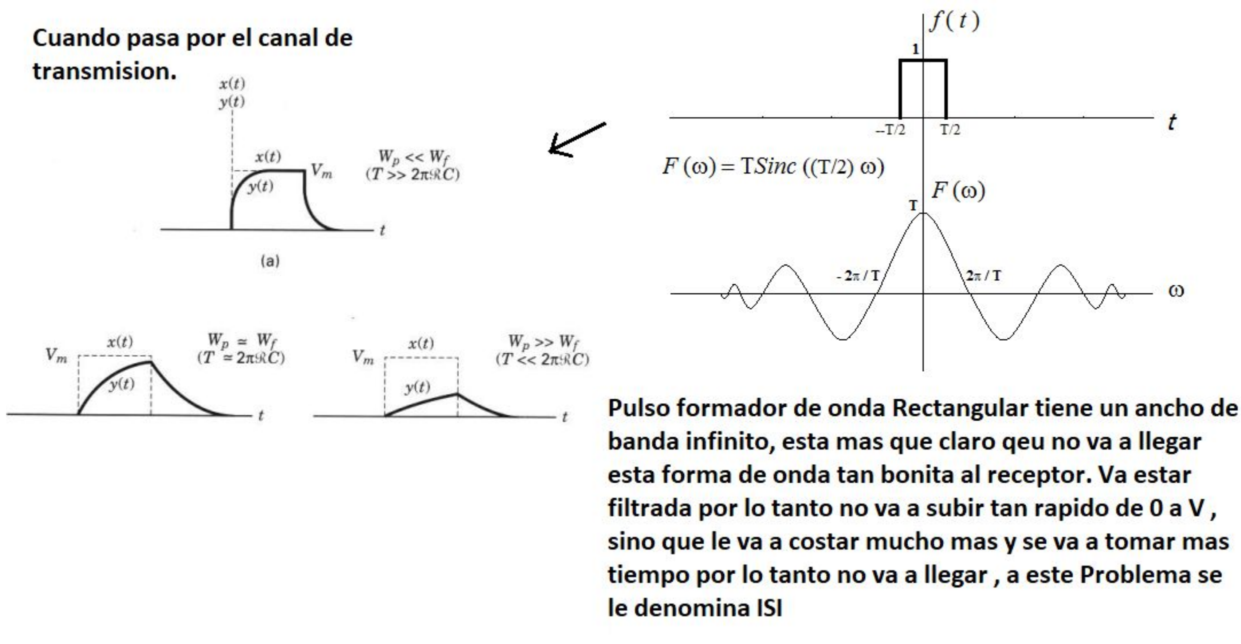


Figura :

Las *waveform* son señales del tipo analogicas en funcion del tiempo definidas únicamente y precisamente para el tiempo de símbolo. Los símbolos son los mensajes digitales que maneja el modulador, en donde su duración está directamente asociada con el tiempo de bit o bit stream y la cantidad de bits que utiliza la modulación a implementar.
En estas asociaciones debemos considerar la cantidad de bits por segundo o velocidad a la que el codificador, de la etapa de formateo, entrega al modulador. Esto se conoce como *tasa de bit* y se mide en bits por segundo. Muy vinculado a la anterior tasa mencionada también aparece la *tasa de símbolo* que se define como la velocidad con la que el modulador es capaz de entregar waveform para ser transmitida por el canal en unidad de segundos. Podemos considerar que la relación entre las tasas será que cada tanta cantidad de bits sacaremos un símbolo en unidades de segundo. Por lo tanto siempre la tasa de símbolo es menor o igual a la tasa de bits.

$$R_s = R_b/k$$

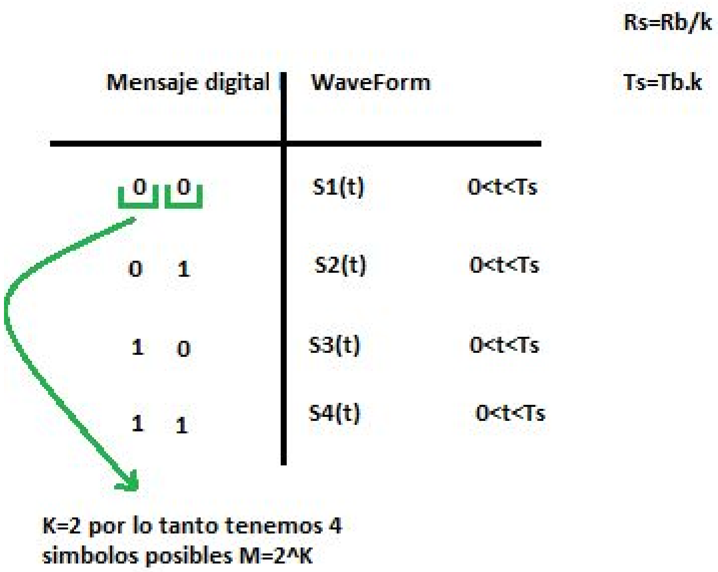


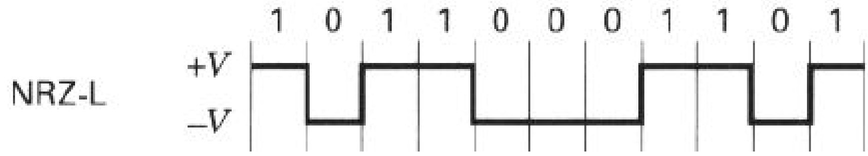
Figura :

¿Qué implica la variación de “k” en nuestro modulador?

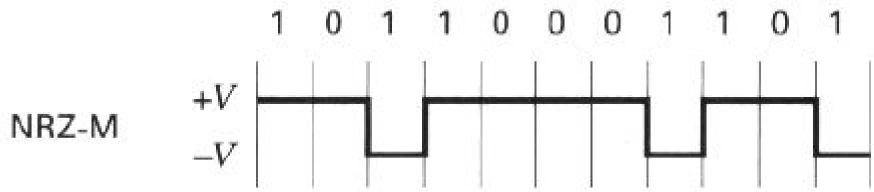
Existen diversos modos de modulación, en donde para banda base, habrá 2 modulaciones predominantes. Si optamos por la utilización de K=1 estaremos refiriendonos a una modulacion PCM (power-train control module o Modulación por Impulsos Codificados) en donde los valores a adoptar por los símbolos pueden ser solamente dos, una waveform que corresponde al mensaje digital 0 y otra waveform que corresponde al mensaje digital 1. Estas waveform están presentes en el canal el

tiempo que dura un bit, por lo tanto la tasa de símbolo es igual a la tasa de bit. Este tipo de modulación tiene como ventaja la facilidad a la hora de la detección. Algunas de las formas de onda en PCM son:
NRZ(No Retorno a Zero), RZ (Retorno a Zero), BI - Θ (Phase Encode o Fase Codificada) y Multilevel Binary.
Pero, describamos más precisamente, ¿Qué características tienen estos grupos?
El primer grupo es **NRZ** el cual con estas siglas nos habla de que el pulso formador de onda mantiene el nivel de tensión asignado todo el tiempo de símbolo.

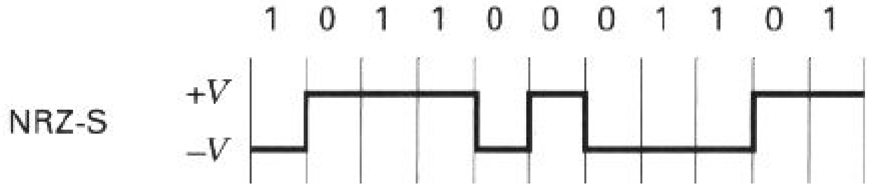
→ *NRZ-L (No Retorno a Cero - Level):* Tienen la característica que sus símbolos cambian entre (+v) o (-v), dependiendo si el mensaje digital es un 1 o un 0 y se rige netamente por una tabla de asignación de waveform para cada mensaje digital, esto significa que no necesitamos ver los bits previos, tomamos las decisiones con la información actual. Este caso al ser bipolar y por tabla, nos dará como dato que no tienen componente de continua, que refiere al valor promedio de las señales, ya que los valores a adoptar serán $\pm$v



→ NRZ-M (No Retorno a Cero - Mark): es una tecnica de modulacion PCM basada en el uso de una regla de modulación donde se especifica que para transmitir hay que Cambiar de nivel en la waveform transmitida cuando se haga presente un mensaje digital 1 o mantener el nivel de tensión de la waveform anterior al transmitir un 0, a diferencia del NRZ-L, no se rige por una tabla para modular, sino que va a utilizar una regla en donde debemos de mirar cuál fue el bit previo al actual para decidir la señal a transmitir, caracterizando a este tipo de formas de onda como diferencial, ya que se analiza la diferencia entre la señal actual y la previa, esto implica de manera directa que el receptor tenga mayor complejidad por tener que conservar las señales ya recibidas.

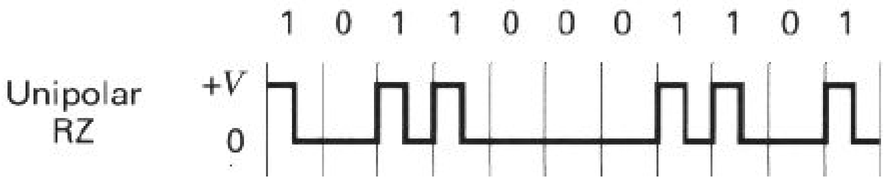


→ NRZ-S (No Retorno a Cero - Space): Trabaja de manera inversa a NRZ - M ya que genera cambios en la waveform transmitida cuando se hace presente un mensaje digital “0” y permanece/mantiene la misma waveform que se estaba transmitiendo anteriormente cuando se hace presente un mensaje digital 1. Salvo esta característica, las ya mencionadas para NRZ-M vuelven a repetirse en esta forma de onda.

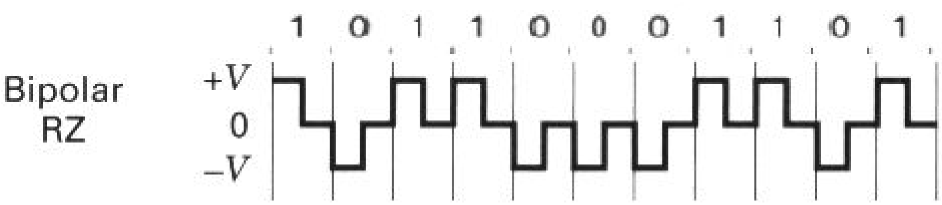


El segundo grupo es **RZ** (Return to Zero) veremos 3 tipos de modulación, estas siglas nos hablan de que las waveform transmitidas no mantienen durante todo el tiempo de símbolo el mismo valor de tensión, sino que aproximadamente la mitad del tiempo que dura el símbolo, como máximo, el nivel de tensión se tumba a cero independientemente del valor adquirido en la primer mitad. Esta característica tiene como ventaja, con respecto al caso NRZ, que proporciona un mejor sincronismo para largas secuencias de transmisión de 1 o 0. Podemos encontrarnos con:

→ Unipolar RZ: Tiene la característica de ser una modulación PCM de asignación netamente por tabla, en donde para un mensaje digital “1” se asigna la mitad de ancho de pulso en +v, en donde en la otra mitad se retorna a cero y para el mensaje digital “0” no se transmite nada. Una de sus desventajas es que su valor promedio es distinto de 0 y además las waveform seleccionadas no contienen la misma cantidad de energía y no son lo más diferentes posibles para facilitar la tarea del detector en el receptor. Esto hace que la probabilidad de error en la recepción aumente.

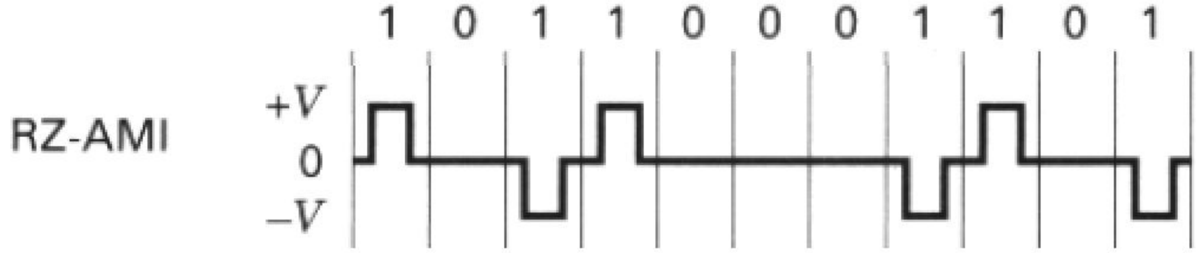


→ Bipolar RZ: Este codigo de linea asigna valores de +v (1) o -v (0) mediante tabla pero siempre retornando a cero antes de finalizar el tiempo de símbolo. Su forma es útil para el sincronismo por lo mencionado en las características generales de RZ y además tiene la característica de que su valor promedio es 0, disminuyendo su probabilidad de error en la recepción.



→ RZ - AMI: Significa RZ - Alternate Mark Invertion, esto significa que va alternando entre $\pm V$ por cada 1 que recibe, rigiéndose de esta manera por regla. En el caso de los 0 no envía ninguna señal.

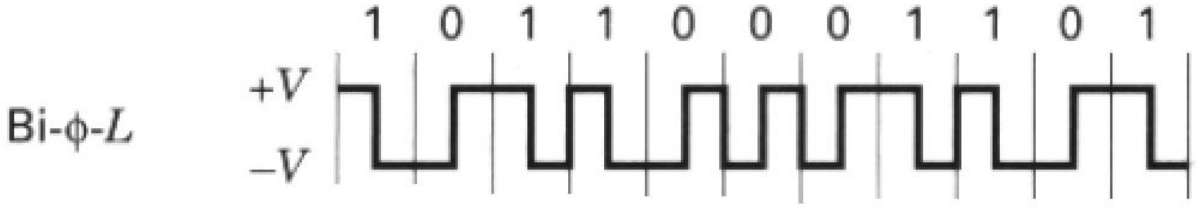
Este tipo de modulación, permite facilitar la detección de errores porque un error en cualquiera de los bits produce una violación bipolar (Cuando se recepcionan dos o más ceros o unos consecutivos). Se utiliza en Redes Digital de Servicios Integrados (RDSI)



En ***BI -*** Θ *(Phase Encode o Fase Codificada)*, podemos encontrarnos con:

→ *BI - Θ - L*: Se lo suele conocer como codificación Manchester, esta técnica de modulación garantiza una transición por cada tiempo de símbolo a mitad del intervalo, siendo útil para el sincronismo entre transmisor y receptor y aportando valor medio 0. Si debemos de transmitir un 1 tendremos un flanco descendente a mitad de intervalo y si se trata de un 0 será un flanco ascendente. Una desventaja de este tipo de modulación es que requiere el doble de ancho de banda que otro tipo de modulación para transmitir el mismo mensaje digital.

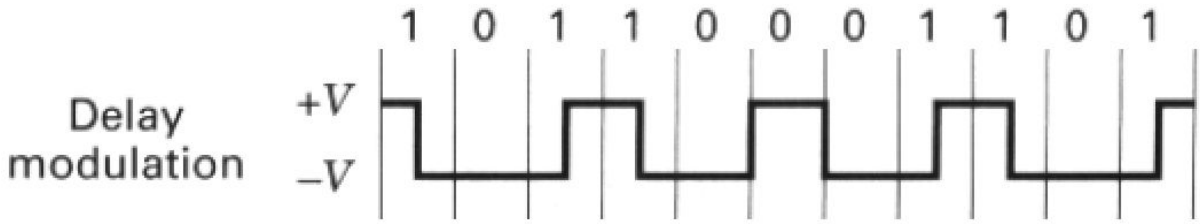
Podemos mencionar por último que este tipo de modulación trabaja con una tabla de asignación para waveform dependiendo del mensaje digital.



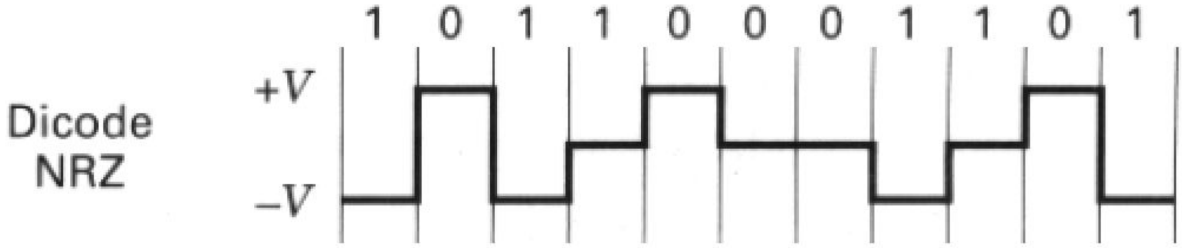
→ *BI - Θ - M*: Es una tecnica de modulacion donde todas las waveform a transmitir generan cambios o transiciones en los tiempo de clock respecto a los niveles de tensión anteriores presentes en el canal, es decir, la transmisión de un mensaje digital 0 genera un cambio de tensión en el tiempo de clock que se mantiene durante todo el tiempo de símbolo. Sin embargo, al enviar un mensaje digital 1 además del cambio ya mencionado se produce nuevamente otra transición a mitad de intervalo. Esta tecnica de modulacion se maneja netamente mediante una regla de asignación de mensajes digitales a cada una de las waveform.

→ *BI - Θ - S*: Trabaja de manera inversa a *BI - Θ - M,* implementando también regla, por lo que para cada cero a transmitir genera un cambio de tensión en tiempo de clock y un cambio a mitad de intervalo del tiempo de símbolo mientras que la transmisión de un mensaje digital uno solo se produce una transición en los tiempos de clock y se mantiene el valor todo el tiempo de símbolo.

→ Modulación por Delay: También conocido como Código Miller, es un código bipolar que tiene al menos una transición por cada dos intervalos de bit. Posee menor ancho de banda que los Bifase. Por cada uno hace una transición a mitad de tiempo de símbolo que puede ser ascendente o descendente según como haya sido el anterior uno, utilizando de esta manera regla de decisión. En el caso de los cero, a partir del segundo continuo, altera la señal a +v o -v según como haya sido el anterior cero continuo.
Es decir, es una tecnica de modulacion que depende de una regla de asignación de mensajes digitales a waveform



→ Dicode NRZ: Este tipo de código de línea implementa tabla y regla ya que para los 1 asigna un -V y para los 0 un +V pero si se diera el caso de haber dos bits iguales seguidos, es acá donde entra la regla y dice que la señal a transmitir será cero.



→ Dicode RZ: Al igual que el anterior Dicode se rige tanto por regla como por tabla pero con la diferencia de que por cada señal a transmitir retorna a cero. Para los 1 toma el valor de -V para la mitad de tiempo y para los 0 se va a +V, nuevamente por característica de Dicode, si se repiten dos bits seguidos, permanece en cero.

¿Por qué existen tantas tecnicas de modulacion dentro de lo que se denomina PCM?
La respuesta a esta pregunta está orientada al tipo de problema a resolver y la aplicación en donde se vaya a implementar. Cada una de las técnicas tiene diversas características que pueden ser comparadas para saber cual elegir de acuerdo a nuestras necesidades:

- *Componente de Continua:* Si la tecnica de modulacion no presenta componente de continua en su densidad espectral de potencia hace posible el acoplamiento del sistema solo a las componentes de alterna. ¿Que mierda significa esto? que por lo general al utilizar amplificadores, en estos los capacitores filtran las componentes de continua que para muchas técnicas de modulación es re importante y en cuestión de potencia tiene mucha influencia o mucho peso, llamalo como quieras. **Entonces filtrar continua para estas tecnicas de modulacion rompe la modulacion por completo.**
- *Sincronización*: Toda técnica de modulación banda base necesita la presencia de dos cables conectados entre transmisor y receptor: *datos + clock.* Sin embargo existen técnicas de modulación que incluyen el clock dentro de las waveform a transmitir entonces requiero un solo cable entre transmisor y receptor, estas ventajas las proporciona el código manchester, ya que al mirar el dato recupero la señal de clock.
  Una imagen que ilustra cómo son los datos y el clock es la siguiente:

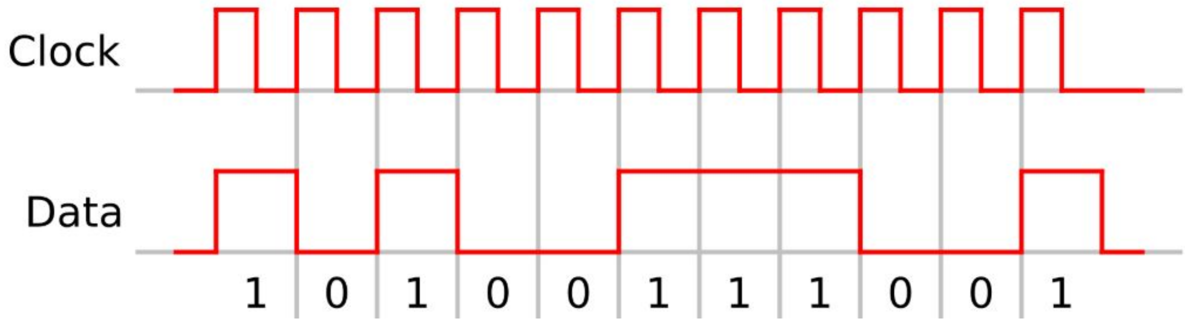


Figura :

  Podemos observar mediante esta imagen que el clock indica dónde comienza y termina cada waverform presente en el canal o símbolo y además tiene el doble del ancho de banda
- *Error de detección:* Algunos esquemas presentan ventajas a la hora de detectar errores. Esto se debe principalmente a que tan distintas sean las waveform asignadas tanto para los mensajes digitales correspondientes a los unos y a los ceros y la mayor la cantidad de energía presente en el tiempo de símbolo. Esto significa que se busca maximizar la diferencia de energía entre símbolos o waveform. ¿Por qué toda esta aclaración? Porque el receptor decide en función de la energía de símbolo recibida y si son muy parecidas entre las waveform que tiene el modulador, mayor será la probabilidad de error.
- *Reducción de ancho de banda:* La elección de la técnica de modulación establece el tipo de waveform que se va a utilizar. Resulta que entre diversas técnicas de modulación el ancho de banda asociado a los símbolos cambia. En NRZ-L el ancho de banda es Rb pero en manchester como produce todo el tiempo transiciones de tensión por cada símbolo a la mitad de tiempo de símbolo el ancho de banda es 2Rb, es decir, es el doble. Entonces hay que

tener mucho cuidado porque puede ser que con la técnica de modulación elegida y la tasa de bits que se maneja el canal que haya que adquirir o comprar sea demasiado costoso. Observar que el ancho de banda está en función de la tasa de bits!.

- *Codificación diferencial:* Es una característica muy útil en los sistema de comunicación donde las formas de onda a veces experimentan inversión. Estas tecnicas de modulacion requieren en el receptor un demodulador que analice dos períodos de símbolos (entre 0 y 2Ts) para entregar un dato. ¿Qué analiza el demodulador en dicho periodo de tiempo? Observa cambios, entonces cuando decimos que mira cambios tenemos que preguntarnos ¿Qué contra qué? El símbolo transmitido en el periodo 0 a Ts contra el símbolo transmitido durante el periodo Ts a 2Ts. Si uno analiza lo anterior, se da cuenta que como toma decisiones en función de lo ya decidido anteriormente propaga errores. Es decir, errar en la detección de un símbolo afecta a las decisiones futuras.
  ¿Cómo implementamos estos demoduladores? Serían necesario dos demoduladores trabajando conjuntamente durante intervalos de tiempo Ts pero desfasados en un periodo de manera tal que uno de los demoduladores trabaja con el símbolo entre 0 y Ts y el otro demodulador con el símbolo entre Ts y 2Ts.
- *Inmunidad al ruido:* Para cada una de las técnicas de modulación se debe analizar la diferencia de energía de los símbolos para determinar dónde se posiciona el umbral de decisión y que tan cerca está de la energía de los símbolos individuales. Esto es importante porque el ruido con su varianza, es decir, su potencia de alterna puede hacer que el demodulador se equivoque si la energía de la diferencia es pequeña.

Atributos espectrales de PCM para sus waveform

Una de las formas de poner sobre la mesa todas las características de las formas de modulación PCM es analizar la densidad espectral de potencia para cada caso. Esta densidad espectral de potencia debe ser normalizada a la tasa de bit porque como dijimos antes en las características, el ancho de banda depende de la tasa de bit. Por lo tanto para comparar características e independizarnos de la misma es que normalizamos el eje de las frecuencias.

La PSD puede evaluarse con una técnica determinista o con una estocástica. Para evaluar la PSD con una técnica determinista, se emplea la forma de onda para un código de línea que resulta de una secuencia de datos particular (Peor caso posible, es decir, que represente el mayor ancho de banda) Por ejemplo para NRZ-L la peor secuencia de datos binaria sería 1,0,1,0,1,0,1,0…

Como alternativa, la PSD puede evaluarse con un enfoque estocástico, es decir, considerar que la información binaria a la entrada del modulador digital resulta ser una secuencia aleatoria.

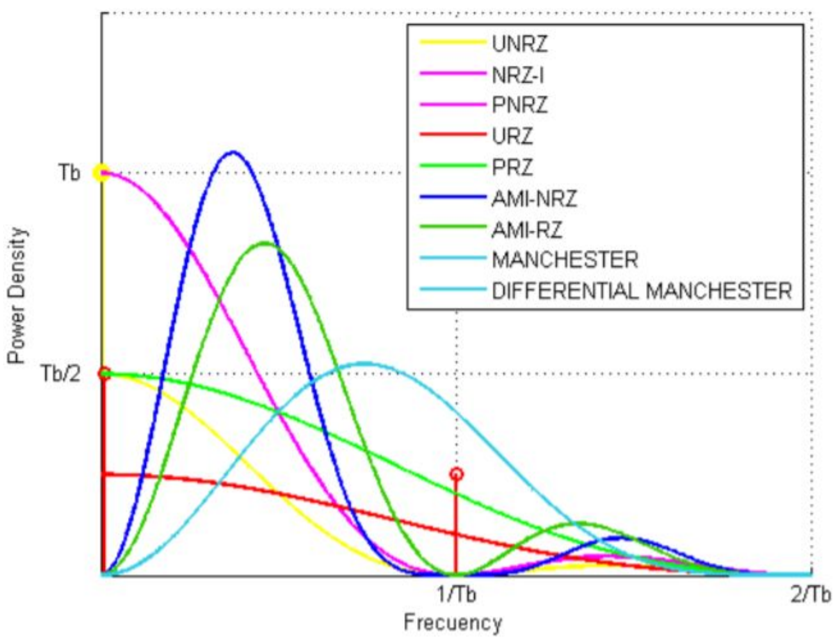
Recordando la manera que podíamos representar la señal transmitida, tenemos que:

$$y(t) = x(t) * p(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_k \delta(t - kt_b) \right) * p(t)$$

$$G_y(f) = G_x(f) |P(f)|^2$$

Necesitamos por lo tanto determinar Gx(f), ya que p(t) es determinístico y por tanto su DEP es fácil de determinar. Determinaremos primero Rx (τ) y luego al transformar según Fourier obtendremos Gx(f). Se demuestra que Gx(f) depende de R(k) es decir la autocorrelación de los datos digitales binarios.

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{j2\pi k f T_s} \qquad R(k) = \sum_{i=1}^{I} (a_n a_{n+k})_i P_i$$



Al realizar el análisis detallado anteriormente para cada forma de modulación, podemos comparar las densidades espectrales de potencia como se detalla en la siguiente imagen.
La densidad espectral de potencia permite observar cómo se distribuye la potencia de la señal en cada unas de las frecuencias. Es importante además decir que si te preguntas cual es la potencia en una determinada

frecuencia digas que es cero. Porque la densidad espectral de potencia surge de la relación de Parseval donde se determina que es una integral, entonces la función evaluada en el punto es como si integraras en un solo punto, te da cero. Necesitas integrar sobre un rango de valores de frecuencia, excepto que aparezca una dirac en frecuencia. ¿Por qué ? porque la integral de la dirac es la función evaluada en el valor donde está centrada la dirac.
Por último podemos decir que el 90% de la potencia de la señal transmitida se encuentra contenida en el lóbulo principal, este es el criterio por el cual se considera que el ancho de banda de la señal es hasta el cruce por cero del lóbulo principal.

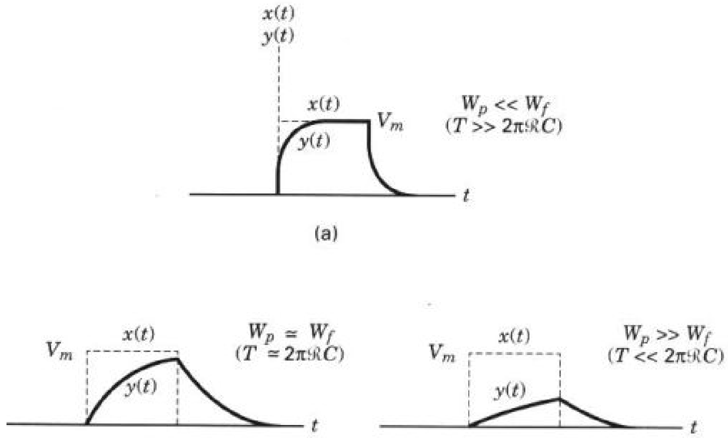


Figura :

En la imagen, en el caso (a) el ancho del lóbulo principal es mucho menor a la frecuencia de corte del canal de transmisión, esto significa que el canal permite la transmisión de más del 90% de la potencia de la señal. El caso (b) es cuando el canal solo deja pasar el lóbulo principal de las waveform asociadas a los mensajes digitales y el tercer caso es cuando el canal ni siquiera deja pasar el lóbulo principal de la transformada de fourier de los símbolos.

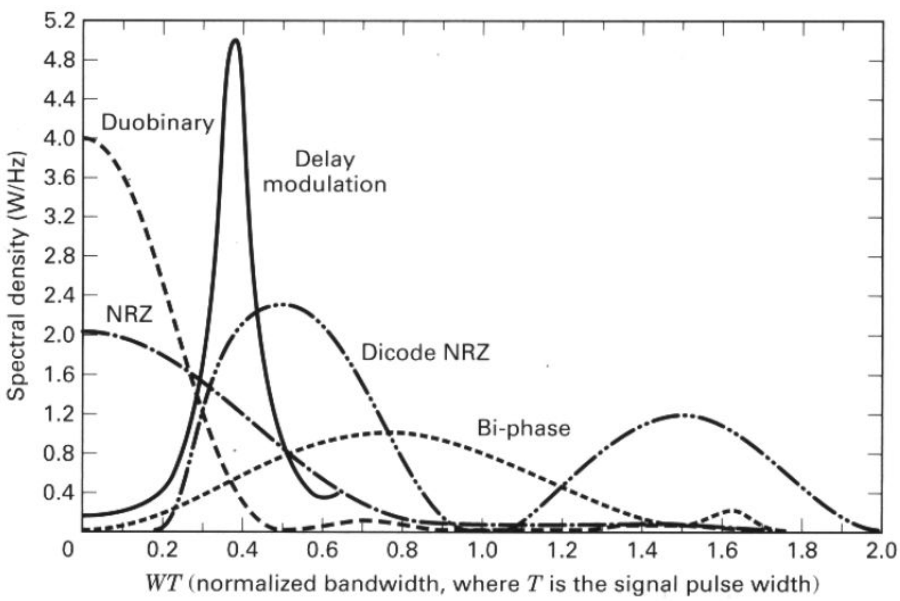


Figura :

A partir de la Figura, la tabla muestra la eficiencia espectral de cada código de línea, definida como la relación entre la tasa de transmisión de los datos y el ancho de banda ocupado por la señal transmitida, tal como lo muestra la ecuación:

$$\eta = \frac{Rb}{BW} \left[\frac{bps}{Hz} \right]$$

La eficiencia espectral indica el número de bits por segundo que se pueden transmitir por cada hertz ocupado en el canal de transmisión.
Se define que aquellos codigos de linea que necesitan menos de 1 hz para transmitir un bit por segundo son eficientes.

Código de Línea	Eficiencia Espectral (bps/Hz)
UNRZ	1
NRZ-I	1
PNRZ	1
URZ	0.5
PRZ	0.5
AMI-NRZ	1
AMI-RZ	1
MANCHESTER	0.5
DIFF. MANCHESTER	0.5

Otro tipo de modulación es cuando K>1 al cual se lo conoce como PAM (Modulación por Amplitud de Pulso), este se basa en asignar $L=2^k$ waveform para los mensajes digitales a transmitir. Esta modulación trae como ventaja que disminuye el ancho de banda al incrementar el valor de k, es decir, la cantidad de bit por mensaje digital pero se complejiza la recepción y además necesitamos mayor energía para lograr rendimientos similares a PCM. A pesar de lo descripto este tipo de modulación no sería la adecuada para una implementación digital, ya que se aleja de la simplicidad a la hora de la transmision y recepcion mediante el concepto de presencia o ausencia de señal para retornar a las metodologias analogicas en las cuales se debe de verificar la cantidad de energía que se recibe para decidir a qué valor corresponde. En conclusión volvemos al problema de estimación y nos alejamos del de detección
Un ejemplo es modulación M-aria con M=4 es decir, k=2.

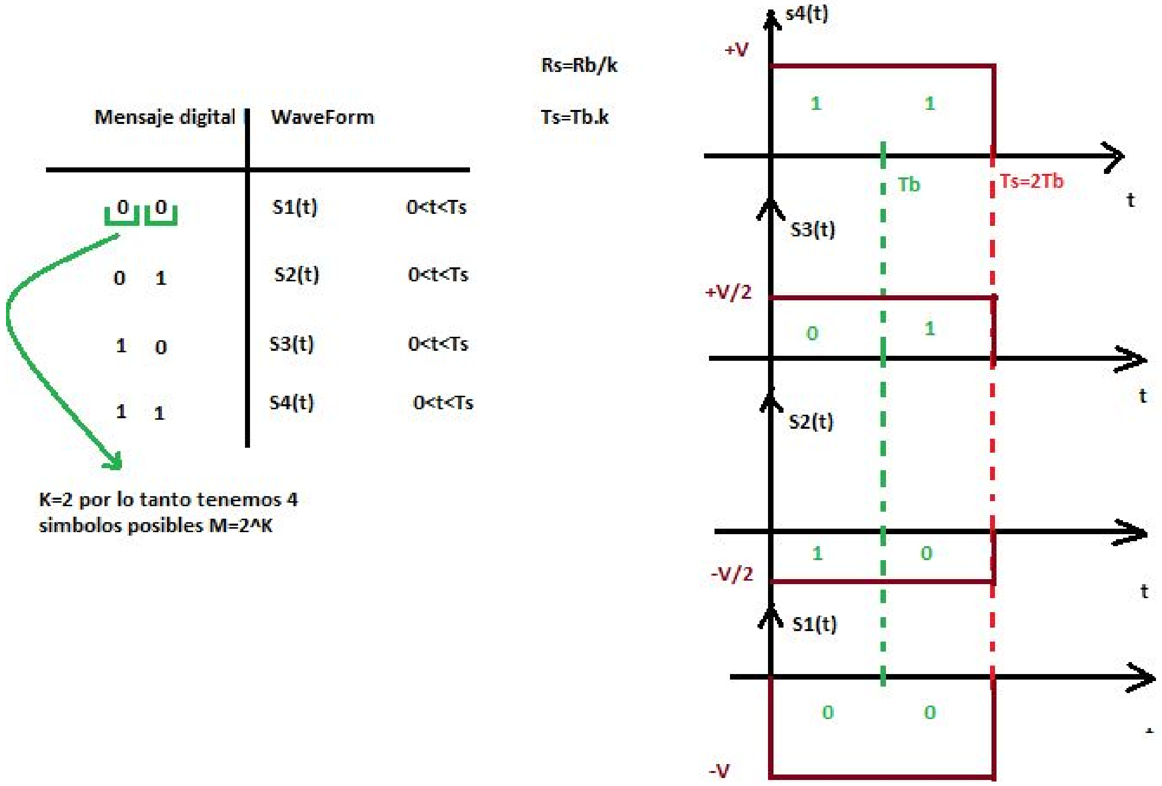


Figura :

Además, dependiendo dónde se encuentran concentradas las características espectrales de las waveform, podemos definir sistemas de modulación/demodulación banda base y/o sistemas de modulación/demodulación banda de paso. En el primer caso, las waveform tienen su espectro en el rango de frecuencias que comprende desde los 0 hz o componente de continua hasta unos pocos megahertz.

Señalización Duobinaria

Cuando planteamos que el ancho de banda necesario para transmitir señales digitales con pulsos formador de onda cuadrada, dijimos que es Rb. Este criterio lo elegimos debido a que el 90% de la energía del símbolo se encontraba en el lóbulo principal de la Sinc asociada a la transformada de Fourier de las waveform. En este análisis se consideró la presencia de un canal ideal, es decir, un canal cuya respuesta en frecuencia tiene amplitud plana en toda la banda de paso y fase lineal. Sin embargo al filtrar en frecuencia la señal de información y quitarle componentes de alta frecuencia generamos interferencia intersimbólica (ISI) al enviar varios símbolos sucesivos. ¿Qué significa el ISI? Que las waveform que se plantearon idealmente a la salida del modulador digital, planas y con transiciones infinitesimales en tiempo entre diferentes valores de amplitud, cuando se hagan presentes en el canal, se dispersaran en el tiempo y el pulso para cada símbolo puede fugarse a las ranuras de tiempo adyacentes como se observa en el segundo caso de la figura .... En definitiva el efecto del filtrado en el dominio de la frecuencia hace a la señal más lenta (tener menor pendiente), es decir, le toma más tiempo alcanzar los niveles de a amplitud deseados, entonces un símbolo se mete en el tiempo del otro símbolo, ya que el mismo no puede cambiar rápido. Además dependiendo la cantidad que filtremos de la señal inicial, repercutirá en la amplitud que pueda llegar a alcanzar el pulso, mientras más la filtremos, el pulso además de ser más lento en ascenso, no alcanzará una gran amplitud.

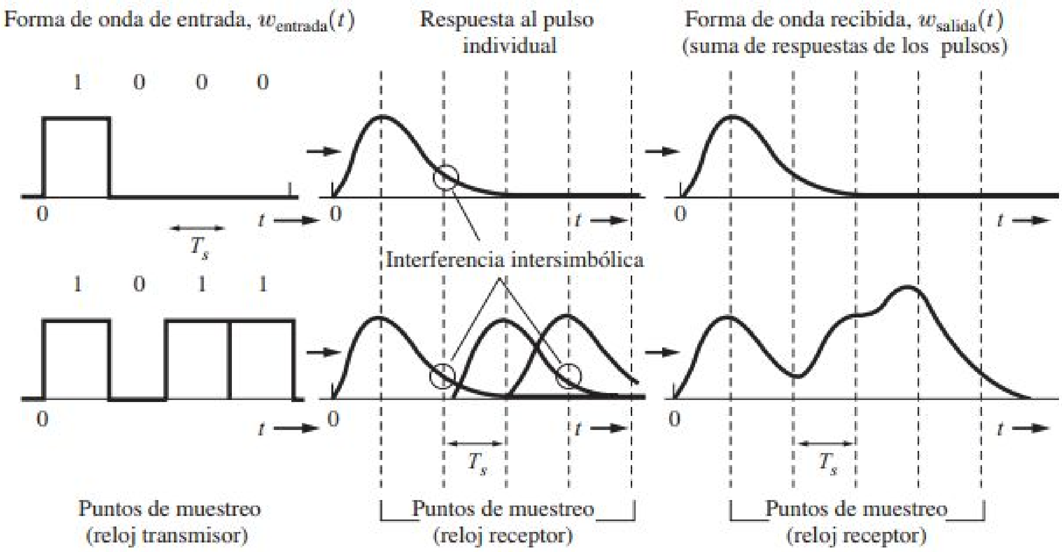


Figura 3–23 Ejemplos de la ISI en los pulsos recibidos en un sistema de comunicación binaria.

Figura :

Esta situación si bien es mala, es decir tenemos ISI empeora cuando adquirimos un canal real. ¿A qué se debe esta situación? Que un canal real que tiene un ancho de banda Rb tiene una frecuencia de corte Rb/2. ¿Por qué? Porque cuando trabajamos con canales reales debemos considerar el filtro ideal inscripto dentro de él, para trabajar en la zona de amplitud casi constante y fase lineal de manera tal de evitar toda distorsión posible.

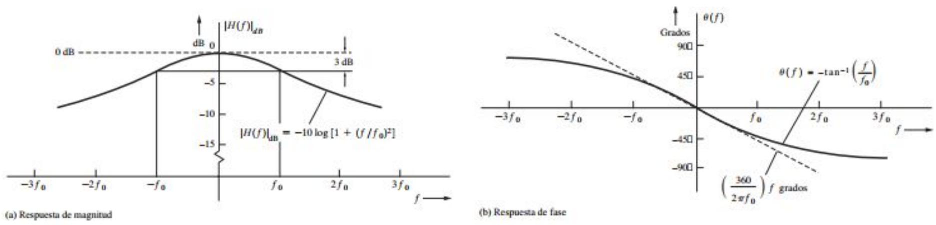


Figura :

Conociendo dicho fenómeno producto de los canales reales podemos plantear lo siguiente:

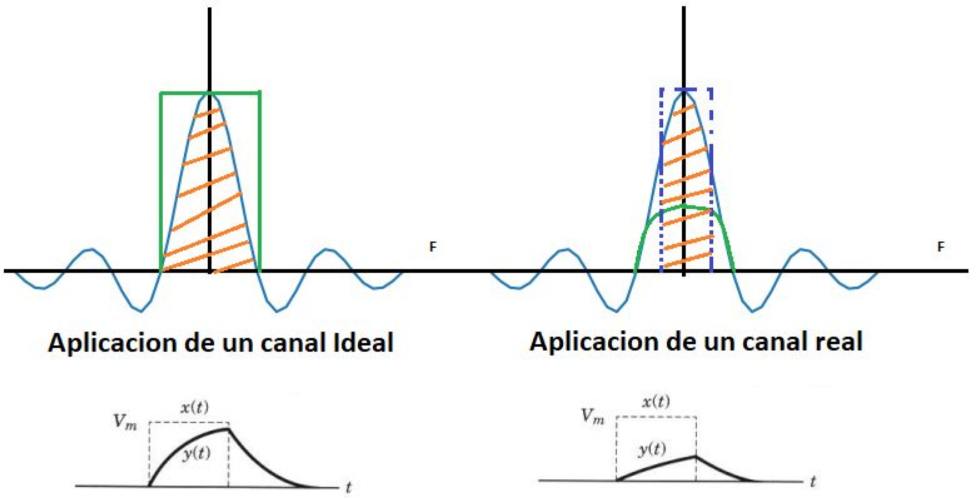


Figura :

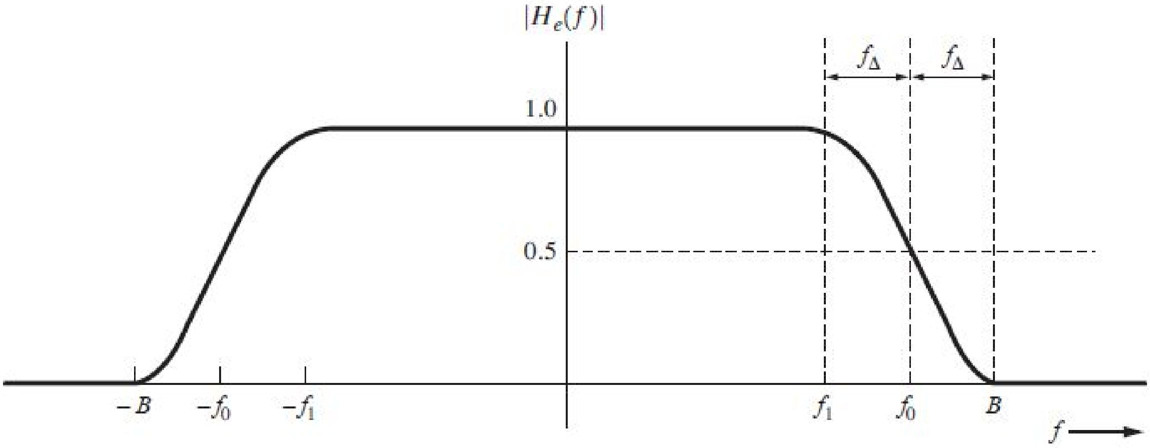


Figura :

¿Qué solución podemos encontrar para esta interferencia?

La solución es encontrar un pulso formador de onda diferente al rectangular que tenga una transformada de fourier totalmente contenida dentro del rango de frecuencias de 0 hertz a Rb/2. Sin embargo, uno podría preguntarse ¿cómo es esto posible? Y… la verdad es medio raro, porque si consideramos un espectro concentrado entre 0 y Rb/2 encontramos que en el dominio del tiempo tiene una duración de 2Tb y nosotros necesitamos para modulación PCM que el tiempo de los símbolos se limite a Tb, no más, porque decíamos que teníamos interferencia intersimbolo. Como conclusión, si aplicamos este concepto tenemos interferencia intersimbólica pero controlada porque en los tiempos múltiplos de Tb el valor correspondiente al símbolo no se interfiere con ningún otro.

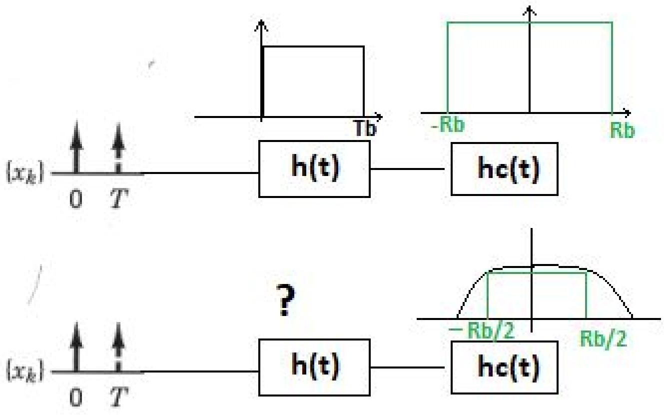


Figura :

Se ha encontrado que mediante la implementación de un filtro digital con capacidad de incorporar un bit retardado se puede transmitir una combinación entre 2 bits, el actual y el anterior, generando una interferencia controlada. Esta interferencia se puede desechar, mediante la implementación de filtro coseno tanto en el transmisor como en el receptor. Esta técnica de implementación es conocida por el nombre de *Duobinario* y da la capacidad de transmitir al doble de tasa cumpliendo con los mismos requerimientos que pide Nyquist (espectro contenido netamente entre 0 y Rb).

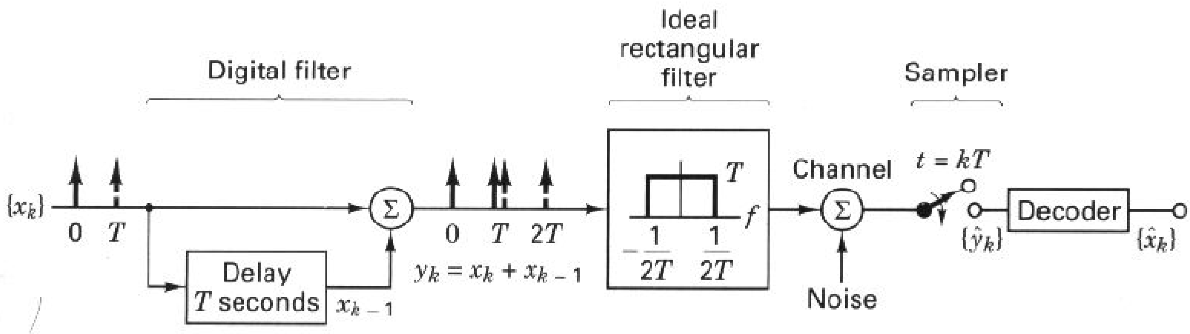


Figura :

Respecto al filtro ideal de Nyquist, irrealizable, el Duobinario cuenta con la posibilidad de que su función de transferencia es realizable mediante filtros analogicos.

El modo de trabajo por parte del Duobinario consiste, como se mencionó previamente, en la sumatoria de dos bits de tiempos distintos y asignación de su valor mediante regla de decisión para la transmisión, representandose de la siguiente manera:

$$y(k) = x(k) + x(k-1)$$

Considerando una secuencia de ejemplo x(k): 0010110 donde cada bit puede adquirir dos valores de tensión: +1V 0 -1V duobinario permite una codificación de la siguiente manera:

Solution

Binary digit sequence $\{x_k\}$:	0	0	1	0	1	1	0
Bipolar amplitudes $\{x_k\}$:	−1	−1	+1	−1	+1	+1	−1
Coding rule: $y_k = x_k + x_{k-1}$:		−2	0	0	0	2	0

Se puede observar que la secuencia resultante contiene tres niveles en lugar de dos, siendo algo importante a destacar. A continuación se mostrará el proceso de decodificación en el receptor, el cual implementa tanto regla como tabla para la determinación de los mensajes digitales en función de las waveform transmitidas.

Decoding decision rule: If $\hat{y}_k = 2$, decide that $\hat{x}_k = +1$ (or binary one). ⇨ **Tabla**

If $\hat{y}_k = -2$, decide that $\hat{x}_k = -1$ (or binary zero).

If $\hat{y}_k = 0$, decide opposite of the previous decision. ⇨ **Regla**

Decoded bipolar sequence $\{\hat{x}_k\}$:	−1	+1	−1	+1	+1	−1
Decoded binary sequence $\{\hat{x}_k\}$:	0	1	0	1	1	0

Podemos observar que con esta técnica de modulación, se produce una codificación diferencial donde el primer dígito binario no importa si es un 1 o un 0, es más, podría no ser un dato precisamente, sino un dígito binario de inicialización de codificación. También, es importante mencionar que con dicha técnica se produce una propagación de los errores, ya que en el caso de recibir una waveform con valor de tensión (0V) el receptor decide que el mensaje digital binario que le enviaron es el opuesto al que decidió anteriormente. Entonces, si anteriormente decidió mal, ahora volverá a decidir mal.

Para solucionar este inconveniente de la implementación de tabla y regla basándose en decisiones anteriores es que se implementa *precodificación*. Lo cual permitirá que las decisiones por parte del demodulador deban ser únicamente por tabla, simplificando las exigencias del sistema receptor.

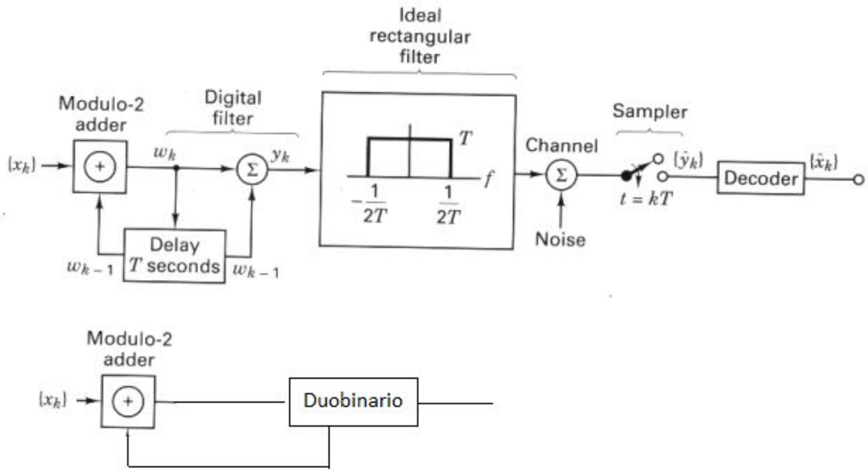


Figura :

Vemos por la imagen anterior que la precodificación consiste en implementar al sistema ya mencionado una operación de suma en módulo 2, donde se van a sumar los mensajes digitales actuales con los anteriores. Es decir, se modifica el filtro digital implementado anteriormente donde solo tenia un sumador. De tal forma que

$$y(k) = x(k) + x(k-1)$$

se transforma a:

$$y(k) = w(k) + w(k-1)$$
$$w(k) = x(k) \oplus w(k-1)$$

Recordemos que estas sumas son en módulo 2, por lo tanto, debemos considerar la siguiente tabla de la verdad:

$$0 \oplus 0 = 0$$
$$0 \oplus 1 = 1$$
$$1 \oplus 0 = 1$$
$$1 \oplus 1 = 0$$

Solution

Binary digit sequence $\{x_k\}$:	0	0	1	0	1	1	0
Precoded sequence $w_k = x_k \oplus w_{k-1}$:	0	0	1	1	0	1	1
Bipolar sequence $\{w_k\}$:	−1	−1	+1	+1	−1	+1	+1
Coding rule: $y_k = w_k + w_{k-1}$:		−2	0	+2	0	0	+2

Decoding decision rule: If $\hat{y}_k = \pm 2$, decide that $\hat{x}_k$ = binary zero.
If $\hat{y}_k = 0$, decide that $\hat{x}_k$ = binary one.

Decoded binary sequence $\{x_k\}$:	0	1	0	1	1	0

Podemos observar que la aplicación de precodificación elimina la modulación diferencial que tenía en un principio duobinario y evita la propagación de errores sobre decisiones futuras. Además, es muy importante mencionar que solo el

demodulador aplica Tablas de decisión y no reglas como se mencionó anteriormente.
Ahora… La cuestión fundamental que debemos preguntarnos es ¿Cómo es el pulso formador de onda que vamos a utilizar y cómo es que cumple con nuestros requerimientos sobre un ancho de banda de Rb/2? Para ello debemos analizar la función de transferencia de Duobinario.

Función de transferencia de duobinario:

Como se podía observar en el esquema de señalización duobinaria existían dos filtros en cascada. Un filtro digital que presentaba los retardos temporales cada Ts que permitian sumar dígitos binarios con sus inmediatos anteriores y un filtro ideal de Nyquist a una tasa Rs/2 o Rb/2. No olvidar que estamos trabajando con modulación PCM y Rb=Rs y Tb=Ts.
Se debe considerar dos funciones de transferencia iniciales, siendo, para el retardo implementado:

$$y(t) = x(t) + x(t - Ts)$$

$$y(f) = x(f) + x(f) \,.e^{-j2\pi f Ts}$$

$$H_1(f) = 1 + e^{-j2\pi f Ts}$$

Y del filtro ideal:

$$H_2(f) = \begin{cases} T\ para\ |f| < \dfrac{1}{2T} \\ 0\ para\ el\ resto \end{cases}$$

La función de transferencia equivalente entre estas dos, será:

$$h_e(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H_e(f) = H_1(f) \,.H_2(f)$$

$$H_c(f) = \begin{cases} \left(1 + e^{-j2\pi f Ts}\right) Ts \quad |f| < \dfrac{1}{2Ts} \\ 0\ para\ el\ resto \end{cases}$$

Trabajando con la primera expresión entre llaves y expresando la exponencial compleja de otra manera tenemos:

$$H_e(f) = T \cdot \left(e^{j\pi f T} + e^{-j\pi f T} \right) \cdot e^{-j\pi f T}$$

Considerando:

$$T \cdot 2 \cdot \left[\frac{e^{j\pi \mathrm{fT}} + e^{-j\pi \mathrm{fT}}}{2} \right] = 2 \cdot T \cdot \cos(\, \pi \cdot \mathrm{f} \cdot \mathrm{T})$$

Se obtiene:

$$\left| H_e(f) \right| = \begin{cases} 2T \cdot \cos(\, \pi \mathrm{fT}) & |f\,| \leq \dfrac{1}{2T} \\ 0 & \mathit{Cualquier\ otro\ caso} \end{cases}$$

El filtro obtenido se denomina *filtro coseno*. No confundir con el filtro siguiente que vamos a estudiar que se denomina *filtro coseno alzado*, NO SON LO MISMO. ¿Qué resulta importante de esto? Que nuestro pulso formador de onda son dos sinc de duración 2Ts cada una y desfasadas una con otra Ts, por lo tanto nuestro símbolo a transmitir durará 3Ts e involucra dos mensajes digitales binarios. Uno podría preguntarse además ¿Funciona esto? La verdad es que si, porque donde están centradas las sinc de cada mensaje digital a transmitir no existe solapamiento y la muestra se recupera correctamente, sin embargo resulta ser el único punto en el dominio del tiempo donde ocurre esto, por lo tanto hay que tener perfecta sincronización con el receptor.

Ahora si analizamos ancho de banda podemos encontrar dos conclusiones importantes:

- **Para transmitir a la tasa Rs necesito un ancho de banda Rs/2** porque el espectro asociado a nuestro pulso formador de onda (filtro coseno) ocupa solamente un ancho de banda Rs/2. Sin embargo podría considerarse que ocupa menos ancho de banda todavía, es decir ocupa Rs/4, como se detalló en la figura .. ¿Why? por el filtro ideal inscripto dentro del filtro coseno.
- **Para transmitir a la tasa 2Rs necesito un ancho de banda Rs** porque como se mencionó anteriormente el filtro coseno ocupaba en definitiva un ancho de banda Rs/2 entonces ahora ocupa Rs y el filtro inscripto en su interior es de Rs/2, es decir cumple con todas las especificaciones mencionadas para la transmisión sin ISI.

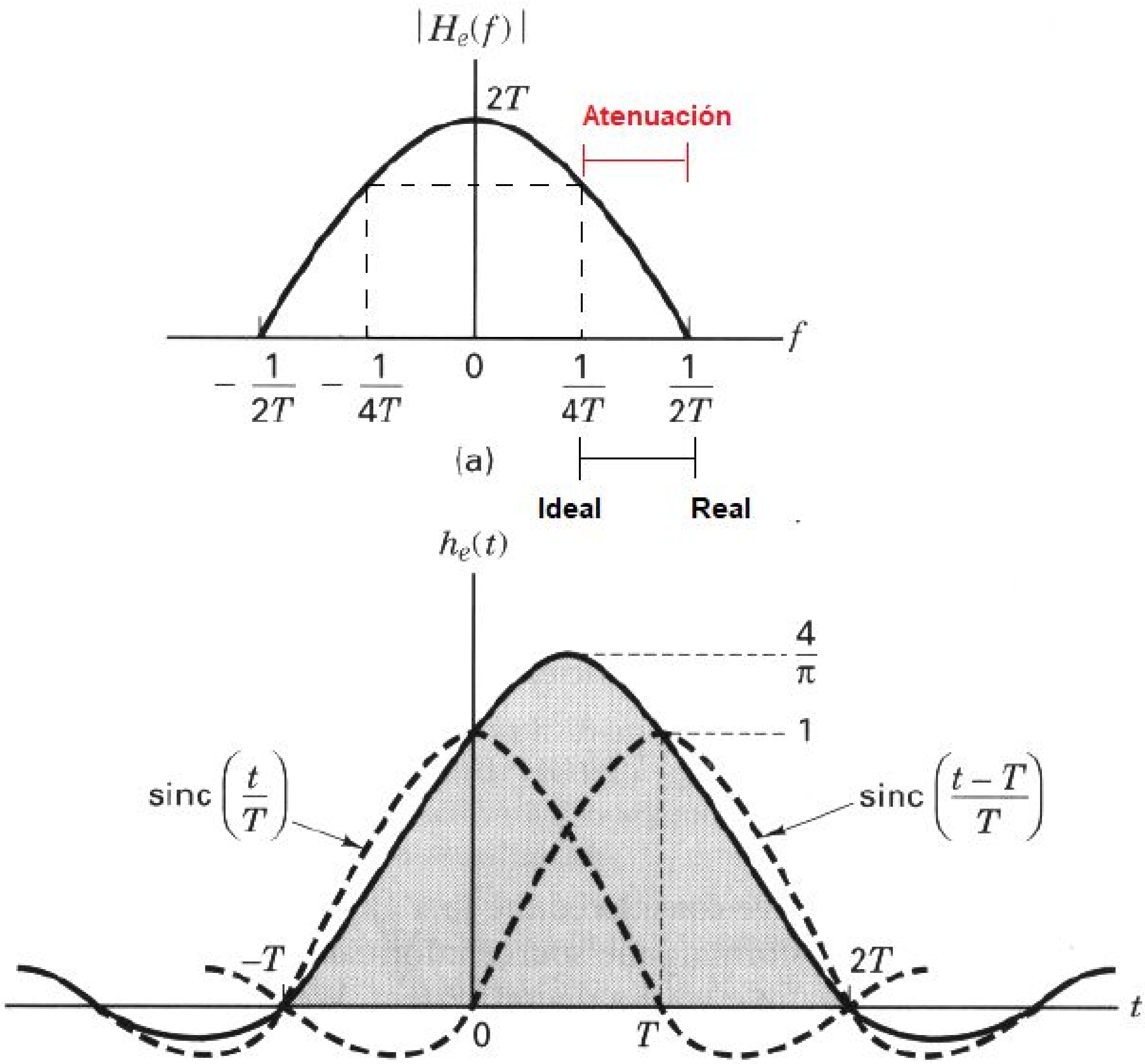


Figura :

Solucionar el problema del ISI con un pulso formador de onda del tipo coseno no fue gratis, ya que como se observa con codificación duobinaria se aumentó los niveles de transmisión de los pulsos. En vez de mandar +-1V se mandaban tres niveles +-2V y 0 y eso implica un aumento de la potencia transmitida. Es más, si uno quisiera seguir disminuyendo el ancho de banda necesario podría aplicar más retardos a los bit a transmitir e introducir mayor cantidad de ISI controlado, es decir aplicar *codificación polibinario*. ¿Qué lograría? Cada vez que agrego un retardo disminuye el ancho de banda a la mitad pero aumenta la cantidad de niveles y tengo mas potencia requerida a la hora de transmitir. En definitiva, parecía todo muy bonito pero… en algun lado te das cuenta que complica la demodulación, aumenta energía y complica además el sistema modulador.

● Demodulador Digital Banda Base

Un demodulador digital es un proceso que transforma las señales recibidas (señal transmitida + ruido) en bits stream o flujos de bits que resultan ser señales de información.
En el caso de Modulación/Demodulación Banda base siempre se transmiten formas de onda tipo pulsos y debido a la presencia de un canal de banda limitada y con ruido es que se reciben secuencias de señales que no son precisamente pulsos. Estas señales están contaminadas por ruido y además presentan Interferencia Intersimbólica (ISI). Por lo tanto, no pueden ser directamente muestreadas y detectadas. Se deben incorporar filtros en el receptor que permitan entregar a su salida la mejor relación Señal-Ruido y libre de ISI.

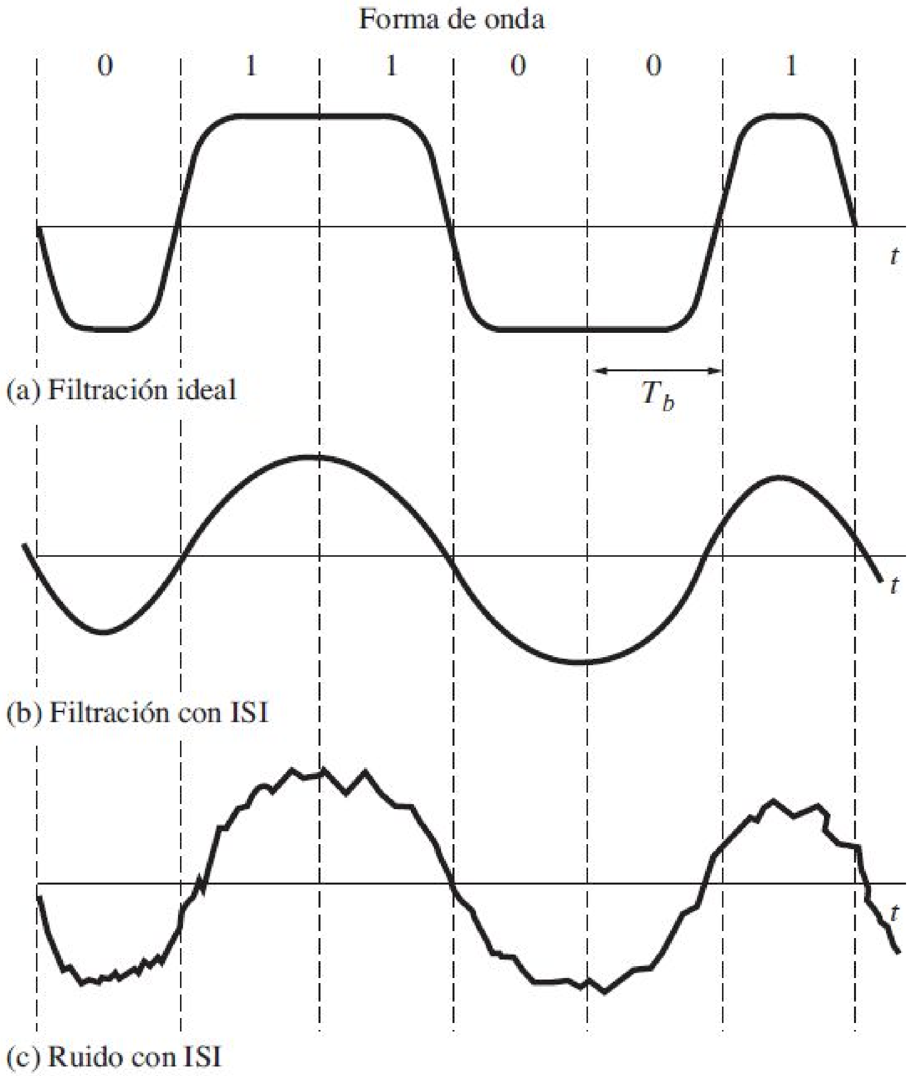


Figura :

Hay dos causas primarias que generan el deterioro de la performance del error del sistema o lo que es lo mismo decir, que aumentan la probabilidad de error de bit. Una de ellas es la interferencia intersimbólica (ISI) que ya la hemos descripto. La cual estaba netamente relacionada con el filtrado tanto en el transmisor, canal y receptor. La otra causa es el ruido eléctrico e interferencias producidas por otras fuentes, tales como ruido atmosférico, conmutación transitoria, interferencia de señales de otra fuente y demás. Con mucho trabajo, uno puede disminuir el aporte de ruido de todas estas fuentes e incluso llegar a eliminarlos pero existe una fuente de ruido que es imposible de eliminar. La misma proviene del movimiento térmico de los electrones dentro de un conductor siendo independiente al voltaje aplicado y corrompe la señal de forma aditiva es decir, se suma a la señal de información que viaja por el canal de transmisión. Siendo este el *ruido térmico*.

¿Cómo consideramos el ruido en los sistemas de Telecomunicaciones? El ruido térmico es considerado como AWGN. Esto significa:

A→ Aditivo
W→ Blanco
G→ Gaussiano
N→ Ruido

¿Puede ser el comportamiento del ruido del tipo Blanco y Gaussiano al mismo tiempo? La respuesta es que **NO.** Pero primero aclaremos a qué se deben estas características. Cuando uno dice que el ruido es Blanco, está haciendo referencia a características en el dominio de la frecuencia, es decir, cómo es la densidad espectral de potencia de ruido. Sabemos que esta función resulta ser la transformada de fourier de la autocorrelación del ruido. Ahora, que el ruido sea blanco significa que su densidad espectral de potencia es plana en todas las bandas de frecuencia, desde $-\infty$ a ∞. Con esa idea en mente, analicemos qué significa que el ruido sea gaussiano. Cuando uno dice que el ruido tiene una función de distribución de probabilidad gaussiana está haciendo referencia a una característica estadística, no a una característica de frecuencia. Este comportamiento nos dice que los valores de voltaje que puede asumir nuestra variable aleatoria, es decir, el ruido, es más probables que estén alrededor de la media y muy poco probable que estén alejados de la misma. Para el caso de los ruidos en los sistemas de comunicación, se tiene media cero por lo tanto es más probable valores bajos de amplitud en voltaje, ya sea positivos o negativos y muy poco probable valores altos de voltaje.

Entender esto es el primer punto importante, porque significa que de entrada no podemos comparar una característica en el dominio de la frecuencia con una característica en el dominio estadístico.

Entonces encontramos la función de distribución de probabilidad del ruido blanco.

¿Como lo haríamos? Para obtener una función de distribución de probabilidad se debe diseñar un experimento aleatorio. ¿En qué consiste? En conocer todos los posibles resultados del experimento, denominarlo eventos y posteriormente desarrollar infinidades de pruebas para medir los resultados. Con cada resultado del experimento vemos a qué evento corresponde y con cada uno de ellos vamos haciendo una suma. Para al final, obtener la probabilidad de cada uno de los eventos. Ejemplo: Experimento aleatorio tirar una moneda

Para este experimento aleatorio, los posibles resultados o eventos son dos: *Sale Cara o Sale Cruz.* Una vez que tengo bien definido los eventos comienzo a realizar experimentos, es decir, tiro la moneda infinitas veces. Por cada vez que tiro la moneda miro si sale cara o si salió cruz y armo lo que se denomina histograma (Cantidad de veces que se repiten los resultados en los eventos definidos) que no es ni más ni menos que otra cosa que la función de distribución de probabilidad.
¿Todo esto para explicar qué cosa? Que siempre que tengas que trabajar estadísticamente necesitas muestrear la variable aleatoria, tenes que determinar la cantidad de eventos y armar un experimento aleatorio. Tenes que muestrear muchísimas veces para armar el histograma.
Una vez entendido esto, pensemos qué pasaría si hiciéramos un experimento aleatorio para el ruido blanco. Como su función de densidad de probabilidad es constante en todas las frecuencias significa que de un instante a otro infinitesimal en el tiempo puede cambiar de un valor de voltaje bajo a un valor de voltaje alto y…¿ esto como mierda lo relaciono con la pdf? Lo podes relacionar porque significa que el proceso tiene la misma probabilidad de cambiar desde un valor bajo a un valor alto de voltaje de muestra a muestra ya que tiene las componentes espectrales necesarias en el dominio de la frecuencia. En conclusión, la fdp del ruido blanco **ES UNIFORME.** Esto significa que el ruido tiene media cero pero varianza infinita o lo que es lo mismo de ver en el dominio de la frecuencia potencia infinita.
Entonces si es ruido blanco tiene una Función de distribución de probabilidad uniforme, no hay chances de que sea gaussiana. ¿Cómo es posible esta situación?
En telecomunicaciones se denomina AWGN al ruido porque se realizan observaciones de un fenómeno de ruido blanco pero de banda limitada ya que a la entrada del receptor se produce un filtrado, haciendo que la densidad espectral del ruido sea plana pero solo en un rango de frecuencias, no desde el -∞ a ∞. Esto significa que el ruido al ser truncando en el dominio de la frecuencia no puede cambiar mucho voltaje de una muestra a otra, entonces la función de distribución de probabilidad deja de ser uniforme y se transforma a una gaussiana.

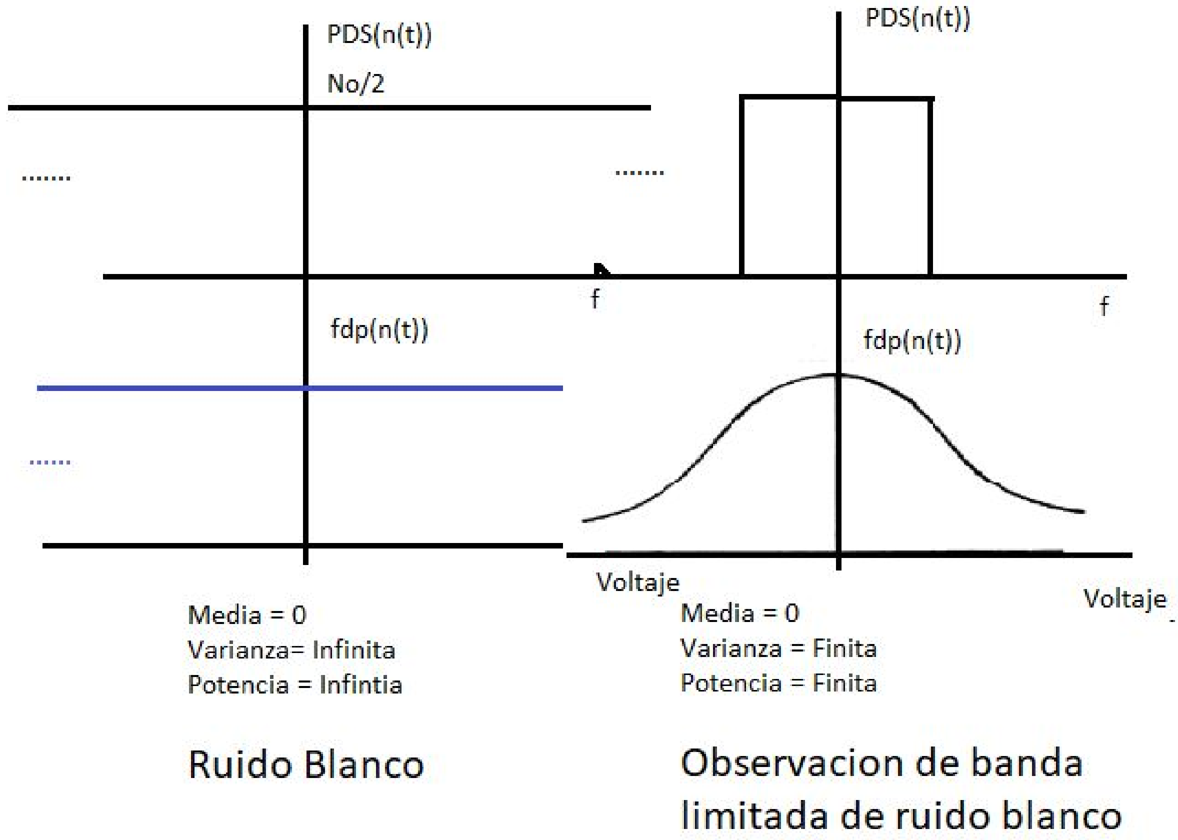


Figura :

Nunca está de más recordar que ...

$$\mu^2 = Potencia\ Continua$$

$$\sigma^2 = Potencia\ de\ Alterna$$

Una vez aclarado esto, queda totalmente definido las fuentes de error para nuestro sistema de comunicación. Para explicar cómo funciona un demodulador digital vamos a considerar por simplicidad que sólo existe ruido y no (ISI).

Un demodulador digital está conformado por dos bloques básicos, uno denominado *transformación de waveform a muestras* y otro denominado *Proceso de decisión*.

Del primer proceso no entendemos en un principio muy bien qué es lo que debe obtener a la salida, sabemos que cada Ts va a entregar una muestra Z(Ts) producto de la presencia en la entrada del receptor de una waveform contaminada por ruido y que debe tener la mayor relación señal a ruido pero no entendemos muy bien porque.. Pero lo que sí sabemos es que esta salida va a ser utilizada por el proceso de detección para decidir si lo que se transmitió corresponde a un 1 o un 0. Por eso primero comenzamos analizando el bloque de decisión para saber qué requerimientos óptimos tiene en la entrada y entender porque el filtro debe ser diseñado de tal forma.

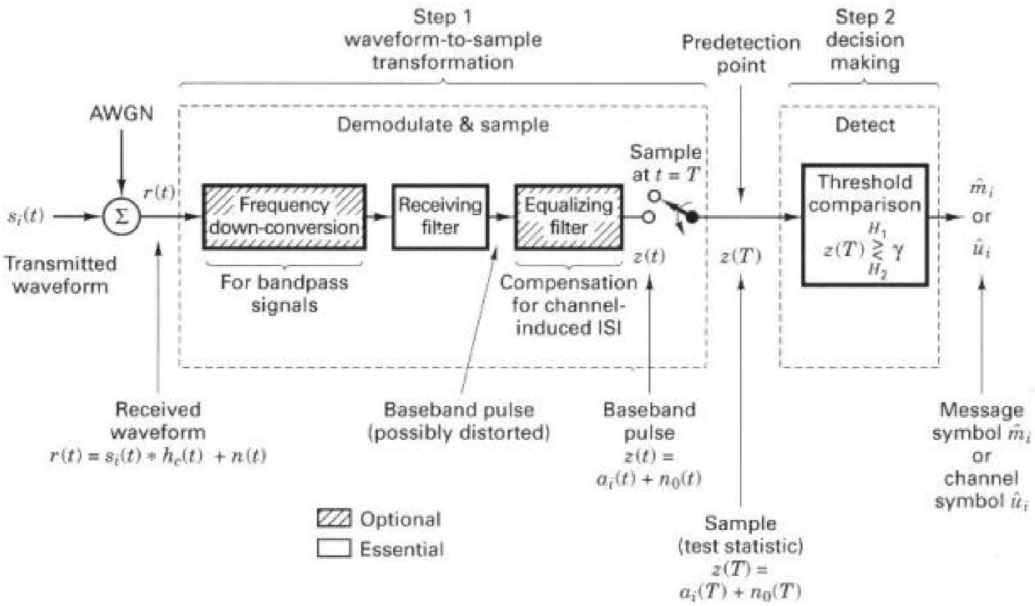


Figura :

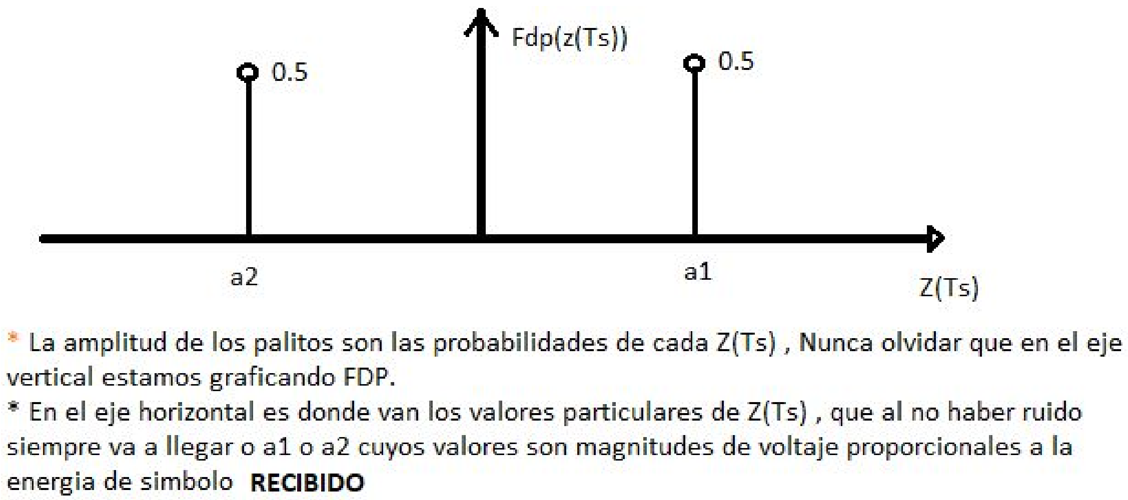
Proceso de decisión

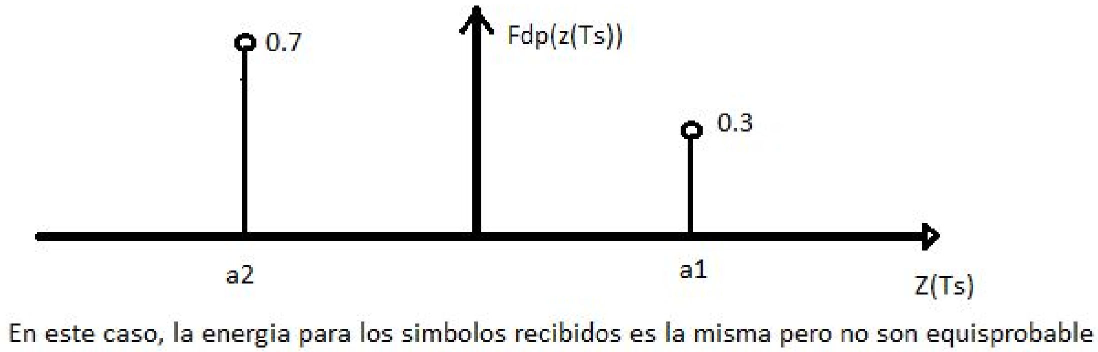
Para analizar el problema en la etapa de *proceso de decisión* sabemos que en la entrada del mismo tenemos esta muestra Z(Ts). ¿Qué es Z(Ts)? Z(Ts) es una magnitud de voltaje cuya amplitud es proporcional a la energía contenida en la señal recibida e inversamente proporcional al ruido presente en dicha forma de onda.

De esta forma podemos plantear que $Z(T_s) = a_i(T_s) + n(T_s)$ donde el ruido es un proceso aleatorio AWGN producto de observación de ruido blanco de banda limitada y a_i es una variable aleatoria discreta ya que representa los símbolos que se pueden transmitir, entonces tiene una cantidad finita de eventos definidos, o se envió S1(t) o S2(t).

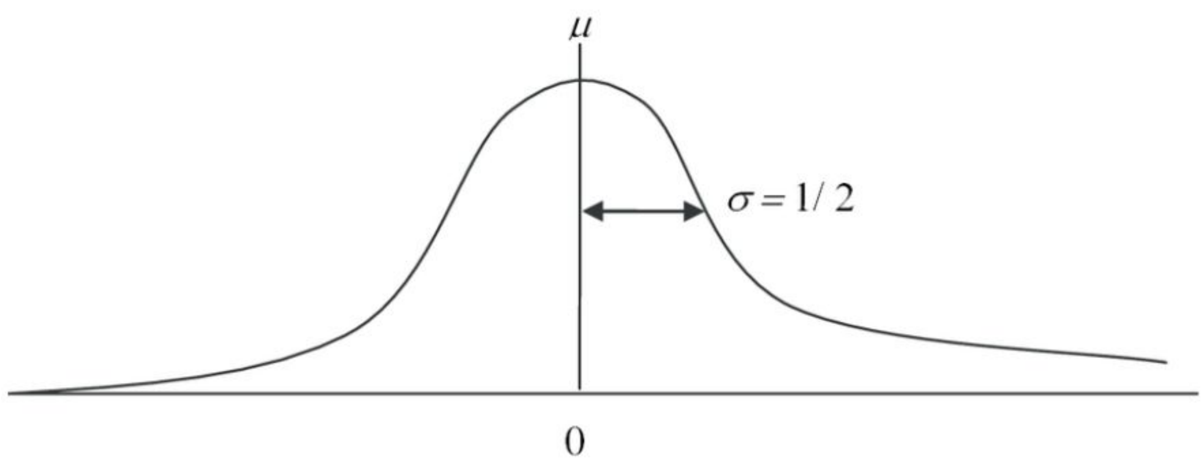
¿En definitiva Z(Ts) es una variable aleatoria? **SI**, es una variable aleatoria que sigue la misma función de distribución de probabilidad Gaussiana del ruido pero en lugar de tener valor medio nulo, tiene los valores medios de a_i.

¿Como explicamos la función de distribución de probabilidad de esta variable aleatoria? Hagamos algo raro para empezar. Consideremos que podemos apagar la fuente de ruido, cosa que el sistema ya no presenta ruido térmico en el canal de transmisión y consideremos que ambos waveform a transmitir son equiprobable porque el flujo de bits o bitstream son equiprobable. De esta forma, si yo analizo mediante un experimento aleatorio como resulta Z(Ts) voy a encontrar que:





Luego, si tuviéramos control del ruido para saber su comportamiento podríamos decir: “Apago la fuente de información, es decir dejo de modular y prendo la fuente de ruido” entonces con el demodulador prendido analizo cómo es la variable aleatoria Z(Ts) recibida que solo se conforma de ruido:



Con las dos variables aleatorias estudiadas, puedo formar la variable aleatoria Z(Ts) como superposición de las variables aleatorias n(Ts) y a_i(Ts).

¿Que tiene que ver todo esto con el proceso de decisión? La respuesta a la pregunta es que el demodulador para decidir qué símbolo se transmitió tiene que resolver la siguiente ecuación:

$$P\left({}^{S_1}\!/_{Z} \right) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} P\left({}^{S_2}\!/_{Z} \right)$$

Es decir en función de una observación Z(Ts) tiene que decidir qué símbolo se transmitió. Si S1 o S2, es decir, **resolver una ecuación de probabilidades condicionales a posteriori,** donde si la probabilidad de que se transmitió S1 dado Z es mayor que la probabilidad que se transmitiera S2 dado Z, se va a decidir por la hipótesis H1 que significa que se transmite S1 y si ocurre al revés, es decir, la probabilidad de que se transmitió S2 dado Z es mayor, se decide por S2. Sin embargo, resolver estas ecuaciones es **IMPOSIBLE** y ni siquiera se pueden graficar las probabilidades. ¿Por qué?

Porque para plantear estas probabilidades yo debería armar un experimento aleatorio donde Z valga siempre lo mismo de manera tal que pudiera observar cómo se distribuyen los valores de S1 y S2 y hacer que Z valga siempre lo mismo es imposible ya que representa a una señal ruidosa y no existe posibilidad de controlar el ruido.

La única forma de solucionar esta situación es analizando otras probabilidades, es decir, $P\left({}^{Z}\!/_{S_1} \right)\ y\ P\left({}^{Z}\!/_{S_2} \right)$. Porque si se puede imponer sobre el canal que se va a transmitir muchas veces el símbolo S1 o S2 y observar el receptor como se distribuyen los valores.

¿Cómo encontramos las probabilidades antes mencionadas? Usando el Teorema de Bayes en su forma más simple ya que no existe probabilidad conjunta. Esto se debe a las características del ruido del canal que resulta ser independiente.

De esta manera podemos plantear que:

$$P\left({}^{S_1}\!/_{Z} \right) = P\left({}^{Z}\!/_{S_1} \right) . P\left(S_1 \right)$$
$$P\left({}^{S_2}\!/_{Z} \right) = P\left({}^{Z}\!/_{S_2} \right) . P\left(S_2 \right)$$

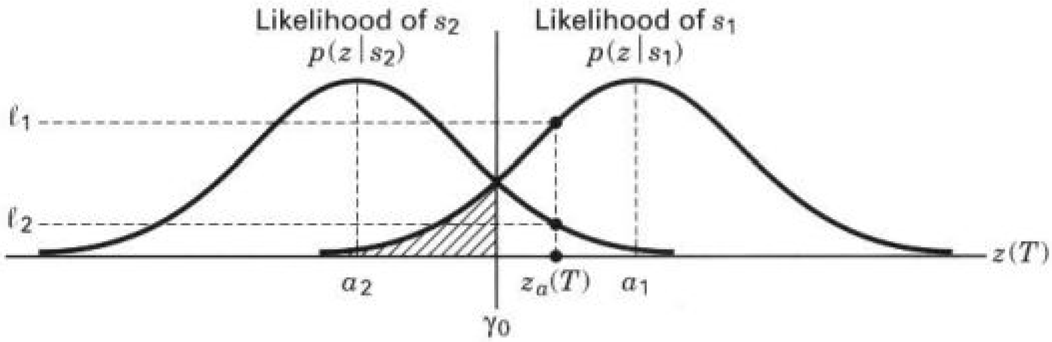
Si reemplazamos en las ecuaciones planteadas al principio que debía resolver el receptor, tenemos que :

$$P(S1/Z) \underset{S2=H0}{\overset{S1=H1}{\gtrless}} P(S2/Z)$$

$$P(Z/S1)\cdot P(S1) \underset{S2=H0}{\overset{S1=H1}{\gtrless}} P(Z/S2)\cdot P(S2)$$

$$\frac{P(Z/S1)}{P(Z/S2)} \underset{S2=H0}{\overset{S1=H1}{\gtrless}} \frac{P(S2)}{P(S1)}$$

Entonces a partir de la última ecuación podemos analizar el siguiente gráfico:



¿De donde te lo robaste mentiroso? Tranquilo mostri, ya lo explicamos.

Dado que tenemos que representar $P\left(Z/S_1\right)$ y $P\left(Z/S_2\right)$ podríamos plantear de nuevo la pregunta ¿Qué significan estas probabilidades? Significan que vamos a calcular la probabilidad de Z dado que se transmitió un Símbolo determinado. Es decir, ya sabemos con certeza que se transmitió el símbolo S_i , vamos a calcular la probabilidad de Z.

Matemáticamente hablando significa que :

$$Z(T_s) = a_1(T_s) + n(T_s) \quad \textit{Transmision del Simbolo } S_1$$

$$Z(T_s) = a_2(T_s) + n(T_s) \quad \textit{Transmision del Simbolo } S_2$$

$$n(T_s) = z(Ts) - a_1 \quad \textit{Para el caso de la transmision del simbolo } S_1$$

$$n(T_s) = z(Ts) - a_2 \quad \textit{Para el caso de la transmision del simbolo } S_2$$

$$pdf\left(n(T_s)\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(n(Ts)/\sigma\right)^2\right]}$$

Entonces reemplazando n(Ts) para el caso de que transmitimos el símbolo S1 o S2 tenemos que :

$$p(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$$p(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

Esta matemática poronga de probabilidades es lo mismo que explicamos más arriba de cómo se armaba la distribución de probabilidad de Z(Ts) pero ahora sabiendo en cada caso qué símbolo transmitimos. ¿Contento? yo si.

Una vez planteadas las respectivas probabilidades, se llega a lo que se conoce como *criterio de decisión* pero para obtener este criterio, debemos de plantear lo siguiente:

$$\frac{P(Z/S1)}{P(Z/S2)} \underset{S2=H0}{\overset{S1=H1}{\gtrless}} \frac{P(S2)}{P(S1)}$$

Como se planteó en las probabilidades de $P(Z/s_i)$, obtenemos:

$$\frac{p(z/s_1)}{p(z/s_2)} = \frac{\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]}{\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(s_2)}{p(s_1)}$$

Cancelando las igualdades ($\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$) y trabajando las exponenciales, llegamos a:

$$= \exp\left[\frac{z(a_1-a_2)}{\sigma_0} - \frac{a_1^2-a_2^2}{2\sigma_0^2}\right] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(s_2)}{p(s_1)}$$

$$L(z) = \left[\frac{z(a_1-a_2)}{\sigma_0} - \frac{a_1^2-a_2^2}{2\sigma_0^2}\right] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} Ln\frac{p(s_2)}{p(s_1)}$$

De esta manera, considerando el caso particular de que $P(S_2) = P(S_1)$

$$Ln \frac{p(s_2)}{p(s_1)} = 0$$

$$z \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a_1^2 - a_2^2}{2(a_1 - a_2)} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0$$

Por lo que podemos describir para cada T, el siguiente criterio de decisión:

$$Z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

¿Esto qué significa? Que el demodulador paso de hacer un montón de cuentas de probabilidad para decidir sobre qué símbolo se transmitió a usar una regla bien simple de comparación que no involucra probabilidades. El receptor cada tiempo de símbolo obtiene la muestra Z(Ts) y la compara con el umbral de decisión. Si la muestra Z(Ts) es mayor que el umbral, el demodulador elige como verdadera la hipótesis H1, es decir, se transmitió el símbolo S1. En cambio, si Z(Ts) es menor al umbral de decisión se elige como verdadera la hipótesis H2, es decir, se transmitió el símbolo S2.

Si bien el receptor se ha simplificado al máximo no tenemos que olvidar de dónde partimos.

Ahora…¿Qué ocurre si Z(Ts) es igual al umbral? si esto ocurre, significa que al calcular las probabilidades condicionales $P\left(Z/s_1 \right)$ y $P\left(Z/s_2 \right)$ son iguales, entonces la probabilidad de que se haya transmitido S1 o S2 son iguales dado la muestra que tenemos. Estamos en verdaderos problemas ¿Qué hacemos? Le decimos al demodulador “Tira una moneda en este caso” (Considerando que ambos símbolos son equiprobables), si esto último no se cumple para qué voy a tirar una moneda, elijo la hipotesis que sea más probable porque la decisión está sesgada.

Algunas imágenes que muestran cómo trabaja el demodulador tomando decisiones

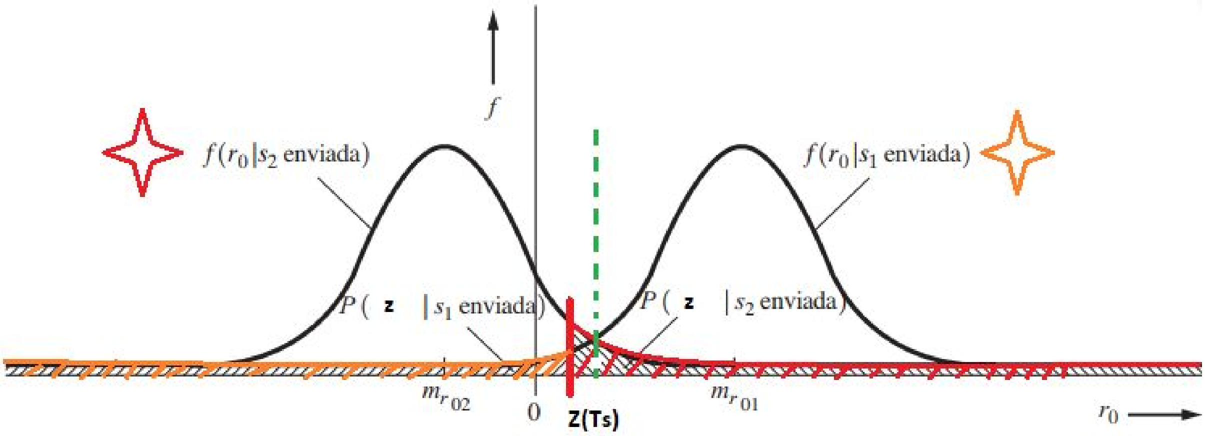
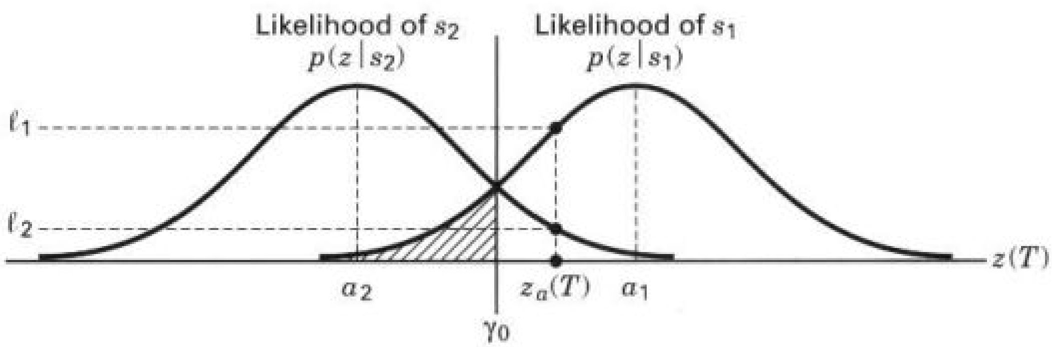


Figura 7–2 Probabilidad de error para señalización binaria.

El area naranja nos dice cual es la probabilidad de P(Z/S1) y el area roja nos esta diciendo cual es la probabilidad de P(Z/S2) es decir que es mas probable que nuestra muestra corresponda a que se transmitio S2 porque el area roja es mas grande que la naranja y coincide con la decision respecto del umbral

Como regla para sacar las probabilidades condicionales ¿De dónde saco los intervalos? Para el caso de P(z/s1) desde -∞ hasta el valor de Za(Ts) siempre que S1 sea positivo y sobre la función de distribución de probabilidad de P(z/S1) y para sacar intervalo de P(z/s2) debemos integrar desde ∞ hasta Za(Ts) sobre la función de distribución de probabilidad de P(z/S2).

Ahora cuando Z(Ts) no cae en el umbral, es fácil saber qué decidir,porque las probabilidades condicionales son distintas entonces elijo por la mayor. Aclaración: de la misma manera que se calcula P(Z/S1) y P(Z/S2) se calculan las *probabilidades de error*. Sin embargo, las probabilidades de error sólo sirve calcularlas en el umbral. ¿Por qué? porque la probabilidad de decidir sobre Z dado sobre un símbolo u otro es la misma.



…

En definitiva, ya tenemos el comportamiento y funcionamiento del *generador de decisión.* ¿Cómo hacemos que sea lo más eficiente posible? Para que este bloque sea eficiente es necesario que disminuya la probabilidad de error de bit.

Para ello debe minimizar la siguiente ecuación:

$$P_B = \sum_{i=1}^{2} P(e, s_i) = \sum_{i=1}^{2} P(e|s_i)\, P(s_i)$$

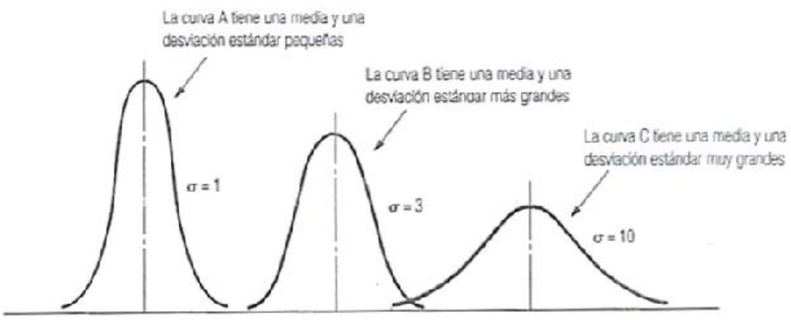
¿Que significa esta ecuación? significa que vamos a considerar las malas decisiones, es decir decidir por el otro símbolo sabiendo que se transmite S_i. Para el caso de las transmisiones binarias, tenemos dos hipótesis, entonces elegir mal es cuando se produce S1 elegir la hipótesis que afirma que se transmitió S2 y cuando se transmitió S2 elegir la hipótesis que afirma que se transmitió S1. Como son probabilidades independientes una de la otra las podemos sumar.

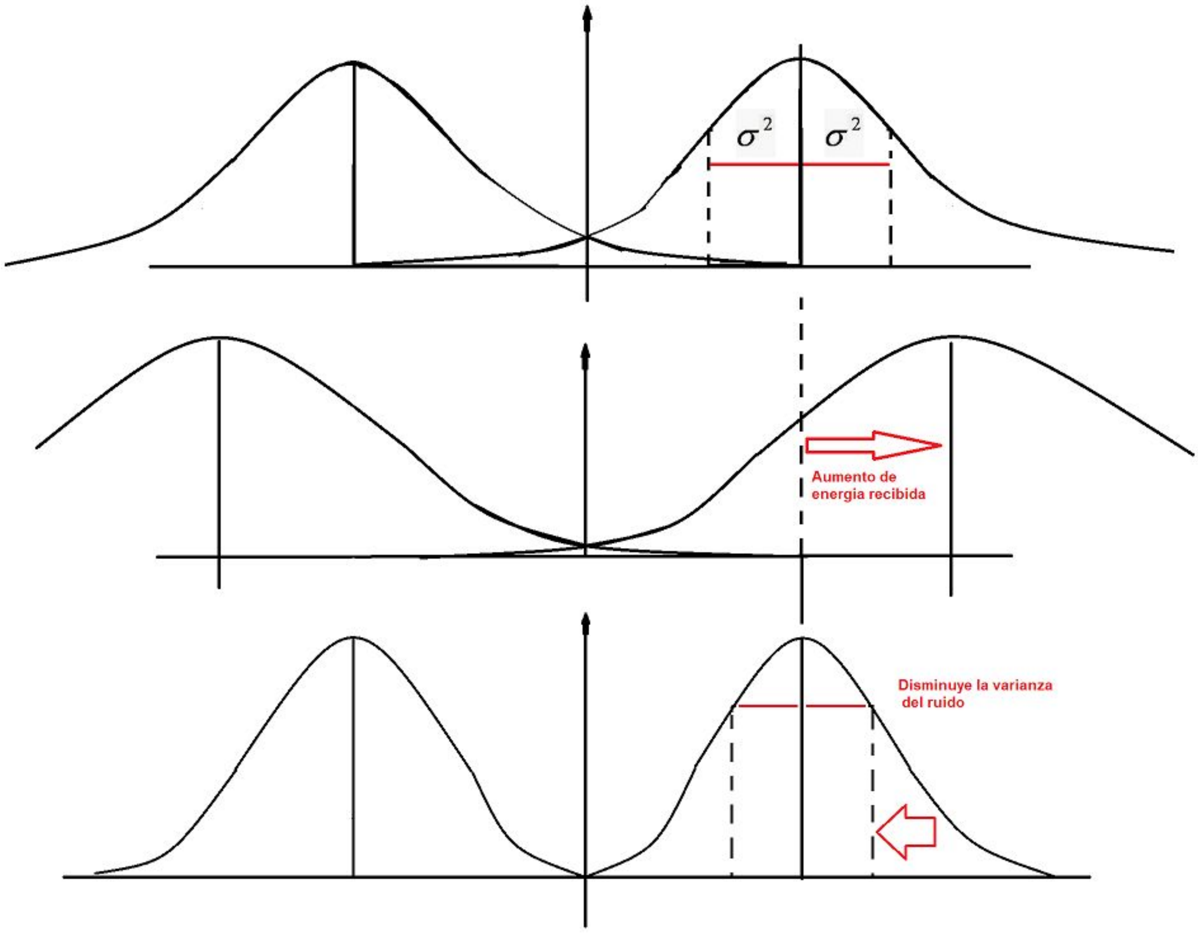
$$P_B = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2)$$

$$P(e|s_1) = P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z|s_1)\, dz$$

$$P(e|s_2) = P(H_1|s_2) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z|s_2)\, dz$$

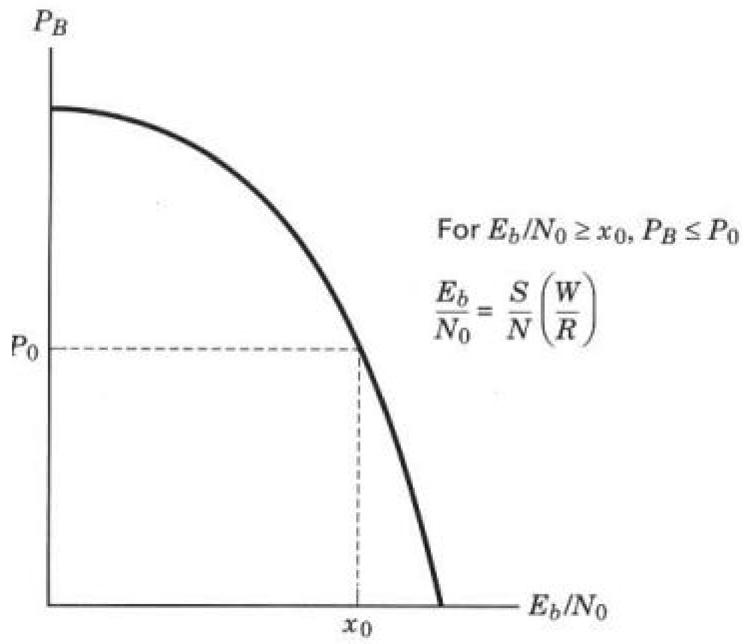
¿Cómo minimizamos la probabilidad de error? Para ello tenemos dos opciones. En primer lugar lograr que la energía de símbolo recibida sea más grande. De manera tal de poder distanciar las campanas y el área encerrada por ambas curvas será menor (Siempre considerando símbolos equiprobable) y en segundo lugar lograr disminuir la potencia de ruido de manera tal que, la campana gaussiana sea más angosta. Es decir, jugar con ambas opciones genera los siguientes efectos sobre las funciones de distribución de probabilidad. Pensándolo bien, lo que estamos diciendo es jugar con la *Energía del símbolo recibida y con la potencia de ruido*, *es decir con Eb/No*





Nosotros buscamos siempre que la media sea lo más grande posible y la varianza pequeña. Lo que indirectamente queremos decir es que Eb/No sea grande.

Para saber cómo se comporta el sistema, lo que hacemos es plantear diversas combinaciones de Eb/No jugando con las variables mencionadas anteriormente y para cada caso calcular PB.



La curva mostrada anteriormente nos dice que para todas las combinaciones de Energía de símbolo recibida respecto a potencia de ruido AWGN presente en la detección que sea constante generamos la misma probabilidad de error de bit. Es decir, estamos logrando caracterizar la performance del sistema en función de la relación Eb/No a la entrada del detector. Por lo tanto lo que buscamos a la entrada de la etapa de decisión es que Eb/No sea lo más grande posible.

Ahora ya podemos ir a buscar cual es el filtro en la entrada del receptor que permite obtener a su salida la mayor relación señal a ruido. ¿Cómo obtener la máxima relación señal a ruido? Si recordamos lo que ocurria en comunicaciones analogicas, lo que pensabamos era lo siguiente: Agrandamos el ancho de banda del filtro de recepción hasta el punto que el aporte de potencia correspondiente a señal útil sea menor que la potencia del ruido. De nada servía seguir aumentando el ancho de banda del filtro de recepción si cada vez que aumentaba dicho factor aumentaba mucho más la potencia del ruido que de la señal útil. Me empeoraba cada vez más S/N. Este criterio era así porque no conocíamos de antemano la señal transmitida y tampoco sus características espectrales, solo el ancho de banda que ocupaba o en qué rango de frecuencias estaba concentrada la potencia de la señal. Pero en comunicaciones digitales si conocemos de antemano los símbolos posibles a transmitir, entonces el criterio cambia. El filtro se comporta distinto. Se plantea que si viene Si lo deja pasar y si viene cualquier otra cosa, lo filtra. Excelente para maximizar Señal -Ruido.

De esta forma, es fácil pensar que necesitaremos N filtros, cada uno diseñado puramente y exclusivamente para cada waveform posible a transmitir. A estos filtros se los denomina *Filtro Acoplado.*

Filtro Acoplado

El filtro acoplado es un filtro lineal diseñado para proveer la máxima relación señal a ruido a su salida para una determinada forma de onda transmitida. De acuerdo al esquema desarrollado sabemos que en cada periodo de tiempo múltiplo de Ts se genera una muestra Z(Ts) que contiene una magnitud de voltaje correspondiente a la energía de la señal a_i y una componente de ruido AWGN dada por la varianza del mismo. De manera que la relación de potencia de señal instantánea a potencia promedio de ruido en el tiempo t=Ts, es:

$$Z(Ts) = a_i + n_o$$

$$\left(S/N \right)_{Ts} = \frac{ai^2}{\sigma_o^2}$$

Lo que debemos encontrar es la función de transferencia Ho(f) que maximice la relación anterior. Para ello podemos expresar la señal $a_i(t)$ a la salida del filtro en términos de la función de transferencia del filtro H(f) y la transformada de fourier de la señal de entrada.

Convolucion en el dominio del tiempo, producto de aplicar un filtro $h(t)$

lineal e invariante en el tiempo:

$$a_i(t) = h(t) * s(t)$$

Transformada de la expresion anterior:

$$a_i(f) = H(f) \cdot S(f)$$

Expresamos $a_i(t)$ *mediante su transformada inversa*:

$$a_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_i(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

$$a_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}\, df$$

Si a ambos lados del espectro la densidad espectral de potencia del ruido de entrada es $N_o/2 \; watts/hertz$ es decir es ruido blanco, al aplicarlo a un sistema lineal e invariante en el tiempo de banda limitada podemos aplicar la siguiente expresión, la cual es válida para procesos aleatorios.

$$G_y(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2$$

$$\sigma_o{}^2 = \frac{N_o}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

combinando ambas ecuaciones tenemos que:

$$a_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}\, df$$

$$\sigma_o{}^2 = \frac{N_o}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2} \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT}\, df\right|^2}{N_0/2\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df}$$

Para obtener el valor de H(f)=Ho(f) para el cual se logra alcanzar la máxima relación señal a ruido en la expresión (S/N)T debemos aplicar la **desigualdad de Schwrz.**

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)\, dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2\, dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2\, dx$$

La igualdad se sostiene sólo si f1(x)=kf*2(x) , es decir, que f1(x) debe ser una versión escalada y conjugada de f2(x). Si identificamos a H(f) con f1(x) y S(f)e^(j2pift) con f2(x) tenemos que :

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\, df$$

Sustituyendo con las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT}df\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT}df\right|^2}{N_0/2\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_T \leq \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Teniendo en cuenta cómo se obtiene la energía de la señal de entrada, se puede deducir:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \leq \frac{2}{N_0}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} \Rightarrow \max\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{2\boxed{E}}{N_0}$$

Recordemos que las expresiones anteriores fueron desarrolladas partiendo de la **desigualdad de Schwrz** y sólo eran válidas si una de las funciones era una versión escalada y conjugada de la otra. Por lo tanto, para H(f) deberemos asegurar que se cumpla

$$H(f) = H_0(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

Aplicando transformada de Fourier inversa, considerando s(t) como una señal de valor real:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{kS^*(f)e^{-j2\pi fT}\}$$

Llegando a la expresión final, en donde la respuesta al impulso de un filtro que produce la máxima relación señal ruido a la salida es la imagen espejo de la señal mensaje s(t), retrasada una duración de símbolo T, como se ve a continuación:

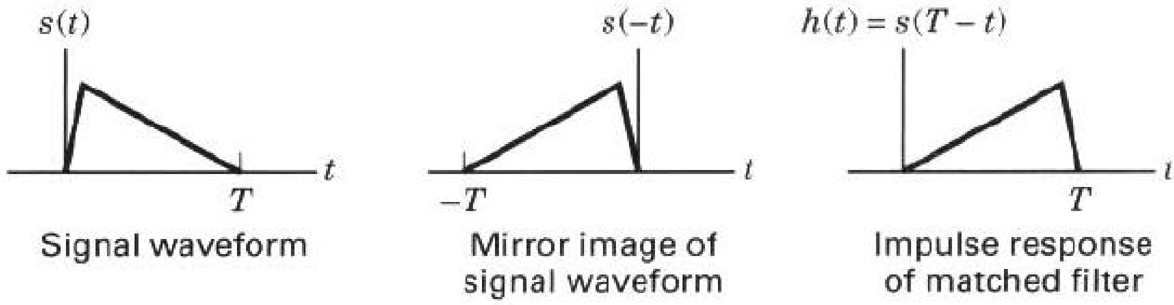
$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Note que el retardo de Ts segundos hace la respuesta del filtro causal o lo que es lo mismo decir que la respuesta al impulso es positiva entre $0 \leq t \leq Ts$. **Sin el retardo el filtro es irrealizable.**

Una vez que hemos demostrado qué expresión tiene el filtro acoplado deberíamos aplicar la señal recibida a dicho filtro y obtener la salida z(t). Esto implica realizar una operación de convolución en el dominio del tiempo como se muestra en la siguiente figura:

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

recordemos que h(t) era la versión espejada y desplazada de las waveform transmitidas. Entonces en esta operación de convolución cuando espejamos de nuevo h(t) para formar h(t- τ) nos queda nuevamente la forma de onda de la waveform. El proceso de espejar dos veces permite obtener en definitiva la señal original.



$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s[T-(t-\tau)]\,d\tau$$

Esta es la función Z(t) definida para todo valor de t. Sin embargo a nosotros nos interesa solo un valor particular de esta función. El valor de Z(t) en t=Ts.

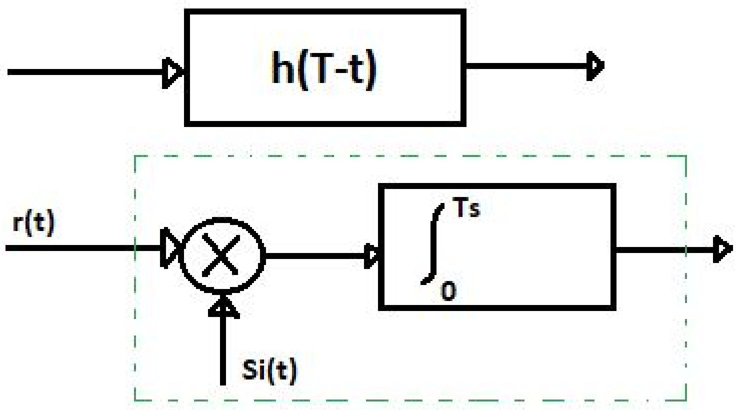
$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)\,d\tau$$

Hemos logrado demostrar que la integración de un producto entre una señal recibida r(t) con una réplica de la señal transmitida s(t) sobre un intervalo de tiempo de símbolo se conoce como *correlación cruzada* entre r(t) y s(t).

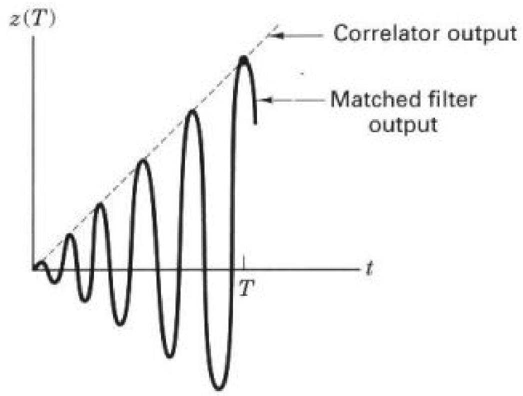
Esta característica solo es posible cuando se considera que h(t) es una versión espejada y desplazada de las waveform posibles a transmitir. Entonces lo que era una convolución que permitía obtener z(t) para todo t, se transforma en una correlación cruzada entre r(t) y s(t) para t=Ts. En definitiva, no nos interesa cómo evoluciona z(t)=h(t)*r(t), solo nos interesa su valor en t=Ts.

Como conclusión, uno podría plantear dos formas de construir un filtro acoplado. La primera es respetar a rajatabla la definición teórica y construir un filtro que sea la versión espejada y desplazada de cada una de las waveform posibles a transmitir.

La segunda forma de construir un filtro acoplado es aplicar un multiplicador y un integrador, ya que no nos interesa el proceso de convolución, nos interesa el valor puntual de z(t) cuando t=Ts y logramos demostrar anteriormente que dicho valor sólo dependía de una integral sobre el tiempo de símbolo del producto de r(t) y s(t).



Sin embargo, tanta matemática y tanta gilada… pero ¿por qué es importante el correlador?, ¿Qué significa? *El correlador es un comparador*, lo que hace es analizar el grado de parecido entre dos señales durante un determinado intervalo de tiempo. Lo que hace es desplazar una señal en función de la otra y analizarlas. Pero, no debemos olvidarnos que la correlación y la convolución son operaciones distintas. Entonces ¿Sirve lo que hemos planteado? la respuesta es que **SI.** En los instantes de tiempo t=Ts, la salida del correlador y la salida de la convolución son iguales, lo que significa que en los lugares importantes donde vamos a medir ambas operaciones son iguales. En el resto de instantes de tiempo la correlación no es matemáticamente exacta pero es insensible a problemas de sincronización, lo cual es bueno. Esto se puede observar en la comparación entre correlación y convolución.



Introducción al concepto de bases

Ya hemos detallado a el filtro acoplado, el cual nos será muy útil como etapa previa a la etapa de decisión pero por el momento como se mencionó anteriormente, debemos de destinar un correlador por cada waveform que se desea transmitir. Esto en un principio puede servirnos pero a medida que la cantidad de waveforms aumenta (porque cambia la forma de modular), en igual cantidad deberia de aumentar los correladores haciendo que los costos del sistemas se vean incrementados, los cual no resulta para nada eficiente.

Es por esta razón que se comienza a utilizar el concepto de *bases.* Pero ¿Qué son las bases? Las bases se definen como un conjunto de N de funciones linealmente independientes $\{\phi_i(t)\}$ que permiten representar a las waveform mediante una combinación lineal de las mismas. ¿Qué lo qué?

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a_{11}\psi_1(t) + a_{12}\psi_2(t) + \cdots + a_{1N}\psi_N(t) \\ s_2(t) &= a_{21}\psi_1(t) + a_{22}\psi_2(t) + \cdots + a_{2N}\psi_N(t) \\ &\vdots \\ s_M(t) &= a_{M1}\psi_1(t) + a_{M2}\psi_2(t) + \cdots + a_{MN}\psi_N(t) \end{aligned}$$

Ahora, es importante mencionar que las diferentes funciones bases, ya sea $\psi_1(t),\ \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ no pueden ser elegidas con cualquier criterio. Para que una función sea considerada base debe satisfacer la siguiente ecuación, la cual refleja el ***concepto de ortogonalidad***. Es decir, una función arbitraria podrá pertenecer a un conjunto N de funciones bases, si la misma es ortogonal con respecto a todo el resto de funciones del conjunto. ¿Y que significa que sea ortogonal ? Para ello primero debemos definir las condiciones que deben cumplir las funciones base, que es:

$$\int_0^T \psi_j(t)\psi_k(t)\,dt = K_j\delta_{jk} \qquad 0 \le t \le T \qquad j,k = 1,\ldots,N$$

donde el operador δjk en el lado derecho de la ecuación y se denomina *función delta Kronecker.* La misma tiene como característica valer distinto de cero únicamente para j=k.

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{for } j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Entonces que el espacio de la señal sea ortogonal significa que la constante K_j es 0 cuando se integra entre dos funciones bases diferentes. Esto significa que una función base no tiene absolutamente nada que ver con otra función base, entonces Kj que es el coeficiente de correlación cruzada da cero.

¿Qué significa este resultado desde el punto de vista vectorial?

Significa que cada función base se encuentra contenida en un plano totalmente perpendicular al resto. Entonces, si tenemos N=2 generamos un plano en dos dimensiones y si utilizamos N=3 generamos un espacio de tres dimensiones. Sin embargo, nuestro entendimiento espacial se limita a esta última situación, pero el concepto debe ser claro, si existen N bases ortogonales significa que hay un espacio de N dimensiones, donde cada una de las bases vive en un plano diferente y totalmente perpendicular al resto de los planos.

Si se diera el caso de que K_j =1 cuando se realiza la integral del producto de una base consigo misma, el espacio es llamado ortonormal (es simplemente una normalización).

Esta constante, al ser el resultado de la integral que asocia a las componentes de la señal $\psi j(t)$, si esta tuviera un cierto valor real de voltaje, se podría asociar a k_j con la energía de la componente en un T_s esta quedaría expresada de la siguiente manera:

$$E_j = \int_0^T \psi_j^2(t)\, dt = K_j$$

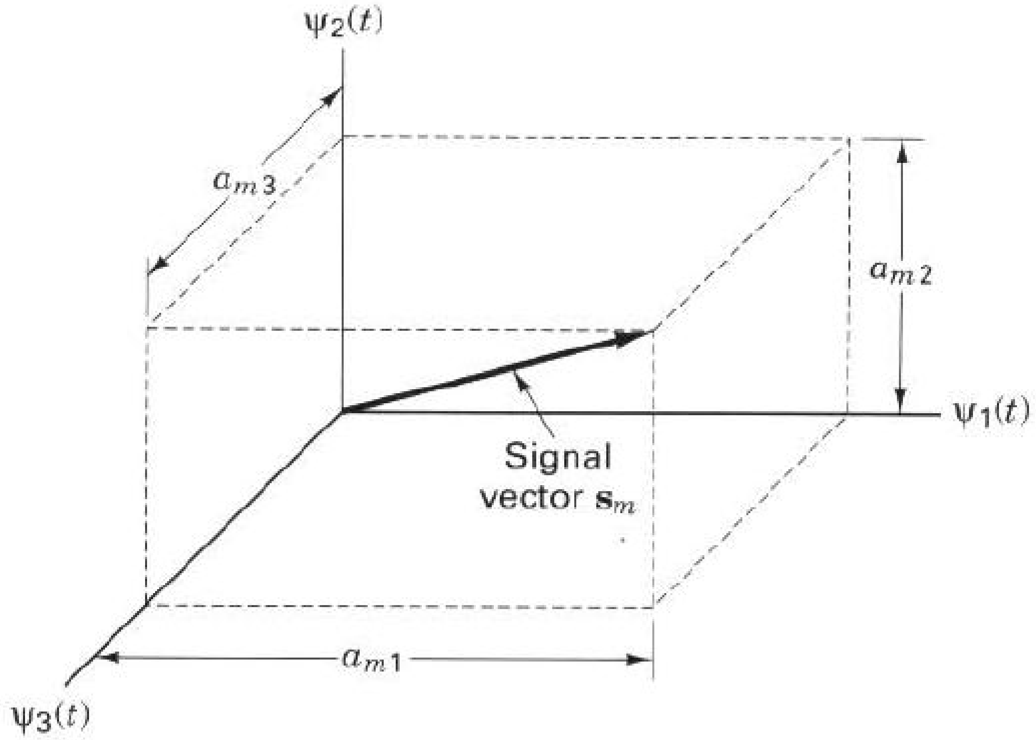
Una vez definida la ortogonalidad, podemos decir que cualquier conjunto finito arbitrario de formas de ondas $\{S_i(t)\}$ (i=1,..,M), el cual puede verse como un conjunto de vectores, donde cada miembro del conjunto es físicamente realizable y de duración Ts, una waveform, puede ser expresado como una combinación lineal de N formas de ondas ortogonales, quedando:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, \psi_j(t) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, M \\ N \leq M \end{array} \quad \text{En donde} \quad a_{ij} = \frac{1}{K_j} \int_0^T s_i(t)\psi_j(t)\, dt \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, M \\ j = 1, \dots, N \end{array} \quad 0 \leq t \leq T$$

Siendo a_{ij} el valor de la componente $\psi j(t)$ presente en la señal $s_i(t)$. Desde un punto de vista más coloquial significa “cuánto puedo decir de las señales si las miro desde las bases”. Los coeficientes que acompañan a las bases a_{ij} son la correlación entre la señal y la base.

Considerando un ejemplo, con N=3 y que $S_m = (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3})$ puede ser representado como un conjunto de vectores, su correspondiente forma de onda es:

$$s_m(t) = a_{m1}\psi_1(t) + a_{m2}\psi_2(t) + a_{m3}\psi_3(t)$$



La orientación entre los vectores de la señal describen la relación de la señal hacia otra (con respecto a fase o frecuencia), y la amplitud de cada vector en el conjunto $\{S_m\}$ es una medida de la energía de la señal transmitida durante una duración de símbolo T_s

¿Nos es útil la implementación del concepto de bases?

Todo este desarrollo sobre las bases surgió en un principio ya que estábamos concluyendo que cada demodulador, a la hora de la recepción iba tener que contar con N cantidad de correladores por las M waveform posibles a transmitirse, en donde N=M. Pero, ahora que se ha introducido el concepto de bases, podremos reducir la cantidad de correladores a una cantidad igual a la cantidad de bases que contemplan a las waveform a transmitir, por lo que a partir de ahora N < M, relación que es positiva para el armado de nuestro sistema demodulador por la reducción de costos que este concepto implica.

Sin embargo, debemos considerar si es posible mediante el concepto de bases maximizar la relación señal a ruido a la salida del demodulador y si es posible realizar la detección, ya que en este proceso hablábamos de Z(Ts) netamente relacionado con la energía de la señal en cuestión y el ruido presente a la salida del filtro.

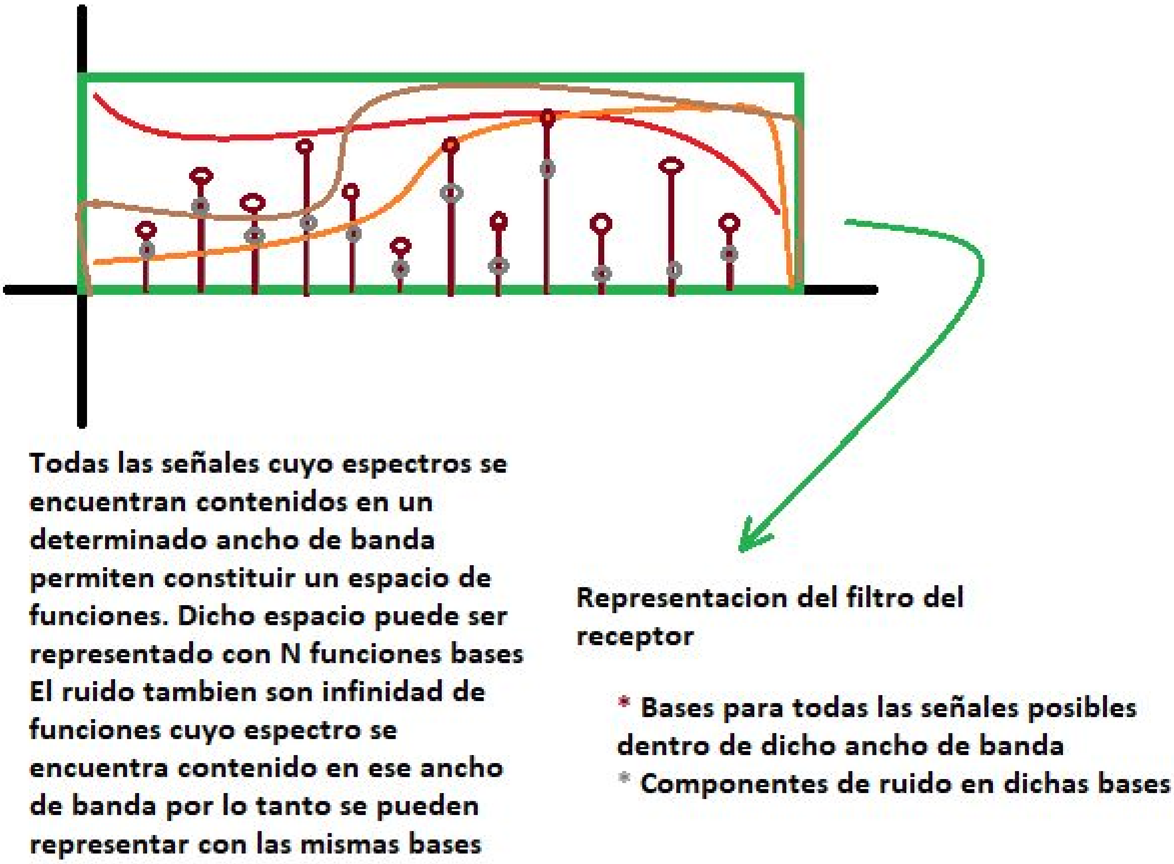
Entonces como primer punto, vamos a calcular la energía presente en una waveform $s_i(t)$ expresada mediante bases.

$$
\begin{aligned}
E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,dt &= \int_0^T \left[\sum_j a_{ij}\,\psi_j(t)\right]^2 dt \\
&= \int_0^T \sum_j a_{ij}\,\psi_j(t) \sum_k a_{ik}\psi_k(t)\,dt \\
&= \sum_j \sum_k a_{ij}\,a_{ik} \boxed{\int_0^T \psi_j(t)\psi_k(t)\,dt} \\
&= \sum_j \sum_k a_{ij}\,a_{ik} K_j \boxed{\delta_{jk}} \quad \longrightarrow \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{for } j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2 K_j \qquad i = 1, \ldots, M
\end{aligned}
$$

Siendo la última ecuación un caso especial del teorema de Parseval. Si se utiliza funciones ortonormales, lo cual significa que $K_j = 1$, la energía normalizada sobre un periodo de símbolo será:

$$
E_i = \int_0^T s_i^2(t)\,dt = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2
$$

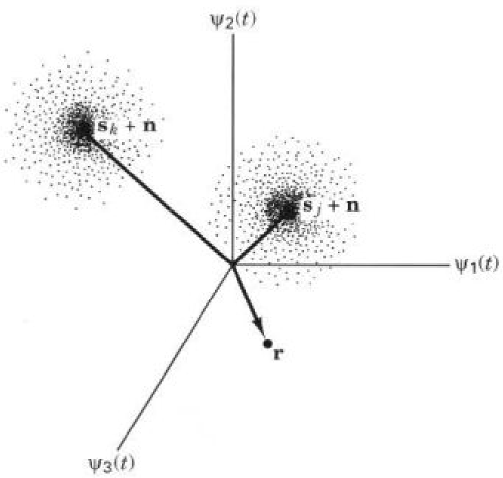
Todo muy lindo, tenemos la energía de la señal contenida en cada uno de los coeficientes de la bases pero como representamos al ruido mediante este concepto. La verdad es que cuando la señal pasa por el filtro de recepción, el ruido también. Entonces, cuando la señal se representa por un conjunto N de bases, el ruido tiene su representación con el mismo conjunto. Esto hace que el ruido modifique cada coeficiente de las funciones bases que representan a la señal.



$$S(t) = a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t) + a_3\psi_3(t)$$

$$N(t) = n_1\psi_1(t) + n_2\psi_2(t) + n_3\psi_3(t)$$

$$r(t) = S(t) + N(t) = \left(a_1 + n_1\right)\psi_1(t) + \left(a_2 + n_2\right)\psi_2(t) + \left(a_3 + n_3\right)\psi_3(t)$$



Debemos tener en cuenta que el ruido tiene la característica de ser aditivo y además con una distribución Gaussiana por lo que, más allá de que el ruido se adicione a nuestra señal hay que tener en cuenta que el valor a recibir será cercano a las S_i contempladas para la transmisión. Considerando estas características, si recibimos el vector **r**, tendremos que ver si se encuentra más cercano o a cual tiene menor distancia del vector S_i o S_k, el cual es el vector transmitido inicialmente. De esta manera podemos concluir en que en la demodulación contempla el concepto de distancia entre una forma de onda recibida y un conjunto de posibles formas de ondas transmitidas.

Optimización de la performance de error

Recordando las expresiones obtenidas para calcular la probabilidad de error de bit, habíamos interpretado que la manera de disminuir su valor era aumentando la diferencia de energía entre las waveform recibidas y disminuyendo lo más que se podía la potencia de ruido, que depende de la varianza. Esto llevaba a deducir una expresión característica para la probabilidad de error cuando los símbolos eran equiprobables (VOY A ABURRIR CON ESTO PERO ES LA BASE DEL CAPÍTULO)

$$P_B = \int_{u=(a_1-a_2)/2\sigma_0}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right)$$

donde Q(x) llamada función de error complementaria o función co-error, es la simbología usada comúnmente para expresar la probabilidad de error bajo la cola de la función de distribución de probabilidad Gaussiana.

Cuando x aumenta, la función Pb=Q(x) disminuye, por lo tanto para optimizar la performance de error debemos aumentar x lo mas que se pueda. Esto implica en otras palabras maximizar x. Para ello, planteamos la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2}$$

$$Z(Ts) = a_i + n$$

donde $(a_1 - a_2)$ es la diferencia entre las componentes de señal de Z(Ts) para cada una de las waveform. Recordemos que estos valores de voltaje estaban relacionados a las energías recibidas de las formas de ondas transmitidas. Cuando se aplica el cuadrado se está calculando la potencia instantánea de la diferencia.

Con esa idea en mente y recordando que se demostró para una waveform en particular que el filtro acoplado obtiene la máxima relación señal a ruido para (S/N)T=2Eb/No, podemos decir que para este caso se considera la diferencia de dos waveform en el filtro acoplado, de manera tal que Eb se transforma en Ed, es decir, energía de la diferencia.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0}$$

Donde la energía de la diferencia puede definirse como:

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 \, dt$$

En este caso se considera que el canal es ideal y no está atenuando la señal recibida, solo agrega ruido, pero los canales reales atenúan las waveform transmitidas entonces hay que considerar las componentes de señal recibida.

$$P_B = \sqrt{Q\left(\frac{(a1 - a2)}{2\sigma}\right)^2} = \frac{(a1 - a2)^2}{4\sigma^2} = Q\left(\sqrt{\frac{2Ed}{4No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{Ed}{2No}}\right)$$

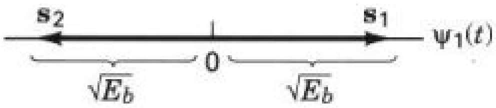
$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

¿Todo este bardo para que? Para decir que de la ecuación que partimos, la única manera de mejorar la performance de error es aplicar lo que ya mencionamos anteriormente, aumentar la diferencia entre a1 y a2 es decir la energía entre las waveform recibidas o disminuir la potencia de ruido. ¿Dónde está el chiste entonces? que descartamos la idea de transmitir potencia como tontos para que esto ocurra! Solo nos basta con elegir muy bien las waveform a transmitir para maximizar la energía de la diferencia. Es decir, hacer las waveform lo más diferentes posibles.

¿Qué herramienta aplicamos? *Correlación Cruzada entre waveform* y el concepto de que a mayor distancia entre vectores, referenciales a waveform, menor error a la hora de la detección. Esta herramienta nos describe el grado de similitud entre una waveform y otra. Lo que buscamos es que este coeficiente sea -1, describiendo que las señales utilizadas son entre ellas *Antipodales*. ¿Que significa que nos de “-1”? Significa que las waveform sobre que no tienen nada que ver una con la otra, son totalmente diferentes, ya que la distancia entre vectores es la máxima que se puede obtener. También nos puede dar “0”, en donde estaríamos haciendo referencia a señales *ortogonales*. Cuando esto ocurre significa que las waveform no tienen nada que ver una con la otra pero no es tan óptimo como el caso anterior, ya que la distancia entre vectores es menor. En definitiva $\rho = \cos(\theta)$ donde $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$

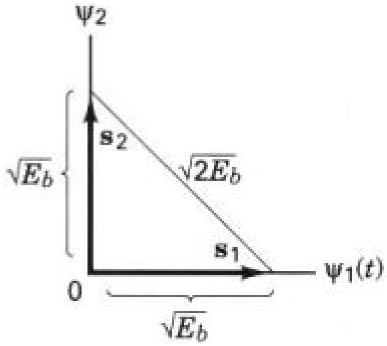
$$\rho = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(t)\, s_2(t)\, dt$$

Una descripción vectorial de las situaciones planteadas anteriormente es la siguiente:



Antipodales

IMPORTANTE:
--> Por cada base presente solo podemos tener un conjunto de waveform Antipodales. SIEMPRE
-->Para tener dos waveform ortogonales Necesitamos dos bases. SIEMPRE



Ortogonales

Con el conocimiento del coeficiente de correlación cruzada (ρ), veremos y vincularemos a la *energía de la diferencia* con la *energía de bit*, para ello, debemos recordar:

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2\, dt = \int_0^T s_1^2(t)\, dt + \int_0^T s_2^2(t)\, dt - 2 \int_0^T s_1(t)\, s_2(t)\, dt$$

Respecto a la ecuación anterior tenemos que los 2 primeros términos corresponden a la energía asociada con un bit

$$E_b = \int_0^T s_1^2(t)\, dt = \int_0^T s_2^2(t)\, dt$$

Por lo que podemos reemplazar E_b en E_d y llegar a:

$$E_d = \overset{E_b}{\int_0^T s_1^2(t)\,dt} + \overset{E_b}{\int_0^T s_2^2(t)\,dt} - \overset{2\rho E_b}{2\int_0^T s_1(t)\,s_2(t)\,dt} = 2E_b(1-\rho)$$

Esta relación nos da pie a asociar la P_B con la E_B mediante la E_d:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{Ed}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2Eb(1-\rho)}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{Eb(1-\rho)}{No}}\right)$$

Ahora que ya todo está vinculado, retomemos la designación de vectores que le dan valor a ρ. Dijimos que sí $\rho = -1$ significaba que son antipodales los vectores y por lo tanto están a 180° uno de otro, obteniendo:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)Eb}{No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(1-(-1))Eb}{No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2Eb}{No}}\right)$$

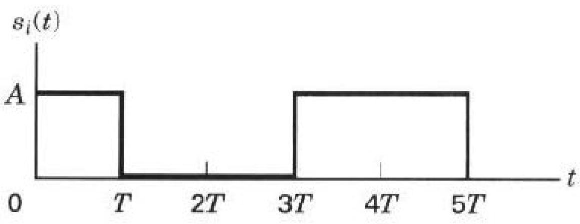
Otro de los casos mencionados fue cuando $\rho = 0$, lo cual significa que los vectores son ortogonales y por lo tanto están a 90° entre ellos. Obtenemos:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)Eb}{No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(1-(0))Eb}{No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{Eb}{No}}\right)$$

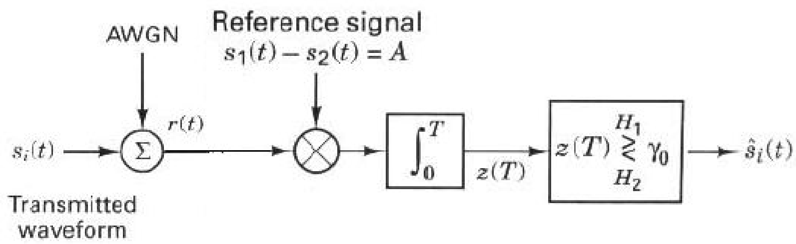
De manera genérica ya se han planteado las P_B para los casos *antipodal* y *ortogonal* pero ¿Cómo se representaría estos casos en sistemas que lo implementen?

Supongamos en un principio un sistema que transmite señales ortogonales de la siguiente manera y al siguiente sistema de recepción

$s_1(t) = A \quad 0 \le t \le T \quad$ for binary 1
$s_2(t) = 0 \quad 0 \le t \le T \quad$ for binary 0



(a)



Las señales a transmitir tendrán la característica de ser unipolares y que al realizar la correlación entre $S_1(t)$ y $S_2(t)$ esta nos dé cero en cada duración del símbolo.

En la etapa de recepción tendremos a $r(t) = S_1(t) + n(t)$, que luego de un tiempo Ts obtendremos:

$$a_1(T) = \mathrm{E}\{z(T)|s_1(t)\} = \mathrm{E}\left\{ \int_0^T A^2 + An(t)\,dt \right\} = A^2T$$

En donde $E\{z(T)|S_1(t)\}$ es el valor esperado de z(T), ya que se envió S_1 y la media del ruido $E\{n(t)\} = 0$. Si pensamos en el otro símbolo a transmitir con $S_2(t)=0$ y la media del ruido que es cero, tendremos $a_2(T)=0$. De esta manera los valores de voltaje para los símbolos recibidos, por lo cuales obtenemos el valor de umbral, será:

$$\gamma_0 = \frac{(a_1 + a_2)}{2} = \frac{((A^2T) + (0))}{2} = \frac{(A^2T)}{2}$$

Recordando el vínculo entre E_b y E_d podremos obtener el Performance de Error de Bit para señales ortogonales:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{Ed}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2Eb(1-\rho)}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2(A^2T)(1-0)}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{Eb}{No}}\right)$$

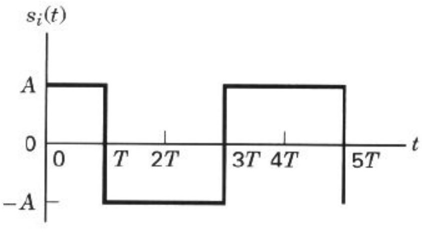
Por último, podemos destacar que las salida z(T) se puede representar como una señal de voltaje que es proporcional a la energía de la señal recibida.

¿Cómo es para un caso Antipodal?

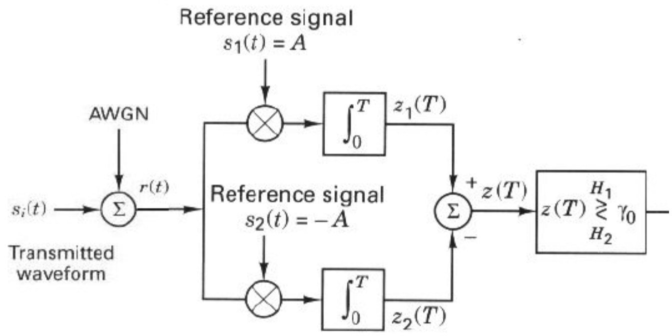
Ahora debemos plantear 2 señales de igual magnitud pero valor invertido, haciendo que $S_1(t) = - S_2(t)$. La diferencia para este tipo de señales es que necesitaremos 2 correladores, en el caso planteado anteriormente esto no era necesario ya que una de las señales tenia magnitud de transmisión igual a cero. Para el caso a tratar ahora, el primer correlador multiplica e integra la señal entrante con la señal prototipo $S_1(t)$, mientras que el segundo correlador hará igual tarea pero considerando $S_2(t)$.

$$s_1(t) = +A \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{for binary 1}$$

$$s_2(t) = -A \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{for binary 0}$$



(a)



Ahora que contamos con 2 correladores, la salida será Z(t)=Z_1(t)+Z_2(t), como son señales antipodales, con a_1 = -a_2 obtendremos $\gamma = 0$. Por lo que llegaremos a obtener el siguiente Performance de Error de Bit para señales antipodales:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{Ed}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2Eb(1-\rho)}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2(A^2T)(1-(-1))}{2No}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2Eb}{No}}\right)$$

Una vez planteados los ejemplos, podemos preguntarnos ¿Cómo podemos optimizar la construcción de un filtro acoplado? Esto se puede hacer mediante señales que estén representadas o generadas por funciones bases.

Para esto consideraremos a la constante K_j =1, por lo que para señales de pulso unipolar, obtendremos:

$$s_1(t) = a_{11}\psi_1(t) = A\sqrt{T} \times \left(\sqrt{\frac{1}{T}}\right) = A$$

$$s_2(t) = a_{21}\psi_1(t) = 0 \times \left(\sqrt{\frac{1}{T}}\right) = 0$$

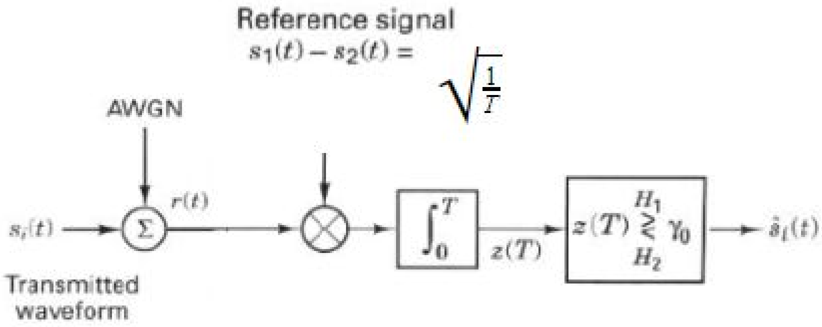
En donde los coeficientes son a_{11}= $A\sqrt{T}$ y a_{21}= 0.

Si planteamos el caso bipolar, tendremos:

$$s_1(t) = a_{11}\psi_1(t) = A\sqrt{T} \times \left(\sqrt{\frac{1}{T}}\right) = A$$

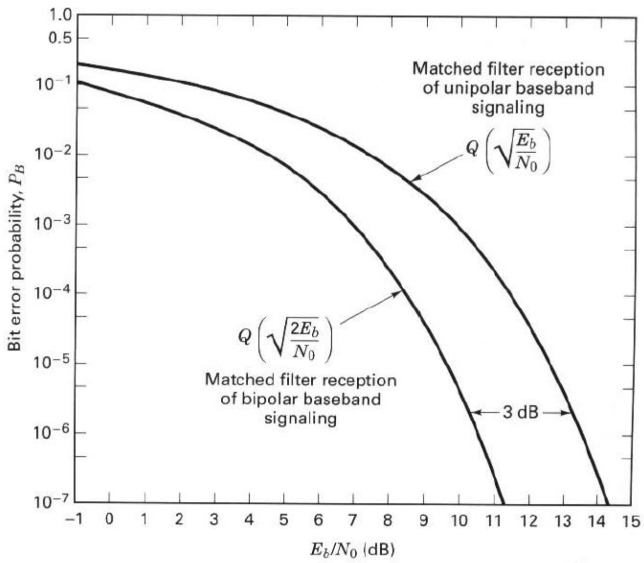
$$s_2(t) = a_{21}\psi_1(t) = -A\sqrt{T} \times \left(\sqrt{\frac{1}{T}}\right) = -A$$

En donde los coeficientes son a_{11}= $A\sqrt{T}$ y a_{21}= $-A\sqrt{T}$. Para este caso pero ahora considerando el siguiente correlador, véase el detalle que usaremos un único correlador pero con función base $\psi 1 = \sqrt{\frac{1}{T}}$, el sistema es:



Si se envía S_1(t)= A, obtendremos como valor de voltaje a_1(t)=E{z(T)/s_1(t)}=E{ $\int_0^T \frac{A}{\sqrt{T}} + \frac{n(t)}{\sqrt{T}} dt$}=A $\sqrt{T}$ esto se debe que la media del ruido E{n(t)} = 0 y siendo señales antipodales, Eb= A^2T, esto nos permite obtener a_1(T)= $\sqrt{Eb}$. Similarmente, si lo que se envía es S_2(t), tendremos a_2(T)=- $\sqrt{Eb}$. Por lo que la magnitud esperable de Z(T) es $\sqrt{Eb}$ el cual tiene unidades de volts normalizados proporcionales a la energía recibida.

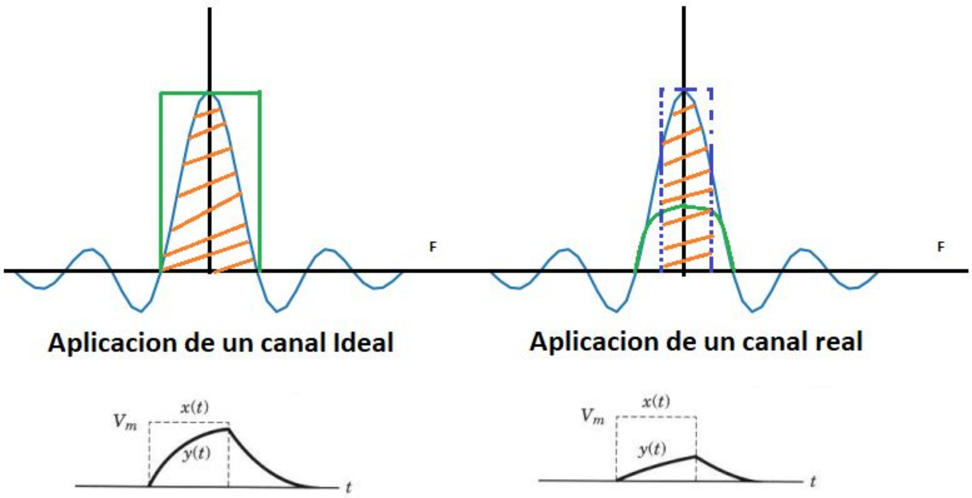
Con este análisis de señales bipolares podemos observar la siguiente gráfica de P_B con respecto a E_B/N_o. La cual dará detalles entre elegir por señales unipolares o bipolares, en donde observaremos que las señales del tipo bipolar tienen menor Probabilidad de error de bit para un cierto valor de Energía de bit con respecto al ruido determinado, habiendo una diferencia de 3dB entre ambas curvas, lo cual significa la mitad de potencia requerida, factor que repercute directamente sobre las exigencias de nuestros sistemas a sus fuentes de alimentación o el consumo que tendrán según el tipo de señales que se utilice y las performances que se quieran alcanzar.



Pulsos Formadores de Onda Nyquist y Coseno alzado

Recordando la introducción al tema de demodulación, nombramos cuáles eran las razones de la degradación de la performance de error. Ruido e Interferencia intersimbólica (ISI). En apartados anteriores consideramos sólo el efecto del ruido con la presencia de un canal ideal (minimiza el efecto del ISI).

Haciendo memoria de cuando hablábamos de duobinario en modulación digital ¿Por qué teníamos interferencia intersimbólica? *Producto del filtrado presente en todo el sistema de comunicación que no nos permite tener todo el ancho de banda necesario para representar exactamente las waveform en el dominio de la frecuencia*. Cuando utilizabamos modulación PCM con pulso formador de onda cuadrado necesitábamos un ancho de banda infinito para no generar absolutamente nada de ISI, lo cual era prácticamente imposible, entonces en el mejor de los casos si considerábamos un canal ideal de ancho de banda de Rb generábamos poquito ISI. Pero si el canal era real, el ISI presente perjudicaba muchisimo mas, porque dejaba pasar menos componentes en frecuencia. No nos olvidemos que en presencia de canales reales debemos trabajar con filtros ideales inscriptos dentro de los mismos, es decir, aquellas zonas en frecuencia del filtro real que se aproximan al ideal (Amplitud relativamente constante y Fase relativamente lineal).

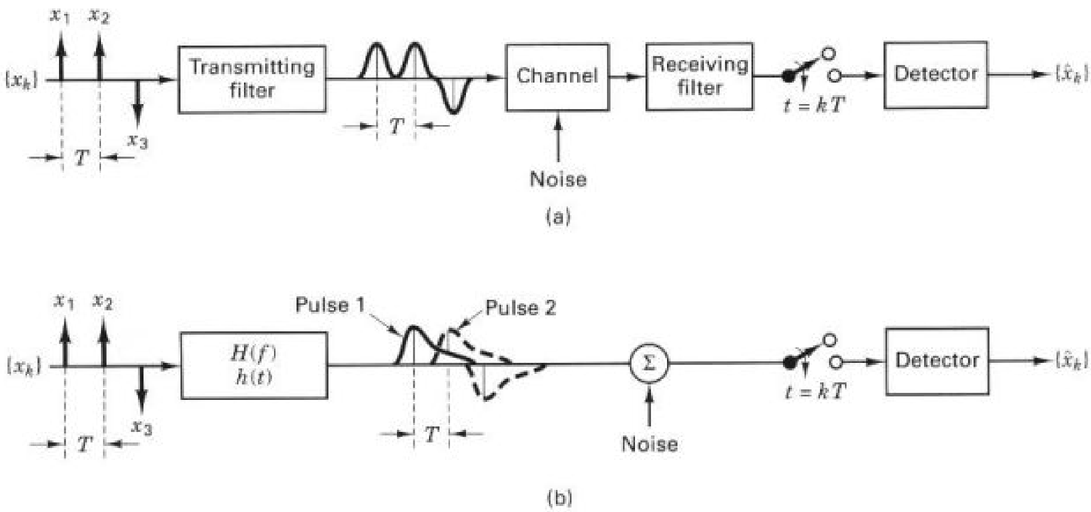


Si no trabajamos en dicha zona nos obligamos a que el receptor tenga que compensar muchísimo las distorsiones introducidas por el filtro del transmisor y el canal. A este filtro se lo conoce como *Filtro ecualizador.*

Sin embargo, uno podría preguntarse..¿Si trabajo con el filtro ideal inscripto, no tengo que compensar distorsiones? Siempre tenes que compensar distorsiones pero no tantas como si estuvieras trabajando con todas las frecuencias del filtro real. Te compras un problema pero mucho menor.

La siguiente imagen muestra un modelo conveniente para el sistema, agrupando el efecto de todos los filtros en un solo sistema equivalente con la siguiente función de transferencia

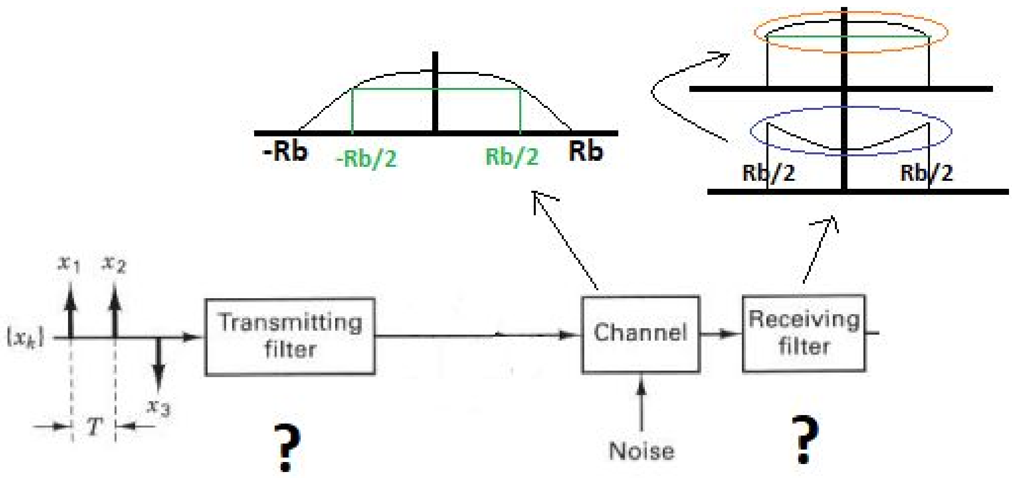
$$H(f) = H_t(f)\, H_c(f)\, H_r(f)$$



Las características de H(f) representan la composición de la función de transferencia del sistema debido a todos los filtros en las varias localizaciones a lo largo de la cadena transmisor/canal/receptor.

En definitiva, el filtro que caracteriza al transmisor Ht(f) es el pulso formador de onda utilizado por la modulación digital. El filtro Hc(f) es la respuesta en frecuencia del canal de transmisión y Hr(f) es el filtro de recepción/ecualización.

¿Qué estamos buscando ahora? Estamos buscando obtener las formas de Ht(f) y Hr(f) en presencia de un canal real que minimicen el efecto del ISI.



Nyquist investigó el problema de especificar la forma del pulso recibido para que no se produzca ISI en el detector. ¿Qué significa no ISI en el detector? Significa que en los instantes de tiempo múltiplos de Ts solo se haga presente una única forma de onda transmitida.

Él demostró que el ancho de banda mínimo del sistema teórico necesario para lograr detectar Rs símbolos/seg sin ISI es Rs/2 Hertz. **Esto ocurre cuando la función de transferencia del sistema H(f) es rectangular.**

Como se puede apreciar en la figura, cuando la respuesta del sistema es un filtro ideal de ancho de banda 1/2T (*Filtro ideal de Nyquist*) su respuesta al impulso, que resulta ser la transformada inversa de Fourier, es h(t)=sinc(t/T).

Podemos observar cómo eliminamos el ISI presente en la forma de onda recibida. Pero ¿Cómo eliminas ISI con un pulso recibido de longitud infinita?¿No tenes mega ISI? Yo pensé lo mismo que vos, pero Nyquist no se comía los mocos, lo que planteó el vivo este es que si bien hay interferencia intersimbólica todo el tiempo en las formas de onda recibidas, justo en los instantes de tiempo correspondientes a múltiplos de Ts no existe solapamiento alguno. Todas las formas de ondas en múltiplos de Ts valen cero, menos la waveform enviada en dicho instante de tiempo. Entonces, si garantizamos sincronización perfecta no existe ISI entre muestra y muestra.

¿Que hizo Nyquist de nuevo? Una versión medio rara del teorema del muestreo. Es decir, si queres que entre muestra y muestra en múltiplos de Ts no exista solapamiento o “Aliasing” debes tener una señal de banda limitada a Rs/2. *Él fijó un límite teórico para la reducción del ancho de banda. ¿Por qué? Porque si ocupamos menos ancho de banda que el mínimo de Nyquist lo que ocurre es que los pulsos podrían expandirse aún más en el tiempo llegando a incrementar el ISI.*

En función a lo propuesto por Nyquist, existe una clase general de filtrado y formas de pulso del sistema de comunicación compuesto que satisfacen la condición de cero ISI en los puntos de muestreo.

¿Cómo se construyen?

Los filtros de Nyquist se construyen pensando en realizar una convolución en el dominio de la frecuencia entre un filtro ideal rectangular con cualquier función par en la frecuencia o lo que es lo mismo decir, que en el dominio del tiempo se realiza una multiplicación entre una sinc(t/Ts) y otra función en el tiempo. **Con dicho criterio queda más que claro que existen un montón de filtros de Nyquist.**

Sin embargo, existe un filtro de Nyquist que se destaca sobre el resto. Se conoce como *Filtro Coseno alzado*, el cual es una función de transferencia del sistema compuesto, basado en el Pulso de Nyquist ideal pero con un factor de roll-off controlable.

¿Por qué surge como solución?

En primer lugar, el *pulso ideal de Nyquist* no es una característica que el sistema pueda asumir porque no es realizable, es decir, no es causal. Entonces solo pueden ser realizados en forma aproximada.En segundo lugar, el filtro tiene una respuesta al impulso de duración infinita donde cada pulso se extiende dentro de muchos otros pulsos correspondientes a la secuencia de mensajes digitales enviados. Respuestas de larga duración exhiben colas de grandes magnitudes cerca del lóbulo principal. Por lo tanto, si existe errores de sincronización, la cantidad de ISI introducido por símbolos adyacentes es muy grande. Solo se soluciona el problema del ISI si hay sincronización perfecta.

Es por esto mismo que surge como solución el filtro coseno alzado. Este filtro es una función de transferencia del sistema de comunicación compuesto H(F) perteneciente a la clase de Nyquist (Cero ISI en los tiempos de muestreo) que presenta en las cercanías del lóbulo principal colas de menor magnitud por lo tanto hacen al sistema más robusto frente a errores de sincronización.

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{for } |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\dfrac{|f| + W - 2W_0}{W - W_0}\right) & \text{for } 2W_0 - W < |f| < W \\ 0 & \text{for } |f| > W \end{cases}$$

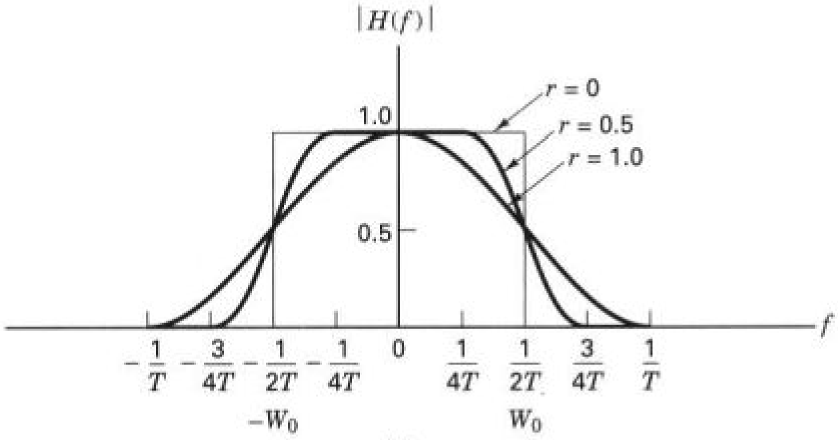
$$h(t) = 2W_0(\operatorname{sinc} 2W_0 t)\frac{\cos[2\pi(W - W_0)t]}{1 - [4(W - W_0)t]^2}$$

Donde W es el ancho de banda absoluto y Wo= 1/2T representa el mínimo ancho de banda de Nyquist para el espectro rectangular. La diferencia W-Wo indica el ancho de banda en exceso, lo cual significa el ancho de banda adicional basado en el mínimo de nyquist.

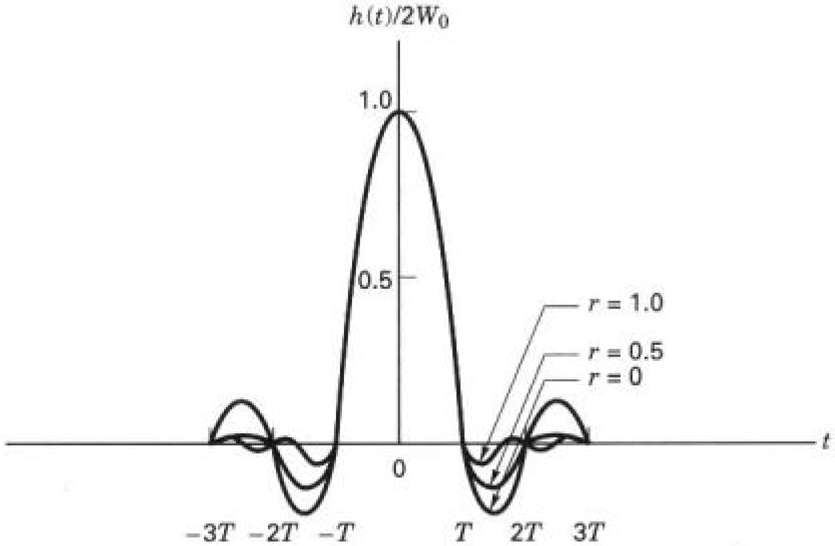
El factor de Roll-off es definido como una fracción entre el exceso de ancho de banda y el ancho de banda mínimo de nyquist $r = \left(W - W_o\right)/W_o$. Los Valores de Roll- off están entre $0 \leq r \leq 1$ y mientras más cercanos a 1 sean, significan que se va a utilizar mayor ancho de banda para una determinada tasa pero se va a lograr disminuir las colas de la respuesta al impulso para no generar interferencia intersimbólica por errores de sincronización.

Se demuestra entonces que el ancho de banda del sistema depende de el factor de Roll-Off. Si r=0, estamos en el caso del filtro ideal de Nyquist y el ancho de banda en Hertz para transmitir Rs sin ISI es Rs/2. Cuando r=1 el ancho de banda necesario del sistema para transmitir Rs sin ISI es Rs. En definitiva:

$$W = \frac{1}{2}(1 + r)\, R_s$$

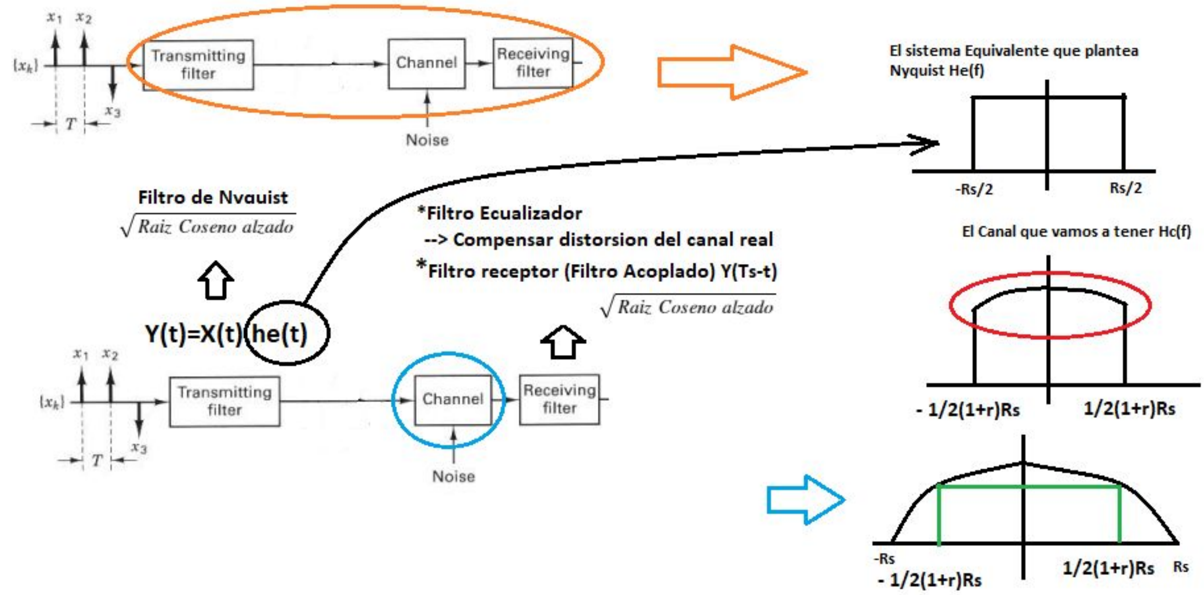


(a)

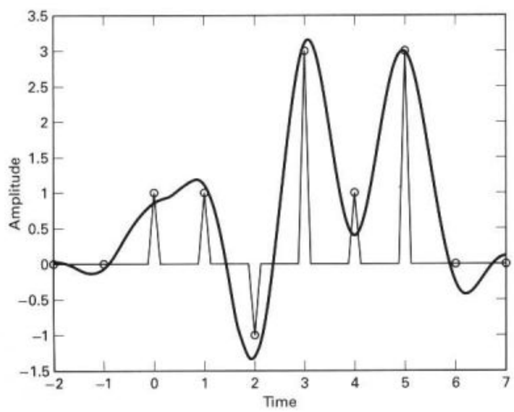


Es importante mencionar que cuando r>0 el ancho de banda ocupado por nuestro sistema de transmisión deja de ser la mitad de la tasa de transmisión Rs/2 por lo que se rompe el teorema del muestreo (Aliasing). No podremos reconstruir la señal que se transmitió por el canal pero ¿Qué tiene? Eso no nos interesa. Lo único que nos interesa es que en múltiplos de Ts, las muestras correspondientes a las formas de ondas transmitidas no se solapen. El filtro coseno alzado garantiza dicha condición por lo tanto podemos detectar señales transmitidas sin ISI.

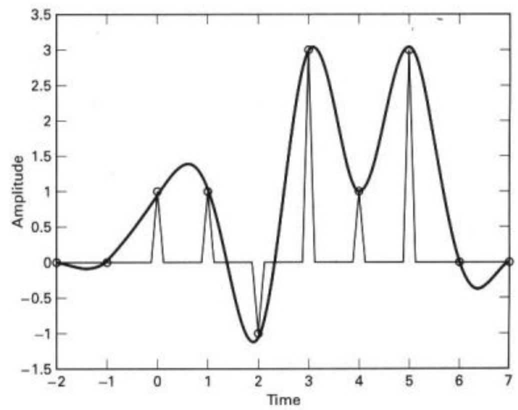
Este filtro al igual que el filtro ideal de Nyquist no es una característica que el sistema pueda asumir, porque es de duración infinita y no causal. Sin embargo puede ser aproximado por dos filtros realizables. Uno en el transmisor y otro en el receptor denominados *Filtros Raíz de coseno alzado*.



Cuando se aplica como pulso formador de onda un filtro de Raíz de coseno alzado ocurre que debemos ecualizar el canal real en la zona donde estamos trabajando, esto significa que si bien con el Roll-off más grande tenemos menos problemas de ISI por falta de sincronismo, complicamos el filtro ecualizador. Además, la manera de implementar filtro coseno alzado es mediante dos filtros raíz coseno alzado, el primero introduce un determinado ISI pero al aplicar el mismo filtro dentro del Filtro receptor (Filtro acoplado) dicha interferencia intersimbólica desaparece. La siguiente imagen muestra la transmisión y recepción de 6 mensajes digitales de una modulacion PAM 4-ary. Los símbolos a transmitir son (+1,+1,-1,+3,+1,+3)



Salida del Modulador

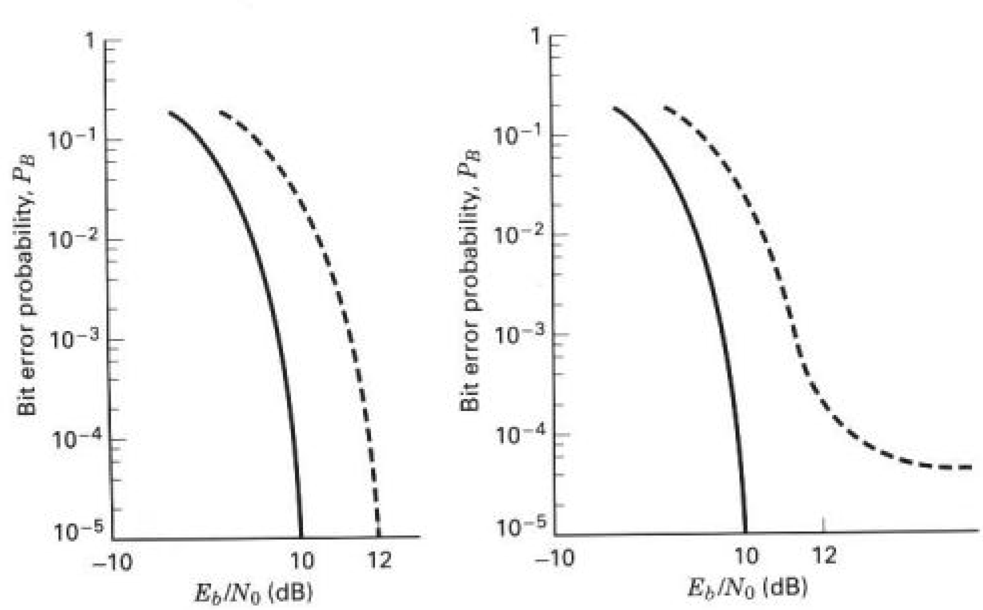


Salida del Filtro Acoplado

Por último, ¿Por qué es necesario solucionar la Interferencia Intersimbólica?

Como venimos detallando a lo largo del capítulo, los efectos de la degradación de la performance del error en las comunicaciones digitales pueden ser separadas en dos categorías. La primera se refiere a la degradación en la potencia de la señal recibida o incremento de la potencia de ruido interferente, produciendo una disminución en la relación señal a ruido o Eb/No. El segundo tipo es causado por la interferencia intersimbólica, producto de distorsiones en el dominio de la frecuencia y la presencia de un ancho de banda limitado.

¿Cómo resolvemos estos problemas?



Cuando se trata precisamente de ruido estamos en presencia de la figura de la izquierda. Esta figura muestra que de la curva teórica dibujada con trazo continuo cuando implementamos el sistema de comunicación se traslada hacia la derecha, lo cual significa que la performance del sistema empeoró, ¿Modelamos mal el ruido? Quizás. Sin embargo, existen soluciones a este tipo de problema. Pero en la figura de la derecha, con ISI, estamos en serios problemas, ¿Por que? porque la curva teórica en trazo continuo cuando se desarrolla y se pone en práctica el sistema no solo presenta un desplazamiento hacia la derecha sino que la curva se modifica. Esta modificación muestra que ante cualquier aumento de Eb/No de cualquier forma nunca podremos lograr mejorar la probabilidad de error del sistema. Esto nos lleva netamente a hablar de ecualización.

Caracterización del canal

Muchos canales de comunicaciones pueden ser caracterizados como filtros lineales limitados en banda con una respuesta al impulso $h_c(t)$ y una respuesta al impulso como la que se mostrará a continuación, siendo $|H_c(f)|$ la respuesta en amplitud del canal y $\theta c(f))$ es la respuesta en fase del canal.

$$H_c(f) = |H_c(f)|e^{j\theta_c(f)}$$

Si dejamos de considerar al canal ideal, puede darse que $|H_c(f)|$ no sea constante con W y si $\theta c(f)$ no es una función lineal de la frecuencia, con W, esto genera distorsión en amplitud y en fase, respectivamente. Para un caso particular, como puede ser una secuencia de pulsos transmitidos, estas distorsiones se manifiestan como dispersión o “smearing”, conocido como ISI y es uno de los mayores obstáculos para realizar transmisiones de datos a alta velocidad en canales de banda limitada. Y ¿Cómo lo solucionamos? Es acá en donde entra el concepto de *ecualización*, el cual es un proceso de la señal o técnica de filtrado que es designada para eliminar o reducir el ISI.

A la hora de implementar ecualización, podemos considerar 2 categorías, siendo una de estas la conocida como MLSE (Estimación de la secuencia con máxima probabilidad) y sino, *ecualización por filtros*, en la cual centraremos nuestra descripción. Antes, recordemos de qué trata MLSE, esta categoría vincula las dimensiones de $h_c(t)$ y entonces provee recursos para ajustar el receptor al medio de transmisión permitiendo hacer buenas estimaciones de pulsos distorsionados pero sin reformar o compensar las muestras distorsionadas, sino que aplica como técnica ajustarse a sí mismo en tal forma que pueda tratar mejor las muestras deformadas.

Ahora, centrándonos en la *ecualización con filtros* en donde si se usan filtros para compensar los pulsos deformados, el detector es presentado con una secuencia de muestras demoduladas que el ecualizador modificará o limpiará de ISI.

Los filtros pueden ser descriptos como si ellos fueran dispositivos lineales que contienen sólo elementos con realimentación forward, como el caso de *ecualizadores transversales* o como no lineales y que contienen elementos de realimentación forward y back como es con los *ecualizadores de decisión feedback*. También se los puede clasificar de acuerdo a la naturaleza automática de sus operaciones, pudiendo ser preset o adaptive, acá surge otro caso el *ecualizador preset y adaptive*. También se los agrupa por si la resolución del filtro es de a una muestra por símbolo (symbol spaced) o si proporcionan múltiples muestras por símbolo (fractionally spaced).

Para poder empezar a trabajar y considerar los filtros ecualizadores en nuestro sistema debemos primero hacer unas modificaciones, los cuales den visibilidad a la función de transferencia de nuestros ecualizadores. Para ello modificaremos la expresión de función de transferencia total y consideraremos, además, que pertenece a un filtro coseno alzado:

$$H(f) = H_t(f)\, H_c(f)\, H_r(f)$$

$$H_{RC}(f) = H_t(f)\, H_c(f)\, H_r(f)\, H_e(f)$$

Todo muy lindo que H por acá y H por allá, pero en la práctica ¿Quién sabe bien pero bien cómo es la función de transferencia del canal $H_c(f)$? Decime vos, con Sklar y la banda, nos la arreglamos de otra manera y la cual es jugar con las H, manso juego. Consiste en que los filtros transmisor y receptor se eligen para que estén acoplados, utilizando raiz cuadrada de coseno alzado en cada una y quedando:

$$H_{RC}(f) = H_t(f)\, H_r(f)$$

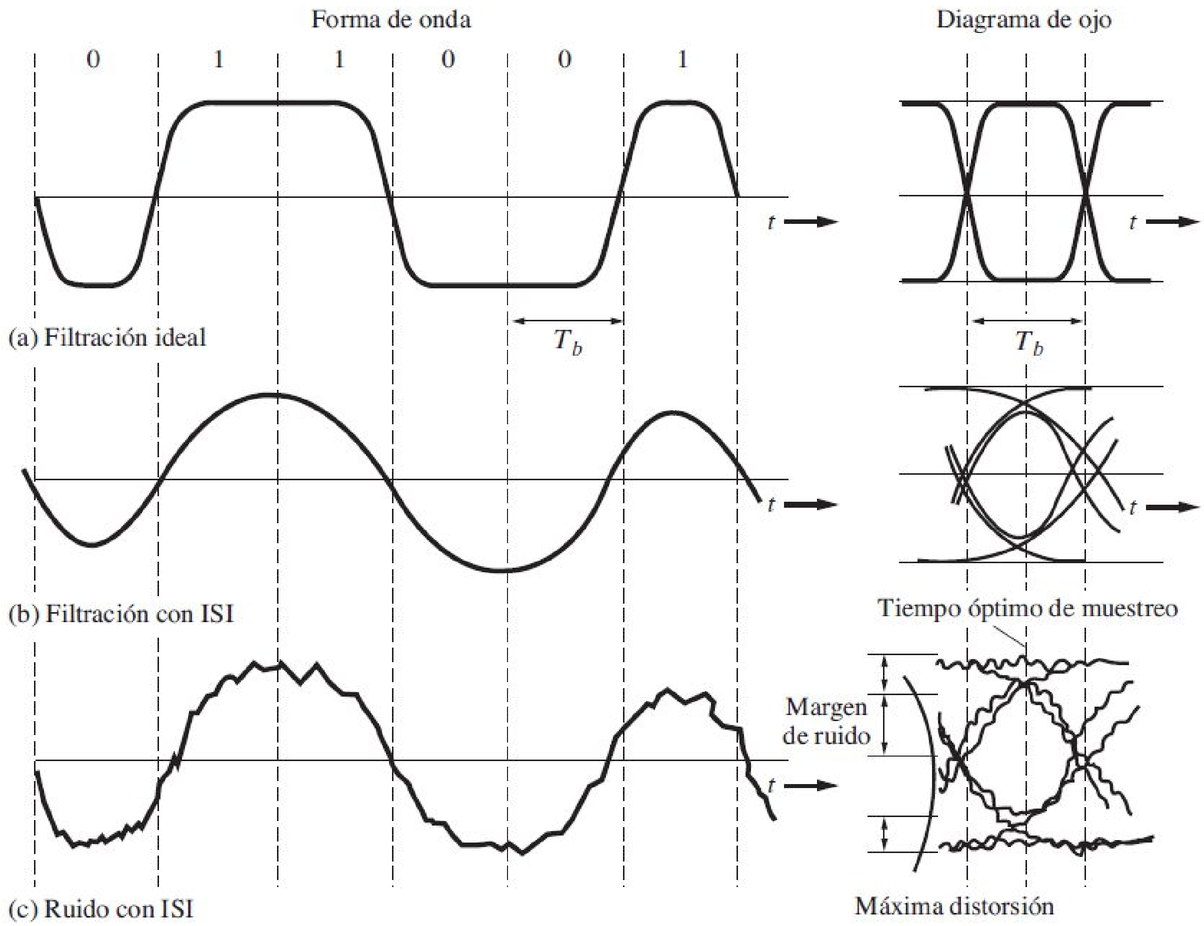
Y para que esto se pueda hacer, necesitamos:

$$H_e(f) = \frac{1}{H_c(f)} = \frac{1}{|H_c(f)|}\, e^{-j\theta_c(f)}$$

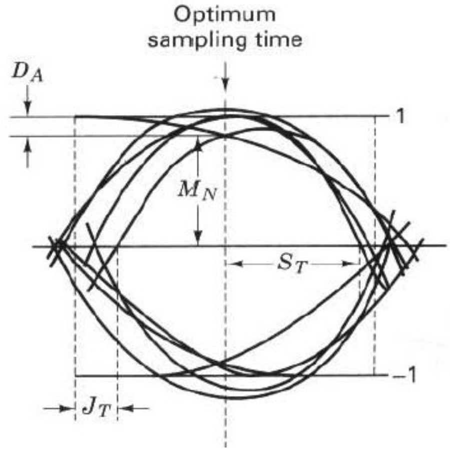
Para que después estos dos se cancelen vistes.

Hay casos particulares en que la función de transferencia del sistema completo, manifiesta ISI pero esto se lo hace a propósito y con fines de mejorar la eficiencia de ancho de banda, comparado con el uso de un filtro coseno alzado. Cuando esto se hace, la función del filtro de ecualización debe compensar no solo el ISI del canal, sino que también el de los filtros del transmisor y receptor.

Y así de la nada, ¿Hay algún método para ver cómo se está comportando el canal con el ISI? La respuesta es que Y SI, hay un método denominado *Patrón de ojo o Diagrama de Ojo*, que permite ver formas, desfases, niveles de ruido, potencias de las señales y todas esas cuestiones que afectan o aportan al ISI. Este patrón se puede observar mediante la utilización de un osciloscopio, en donde se podrían plantear los siguientes 3 casos:



Algunas de los efectos que podremos es ver si hay mucho ruido o ISI, el ojo tenderá a cerrarse, lo cual producirá errores de bit a la salida del receptor. Es por esto que el Diagrama de Ojo es una excelente forma de determinar la calidad del código de línea recibido y de la habilidad del receptor para combatir errores de bit. Los datos que nos dará la figura que se conforma son:



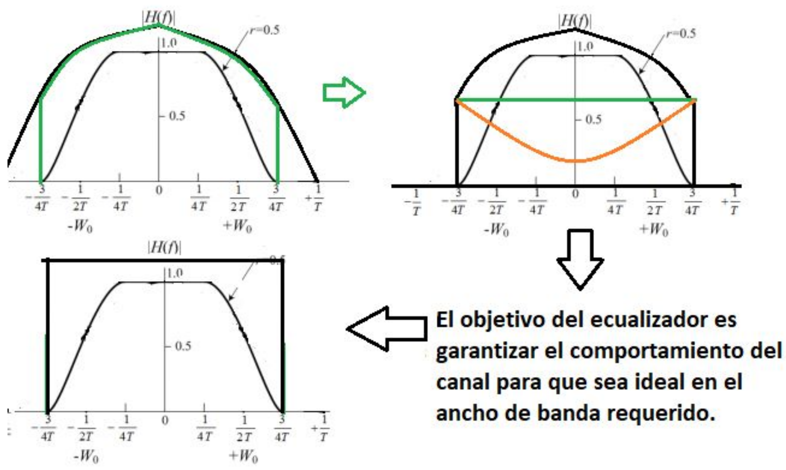
S_T hace referencia al *error de sensibilidad o error de sincronización*, este detalla la variación horizontal que puede haber en el muestreo, siendo el punto óptimo o de menor error el lugar en donde la apertura vertical es mayor. Otro de los parámetros es J_T (Timing Jitter) que describe la diferencia de tiempo de los cruces por cero entre las distintas señales recibidas. Por último tenemos M_N que es el *margen de ruido o de error* que está dado por la altura de la apertura del ojo, ya que D_A nos describe la distorsión causada por el ISI.

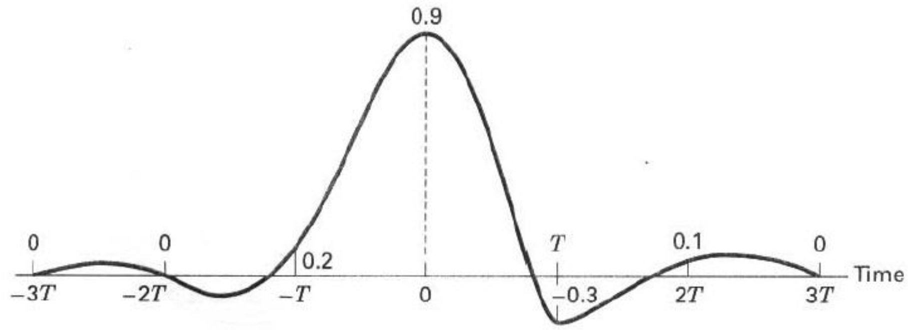
Bueno, ahora volvamos a los filtros y a los tipos de ecualizadores.

¿Qué tipo de filtros ecualizadores puede haber? Como ya se dijo antes, vamos a describir 2 y esos son: *Ecualizadores Transversales y Ecualizador de Decisión Feedback.* Dentro del primer grupo (Ecualizadores Transversales) vamos a describir 2 tipos de solución que son *Solución Forzada a cero*, que es del tipo determinístico y *Solución de mínimo MSE (Error Cuadrático Medio)* del tipo estadístico.

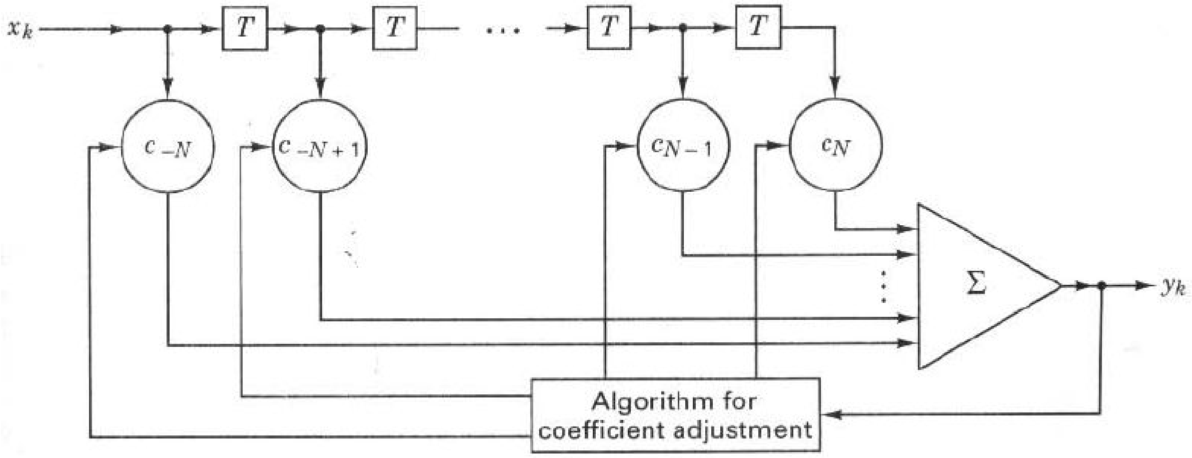
Vamos a describir los *Ecualizadores Transversales* pero para ello tenemos que interpretar el canal sobre el cual vamos a trabajar, es por esto, que enviaremos un pulso muy angosto, similar a un impulso, el cual nos permita interpretar la respuesta al impulso del canal. Llevándolo a la práctica, una señal de pseudo ruido (PN) es preferida en vez de una señal de pulso para la secuencia entrenada dado que la señal PN tiene una potencia promedio grande y una SNR grande para la misma potencia pico transmitida.

Para describir el filtro transversal consideremos que se transmite una señal de pulso sobre un canal con ISI en donde el sistema tiene función de transferencia de coseno alzado $H_{rc}(f)=H_t(f)+H_r(f)$. El receptor demodulará un pulso distorsionado, tal que los lóbulos laterales del pulso no pasan por cero en los tiempos de muestra adyacentes al lóbulo principal como se observará en la siguiente figura, entonces para lograr la función de transferencia coseno alzado deseada debemos obtener una $H_e(f)$ tal que con $H_C(f)$ produzca $H_{RC}(f)$ anulando los efectos del canal, o lo más posible.





Le llegó la hora, vamos a detallar el *filtro ecualizador transversal*, famoso por su sencillez de ajuste ya que consiste de un retardo lineal de T_s segundos por taps. Debemos destacar que en un ecualizador, los valores actuales y pasados de una señal recibida son linealmente afectados por los coeficientes del ecualizador (C_n) y son sumados para producir la salida, de esta manera:



El coeficiente que más aporte dé va a ser el central y los laterales servirán como eco, afectando a ambos lados de la señal principal. A la hora de la realización nosotros podríamos considerar implementar infinitos taps de manera que forcemos la respuesta al impulso a cero excepto para una única muestra peeeero, siempre pero, en la práctica eso no se puede hacer y además, si lo pensas, es un delirio de plata. Por lo tanto, se utilizan una cantidad aceptable de taps que más o menos te den una respuesta que se aproxime a la ideal.Como criterio de implementación se podría considerar la cantidad de muestras anteriores o posteriores, a la muestra actual, que queremos llevar a cero.

Con los taps ya definidos, estos se amplificarán, sumarán y se los llevara al dispositivo de decisión, es por esta razón que los pesos de los coeficientes o taps necesitan ser elegidos para sustraer los efectos de interferencias de los símbolos adyacentes en el tiempo del símbolo deseado. Por lo que hay que considerar que hay (2N+1) taps, cada uno con sus pesos asignados y que la salida que obtendremos tras la implementación del ecualizador será la dada por la convolución entre las muestras de entrada x(k) y los pesos de los taps(c(k)):

$$z(k) = \sum_{n=-N}^{N} x(k-n)\, c_n \quad k = -2N, \ldots, 2N \quad n = -N, \ldots, N$$

Vale la pena aclarar que esta ecuación es genérica y la cantidad de valores z(k) correspondientes a la salida del filtro ecualizador son elegidos de forma arbitraria. No tienen relación con la cantidad de N coeficientes del filtro. Para la demostración matemática se consideró una señal del tipo coseno alzado que iba a pasar 4N+1 tiempos por un filtro ecualizador de (2N+1) coeficientes.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z(-2N) \\ \vdots \\ z(0) \\ \vdots \\ z(2N) \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(-N) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x(-N+1) & x(-N) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ x(N) & x(N-1) & x(N-2) & \cdots & x(-N-1) & x(-N) \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x(N) & x(N-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x(N) \end{bmatrix}$$

Observamos que el sistema matricial que generamos no tiene matrices cuadradas, lo cual significa que hay más ecuaciones que incógnitas o al revés. En este caso, tenemos más ecuaciones que incógnitas, por eso, elegimos un conjunto de ecuaciones dentro de x y z que nos interesen a resolver, ya que tenemos (4N+1) ecuaciones y (2N+1) incógnitas.

Podemos dar una relación entre z(k), x(k) y c_n, que además si X llega a ser cuadrada y de igual dimensión que C, nos va a permitir decir que:

$$z = x.c$$

$$c = x^{-1}.z$$

Uno podría solucionar este sistema de ecuaciones mediante un método determinístico denominado *solución forzada a cero*, o mediante un método estadístico denominado *mínimo error cuadrático medio.*

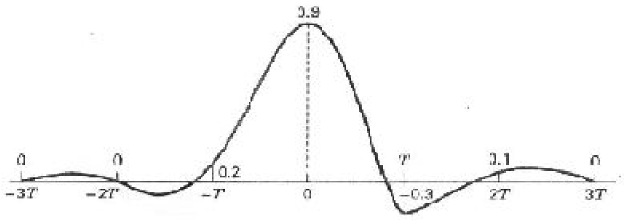
Estos métodos de resolución matricial dependen del requerimiento sobre la forma de z. Además, los algoritmos no se configuran en línea, es necesario transmitir primero una secuencia conocida que no sean datos, “pulso de entrenamiento”, ajustar (calcular pesos) y después empezar a funcionar, es decir, enviar los datos reales.

Solución forzada a cero

Para esta solución necesitamos que la matriz X sea cuadrada de 2N+1 por 2N+1 y transformando a z en un vector de 2N+1. La Solución Forzada a Cero minimiza la distorsión pico del ISI por selección de los pesos c_n de manera que la salida del ecualizador sea forzada a cero en los puntos de muestras N a cada lado del pulso, quedando:

$$z(k) = \begin{cases} 1 & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \end{cases}$$

La longitud requerida del filtro (número de taps) es una función de cuánta interferencia puede introducir el canal. Un ejemplo para este ecualizador podría ser uno que utilice 3 taps, por lo que buscaríamos a la salida tener {z(-1)=0 z(0)=1 z(1)=0} para esto debemos contemplar los errores, que son las desviaciones de cero en los distintos Ts para obtener los correspondientes C_n



$$\mathbf{z} = \mathbf{x}\,\mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(-1) & x(-2) \\ x(1) & x(0) & x(-1) \\ x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 & 0 \\ -0.3 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2140 \\ 0.9631 \\ 0.3448 \end{bmatrix}}$$

Mediante dichos coeficientes calcularemos la salida del filtro ecualizador en los instantes de tiempo k=-3,-2,-1,0,1,2,3. Utilizando la ecuación z=x.c obtenemos:

0 , -0.0428, 0 , 1 , 0 ,-0.0071 , 0.0345

La mayor contribución al ISI es 0.0428 y la suma de todas las magnitudes (Valor absoluto) de ISI es 0.0844.

Solución de mínimo MSE:

Estamos buscando construir el mejor estimador posible $\hat{\theta}$ de los valores $\boldsymbol{\theta}$. Para ello se utiliza como medida de calidad el ECM (*Error cuadrático Medio*)

$$\mathrm{ECM}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right].$$

En estadística, el *error cuadrático medio de un estimador* mide el promedio de los errores al cuadrado, es decir, la diferencia entre el estimador y lo que se estima.

Podemos usar el set de ecuaciones pre-determinadas para obtener una solución ECM al multiplicar a ambos lados de la ecuación por x^T, la cual producirá:

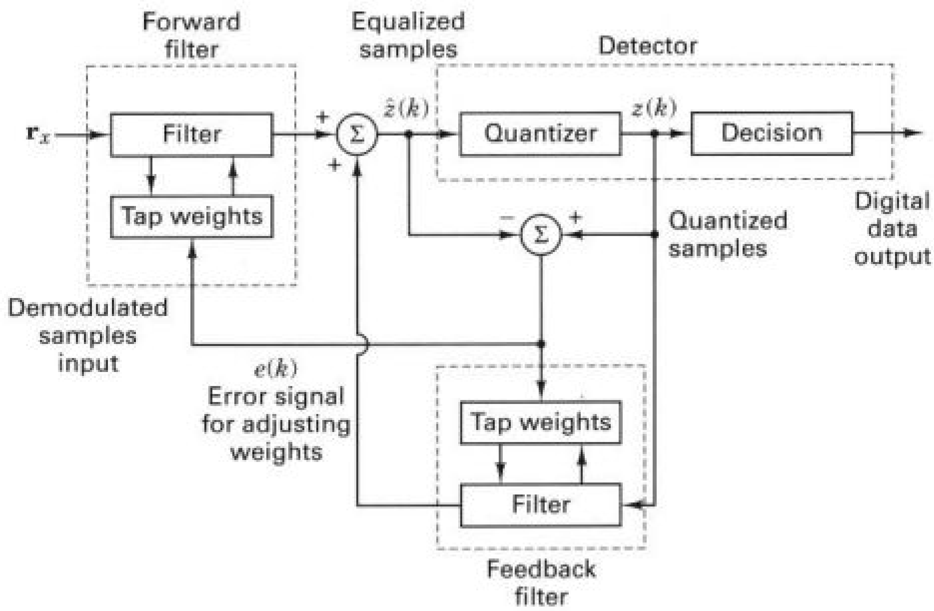
$$x^T.z = x^T.x.c$$
$$R_{xz} = R_{xx}.c$$

Donde R_{xz} se define como *vector de correlación cruzada* y R_{xx} como *matriz de autocorrelación* de la señal y el ruido a la entrada. En la práctica la matriz R_{xx} es fácil de determinar porque son los valores de entrada al filtro y se envía una secuencia conocida, entonces se conocen los valores reales de llegada y los esperados. Pero R_{xz} no es tan simple de obtener porque el vector z, que resulta ser la salida del filtro depende de los valores de los pesos, **que no los tenemos.** Lo único que conocemos de z es que z(0)=1 y el resto de valores debe estar distribuido de manera tal que minimicen el error cuadrático medio. Vaya a saber dios cuáles son dichas magnitudes. Sin embargo, este método es más robusto frente a la presencia de ruido y grandes ISI.

$$c=R_{xx}^{-1}R_{xz}$$

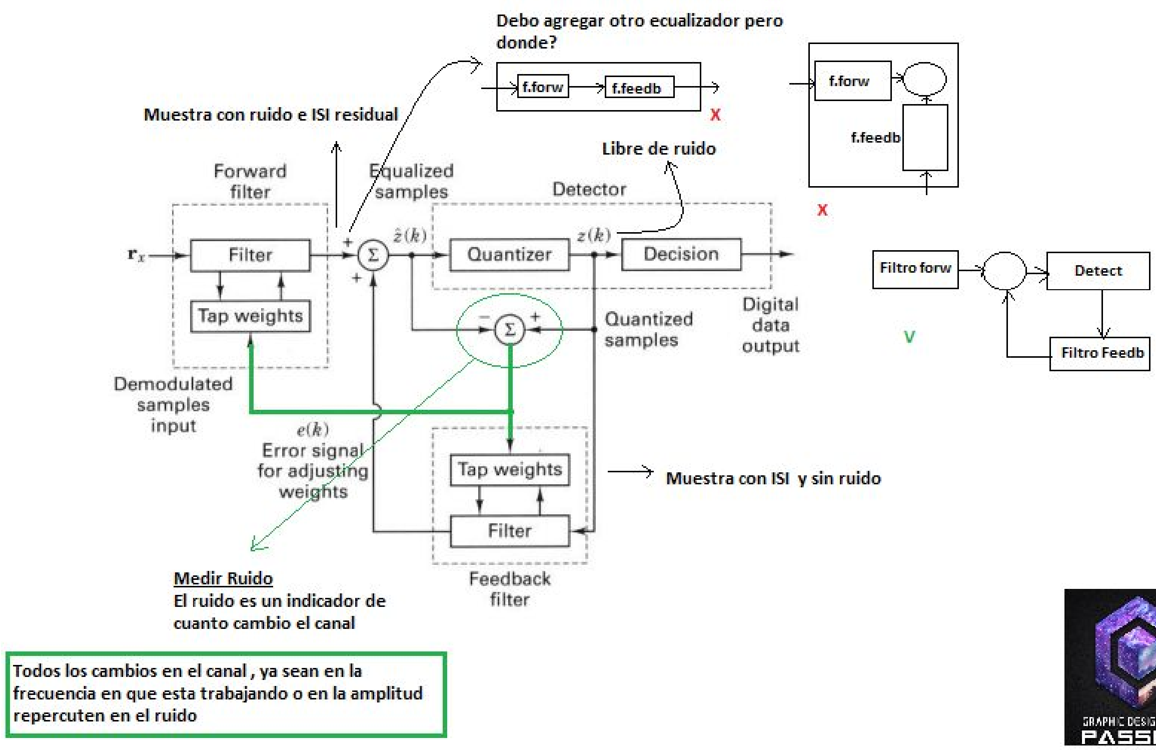
Ecualizador de Decisión Feedback

Es un ecualizador del tipo no lineal, que tiene como propósito eliminar el ISI residual de los ecualizadores transversales. Usa detecciones previas en el detector para eliminar el ISI de los pulsos que son demodulados. Entonces, suena lógico pensar en un sistema realimentado.¿Pero como?



A simple vista observamos 3 bloques básicos, *Filtro Forward, Filtro Feedback y Detector.* Es decir, la combinación de dos filtros con un detector. Estos dos filtros para nada están vinculados, porque juntos no tienen posibilidad de eliminar el ISI, por lo tanto se ubican en distintas etapas del sistema que no están vinculadas. ¿Cómo es que por separado logran eliminar el ISI? Gracias al trabajo del cuantizador en el detector. El cuantizador es un bloque presente entre ambos filtros que los vincula y permite eliminar de las muestras contaminadas (ISI residual y ruido) el ruido del canal de comunicaciones. Dejando la muestra solo con ISI residual. Ojo, esta es una propiedad del cuantizador que hay que utilizarla con cuidado. ¿Por qué? porque el cuantizador elimina el ruido hasta valores q/2, por lo tanto si conocemos la varianza del ruido del canal debemos ajustar bien el cuantizador en el transmisor y en el receptor para solo dejar ruido de cuantización y eliminar el efecto del ruido introducido por el canal de comunicaciones. De esta forma, la muestra con ISI residual y sin ruido, entra al segundo filtro para calcular ISI y ajustar. El ISI residual obtenido de dicho filtro se resta con las muestras calculadas del primero y así realimentar el sistema.

La señal que alimenta a los taps tanto del filtro forward como del filtro feedback corresponde a una señal de error, que es precisamente el ruido del canal. Es decir, que se miden los cambios del canal mediante una medición de ruido. Entonces es lógico pensar que una ecualización en línea se base en estas señales , porque si cambio el ruido significa que el canal cambió y el ecualizador no es la inversa del canal entonces no me esta sirviendo.)



Con respecto a los pesos de los tap de forward y feedback, estos pueden ser ajustados simultáneamente para cumplir un criterio tal que minimice la MSE, esto nos da como dato que este ecualizador tiene la capacidad de trabajar en línea (*"ecualización adaptiva"*) a diferencia de la *solución forzada a cero* y *solución de* *mínimo MSE* que deben ajustar sus taps antes de comenzar a trabajar, conocidos como "*ecualización preset"*.