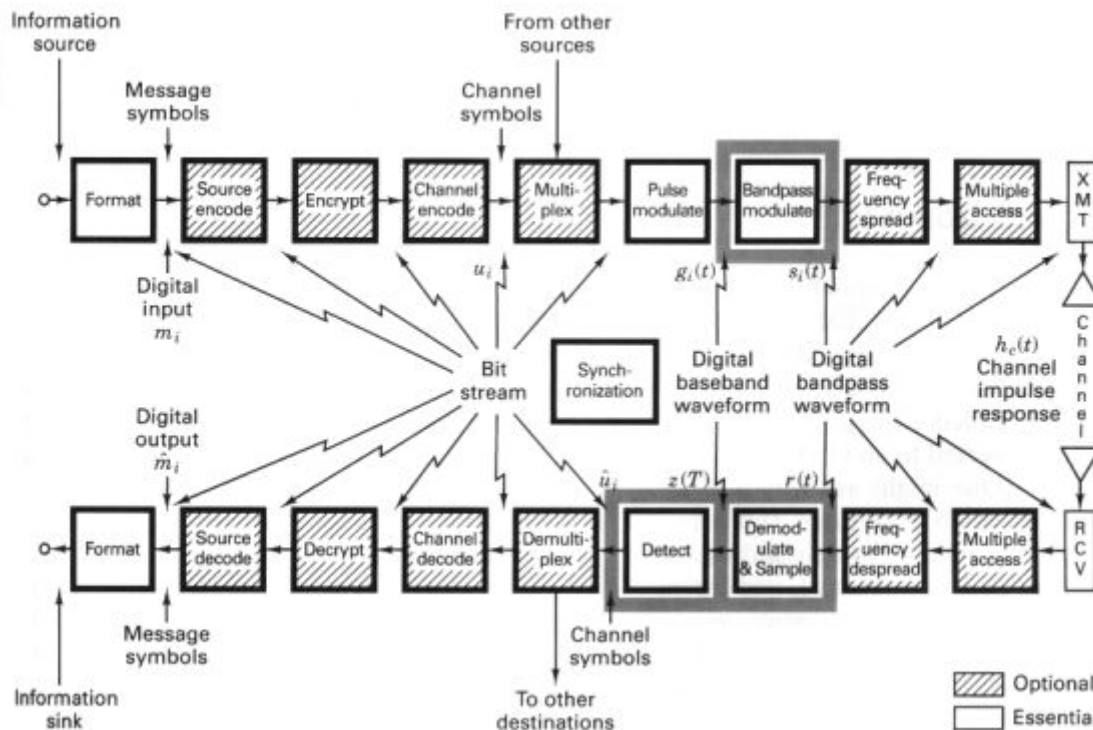
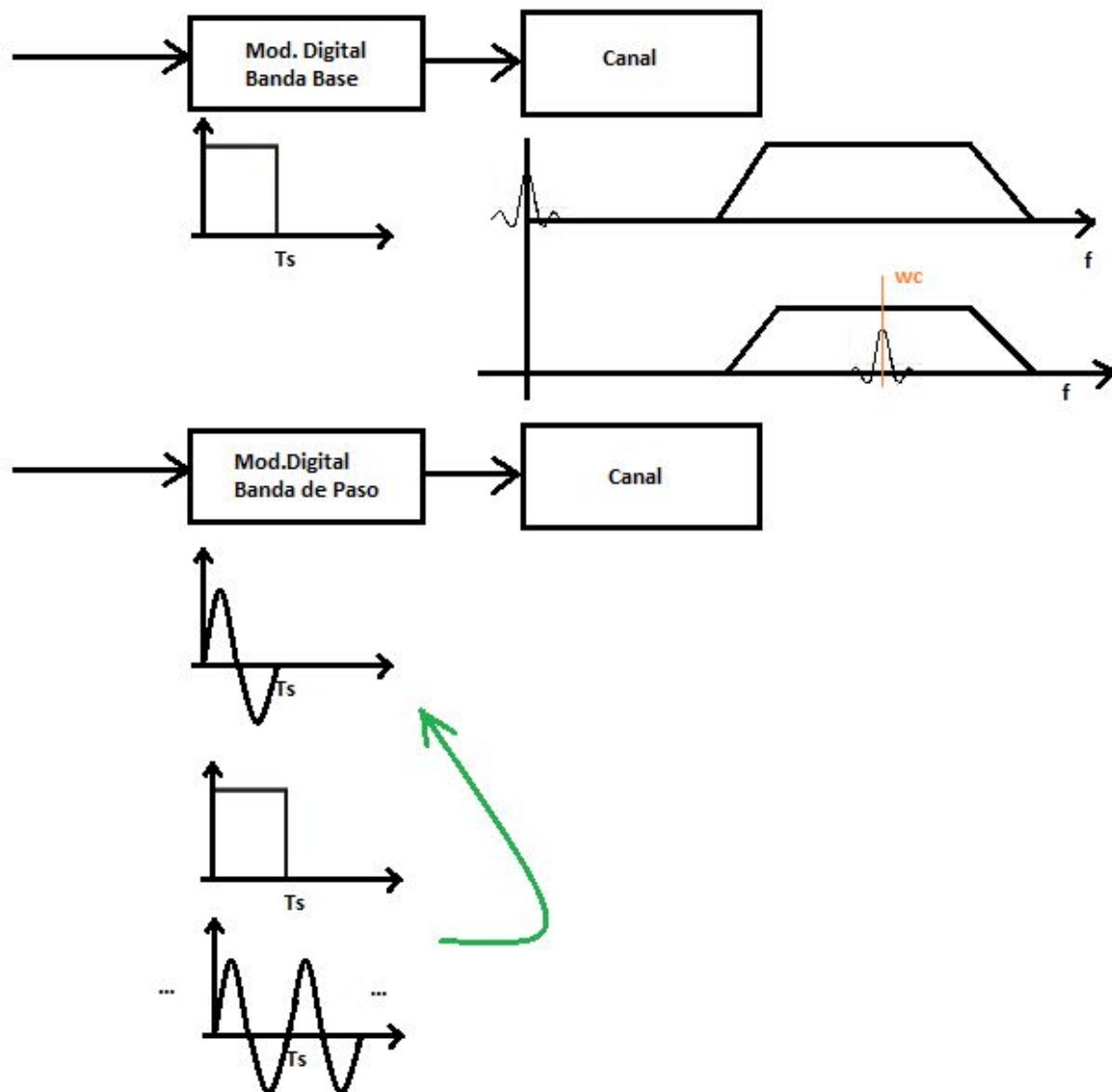


Modulación y Demodulación Banda de Paso



¿Por qué modulación en banda de paso? Recordando que un modulador digital es un proceso mediante el cual la información digital o comúnmente denominada mensajes digitales, son transformados en formas de onda *aptas para ser transmitidas por el canal*. **El contenido espectral de las waveform se tiene que adaptar a las características del medio de transmisión.** Para moduladores en banda de paso, no se puede utilizar pulsos formadores de onda rectangulares como en el caso de los moduladores banda base. ¿Por qué? Porque el contenido espectral de las waveform queda fuera del ancho de banda del canal, entonces nunca vamos a poder transmitir la información.

De esta forma, necesitamos que los pulsos rectangulares sean transportados en una señal más rápida o de mayor frecuencia, denominada *Portadora*. Esta señal se encarga de adaptar el contenido espectral de los pulsos al ancho de banda disponible en el canal de transmisión.



En general, la forma de la portadora es:

$$s(t) = A(t) \cdot \cos(\theta(t))$$

$A(t)$ - > Variación en el tiempo de la Amplitud

$\theta(t)$ - > Variación en el tiempo del Angulo

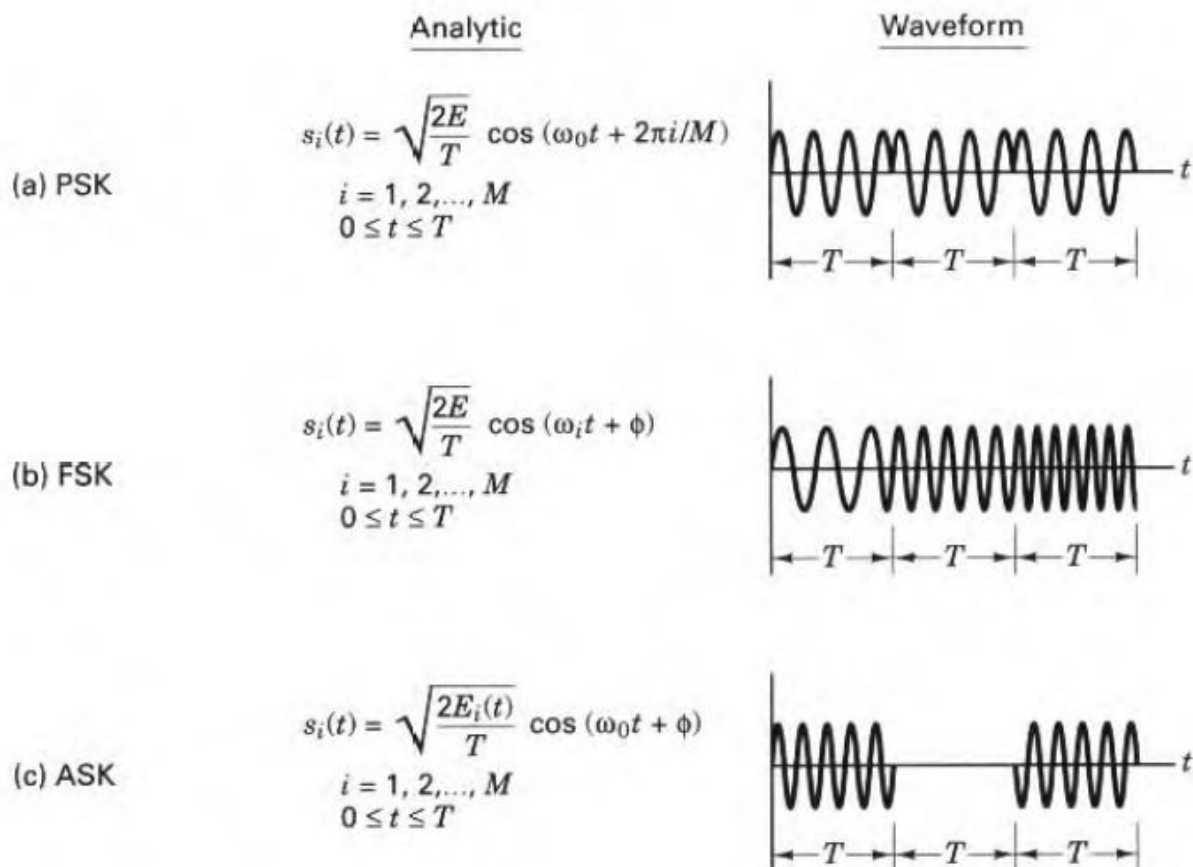
$$\theta(t) = \omega_o t + \phi(t)$$

Resultando:

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_o t + \phi(t)]$$

Con esto, estamos diciendo precisamente que los moduladores digitales de banda de paso se basan en el uso de **waveform del tipo sinusoidal** para definir a cada símbolo durante un intervalo de tiempo “Ts”. Diferenciándose por cambios en los parámetros de amplitud, frecuencia o fase.

Dependiendo cual de los parámetros se tome como referencia, es que podemos definir técnicas de modulación y demodulación del tipo **PSK** (*Phase Shift Keying*) *Modulación por desplazamiento de Fase*, **FSK** (*Frequency Shift Keying*) *Modulación por desplazamiento de Frecuencia* y **ASK** (*Amplitude-shift keying*) *modulación por desplazamiento de amplitud*. Teniéndose en cuenta que la técnica que se elija debe de implementarse en ambas partes del sistema



¿Cómo pueden trabajarse estos tipos de modulación?

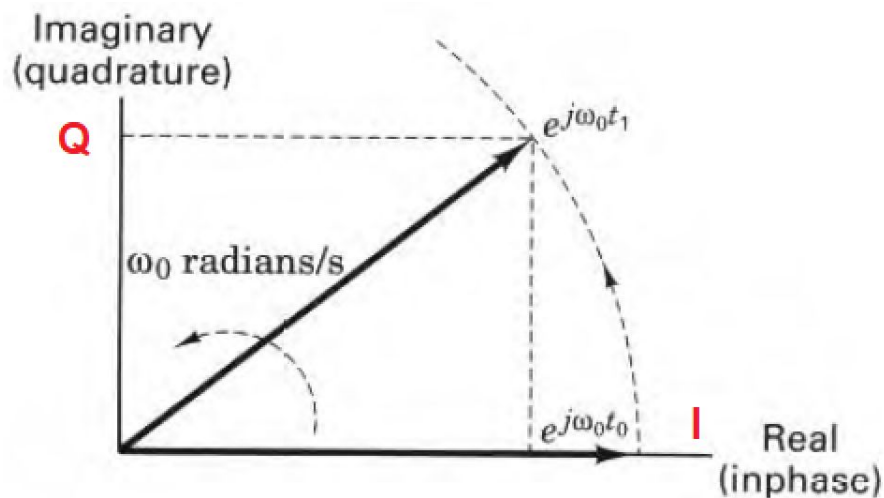
Anteriormente se ha mencionado que se trabajarán señales del tipo senoidales a las cuales se le cambiarán particularmente alguno de sus atributos, pero estas variaciones son un tanto tediosas para analizarlas en el dominio del tiempo, por lo que existen herramientas como lo son la *representación fasorial mediante Ecuación de Euler*, la cual consiste en una descomposición de la señal en dos vectores independientes de tiempo y frecuencia. Uno de fase (real) y otro en cuadratura (imaginaria).

Fase Cuadratura



$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

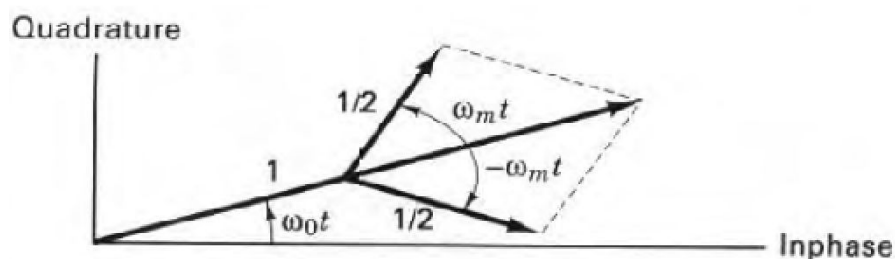
Además, planteando la representación gráfica de la *portadora* en coordenadas polares con un vector o fasor rotando en sentido contrario a las agujas del reloj a una tasa ω_0 en radianes/s la cual caracteriza a la frecuencia (no se debe olvidar la relación $\omega_0 = 2\pi f_0$) podemos ver los cambios de nuestra señal sin necesidad de graficar la onda respecto al tiempo.



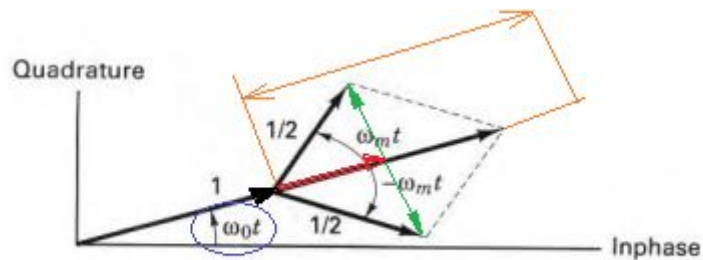
Mucha teoría pero ¿Cómo se vería, por ejemplo, en modulación en amplitud? Si consideramos una portadora con ω_0 de la forma $\cos(\omega_0 t)$ con una componente de alta potencia que está modulada por una senoide de frecuencia ω_m en donde $\omega_m \ll \omega_0$, tenemos que:

$$S(t) = (\cos(\omega_m t) + a) \cos(\omega_0 t)$$

$$s(t) = \text{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \left(1 + \frac{e^{j\omega_m t}}{2} + \frac{e^{-j\omega_m t}}{2} \right) \right\}$$



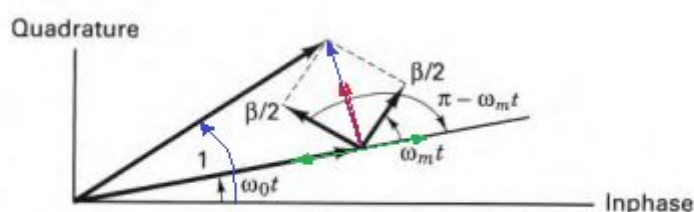
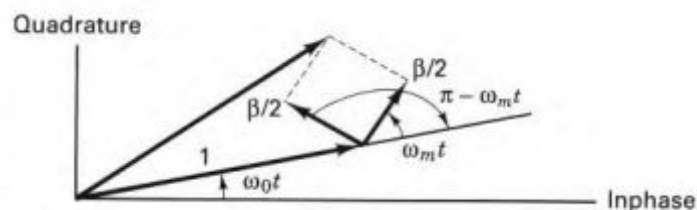
Vemos que el fasor de la portadora se ve afectado por dos términos que corresponden a la señal de información. Sin embargo, la única modificación que introducen es en la magnitud del fasor, por lo tanto se dice que dicha *modulación es en fase*.



Otro ejemplo para mostrar el uso de fasores es la modulación FM de banda angosta. Sabemos por definición que tiene la siguiente forma:

$$s(t) = a \cos(\omega_o t) - a \cdot \beta \cdot \sin(\omega_o t) \times \cos(\omega_m t)$$

$$s(t) = \text{Re} \left\{ e^{j\omega_o t} \left(1 - \frac{\beta}{2} e^{-j\omega_m t} + \frac{\beta}{2} e^{j\omega_m t} \right) \right\}$$



Estos conceptos son muy importantes para la descripción tanto de moduladores como de demoduladores. Cualquier forma de onda en banda pasante real $s(t)$ puede ser representada usando notación compleja como:

$$s(t) = \text{Re} \{ g(t) e^{j\omega_o t} \}$$

$$g(t) = x + jy = |g(t)| e^{j\theta(t)} = R(t) e^{j\theta(t)}$$

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)}$$

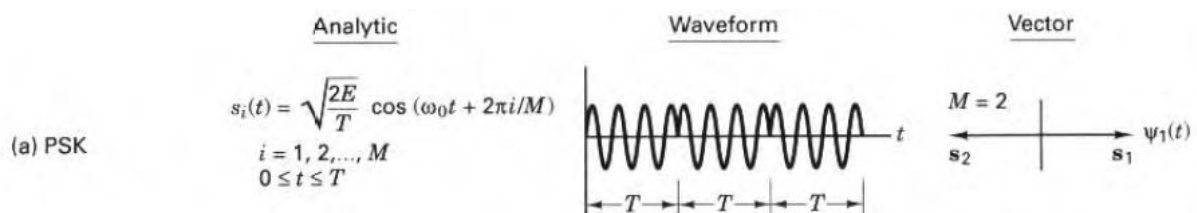
donde $g(t)$ es el mensaje banda base o dato en forma compleja y la exponencial compleja de frecuencia ω_0 es la señal portadora en forma compleja. El producto de estas dos representa la modulación, y $s(t)$, la parte real del producto, es la forma de onda transmitida.

$$s(t) = \text{Re}\{[x(t) + jy(t)][\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t]\}$$

$$= x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t$$

Modulaciones según el cambio de parámetro

Modulación o Codificación por Cambio de Fase (PSK):



Consiste en la modificación de la fase para la transmisión de diversas waveform. Analíticamente se expresa como:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi_i(t)] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

En donde el término de fase $\phi(t)$ tendrá M valores discretos, que se mostrarán como $\phi(t) = \frac{2\pi \cdot i}{M}$. Si lo asociamos con el ejemplo de la figura anterior veremos que $M=2$ conocido como BPSK (Binary Phase Shift Keying), en donde $\rho = -1$ (antipodal) y se vincula a una única base, por lo que tendremos 2 valores para $\phi(t)$ que pueden ser representados por vectores como se observa a la derecha de la

figura, sea cual sea de los valores se representará por una waveform asignada para un cierto T , el cual es la duración del símbolo.



Respecto al coeficiente de amplitud ($\sqrt{\frac{2E}{T}}$) este es obtenido desde la expresión inicial $s(t) = A \cdot \cos(wt)$, teniendo en cuenta que el valor máximo de una sinusoidal es $\sqrt{2}$ veces el valor cuadrático medio(rms) y que este representa a la potencia media (normalizada a 1Ω), se puede reemplazar por:

$$s(t) = \sqrt{2} \cdot A_{rms} \cdot \cos(wt)$$

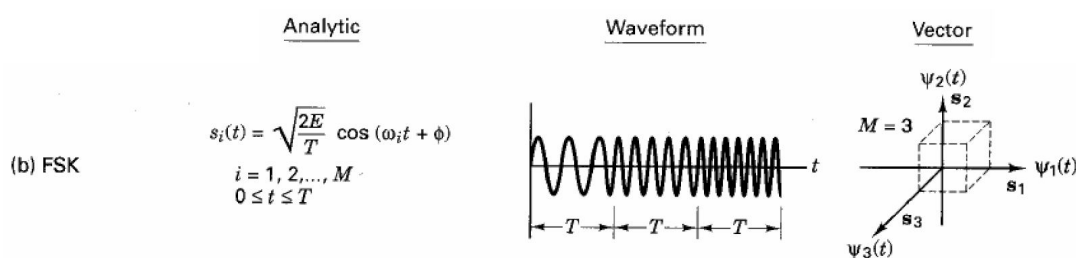
$$s(t) = \sqrt{2 \cdot A_{rms}^2} \cdot \cos(wt)$$

$$s(t) = \sqrt{2 \cdot P} \cdot \cos(wt)$$

Llegando a:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot \cos(wt)$$

Modulación o Codificación por Cambio de Frecuencia (FSK):



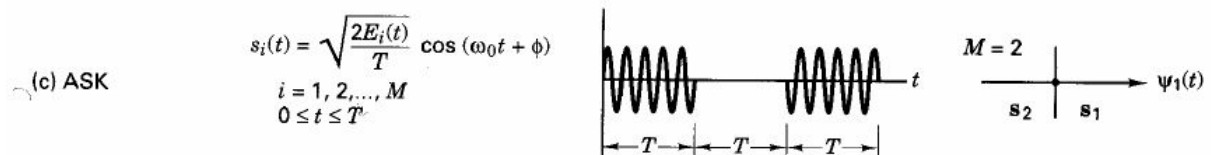
Para esta modulación se varía la frecuencia, a la cual se le asigna diferentes valores mediante criterios que se describirán mas adelante pero expresando analíticamente de la siguiente manera:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_i t + \phi] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

Si se observa con detenimiento a la $S_i(t)$ se puede ver que ahora dentro del argumento del coseno, quien variará será ω_i pero sus valores no serán al azar, sino que se tendrá en cuenta el concepto de ortogonalidad, el cual nos dice que

$\int_0^{T_s} s_1(t) \cdot s_2(t) \cdot dt = 0$. Esto se puede observar en la representación vectorial a la derecha de la figura, en donde las señales son caracterizadas por las coordenadas cartesianas, además cada una de ellas tiene una frecuencia diferente. Esta característica se debe tener en cuenta, ya que para FSK no tenemos la posibilidad de trabajar con señales antipodales, como sí sucede en PSK, pero contamos con Fourier quien ha descrito que todas las señales que tengan una relación de un valor entero "k" con respecto a una frecuencia fundamental y para un cierto T_s , serán ortogonales entre sí.

Modulación o Codificación por Cambio de Amplitud (ASK):



Es la tercera de las modulaciones más populares pero de las menos utilizadas en la parte digital. Esta consiste en hacer modificaciones en la amplitud para las distintas señales o waveform a transmitir. Como se verá a continuación, quien varía para este caso es $E_i(t)$:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

En la figura se ha tomado un ejemplo para $M=2$ en donde una de las waveform toma como valor de $E_i=0$ para un T_s obteniendo de esta manera la representación por amplitud máxima y amplitud mínima (cero).

Ya definimos todas las modulaciones, ahora ¿Cómo elegimos las waveform?

En este apartado veremos cómo afecta el cambio de los parámetros sobre la señal o waveform que se desea transmitir. Para ello tenemos que retomar conceptos desarrollados en modulación banda base con respecto a la correlación cruzada. ¿Por qué? Porque no buscamos variar de cualquier forma los parámetros de la waveform (Amplitud, frecuencia o fase), buscamos modificarlos de una manera eficiente. Es decir, lograr que las diferentes waveform se distingan muchísimo una de otra, lo que significa que sean lo más distintas posibles.

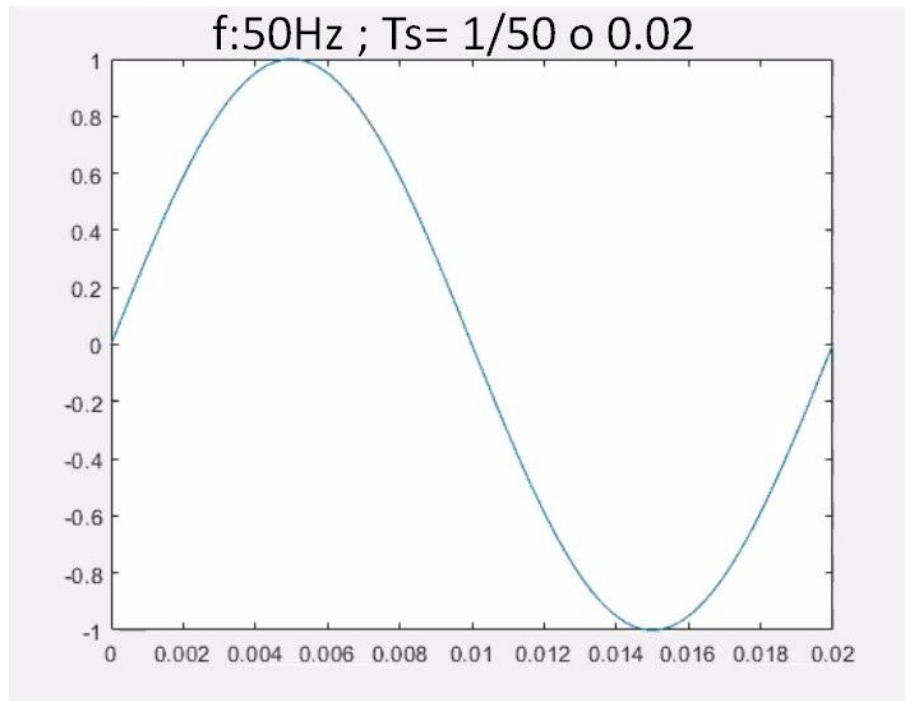
En banda base se trataban señales del tipo cuadradas y se veía su correlación para

un mismo T_s de la siguiente manera: $\int_0^{T_s} s_1(t) \cdot s_2(t)$, obteniendo el coeficiente ρ que puede variar entre -1 a 1 dependiendo de los valores de amplitud asumidos por los pulsos. Para el caso de banda de paso, dependiendo del tipo de modulación, es el parámetro a tener en cuenta que afecta el ρ . Veremos que para PSK podremos hacer variar la fase para diferenciar las señales que se transmiten por el canal y en el caso de FSK podremos hacer variar la frecuencia ¿pero con qué criterio?

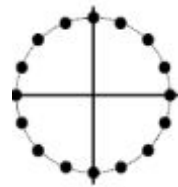
Si pensamos en un primer momento en PSK sabemos que las waveform a transmitir tendrán la misma amplitud y la misma frecuencia pero les cambiará la fase de inicio de acuerdo al mensaje digital a transmitir. Entonces, tendrán la siguiente forma:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi_i(t)] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

Para simplificar el análisis, vamos a elegir una señal seno como referencia en vez de una del tipo coseno.

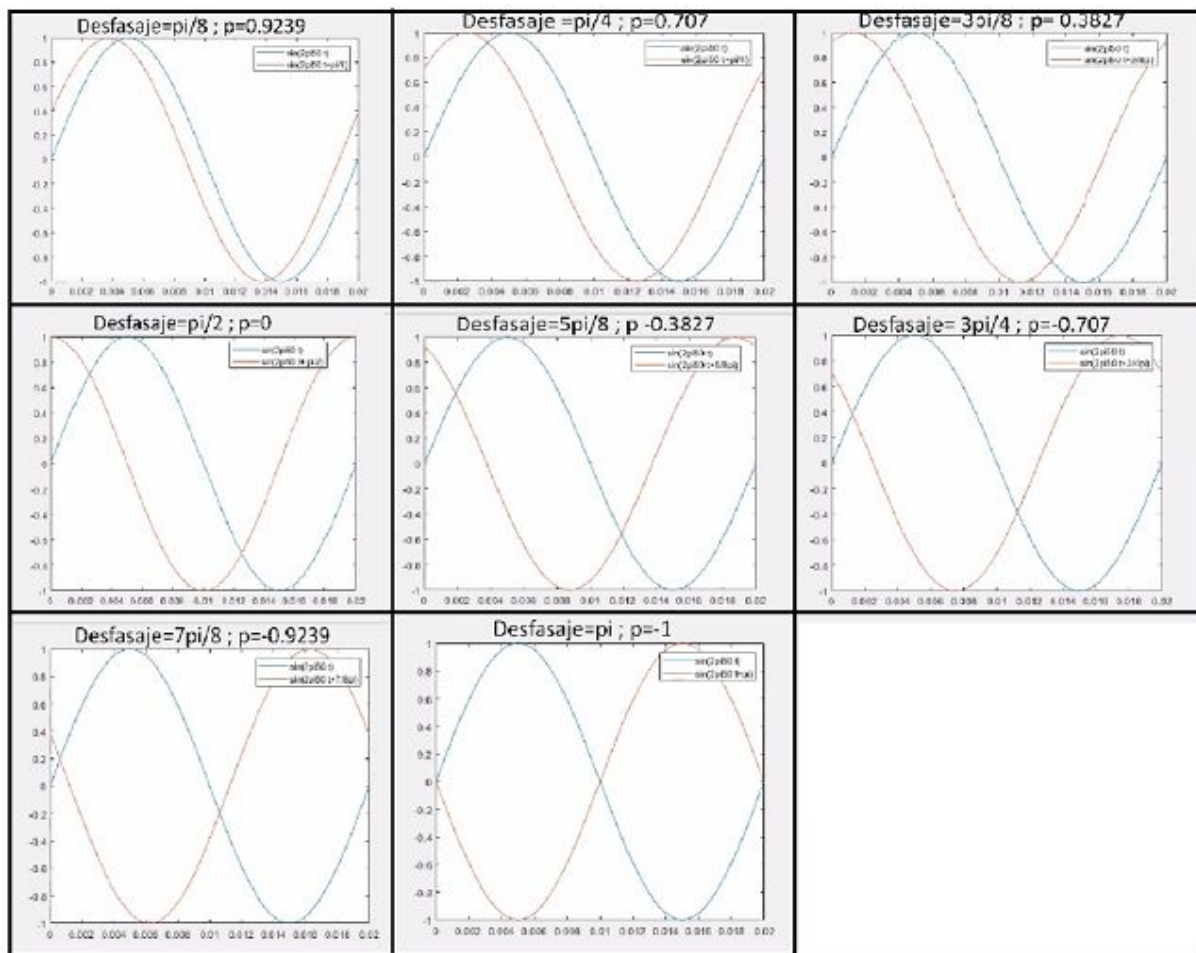


Tomando como referencia la fase inicial de 0 grados, vamos a generar un conjunto de señales sinusoidales desfasadas $\pi/8$ para analizar la correlación cruzada. De esta forma podemos generar un conjunto de 16 señales con fases distintas como se muestra en la figura.



¿Qué fases elegimos?

Considerando que diseñamos un sistema BPSK donde debemos elegir dos fases para nuestras waveform porque los mensajes digitales son dos, vemos que a medida que el desfasaje entre las señales es cada vez más grande, el ρ tiende a 0. Logra dicho valor cuando se alcanza una diferencia angular de $\pi/2$, lo cual implica condición de ortogonalidad entre las waveform. Sin embargo, no resulta ser óptimo, por lo tanto cuando se sigue incrementando la diferencia angular, el ρ tiende a -1. Se alcanza dicha condición con un desfasaje de π .



¿Por qué se eligen las fases 0 y π ? Las waveforms a transmitir tienen que ser lo más distintas posibles para facilitar el trabajo al receptor en la parte de detección. Si elegimos una diferencia grande de fase entre waveforms se va a requerir un ruido muy grande para que el demodulador no distinga la fase recibida y se equivoque.

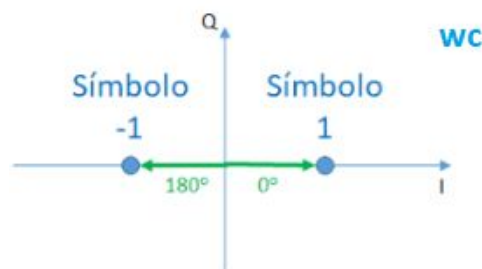


Figura : Diagrama de constelaciones para BPSK antipodal.

Si tratáramos el caso de una modulación PSK con un $M > 2$ y considerando que $M = 2^K$, sin importarnos el valor de M trabajaremos con 2 bases, como máximo. Esto se debe a los conceptos desarrollados en modulación en banda base respecto a las condiciones que deben cumplir el conjunto de señales bases. Cada una de ellas debe satisfacer el criterio de **ortogonalidad**.

$$\int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt = K_j \delta_{jk} \quad 0 \leq t \leq T \quad j, k = 1, \dots, N$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{for } j = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Considerando señales donde el único parámetro que se puede modificar es la fase, para cumplir el criterio de ortogonalidad necesitamos mantener un desfase de $\pi/2$ entre funciones bases. Esto permite generar un conjunto de posibilidades de la forma:

$$\begin{cases} \cos(w_o t) \\ \cos(w_o t) + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \cos(w_o t) + \pi \\ \cos(w_o t) + \frac{3 \cdot \pi}{2} \end{cases}$$

En definitiva, todas las posibilidades pueden resumirse en dos funciones bases. Una del tipo coseno (fase) y otra del tipo seno (Cuadratura).

$$\begin{cases} \psi_1(t) = a_{11} \cdot \cos(\omega t) \\ \psi_2(t) = a_{12} \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

De esta forma concluimos que toda señal en PSK puede ser representada con una combinación lineal de dos funciones bases.

En el caso de FSK, cada waveform a transmitir se diferencia de las demás por cambios en la frecuencia. Como se mencionó anteriormente, esta técnica de modulación propone el siguiente set de señales a transmitir para cada mensaje digital:

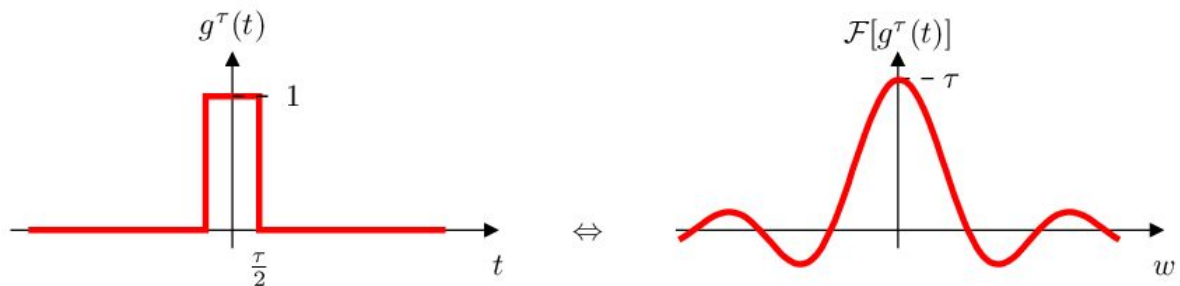
$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_i t + \phi] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

¿Cómo logramos que las waveform sean lo más distintas posibles cambiando la frecuencia? En primer lugar, siempre debemos analizar la correlación cruzada para obtener ρ . En el caso de PSK observamos que ρ podía variar entre -1 y 1 pero ¿En FSK es posible lograr ρ de -1 realizando cambios solo en la frecuencia? La respuesta es que **NO**. Solo es posible lograr como máximo un ρ de 0, es decir, encontrar ortogonalidad entre las señales. Sin embargo, a diferencia de PSK, en FSK todas las waveform que forman parte del modulador digital pueden ser ortogonales si se elige a la frecuencia de cada una de ellas como un múltiplo entero de la frecuencia fundamental del pulso sobre el cual se realiza la integral.

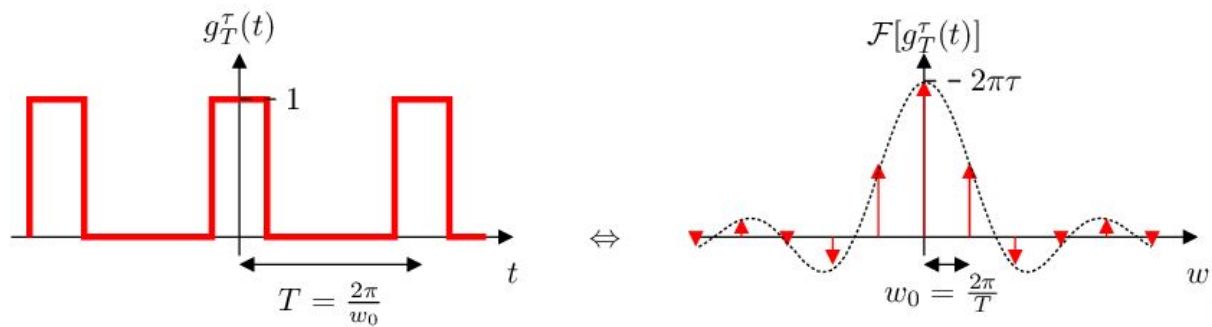
En definitiva, tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$\int_0^{T_s} s_1(t) \cdot s_2(t)$$

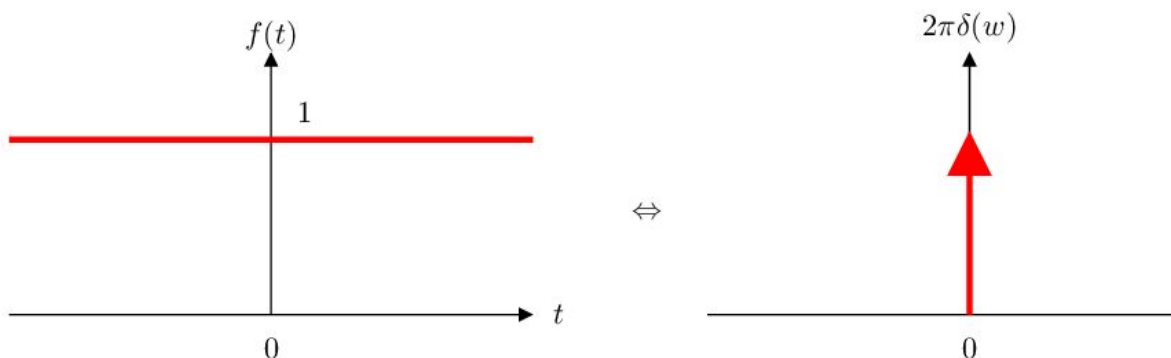
La resolución parte de analizar la forma de onda que consideramos para la integral. Puede pensarse como $s_i(t)$ definida sólo entre 0 y T_s . Es decir, que cada $s_i(t)$ se encuentra limitada en tiempo por un pulso con las siguientes características:



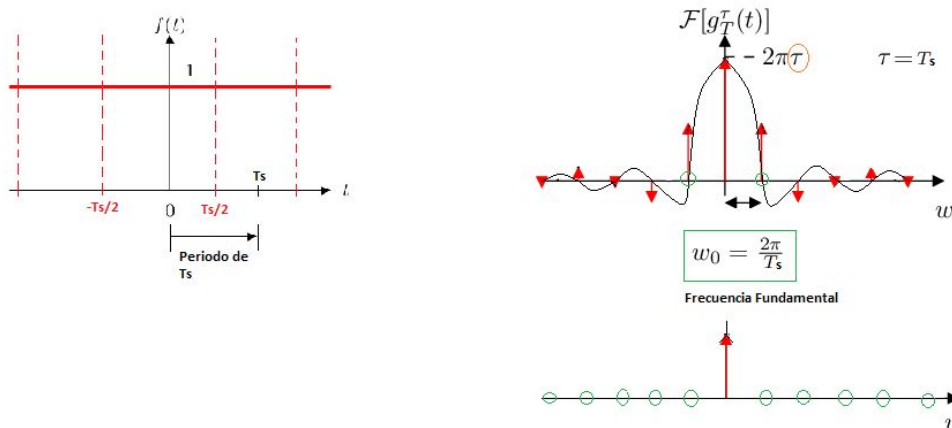
Donde τ es el ancho del pulso. Sin embargo, sabemos que dicha comparación por correlación cruzada es periódica cada T_s , por lo tanto podríamos plantear en un principio que este pulso cuadrado de ancho “ τ ” es periódico de la siguiente manera:



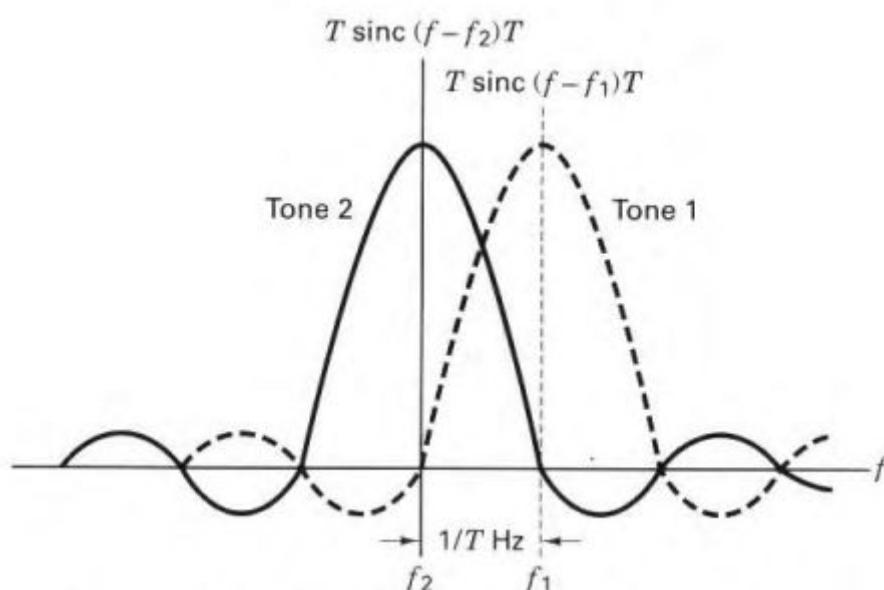
¿Pero el ancho de pulso no debía ser también “ T_s ”? Si, tenes razón. Tenemos un pulso periódico cada “ T_s ” con un ancho de “ T_s ”. ¿Hermoso, no? Tenemos en definitiva una constante!



Pero, Observando el fenómeno que se está generando podemos decir que la señal continua que se observa resulta de una señal periódica cuadrada cuyo ancho de pulso es igual al periodo y tiene una frecuencia fundamental de $2\pi/T_s$.



Este desarrollo en Serie de Fourier es importantísimo. Porque como sabemos, Fourier para representar señales periódicas de cualquier tipo utiliza una serie de bases ortogonales del tipo sinusoidal cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental. En definitiva, la separación en frecuencia entre las diferentes waveform dependen del T_s de nuestro sistema. Si el T_s es grande, una pequeña separación de frecuencia entre las señales será suficiente para que sean ortogonales, ya que ambas podrían ser expresadas como un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Sin embargo, esto aplica como requerimiento mínimo a sistemas FSK denominados no coherentes.



En el caso de ser Coherente cambia el requerimiento mínimo debido a características propias del sistema y permite que la separación mínima de frecuencias sea $1/2T_s$. ¿Cómo explicamos esto?

Como primer punto, consideramos una waveform de un sistema MFSK no coherente con $M=4$ que es recibida en un caso en fase y en el otro con una diferencia angular.

$$s_1(t) = \sin(2\pi 50 t) \quad T_s = \frac{1}{50} ; w_i = \frac{2\pi}{T_s} \rightarrow 50 \text{ Hz}$$

$$r_1(t) = \sin(2\pi 50 t) \text{ la señal recibida esta en fase con la portadora}$$

$$r_2(t) = \sin\left(2\pi 50 t + \frac{\pi}{32}\right) \text{ la señal recibida sufre un desfase}$$

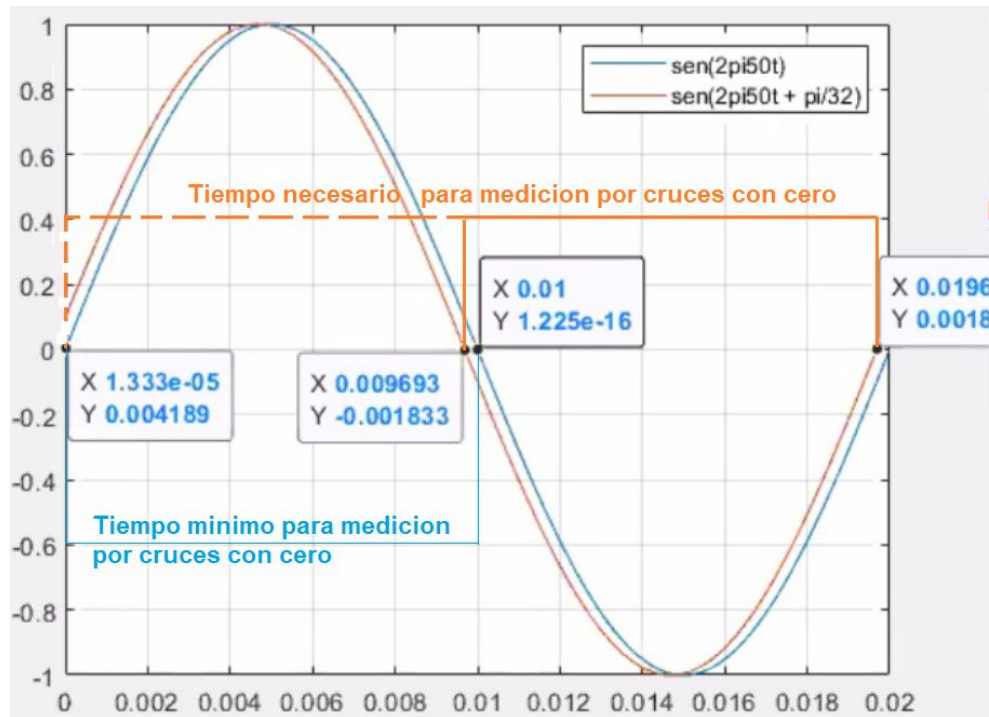


Figura: Recepción en un sistema MFSK no coherente de una waveform.

Como se observa en la imagen, para medir los cruces por cero de la señal sinusoidal recibida y de esa manera determinar la frecuencia, se requiere en un caso " $T_s/2$ " y en otro caso aproximadamente " T_s " segundos dependiendo si la señal llega en fase o no. Entonces, si llega en fase significa que ¿necesito la mitad del tiempo de símbolo solamente? Correcto. Necesitamos la mitad del tiempo de símbolo para determinar la frecuencia, entonces podemos decir que en " T_s " en vez de meter señales con frecuencia $f = F_i + k \cdot F_i$ donde F_i es la frecuencia fundamental, metemos señales cuya separación en frecuencia es $f = F_i + k/2 \cdot F_i$ manteniendo el criterio de ortogonalidad entre las waveform asociadas a los mensajes digitales. Es decir, si con una separación de $k \cdot F_i$ necesito " $T_s/2$ " segundos para determinar la frecuencia, puedo cambiar esa separación a la mitad, $k/2 \cdot F_i$ para un intervalo de tiempo " T_s ".

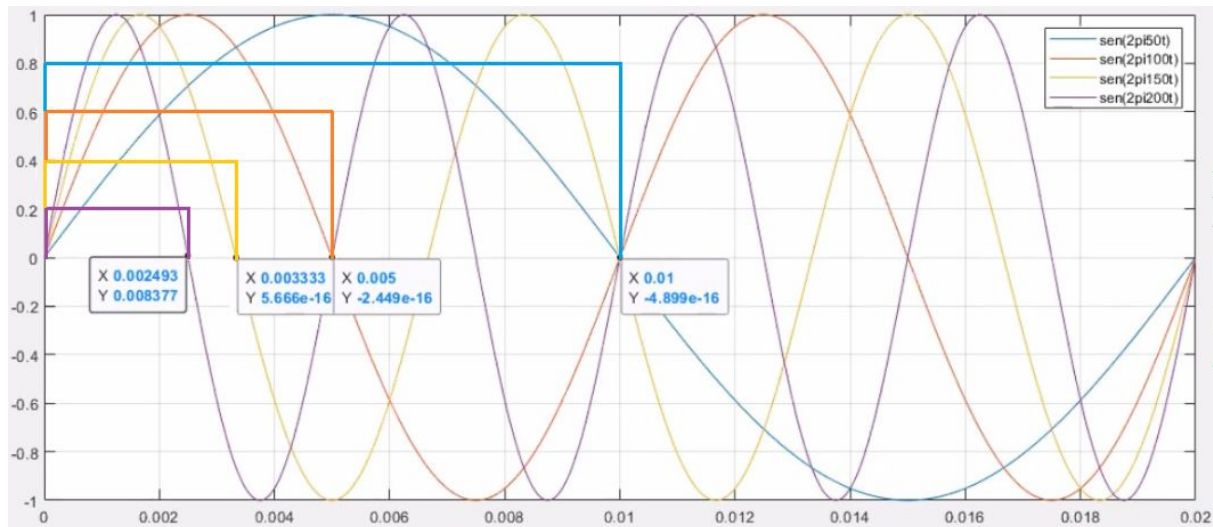


Figura: Recepción en un sistema MFSK coherente para $M=4$ con separación múltiplos de la frecuencia fundamental

Esta es la diferencia entre un sistema Coherente y no coherente en la detección para esquemas FSK. Es decir, cambia la separación en frecuencia de los tonos asociados a las waveform, por lo tanto el sistema coherente requiere menos ancho de banda que un sistema no coherente.

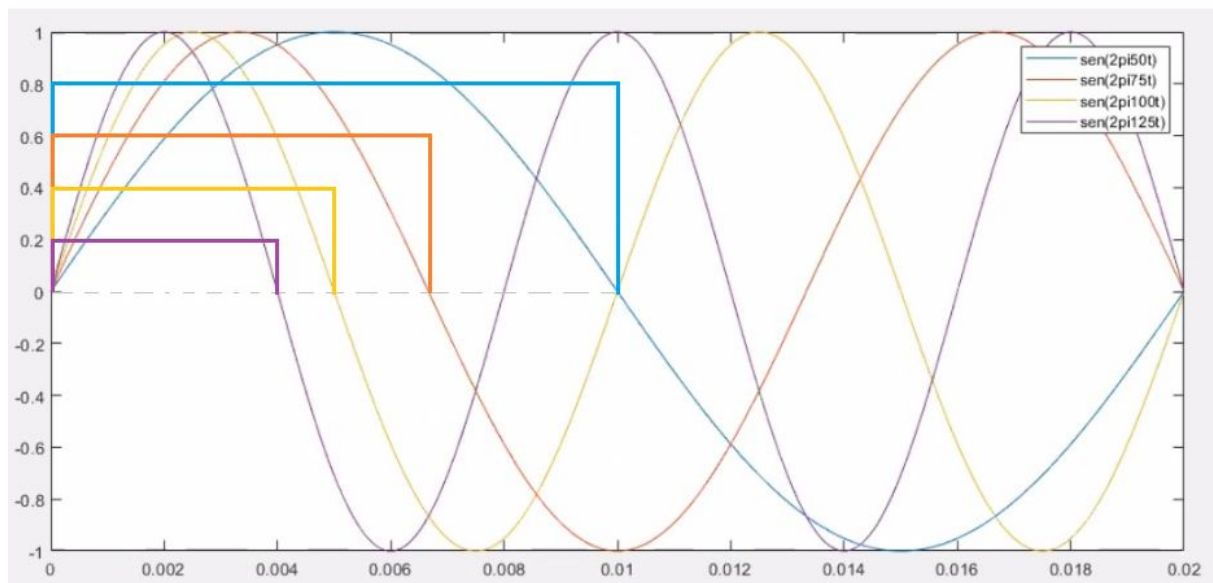


Figura: Recepción en un sistema MFSK coherente con $M=4$ y una separación en frecuencia de la mitad de la fundamental

Más allá de sistemas FSK coherente y no coherente que explicaremos más adelante qué significan, ¿Cómo elegimos las bases en este caso? En PSK definimos que el único parámetro a variar de las funciones bases era la fase y logramos representar la infinidad de modelos de modulación MPSK mediante dos señales base. En FSK, al modificar la frecuencia de las waveform, este concepto es un poco más complicado de ver, ¿Por qué? Porque por cada waveform que nosotros adicionamos

a nuestro sistema surge una nueva función base, aportando una nueva dimensión. Las señales en FSK siempre se buscan ortogonales porque es el mejor caso que se puede lograr modificando la frecuencia. Pero resulta que con dicha condición también se cumple con el mismo principio de ortogonalidad que las bases, entonces para $M=4$ tenemos 4 señales ortogonales y 4 bases. A eso nos referimos cuando decimos que al incrementar M incrementa la dimensión de nuestro sistema. Cada base aporta una dimensión más que resulta ser un plano en el espacio perpendicular al resto de los demás.

Ya definimos todos los vectores, ahora ¿Cómo decidimos?

Para ver qué tipo de modulación es más fiable o menos propensa al ruido existe lo que es la *región de decisión*, ésta nos describe la distancia (que luego se asociará al vector ruido) que divide a la decisión por un símbolo u otro. Como este análisis se realiza en el detector, debemos de considerar el ruido de distribución Gaussiana que puede introducirse en el canal y afectar a la señal transmitida.

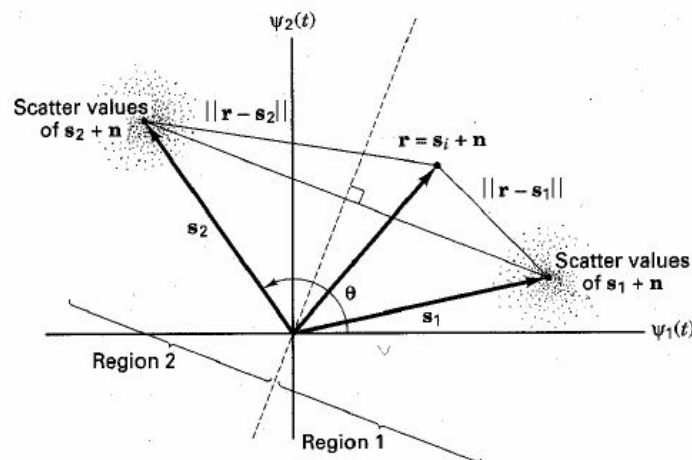
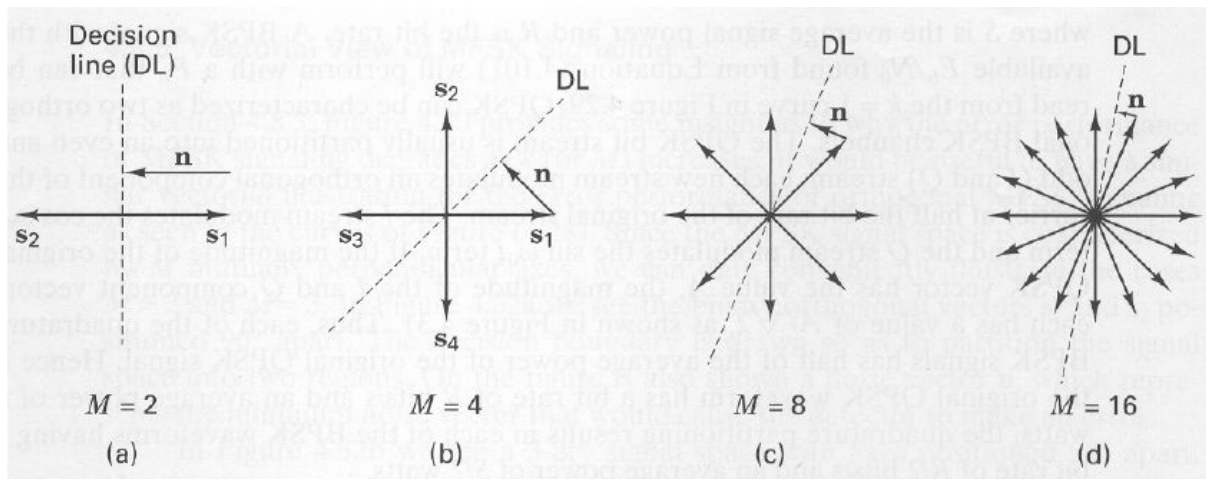


Figura: Region de decisión

Como se observa, vectorialmente se representa a s_1 y s_2 , entre extremos de estos vectores se observa la distancia que hay entre ellos y a la mitad se representa una línea pero de manera perpendicular, la cual dividirá a las regiones que nos determinarán la decisión por el símbolo que creemos que se ha enviado. Se debe prestar atención que en este ejemplo se ha utilizado las bases $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ pero ¿Qué sucede si transmitimos más waveform? cuando tenemos un $M=2^k$ con M mayor a 2, lo cual implica una transmisión posible de más de 2 S_i . En esta situación, tenemos que preocuparnos por si estamos haciendo una modulación del tipo FSK o PSK. En el primer caso, no hay de qué preocuparse ya que cada S_i implica una nueva base $\psi_i(t)$ haciendo que el vector de ruido necesario tenga aproximadamente siempre la misma magnitud. Pero el problema comienza cuando debemos hacer

una modulación MPSK con $M > 2$, en este caso, no importa cuán grande sea M siempre lo asociaremos a 2 bases ($\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$) lo cual significa que la distancia entre S_i ideales irá disminuyendo cuanto mayor sea el M .



Detección Coherente

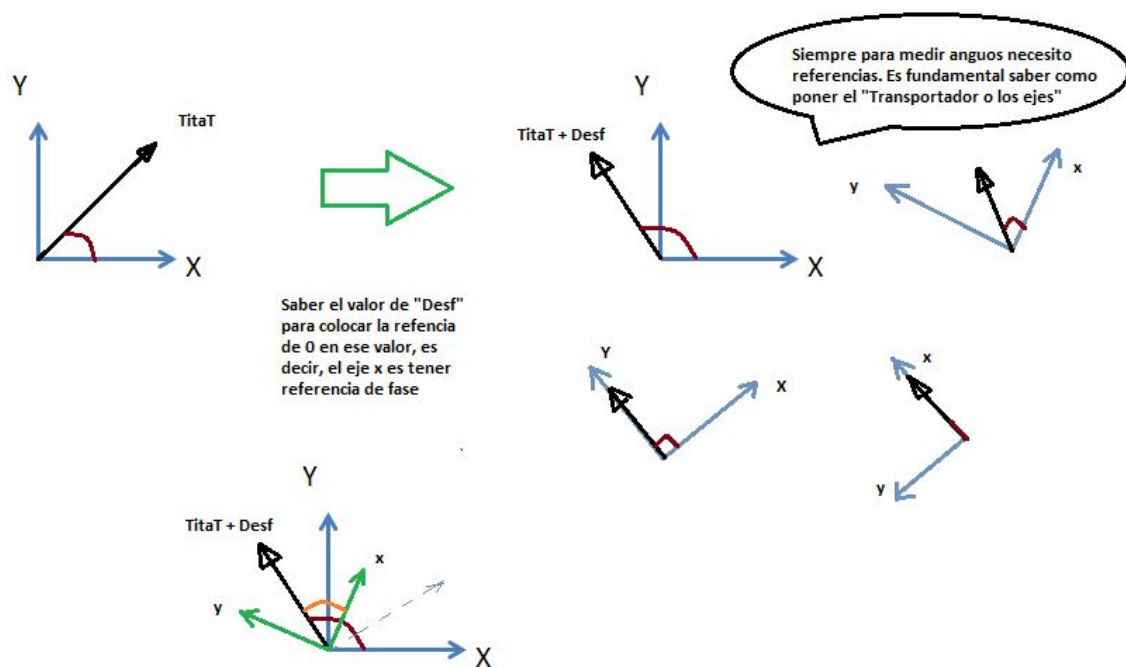
Acá arranca el River - Boca de la modulación pero conocido como Detección No Coherente o Detección Coherente, esto nos va a permitir categorizar en dos grupos a los distintos demoduladores de banda de paso.

Bandpass Signaling

Coherent	Noncoherent
Phase shift keying (PSK) Frequency shift keying (FSK) Amplitude shift keying (ASK) Continuous phase modulation (CPM) Hybrids	Differential phase shift keying (DPSK) Frequency shift keying (FSK) Amplitude shift keying (ASK) Continuous phase modulation (CPM) Hybrids

Esta gran diferencia se basa en la “manera en que demodulo” y ¿Cuáles son esas características? Cuando hablamos de *Detectores Coherentes* nos referiremos a aquellos que necesitan **conocer las fases de las portadoras recibidas** para detectar las señales que le pueden llegar. Por el otro lado, los Detectores No Coherentes, **no necesitan del conocimiento previo del valor absoluto de la fase recibida** dando la ventaja de ser detectores menos complejos pero que pagan en un incremento en su P_E (Probabilidad de Error).

Podríamos esquematizar las dos formas de demodulación mediante un ejemplo con un transportador:



Los Detectores a analizar, son:

Detector Coherente de PSK

Para este caso haremos dos análisis (BPSK y MPSK) en donde para ambos necesitamos conocimiento de la portadora recibida por tratarse del tipo de modulador Coherente. Para el caso de BPSK tendremos en cuenta de que el $M=2$ por lo que se desea transmitir 2 waveform antipodales lo que lleva a utilizar una sola base $\psi_1(t)$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi i}{M}\right) \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

Quedando:

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t) \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{y} \quad s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \pi) = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t) \quad 0 \leq t \leq T$$

Si planteamos que la base $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, las señales pueden relacionarse y plantearse, como:

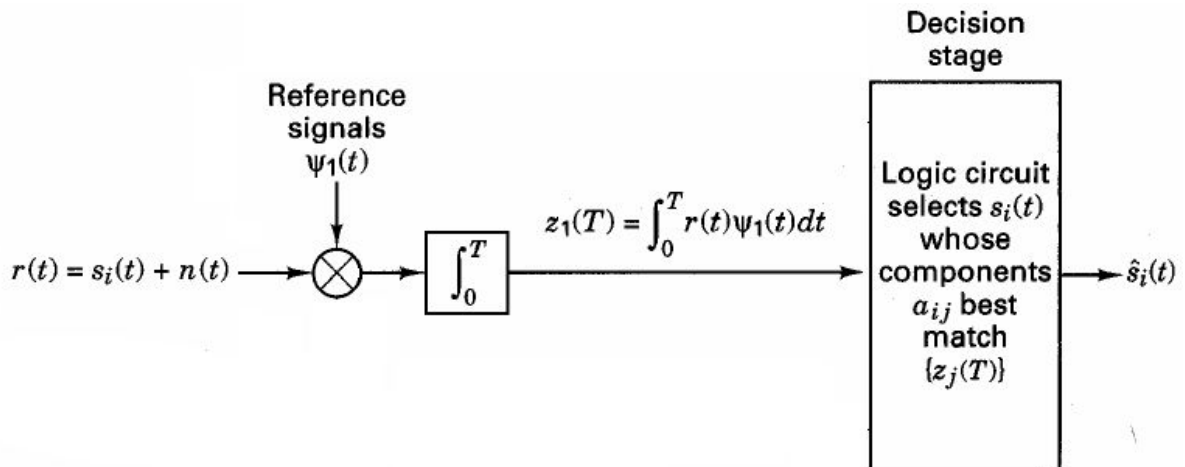
$$s_i(t) = a_{ij} \psi_1(t)$$

$$s_1(t) = a_{11} \psi_1(t) = \sqrt{E} \psi_1(t)$$

$$s_2(t) = a_{21} \psi_1(t) = -\sqrt{E} \psi_1(t)$$

Ahora, al transmitir las distintas señales, estas se verán afectadas por un ruido $n(t)$, el cual tiene la característica de tener media cero debido a que posee una

distribución Gaussiana. Por lo que la energía luego de los correladores en el sistema de recepción será la siguiente:



$$E\{z_1/s_1\} = E\left\{\int_0^T \sqrt{E}\psi_1^2(t) + n(t)\psi_1(t)dt\right\}$$

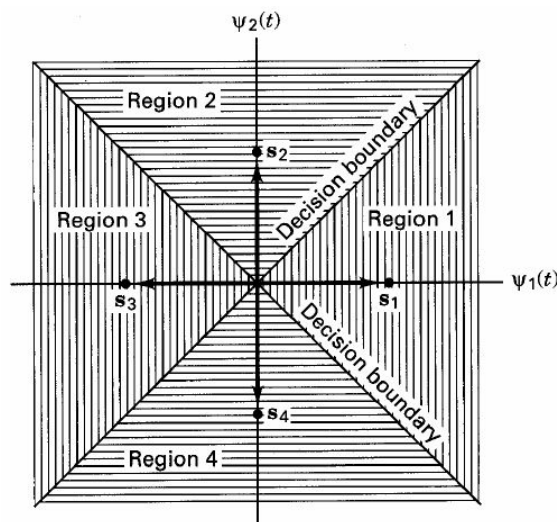
$$E\{z_1/s_1\} = E\left\{\int_0^T \frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2 \omega_0 t + n(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t dt\right\} = \sqrt{E}$$

$$E\{z_2/s_1\} = E\left\{\int_0^T -\sqrt{E}\psi_1^2(t) + n(t)\psi_1(t)dt\right\}$$

$$E\{z_2/s_1\} = E\left\{\int_0^T -\frac{2}{T} \sqrt{E} \cos^2 \omega_0 t + n(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t dt\right\} = -\sqrt{E}$$

¿Cómo sería el caso para MPSK?

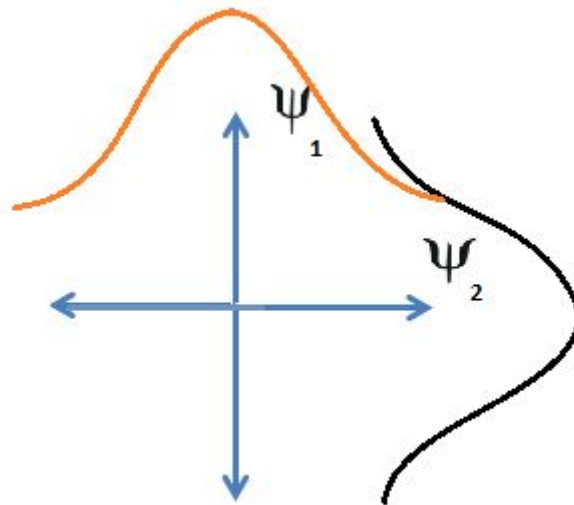
Si ahora decidimos utilizar un sistema en donde $M > 2$ como podría ser el caso de QPSK ($M=4$) para este caso enviaríamos 4 señales predefinidas pero con la característica de usar 2 bases, lo cual es lo máximo de bases que utiliza PSK. El espacio de señales sería:



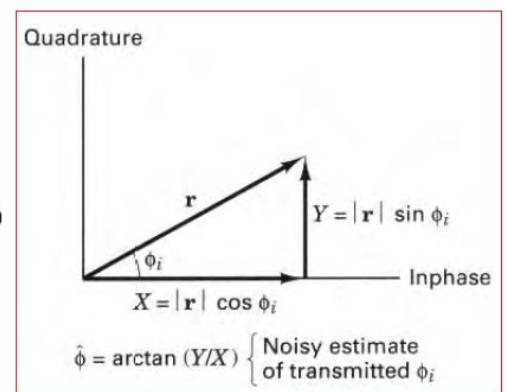
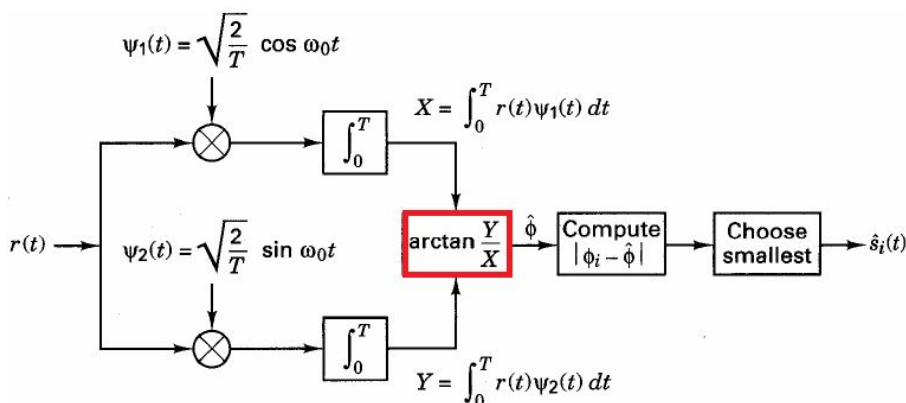
En este caso sucede que la región de decisión ya no se encuentra a 90 entre señal y señal, sino que se reduce a 45, lo cual lo hace más vulnerable al ruido. Por lo que las señales a utilizarse y las bases $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son las siguientes:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi i}{M}\right) \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t$$



Debemos destacar de las bases que una se representará por el coseno, vinculado a X o fase y otra por el seno que lo vincula a Y o cuadratura, esta característica es útil ya que nos servirá para en la etapa de decisión realizar una comparación de ángulos con el conjunto de prototipos asignados. A diferencia de lo que fue BPSK en donde había una sola base y por lo tanto un único correlador. En este caso, y para cualquier MPSK con $M > 2$, al implementar 2 bases habrá 2 correladores.



Nuevamente, el $r(t)$ que recibiremos en el demodulador será $r(t) = s(t) + n(t)$ en donde las waveform $s_i(t) = a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t)$ resultando la señal a recibir como:

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} (\cos \phi_i \cos \omega_0 t + \sin \phi_i \sin \omega_0 t) + n(t)$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} (\cos \phi_i \cos \omega_0 t + \sin \phi_i \sin \omega_0 t) + n(t)$$

$$\phi_i(t) = \frac{2\pi i}{M} \quad i = 1, \dots, M$$

Detector Coherente de FSK

La modulación FSK se caracteriza porque la información se contiene en la frecuencia de la portadora. Un conjunto típico de señales de la forma FSK son descritas como:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_i t + \phi] \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

Asumimos que las funciones bases $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_N(t)$ forman un conjunto ortonormal donde la forma más usada para cada función es:

$$\psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t \quad j = 1, \dots, N$$

Donde la amplitud $\sqrt{\frac{2}{T}}$ es la salida esperada del filtro acoplado. De esta forma, podemos calcular la proyección sobre las bases para cada señal $s_i(t)$ como:

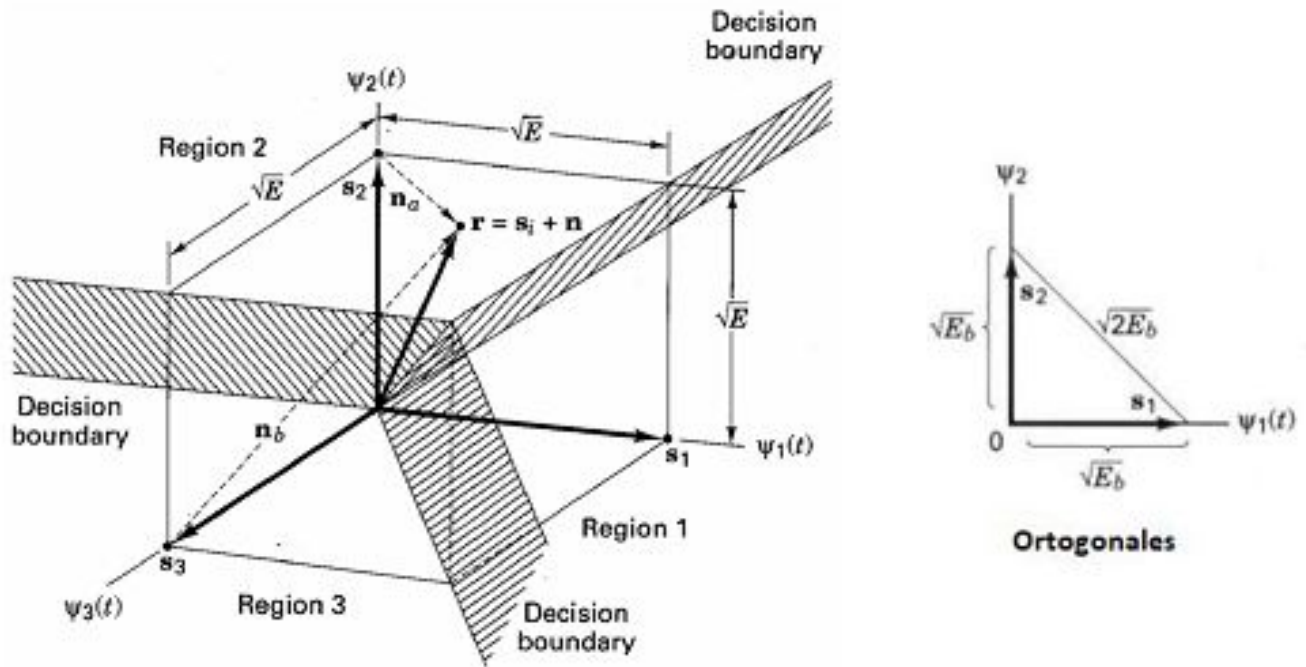
$$a_{ij} = \int_0^{T_s} s_i(t) \times \psi_j(t)$$

$$a_{ij} = \int_0^{T_s} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t) \times \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_j t)$$

Donde a_{ij} solo va a tener un valor distinto de cero e igual a \sqrt{E} cuando $i=j$.

En otras palabras, el vector señal prototipo se encuentra sobre los ejes del sistema de coordenadas y posee una magnitud de \sqrt{E} . Además, es importante mencionar que para este esquema de modulación, sin importar la cantidad M de waveform presentes, la distancia entre cada una de ellas es constante.

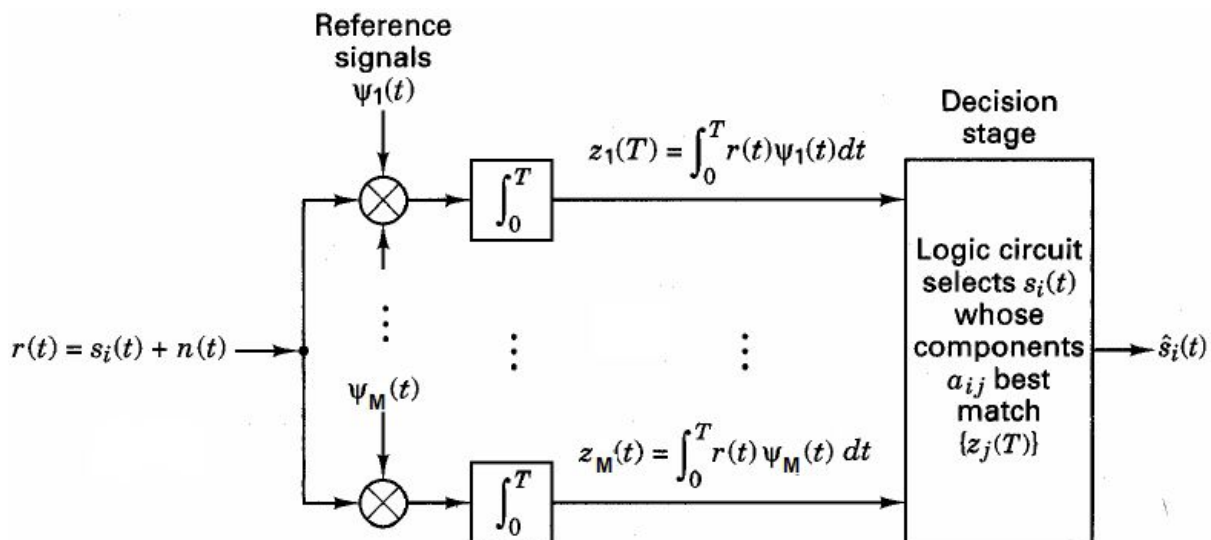
$$d(s_i, s_j) = \|s_i - s_j\| = \sqrt{2E} \quad \text{for } i \neq j$$



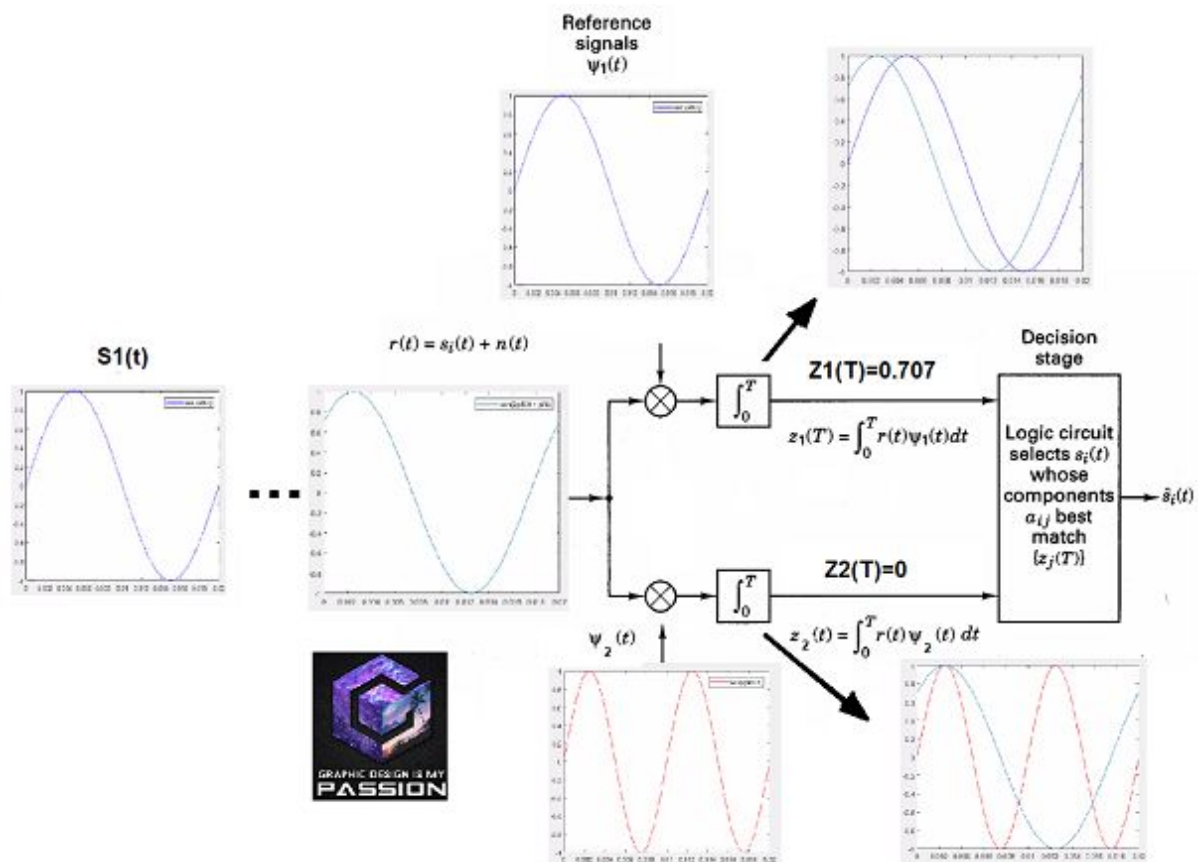
¿Es correcto el gráfico de la izquierda si pensamos en algún sistema MFSK? **NO**. Pero es un no justificado, ya que, para el caso de $M=4$ necesitamos un gráfico en 4 dimensiones y eso no es posible gráficamente. Entonces para mostrar ciertos aspectos de las bases asociadas a nuestras waveforms es que planteamos como máximo un gráfico en 3 dimensiones como si fuera un sistema con $M=3$.

¿Cómo es el esquema del detector?

Consta básicamente de M correladores, donde cada uno de ellos representa la implementación de un filtro acoplado a las distintas señales que se transmiten en nuestro sistema. Como referencia de los correladores pueden usarse las propias señales a transmitir o las bases, que son prácticamente lo mismo para FSK. En el uso de correladores es muy importante la referencia de fase la mayoría de las veces. Es por esta razón que los encontraremos implementados en casi todos los sistemas coherentes.

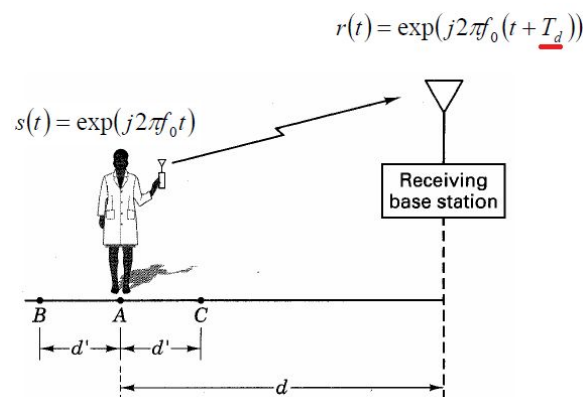


¿Qué ocurre si perdemos referencia de fase? Si esto ocurre, significa que la fase de la portadora en el receptor que se encuentra acoplada para dicha señal es distinta a la fase de la señal recibida, entonces el proceso de correlación no entregará un $z(Ts)$ máximo como esperamos, entregará un valor menor. De esta forma, si el desfase se incrementa hasta alcanzar $\pi/2$, el resultado de la correlación tenderá a cero y nos generará mayores inconvenientes en el proceso de detección. ¿Qué ocurre en este caso con el resto de correladores, qué valores arrojan cuando la señal recibida está en cuadratura para una frecuencia ω_i ? Lo que ocurre es que en todo caso, su valor de $z(Ts)$ es cero, porque las señales en primer lugar son ortogonales por condición de frecuencia.



Fase recibida como función del retardo de propagación

Se viene detallando sobre la importancia que tiene el conocimiento o no de la fase para la determinación del modo de demodulación, esto es debido a los posibles desplazamientos que puede sufrir la señal, en donde se puede destacar el desfase que genera los filtros que se implementan y además el canal por el que se transmite. En el primer caso se puede esperar que los desplazamientos a generarse sobre nuestras señales sean conocidos pero en el canal podremos sufrir distintos desfases que pueden variar para diferentes tiempos como también si modificamos la distancia, ya sea alejando o acercando los sistemas modulador y demodulador. Por lo que la señal recibida, con respecto a la transmitida se observará de la siguiente manera:



Detección No Coherente

Los siguientes modos de Demodulación son aquellos que no tienen y no requieren conocimiento previo de la fase, como sí sucedía en el caso de la Detección Coherente. Es por esta razón que a la hora de PSK, se implementará la siguiente detección:

Detección Diferencial de PSK

Para la descripción de este modo de detección primero se debe hacer una diferencia entre lo que es la *codificación diferencial* y la *detección diferencial*. Para lograr esquemas PSK no coherentes debemos hacer uso de ambos conceptos. En el caso de la codificación de los datos diferencialmente, es un proceso que se realiza en el modulador digital y es cuando se utiliza un uno o cero binario para manifestar que se va a transmitir un símbolo similar o distinto con respecto al símbolo precedente. Respecto a *detección diferencial*, la cual es la que nos interesa describir en este momento, es cuando no se necesita conocimiento previo de la fase, sino que se necesita observar la fase de la señal que se recibió en un T_s anterior con la fase recibida en el T_s actual, en donde el dato a considerar es la variación o no de fase entre estos dos tiempos.

Las señales a transmitirse para este tipo de detección, tendrán la misma forma que en PSK coherente, siendo:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \theta_i(t)) \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

En la recepción, la señal original transmitida puede verse afectada por ruido representado por $n(t)$ siendo un proceso AWGN y también verse modificada por una constante arbitraria α , la cual es tomada como una **variable aleatoria con distribución uniforme** entre 0 y 2π

$$r_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \theta_i(t) + \alpha) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, \dots, M$$

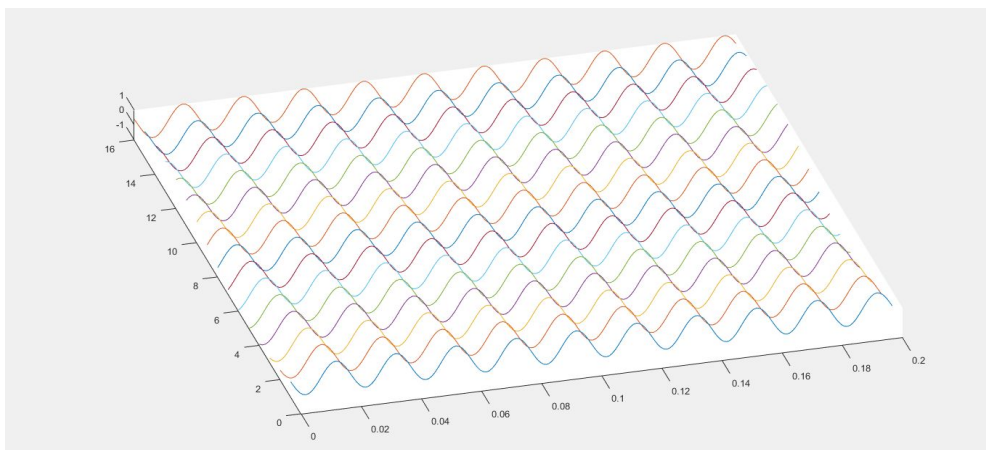


Figura: Modelado del proceso aleatorio asociado a $r(t)$ en función de la variable aleatoria en la fase

En estos casos no podría utilizarse directamente filtros acoplados para determinar la fase porque resultaría ser un valor dependiente de α , el cual es una variable aleatoria. Pero, considerando que las variaciones de α son muy pequeñas en la transmisión de dos símbolos sucesivos consideramos que es un valor relativamente constante. Esto se debe principalmente por la tasa de transmisión y las velocidades que manejan los sistemas de comunicación digital.

$$[\theta_k(T_2) + \alpha] - [\theta_k(T_1) + \alpha] = [\theta_k(T_2)] - [\theta_k(T_1)] = \phi_i(T_2)$$

¿Hemos logrado el objetivo? Si por objetivo nos referimos a obtener la información presente en la fase, la verdad es que **NO**. No debemos olvidar que para detectar diferencialmente no tenemos que meter la información en la fase de la señal, sino en la diferencia de las fases entre las waveform que mandamos en los instantes de tiempo de 0 a $2T_s$. **Trabajamos siempre con el $\Delta\theta$** . Esto obliga que cuando obtenemos la diferencia entre $\theta_k(T_2) - \theta_k(T_1)$ nos de un único valor posible. Si la información está en la fase misma, podrían producirse múltiples combinaciones de diferencias de fases que nos den el mismo valor.

Esta técnica de demodulación se denomina comúnmente como “Codificación diferencial PSK detectada Coherentemente”. ¿A qué se debe? A que si bien la información de un bit la obtiene luego de dos tiempos de símbolo, en cada uno de ellos mide la fase y posteriormente **calcula cuánto cambia**.

Pero además de esta técnica, existe también otra con nombre bastante parecido la cual es “Codificación diferencial PSK detectada diferencial coherentemente”, en donde nuevamente luego de dos tiempos de símbolos se toma una decisión pero en este caso se decide si **hubo o no hubo cambio de fase**.

Estos tipos de detectores se diferencian por su *Probabilidad de Error*, en donde la implementación de diferenciales hace que el ruido asociado sea el doble comparado con Detección Coherente PSK. Es por esto que la reducción en los costos de complejidad de los sistemas diferenciales, se ve reflejada en su performance.

Para un ejemplo de *BPSK diferencial detectado coherentemente* primero debemos codificar las formas de onda a transmitir de manera diferencial. Para ello, si se asocia la diferencia de fase a π con el mensaje codificado “1” y a la diferencia de fase “0” con el mensaje codificado “0”, si en un T_s el mensaje de información “ $m(k)$ ” coincide con la codificación diferencial del T_{s-1} “ $c(k-1)$ ” se envía la misma fase pero si hay una variación, la fase a enviarse será la contraria. Esto quiere decir que podemos expresar la regla de codificación mediante una ecuación que implica una suma de módulo 2 negada

$$c(k) = c(k-1) \oplus m(k)$$

Sample index, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Information message, $m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
Differentially encoded message (first bit arbitrary), $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
Corresponding phase shift, $\theta(k)$	π	π	π	0	0	π	π	π	0	π	π

Suma de Modulo dos Negada

$$\overline{0 \oplus 0} = 1$$

$$\overline{0 \oplus 1} = 0$$

$$\overline{1 \oplus 0} = 0$$

$$\overline{1 \oplus 1} = 1$$

$$c(k) = \overline{c(k-1) \oplus m(k)}$$

$c(k)$	$\theta(k)$
0	0
1	π

Como puede observarse en las figuras presentadas anteriormente, cuando uno analiza el mensaje digital a enviar y la fase que realmente se envía, encuentra que los “1” binarios significan que la fase que se transmitió en el intervalo de tiempo “Ts” anterior se mantenga, en cambio, si el mensaje digital es un “0” significa que la fase para dicho intervalo de tiempo debe cambiar. Esto es una regla, no hay tabla de modulación. La única forma de entender la tabla de modulación es observando en lugar de mensaje digital y fase de las waveform, observar mensaje codificado y fases.

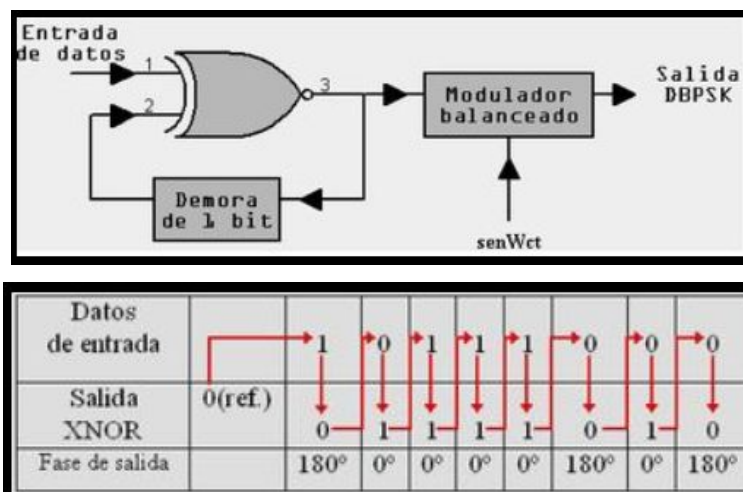


Figura: Esquema de un Modulador digital Diferencial

Existen dos esquemas de demodulación posibles, uno definido como sub-óptimo ya que no elimina previamente las componentes de ruido para comparar y otro definido como óptimo que primero filtra, logrando eliminar la mayor cantidad de ruido posible y después compara.

En el caso del demodulador subóptimo obtendremos una menor performance, causa de su simplicidad en el sistema, teniendo la vulnerabilidad de verse afectado por el ruido en el canal para la hora de la decisión en el demodulador. La muestra del T_s anterior le servirá al sistema para poder tomar de ella la referencia de fase.

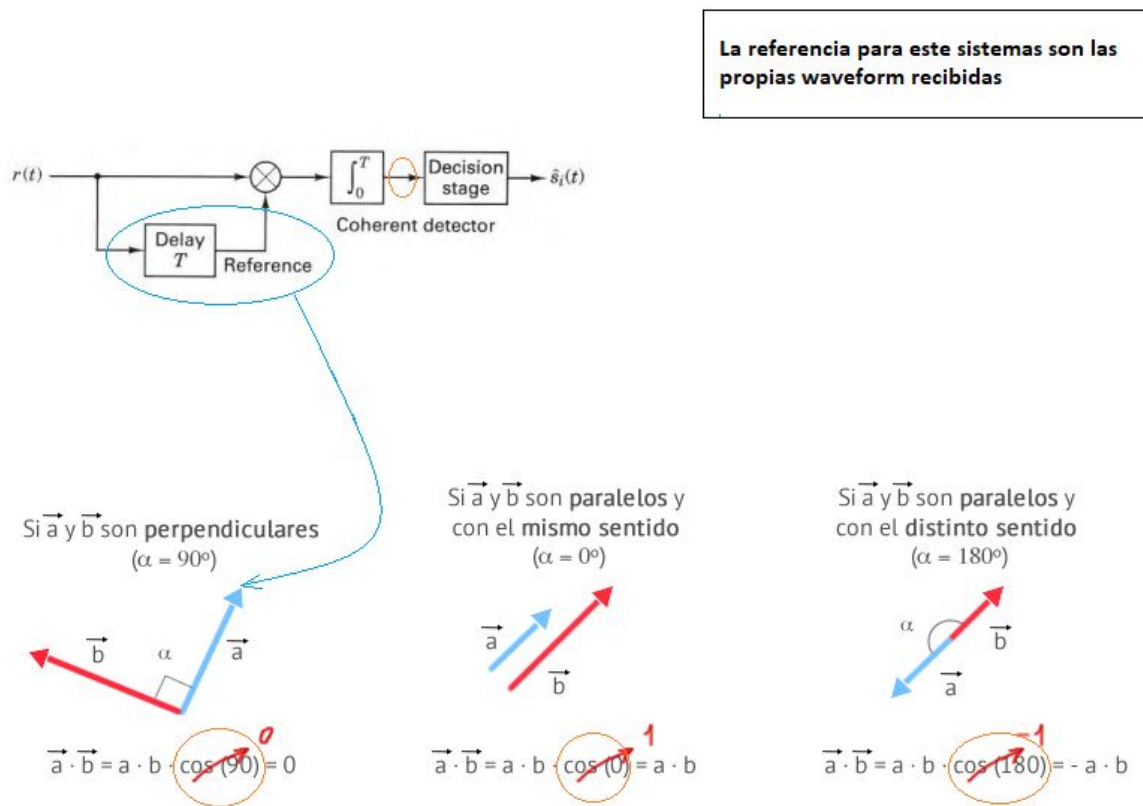


Figura: Sistema DPSK detectado coherentemente Sub-optimo

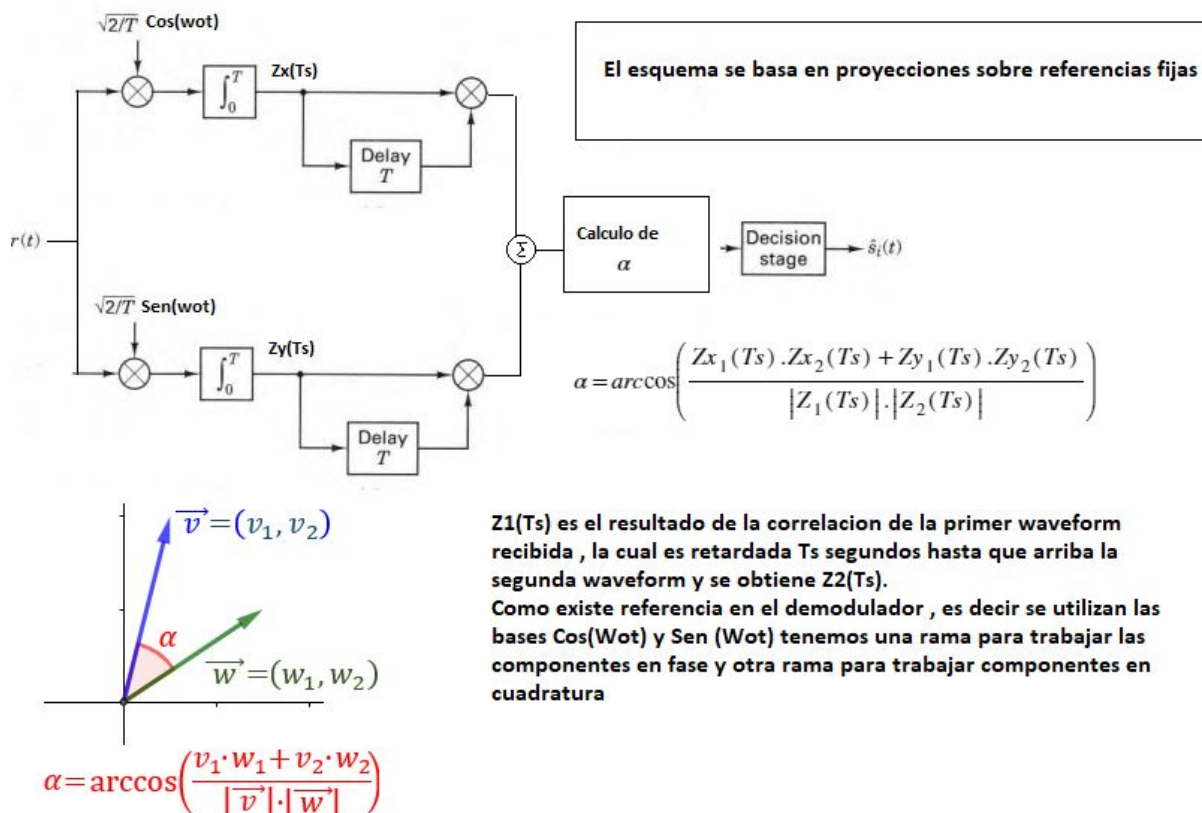
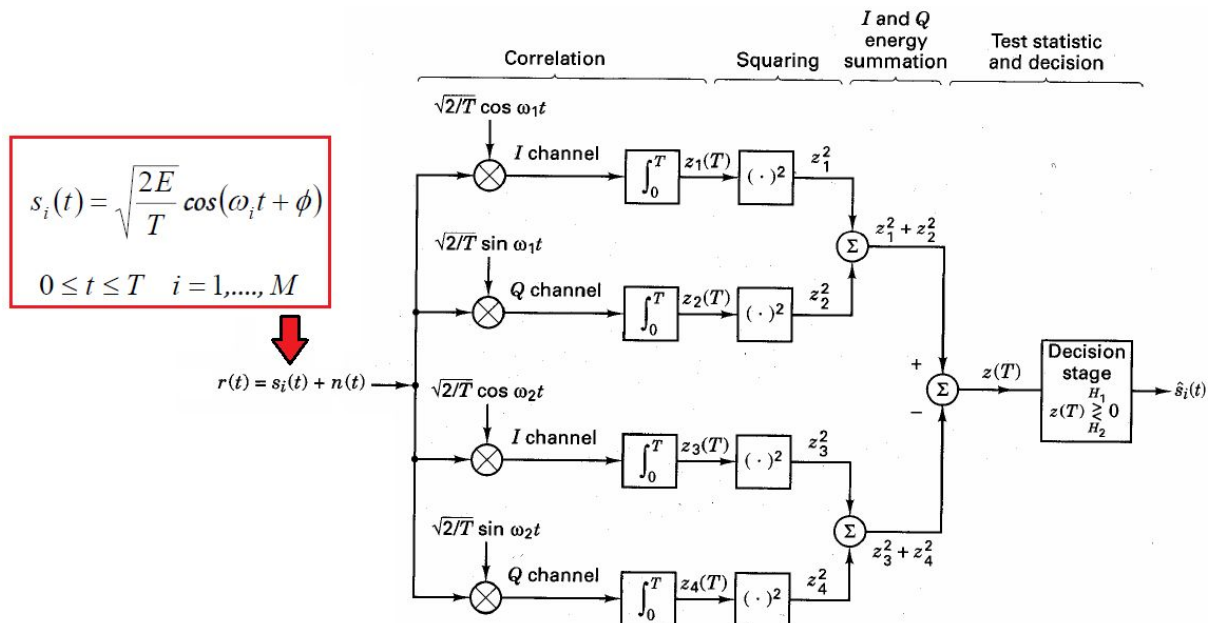


Figura: Sistema DPSK detectado coherentemente óptimo.

En conclusión, sin los efectos del ruido ambos sistemas tienen la misma performance. pero cuando aparece dicho factor, el último sistema mostrado al filtrar primero (Aplicar filtro acoplado mediante correladores con referencia de bases) y luego realizar todas las operaciones con los valores óptimos de $z(Ts)$ obtiene una performance mucho mejor que el primer sistema que utiliza como filtro acoplado la propia waveform recibida con ruido y errores de fase.

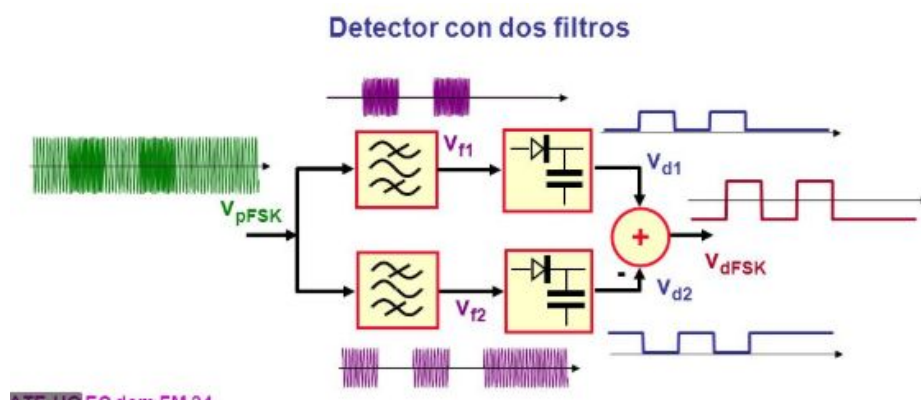
Detección No Coherente de FSK

Para esta detección el sistema debe tener una configuración como detector de energía, esto hace que se necesite el doble de ramas que señales a recibir, ya que si ocurre algún desfase en la señal recibida se detecta igualmente por fase ó cuadratura. Suponiendo el ejemplo de BFSK no coherente el sistema de detección tendrá 2 ramas destinadas a detectar ω_1 y otras 2 para ω_2 en donde las señales de referencia serán $\sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_i * t)$ para I y $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_i * t)$ para Q.



Suponiendo una recepción de $r(t)$ que contiene a ω_1 y en donde no se vea afectada en fase por el canal, obtendremos desde la primera rama superior el máximo valor a la salida del correlador y la segunda rama superior tendrá un valor próximo a cero dado que la señal de referencia es ortogonal a $r(t)$ recibida. Esta situación se repetirá para las dos ramas restantes por la misma condición de ortogonalidad. Dado el caso de que se vea afectada la fase, esto ocurrirá siempre y cuando las interferencias caigan dentro del ancho de banda del filtro, lo que hará es que disminuya el valor a la salida de los correladores pero aun así entre las 2 ramas que se utilizan para cada waveform, permitirá definir cuál señal se transmitió.

También existe otra posible implementación para la detección FSK no coherente la cual consiste en la implementación de filtros pasa banda centrados a $f_i = \omega_i / 2\pi$ con ancho de banda $\omega_f = 1/T$ y luego un detector de envolvente. El mismo consiste en un diodo y un capacitor que permiten obtener a bornes del mismo una señal banda base que representa $Z(T)$, sin embargo, como en todo esquema de demodulación, necesitamos el valor $Z(T)$ en $T = T_s$ para tomar las decisiones. Al diagrama mostrado en la figura le falta un muestreador cada T_s y el bloque para tomar decisiones.



Si bien este esquema de demodulación FSK no coherente es más simple porque implementa filtros donde la fase no resulta de importancia. Es decir, el filtro deja pasar todas aquellas componentes en frecuencia que se encuentren dentro de su ancho de banda, sin importar la fase (analizamos módulo y no ángulo). Es decir, logramos solucionar los desfases en la señal recibida producto de los distintos retardos asociados a electrónica (filtros) y el canal de comunicaciones pero incorporamos un problema distinto. ¿Qué ocurre si nuestro canal de comunicaciones tiene mucho ruido? Recordemos que estamos trabajando con filtros analógicos convencionales como los que utilizábamos en comunicaciones analógicas. Estos filtros al no estar acoplados a las señales o waveform transmitidas, cuando se reciba una señal, todos los filtros además del que corresponde van a acusar una salida diferente de cero debido a la presencia de ruido, a diferencia de los filtros acoplados donde todos acusaban cero a su salida a excepción de aquel filtro cuya entrada fuera precisamente la señal a la cual el mismo estaba acoplado.

Esto modifica las condiciones de análisis, ya que el ruido afecta de una manera distinta a la performance de nuestro sistema. Como un adelanto a lo que se viene podemos decir que el ruido en nuestro sistema ya no tiene una distribución gaussiana. ¿WHATS? después lo aclaramos cuando definamos la performance del sistema (P_b)....

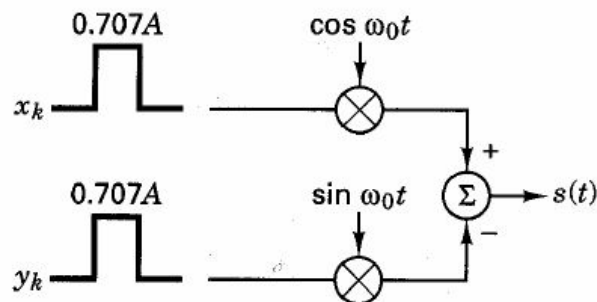
Implementación en Cuadratura de un Modulador

Si consideramos un ejemplo de una forma de onda de banda base compleja $g(t) = x(t) + jy(t)$ que se describe por una secuencia de pulsos ideales $x(t)$ e $y(t)$ que van apareciendo a tiempos discretos $k = 1, 2, \dots$. De esta manera podremos describir a $g_k = x_k + jy_k$, en donde si asignamos un valor de amplitud para los pulsos, como puede ser 0.707 A. Las componentes complejas quedarían expresadas como:

$$g_k(t) = x_k + jy_k = 0.707A + j0.707A$$

Como preparación para el próximo paso, x_k e y_k son tratados como un par ordenado. En donde el pulso x_k es multiplicado por $\cos(\omega_0 t)$ (componente en fase) y el pulso y_k es multiplicado por $\sin(\omega_0 t)$ (componente en cuadratura) recordando lo expuesto en implementación de notación compleja en la modulación.

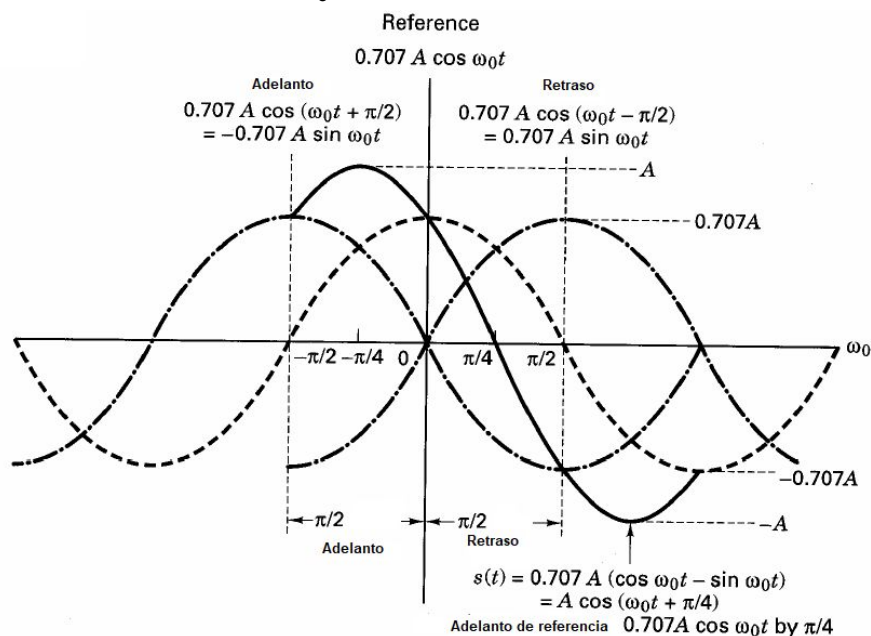
$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}\{[x(t) + jy(t)][\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t]\} \\ &= x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$



Respecto al proceso de modulación esta puede ser descrita como la multiplicación de los componentes complejos por $e^{j\omega_0 t}$ y se transmite la parte real del producto.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \Re\{g_k \cdot e^{j\omega_0 t}\} \\
 &= x_k \cos \omega_0 t - y_k \sin \omega_0 t \\
 &= 0.707 A \cos \omega_0 t - 0.707 A \sin \omega_0 t \\
 &= A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Dependiendo que componente de $s(t)$ utilicemos como referencia podremos decir si la forma de onda de la señal transmitida $s(t)$ se adelanta $\pi/4$ (referencia: $0.707 \cos(\omega_0 t)$) o se retrasa $\pi/4$ (referencia: $-0.707 \sin(\omega_0 t)$). Esto se puede apreciar en la siguiente figura:



Lo expresado anteriormente sirve para construir cualquier modulador PSK, ya que como se detalló previamente, en esta técnica de modulación cualquier esquema MPSK puede lograrse utilizando solamente dos bases. Estas bases en definitiva son las componentes en fase y cuadratura que utiliza el modulador para construir las waveform. ¿Dónde está el truco? Dependiendo del valor de la fase de nuestra waveform a transmitir, elegir los valores de x_k y y_k correctos.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_k}{x_k} \right)$$

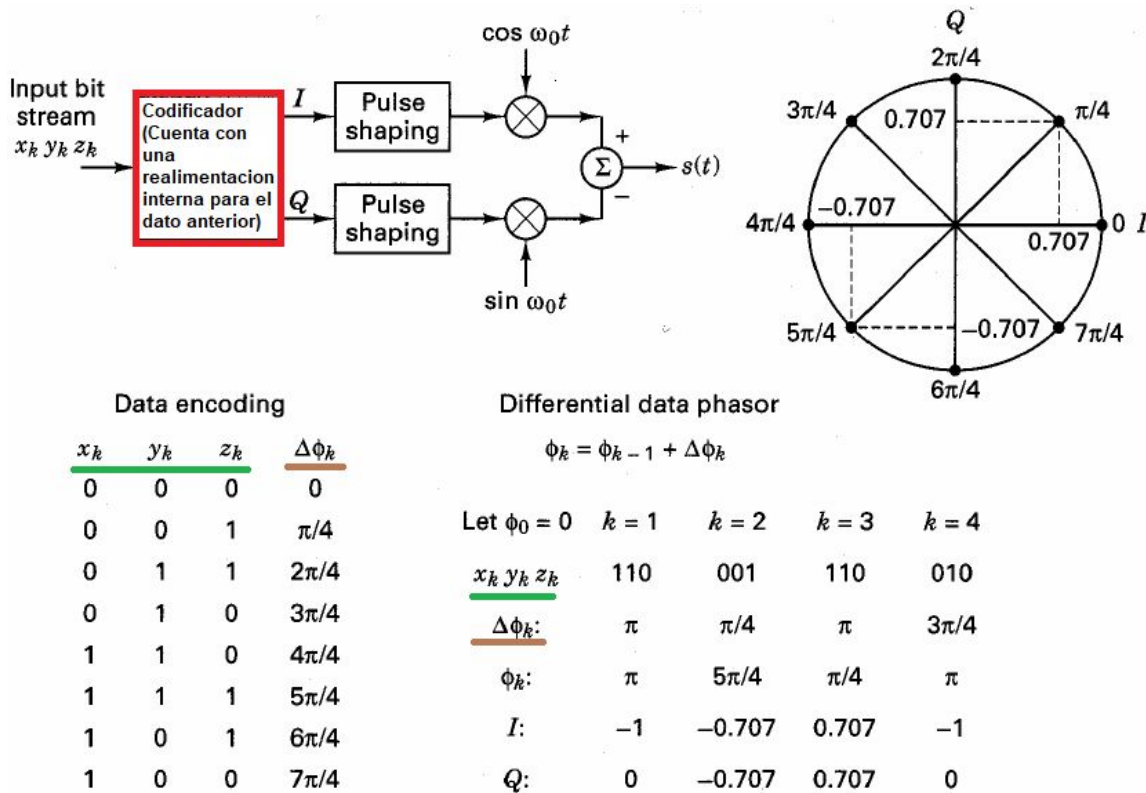
$$s(t) = A \cos(\theta) \cos(w_o t) - A \sin(\theta) \sin(w_o t)$$

$$s(t) = A \cos(w_o t + \theta)$$

Moduladores DMPSK

Como primer punto, para la implementación de esquemas diferenciales que no son binarios, no podemos utilizar una regla sencilla de codificación como se hizo en DBPSK. En aquel caso, decíamos que un bit codificado dependía del bit codificado anteriormente y el mensaje digital actual. Es decir, aplicamos una suma negada en módulo dos de la siguiente forma $c(k) = c(k-1) \oplus m(k)$ y luego dependiendo del valor de $c(k)$ es que elegíamos la waveform a transmitir. Pero, cuando $M > 2$ existe un pequeño problema, el mensaje digital ya no contiene 1 bit, contiene " k " bits entonces aplicar la regla de codificación es muy complicado. Sin embargo, podemos seguir aplicando los conceptos genéricos de codificación diferencial. ¿Qué significa esto? Mandar la información en la diferencia de la fase " $\Delta\theta$ ", es decir, lo que realmente transmitimos es $\phi_k = \Delta\theta_k + \phi_{k-1}$. Entonces, el modulador lo que obtiene es " $\Delta\theta$ " para cada combinación de " k " bits de información y luego lo que transmite es ϕ_k . Esta diferencia debe quedar bien clara, porque es el principio de los esquemas diferenciales independientemente si se puede aplicar reglas más sencillas o no de codificación. Por otro lado, el demodulador utilizará la misma ecuación $\phi_k = \Delta\theta_k + \phi_{k-1}$ pero con otro enfoque, ya que él desea obtener $\Delta\theta$, por lo tanto $\Delta\theta_k = \phi_k - \phi_{k-1}$.

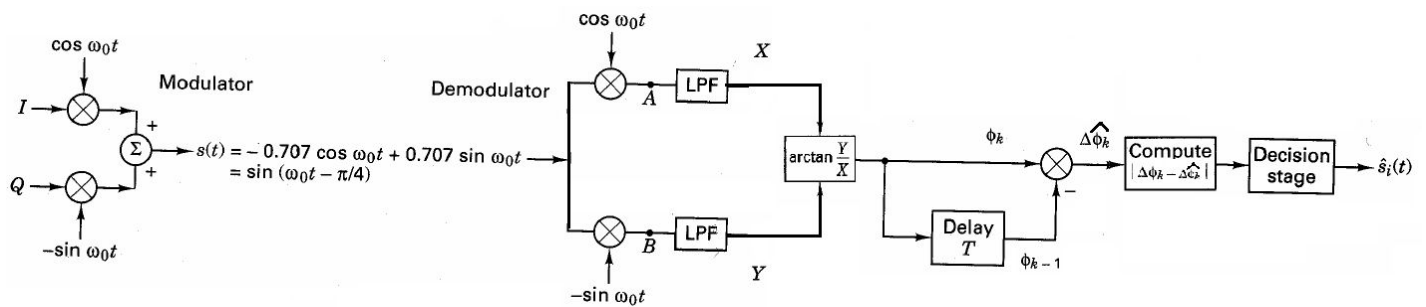
A continuación se muestra un ejemplo de un esquema D8PSK, donde el modulador y demodulador aplican además de la técnica de codificación mencionada anteriormente, código de Gray. Si bien Gray se explica más adelante, podemos mencionar que solo se aplica en PSK, siendo la manera más eficiente de hacer modulación y es por esta razón que se ve implementado en este ejemplo. Esta codificación implica una distribución distinta de los mensajes digitales sobre las waveform a transmitir. La finalidad es lograr algunas ventajas en esquemas PSK.



Una observación importante de estas técnicas de modulación es que cualquier fasor en el plano es transmitido como una modulación en amplitud tanto en fase como en cuadratura, implicando una proyección del pulso formador de onda hacia las componentes de seno y coseno de la portadora. Para facilitar el análisis se omitió la especificación del pulso formador de onda y se asumió cuadrado. Tranquilamente se podría haber elegido una forma de onda del tipo raíz de coseno alzado para solucionar problemas de ISI, como se explicó en el capítulo de Modulación banda base.

Demodulador DMPSK

El proceso de demodulación está netamente relacionado con el proceso de modulación. Para modular, partimos de considerar a la información como una señal compleja de la forma $g(t) = x(t) + j y(t)$ y a la portadora como $e^{j\omega_0 t}$, entonces multiplicamos ambas funciones y sacamos parte real para obtener la señal a transmitir, es decir, $s(t)$. De esta forma, la demodulación consiste en multiplicar la señal recibida por otra exponencial compleja pero de la forma $e^{-j\omega_0 t}$. Esto permite obtener la señal en banda base.



Como ejemplo, suponiendo que el modulador D8PSK transmite en un instante de tiempo la señal

$$s(t) = -0,707 \cdot \cos(w_o t) - (-0,707) \cdot \text{sen}(w_o t)$$

$$s(t) = -0,707 \cdot \cos(w_o t) + 0,707 \cdot \text{sen}(w_o t)$$

$$s(t) = \cos\left(w_o t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

¿Qué obtenemos en el punto **X** (**A'**) y **Y** (**B'**) de nuestro demodulador? Para empezar analicemos el punto A:

$$A = (-0,707 \cdot \cos(w_o t) + 0,707 \cdot \text{sen}(w_o t)) \cos(w_o t)$$

entonces, trabajando con la expresión, obtenemos:

$$A = -0,707 \cdot \cos^2(w_o t) + 0,707 \cdot \text{sen}(w_o t) \cdot \cos(w_o t)$$

$$A = \frac{-0,707}{2} (1 + \cos(2w_o t)) + \frac{0,707}{2} (\text{sen}(2w_o t))$$

Podemos observar de dicha expresión que tenemos un término en banda base y otros dos términos que corresponden a una señal modulada en el doble de la frecuencia de la portadora. Entonces podríamos aplicar un filtro pasabajos para obtener los valores correspondientes.

$$A' = -0.707 \text{ (times a scale factor)}$$

Para obtener los valores en B, deberemos hacer el mismo procedimiento pero multiplicando la señal recibida por “-sen(w_ot)”. ¿Por qué **-sen(w_ot)** ? Porque proviene de $e^{-jw_o t}$.

$$\begin{aligned} B &= (-0.707 \cos w_o t + 0.707 \sin w_o t) (-\sin w_o t) \\ &= \frac{0.707}{2} \sin 2w_o t - \frac{0.707}{2} (1 - \cos 2w_o t) \end{aligned}$$

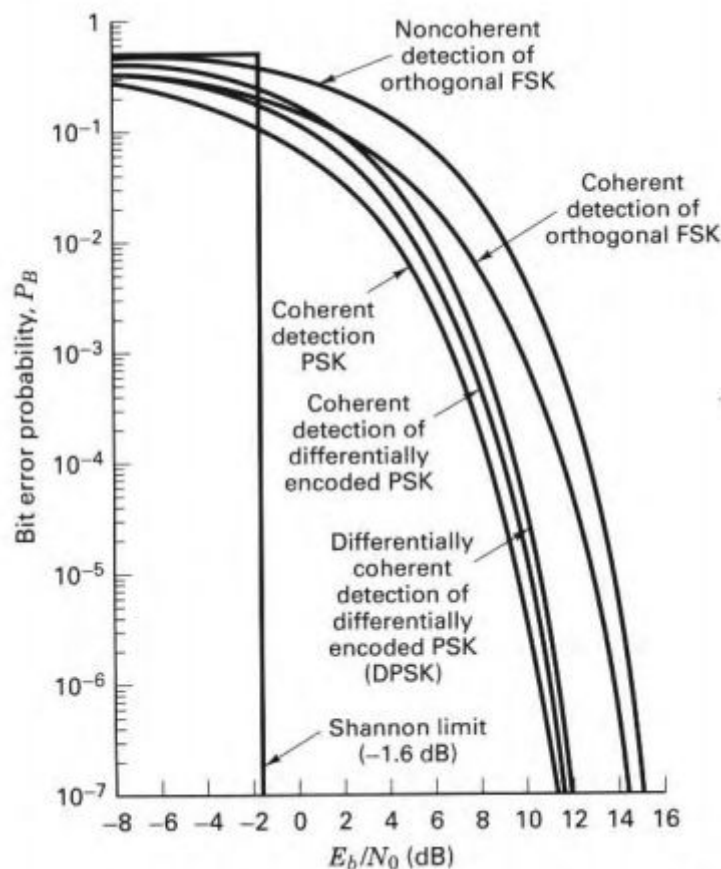
Filtrando encontramos que:

$$B' = -0.707 \text{ (times a scale factor)}$$

Con dichos valores deberemos calcular mediante $\arctg(B'/A')$ o $\arctg(Y/X)$ a que φ_k corresponde ese instante de tiempo T_s y luego guardar el valor para hacer la diferencia.

Performance de Error

La probabilidad de error de bits es un parámetro fundamental en los sistemas de comunicación digital para hablar de la performance de calidad. En banda de paso podemos dividir a los sistemas de comunicaciones digitales binarios desde el punto de vista de detección, Coherentes y No coherentes y desde el punto de vista de esquema de modulación/Demodulación PSK ó FSK.



La siguiente imagen muestra ciertas características importantes a tener en cuenta. Independientemente si se trata de técnicas de demodulación Coherentes o No Coherentes, para sistemas digitales binarios ($M=2$), PSK siempre obtiene una performance mucho mejor que FSK. Por otro lado, si consideramos las diferentes técnicas de demodulación dejando fija la técnica de modulación, ya sea, FSK o PSK siempre encontramos que la demodulación coherente presenta mejor performance respecto a la no coherente. Combinando ambos análisis podríamos plantear que el mejor esquema es PSK Coherente. Sin embargo, desde el punto de vista práctico es irrealizable. Entonces nuestra mejor opción (práctica), es decir, las que siguen en orden creciente en probabilidad de error de bits corresponde a esquemas DPSK (Detectados

coherentemente y Diferencialmente coherente). Por último tenemos los dos esquemas de FSK ortogonales. Primero el coherente y luego el no coherente.

Haciendo un resumen práctico de lo mencionado anteriormente, podríamos ordenar a los sistemas de comunicación digital de acuerdo a la probabilidad de error de bits dejando el resto de parámetros fijos, es decir, ancho de banda, potencia de transmisor, cantidad de bits por mensaje digital ($M=2$) para establecer que tan buenos son cada uno de ellos. Se podría hacer una interpretación con respecto a la figura anterior, en cómo partiendo desde la izquierda y yendo hacia la derecha en $E_b/N_0(\text{db})$ las distintas formas de modulación van disminuyendo en performance. Yendo de mejor a peor con las condiciones planteadas, el orden sería:

- **PSK Coherente**
- **DPSK Detectado Coherentemente (Mide cuanto cambia)**
- **DPSK Detectado Diferencialmente Coherente (Mide si cambio o no)**
- **FSK Ortogonal Coherente**
- **FSK Ortogonal No Coherente**

Es necesario mencionar que en todos estos sistemas siempre se considera igual probabilidad de ocurrencia para las waveform y en el caso de $M=2$, la probabilidad de error de símbolo es igual a la probabilidad de error de bit. Sin embargo, cuando M crece ya no tiene sentido hablar de probabilidad de error de bit porque los símbolos transportan más de 1 bit, es decir, transportan k bits y la probabilidad de errar un símbolo puede implicar que se erren más de 1 bit, dejando de lado linealidad entre ambos parámetros.

Performance de error en BPSK Coherente

Siempre que consideramos BPSK estamos hablando de esquemas de modulación y demodulación que trabajan con waveform antipodales. Las señales antipodales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ pueden ser caracterizados en un espacio unidimensional por medio de la utilización de una única base.

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{E} \psi_1(t) \\ s_2(t) &= -\sqrt{E} \psi_1(t) \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq T_s$$

El detector deberá elegir las $s_i(t)$ con mayor salida $z_i(T_s)$ del correlador. En el caso de señales antipodales de igual energía, el detector utiliza una regla de decisión.

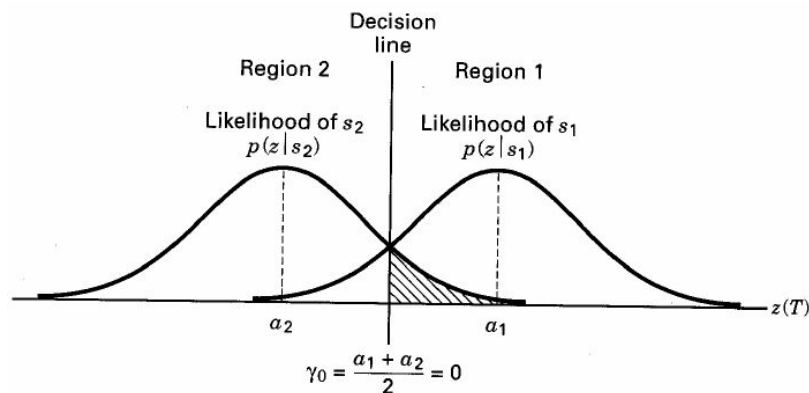
$$\begin{aligned} s_1(t) & \quad \text{si } Z(T) > \gamma_o \\ s_2(t) & \quad \text{para los otros casos} \end{aligned}$$

Una vez aclarado esto, podemos decir que el detector comete dos tipos de errores. El primero surge cuando se transmite $s_1(t)$ pero el ruido es de tal magnitud que el detector toma una medida negativa para $z(T_s)$ y decide sobre la hipótesis H_2 , es decir, que la

señal $s_2(t)$ fue transmitida. El segundo tipo de error tiene lugar cuando la señal $s_2(t)$ es transmitida pero nuevamente por el ruido el detector toma una magnitud positiva de $z(Ts)$ y decide sobre la hipótesis H_1 , lo que implica que la señal $s_1(t)$ fue transmitida.

En definitiva, lo que estamos planteando es lo mismo que el análisis de la performance de error para sistemas binarios en banda base.

$$P_B = P(H_2/s_1).P(s_1) + P(H_1/s_2).P(s_2)$$



$$P_B = \int_{(a_1 - a_2)/2\sigma_o}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{(a_1 - a_2)}{2\sigma_o}\right)$$

Donde a_1 y a_2 representan las componentes de energía de las señales recibidas, tanto para $s_1(t)$ como para $s_2(t)$. Además, consideramos que el canal no atenúa las señales que se transmiten (Toda la energía transmitida es recibida). Por otro lado, la varianza del ruido a la salida del correlador σ^2 puede ser reemplazada por $N_o/2$

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right)$$

Performance de error para DBPSK Detección Coherente.

El análisis es muy similar a PSK Coherente, solo que cada decisión representa un "1" o "0" binario producto de analizar cuánto cambió un símbolo respecto al otro en su fase.

Considerando que estos esquemas de modulación/demodulación trabajan con codificación de la información de forma diferencial y detectan coherentemente, la probabilidad de error se degrada respecto a BPSK coherente. ¿Por qué? Porque cualquier simple error determinará por lo general dos decisiones erróneas ya que siempre se decide en función del símbolo anterior

$$P_B = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right]$$

Performance de error para DBPSK Detectado Diferencialmente Coherente.

Estos esquemas de modulación/demodulación trabajan al igual que DBPSK detectado coherentemente con respecto al modulador. Es decir, utilizan codificación diferencial de la información digital. Sin embargo, en el receptor, en vez de medir cuánto cambió la fase de un símbolo o waveform recibida respecto a otra, se preocupa por analizar simplemente si cambio o no. No interesa la magnitud del cambio, sólo si existió.

Para entender más en detalle lo expresado anteriormente, definimos en primer lugar las señales a transmitir:

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi \pm \pi) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

Recordando que las decisiones en DBPSK se basan en la diferencia de fase entre señales recibidas sucesivamente, cada bit será transmitido con un par de señales:

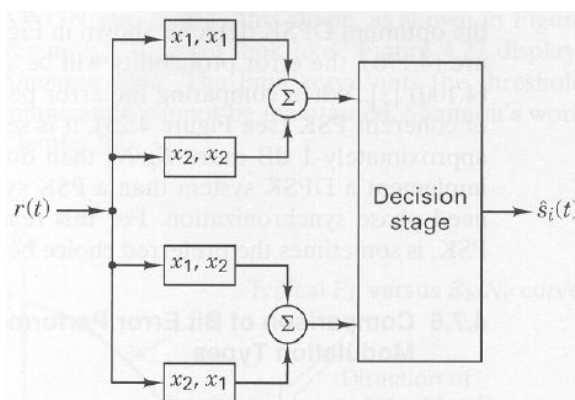
$$s_1(t) = (x_1, x_1) \quad \text{o} \quad (x_2, x_2) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2T$$

$$s_2(t) = (x_1, x_2) \quad \text{o} \quad (x_2, x_1) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2T$$

Como podemos ver, las waveform a transmitir no duran “Ts” como en el caso de DBPSK detallado en la sección anterior. En este caso duran “2Ts”, por lo tanto obtendremos valores de $z(2Ts)$ de la siguiente manera

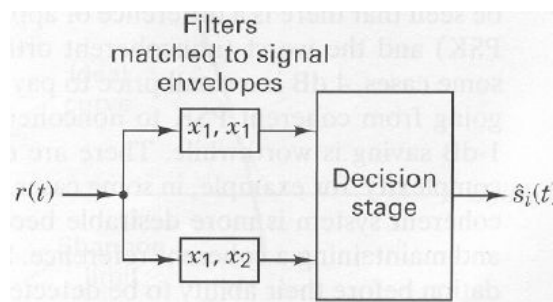
$$z(2T) = \int_0^{2T} s_1(t) s_2(t) dt = \int_0^T [x_1(t)]^2 dt - \int_0^T [x_1(t)]^2 dt = 0$$

Esta es una de las posibilidades, resulta que tenemos 4 de ellas. Por lo tanto, en principio debemos tener un demodulador con 4 canales, donde cada uno de ellos responde a una de las posibles waveform a transmitir



Es decir, que para transmitir mensajes digitales binarios donde teóricamente necesito 2 waveform estoy utilizando un esquema de demodulación de 4 canales, donde cada canal tiene un correlador para cubrir alguna de las tantas posibles combinaciones entre las dos waveform. Una locura de ineficiencia. Encima, este esquema permite tomar decisiones cada $2T_s$ pero ¿Qué ocurre con el dato en “ $3T_s$ ”? Pues claro, este esquema sólo responde a los datos pares porque obtiene resultados en múltiplos pares de “ $2T_s$ ”. Por lo tanto deberíamos armar 4 canales más para analizar las decisiones en $3T_s$, $5T_s$, $7T_s$... Conclusión, con $M=2$ transportando la información en la diferencia de fase requiere un esquema de demodulación con 8 canales.

Surge una alternativa a estos esquemas. Utilizar solamente dos canales, uno para analizar la transmisión de una waveform que no contenga cambios en el periodo de tiempo “ $2T_s$ ” y otro canal para analizar si la waveform transmitida contiene algún cambio en dicho periodo. No importa cual sea el cambio, solo es necesario saber si existe. De esa manera, reducimos la cantidad de ramas de 8 a 4.



Es decir, el esquema simplifica el análisis de cada una de las ramas, ya que anteriormente había un detalle excesivo sobre las distintas combinaciones de las señales que generaban las waveform. Cuando se transmitía, por ejemplo (x_2, x_2) , la primer rama acoplada a (x_1, x_1) daba a su salida un resultado “-1” mientras que para el caso de la rama contraria, acoplada a (x_2, x_2) daba el resultado máximo, siendo este “1”. Con respecto a las dos ramas restantes y que son inversas $(x_1, x_2 ; x_2, x_1)$ su resultado a la salida es de “0”. Algo muy importante de entender es que elegimos señales antipodales en T_s para trabajar pero el esquema de detección transforma nuestra estructura de señales antipodales en una estructura de señales ortogonales en un intervalo de tiempo de 0 a $2T_s$.

Esto se produce porque el primer sistema con las 8 ramas, utiliza para funcionar correlación cruzada entre las diferentes $s_i(t)$, por eso puedo reducir la cantidad pero termino trabajando con esquemas ortogonales y no antipodales como comenzó.

Pagando con probabilidad de error

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Ya definido los 3 tipos de PSK y su P_b asociadas, yendo de izquierda (mejor) hacia derecha (peor), estas resultaron ser:

$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$	$P_B = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right]$	$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$
BPSK Coherente	DBPSK Coherente	DBPSK Diferencial Coherente

Performance de error para BFSK Detección Coherente.

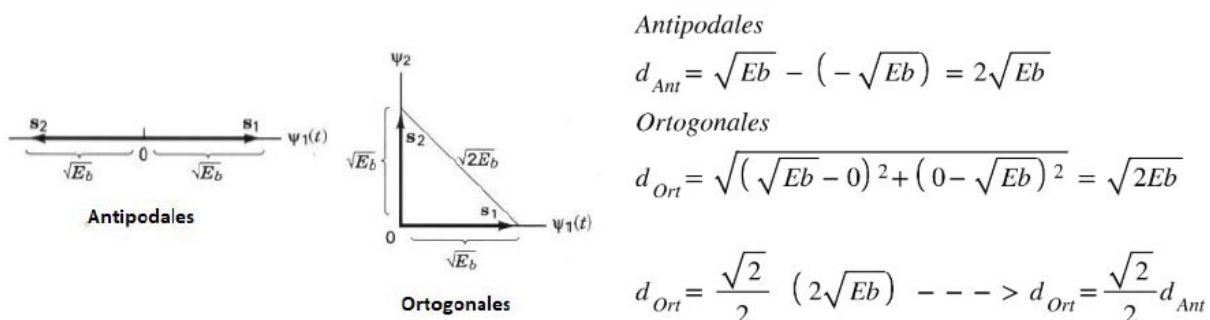
A la hora de hablar de FSK se debe de recordar que ahora se considerará casos ortogonales para obtener la probabilidad de error bit, que en este caso particular sigue siendo igual a la probabilidad de error de símbolo por ser binario. La definición para señales coherentes binarias es:

$$P_B = \int_{(a_1 - a_2)/2\sigma_o}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{(a_1 - a_2)}{2\sigma_o}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\rho = \cos \theta$, y que en FSK las señales son ortogonales dando un $\theta = \pi/2$ haciendo que $\rho = 0$, de manera que la P_B es:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1 - \rho)}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Con esta P_B podemos observar via la figura planteada al inicio del tema de Performance de Error la diferencia de 3dB que existe entre BFSK y BPSK, siendo BFSK la de peor performance, debiéndose a que la distancia entre extremos de vectores es 0.707 de distancia en BFSK con respecto que para BPSK

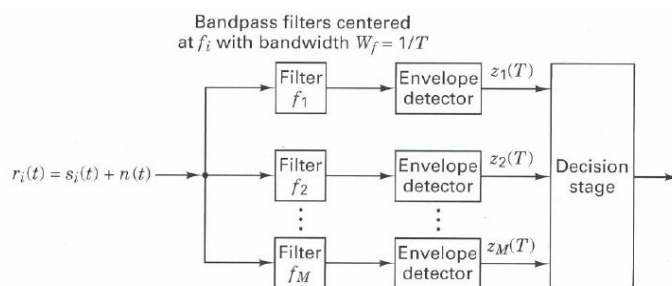


Performance de error para BFSK No Coherente

Considerando un conjunto de señales ortogonales binarias igualmente probables definidas de la siguiente manera:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(w_i t + \phi) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad i=1, 2$$

El detector está caracterizado por dos canales compuestos por filtros pasabandas y detectores de envolvente. La entrada a los detectores consiste de la señal recibida $r(t)=s_i(t) + n(t)$, donde $n(t)$ es un proceso de ruido blanco gaussiano de banda limitada con una densidad espectral de potencia $N_0/2$. Con $s_i(t)$ siendo las waveform transmitidas, las cuales cuentan con una separación en frecuencia mínima para evitar solapamiento.



Para $s_1(t)$ y $s_2(t)$ podemos plantear la probabilidad de error de la siguiente manera:

$$P_B = \frac{1}{2} P(H_2/s_1) + \frac{1}{2} P(H_1/s_2) = \int_{-\infty}^0 p(z/s_1) dz + \int_0^{\infty} p(z/s_2) dz$$

Para el caso binario, la prueba estadística, es decir, $z(Ts)$ está definida por $z_1(Ts) - z_2(Ts)$. En el caso de la ausencia de ruido encontraríamos que $z(Ts)$ está conformado de la siguiente manera:

$$z(T) = \sqrt{2E/T} \quad \text{cuando se transmite } s_1(t)$$

$$z(T) = -\sqrt{2E/T} \quad \text{cuando se transmite } s_2(t)$$

Sin embargo, siempre en un sistema de comunicaciones digitales está presente el ruido en la entrada del demodulador. Así que vamos a considerar el análisis de su efecto sobre los detectores de envolvente no lineales.

Considerando que se transmite $s_2(t)=\cos(w_2 t)$, tal que $r(t)=s_2(t)+ n(t)$, la salida $z_1(T)$ es solo una variable aleatoria de ruido blanco gaussiano que no posee componente de señal útil. ¿A qué se debe esto? a que los filtros implementados no están acoplados a las waveform, dejan pasar todo tipo de señal que se encuentre dentro del ancho de banda del filtro ($1/T_s$), por lo tanto si existe ruido en dicha banda de frecuencia, lo deja pasar. Como el ruido en la entrada del demodulador es blanco, afecta a todas las componentes en frecuencia desde $-\infty$ a ∞ con una densidad espectral de potencia plana en toda la banda de frecuencia. Por lo tanto pasa por los filtros del demodulador y se transforma en una variable aleatoria con distribución gaussiana. Una variable aleatoria con distribución

gaussiana al ser aplicada a un detector de envolvente no lineal produce otra variable aleatoria a su salida con una distribución de Rayleigh. De manera que vamos a ver cómo están distribuidos los valores de la variable aleatoria $z_1(T_s)$ dado que sabemos que se transmitió $s_2(t)$.

¿Que características tiene la distribución de Rayleigh? Se suele presentar cuando un vector bidimensional (por ejemplo, el que representa la velocidad del viento) tiene sus dos componentes, ortogonales, independientes y siguen una distribución normal. Su valor absoluto o lo que es lo mismo decir, el módulo seguirá entonces una distribución de Rayleigh. Esta distribución también se puede presentar en el caso de números complejos con componentes real e imaginaria independientes y siguiendo una distribución normal. En definitiva, lo que está reflejando la distribución de Rayleigh es la variación estadística de la envolvente compleja de dos señales gaussianas, una en fase y otra en cuadratura con media nula. La envolvente se transformó en una variable aleatoria producto del ruido.

Su función de distribución de probabilidad es :

$$f(x|\sigma) = \frac{x \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma^2}$$

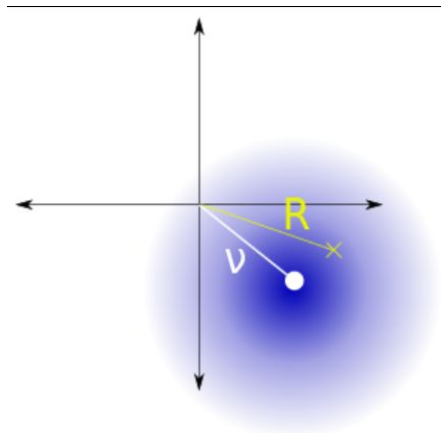
Donde x es la variable aleatoria en cuestión, para nosotros x representa la envolvente en los instantes de tiempos múltiplos de T_s . Es decir, $z(T_s)$.

$$p(z_1/s_2) = \begin{cases} \frac{z_1}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2\sigma_0^2}\right) & \text{para } z_1 \geq 0 \\ 0 & \text{para } z_1 < 0 \end{cases}$$

Por otro lado, cuando analizamos la rama correspondiente a la waveform transmitida que posee el filtro que deja pasar $s_2(t) + n(t)$, al ingresar al detector de envolvente no lineal, transforma la variable aleatoria $z(t)$ con distribución gaussiana y de media $\sqrt{\frac{2E}{T}}$ a una variable aleatoria de distribución Rician. Es decir, $z_2(T_s)$ tiene distribución de probabilidad de Rician.

¿Que bosta es esto? En teoría de la probabilidad, la distribución de Rician es la distribución de probabilidad de la magnitud de una variable aleatoria bivariada circular normal con una media potencialmente no nula. No es más que otra cosa que la distribución de Rayleigh con una media diferente de cero! Jah toma pa vo aleatoria.

Tiene toda la lógica, ya que dicha variable aleatoria tiene un valor medio asociado a la energía del símbolo recibido. Que es lo que esperamos obtener en la envolvente cuando no existe ruido. Creo que con un dibujito de la distribución de Rician se va a entender un toque mejor.



En el plano 2D, elija un punto fijo a una distancia v del origen. Generar una distribución de puntos 2D centrada alrededor de ese punto, donde la X y Y coordenadas se eligen independientemente de una *distribución gaussiana* con una desviación estándar σ (región azul). Si R es la distancia desde estos puntos hasta el origen, entonces R tiene una distribución de Rician.

Para nuestro caso, podemos expresar la función de distribución de probabilidad de $z_2(T_s)$ de la siguiente forma:

$$p(z_2/s_2) = \begin{cases} \frac{z_2}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{(z_2^2 + A^2)}{2\sigma_0^2}\right) I_0\left(\frac{z_2 A}{\sigma_0^2}\right) & \text{para } z_2 \geq 0 \\ 0 & \text{para } z_2 < 0 \end{cases}$$

$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \theta) d\theta$


¿Como nos equivocamos? Cuando transmitimos $s_2(t)$ y en el receptor la muestra $z_1(T_s)$ (debido a ruido solamente) es mayor que la muestra $z_2(T_s)$ (señal + ruido). Por esto la expresión de probabilidad de error se plantea como :

$$P_B = P\left(\left(z_1 > z_2\right) / s_2\right)$$


En definitiva, significa que vamos a calcular $P(z_1/s_2)$ desde un valor particular de z_2 hasta infinito y a esa probabilidad la vamos a promediar sobre todos los valores posibles de z_2

$$P_B = P(z_1 > z_2/s_2) = \int_0^\infty p(z_2/s_2) \left[\int_{z_2}^\infty p(z_1/s_2) dz_1 \right] dz_2 =$$

$$\int_0^\infty \frac{z_1}{\sigma_o^2} \exp\left(-\frac{(z_1^2 + A^2)}{2\sigma_o^2}\right) I_0\left(\frac{z_2 A}{\sigma_o^2}\right) \left[\int_{z_2}^\infty \frac{z_1}{\sigma_o^2} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2\sigma_o^2}\right) dz_1 \right] dz_2$$



Promedia la probabilidad sobre todos los valores de z2



Probabilidad condicional de un error para un valor fijo de z2

Esta integral MEGA ARCHI COMPLICATED puede dejarse de lado porque no estamos estudiando cálculo y su resolución directamente es:

$$P_B = \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{A^2}{4\sigma_o^2}\right)}$$

Además, sabemos que la potencia de ruido luego del filtro resulta ser:

$$\sigma_o^2 = \left(\frac{N_o}{2}\right) 2 \cdot W_f$$

reemplazando la expresión anterior para obtener finalmente la probabilidad de error de bit:

$$P_B = \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{A^2}{4N_o W_f}\right)}$$

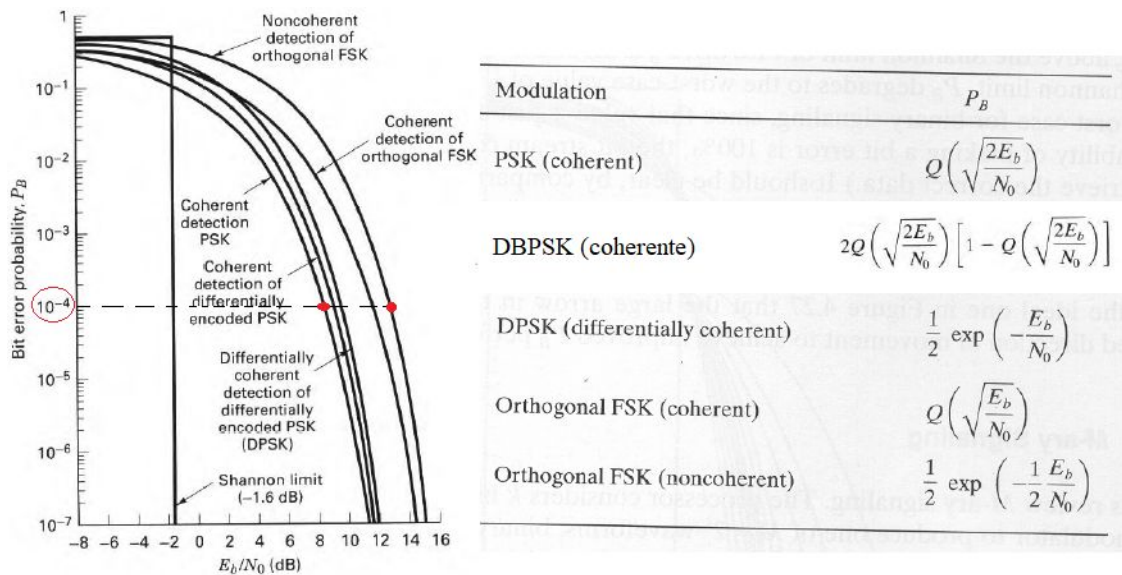
Vemos que la probabilidad de error de bit depende del ancho de banda del filtro pasabanda para cada una de las ramas de nuestro demodulador. Este resultado es clarito siempre y cuando consideremos el ISI despreciable.

Comparación de P_B para los distintos sistemas de modulación

Ya se observaron 5 casos distintos de modulación, en donde 3 están vinculados con PSK y otros 2 con FSK. Cada uno cuenta con P_B particular siendo en modulación binaria quien mejor resultado obtiene BPSK y el peor BFSK no coherente como se observa en la tabla. Además se puede observar que entre estos dos casos, por ejemplo si consideramos una $P_B=10^{-4}$ existe una diferencia de 4dB entre ambas. Este dato será útil según el tipo de implementación que se desee realizar.

Por último, observar la línea paralela a P_B la cual está etiquetada como Límite de Shannon, este establece el umbral por debajo del cual una comunicación no puede ser

establecida, este nos sirve como parámetro para saber cuan bueno es el tipo de modulación que estamos considerando respecto al caso ideal.



Señalización M-aria

En este apartado ya se deja lo binario para comenzar a hablar de $M > 2$, en donde esta modificación generará impacto sobre la P_B para cada uno de los modos de modulación/demodulación, afectando casi en sentidos contrarios el análisis en PSK o FSK. Esto hace que se divida el análisis entre señales ortogonales (FSK) y señales con M fases distintas (PSK). Se observará que a medida que aumentemos el K o M , los sistemas PSK tendrán una peor Performance de Error manteniendo fija la energía de símbolo, por lo que es muy importante considerar que el análisis actual se realiza solo y únicamente con respecto a la P_B . Parámetros como lo son el ancho de banda, costos, complejidad, etc. no se contemplan para este análisis.

Respecto al coeficiente p ya no podremos afirmar que si tratamos el caso de PSK obtendremos $p = -1$ por ser del tipo antipodal, esto sucedía únicamente para BPSK ya que la cantidad de señales con que contábamos era solo 2. Ahora con $K > 1$ o, lo que sería lo mismo, $M > 2$, la determinación del " p " dependerá entre que señales se esté comparando. Sin embargo, para el caso de FSK se mantiene para todas las waveform $p = 0$.

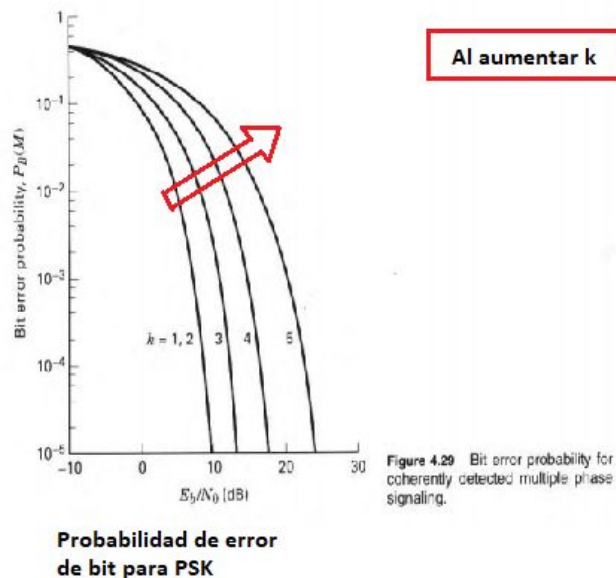
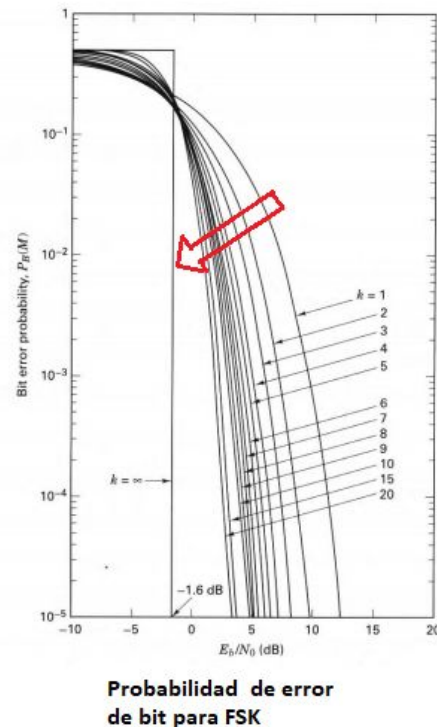


Figure 4.29 Bit error probability for coherently detected multiple phase signaling.



Representación vectorial de MPSK

Una característica particular de este modo de modulación/demodulación es que el aumento de M no repercute en el ancho de banda, ya que la señal a transmitirse seguirá siendo la misma, solo que ahora se utilizarán más fases con respecto a lo que era en binario.

Un caso particular se da entre $k=1$ (BPSK) y $k=2$ (QPSK), ya que estos cuentan con la misma curva para P_B , en donde esto se debe a que en el demodulador, se puede pensar el análisis de las señales recibidas mediante observaciones del tipo antipodal en fase y antipodal en cuadratura, dado el caso de $K=2$, se estarán transmitiendo como máximo 4 señales, en donde cada una de ellas tomará valores únicamente asociados a fase o cuadratura. Esto se logra implementando un sistema de dos receptores que sea eficiente en el uso de las bases, en lugar de trabajar con uno solo en un esquema ortogonal. Para demostrar de qué forma se construye este modulador debemos pensar en la descomposición de QPSK en dos secuencias BPSK ortogonales una a la otra, es decir, una secuencia en fase y la otra en cuadratura y aplicaremos la ecuación general de E_b/N_0 , en donde para QPSK tenemos una tasa R y una potencia media S , mientras que en las secuencias BPSK ortogonales, cada una de ellas tiene la tasa de $R/2$ y la potencia media $S/2$.

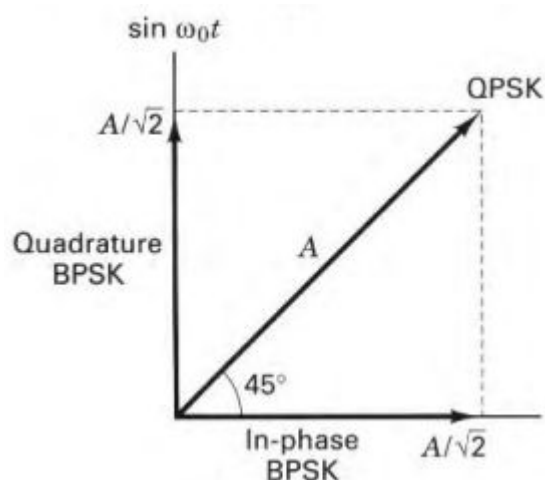
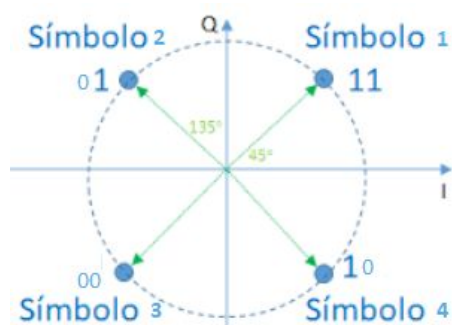


Figure 4.31 In-phase and quadrature BPSK components of QPSK signaling.

Quedando:

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{S}{N} \left(\frac{W}{R} \right) = \frac{\frac{S}{2}}{N} \left(\frac{\frac{W}{R}}{2} \right)$$

Es decir, la mitad del tiempo transmito BPSK con un coseno, una señal en fase con ángulos 0 y π y la otra mitad del tiempo transmito BPSK con un seno, es decir en cuadratura con fase $\pi/2$ y $3\pi/2$.



Secuencia a transmitir:

00 - 10 - 11

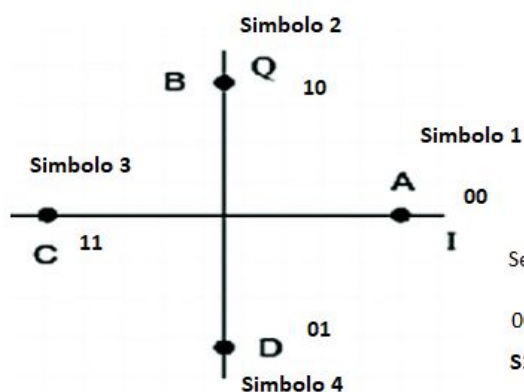
S3(t) S4(t) S1(t)

$$S3(t) = -0.707 \cos(\omega_0 t) - (-0.707) \sin(\omega_0 t)$$

$$S4(t) = 0.707 \cos(\omega_0 t) - (-0.707) \sin(\omega_0 t)$$

$$S1(t) = 0.707 \cos(\omega_0 t) - (0.707) \sin(\omega_0 t)$$

Esquema de demodulación
Ortogonal



Secuencia a transmitir:

00 - 10 - 11

S1(t) S2(t) S3(t)

$$S1(t) = 0.707 \cos(\omega_0 t)$$

$$S2(t) = 0.707 \sin(\omega_0 t)$$

$$S3(t) = -0.707 \cos(\omega_0 t)$$

Esquema de demodulación Antipodal QPSK
Modulador en fase (A - C) $R_s/2$ 00 y 11
Modulador en Cuadratura (B - D) 10 y 01

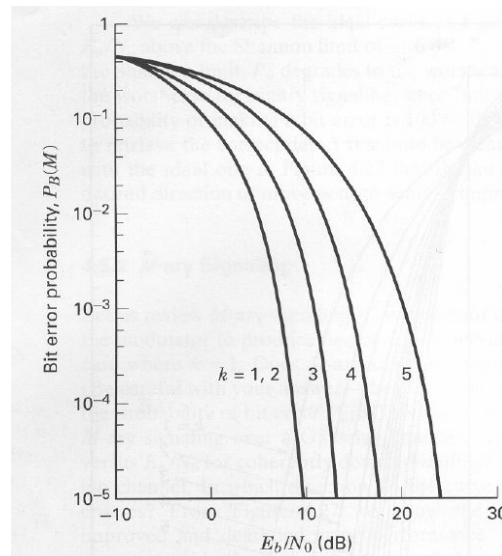
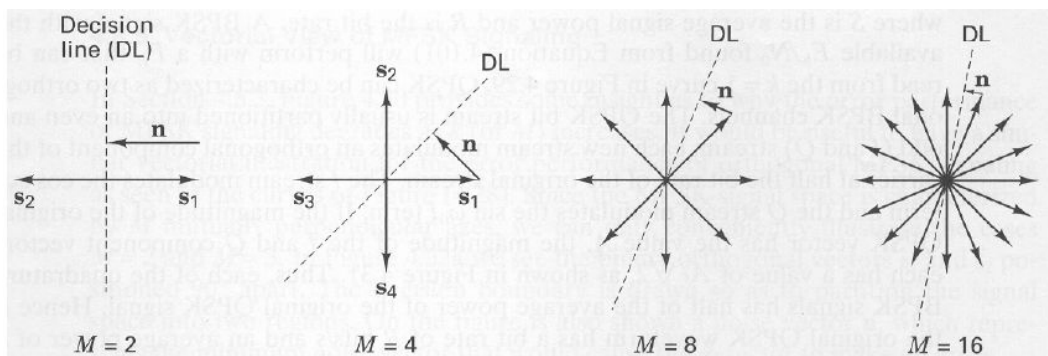


Figura: Probabilidad de error de bits para PSK

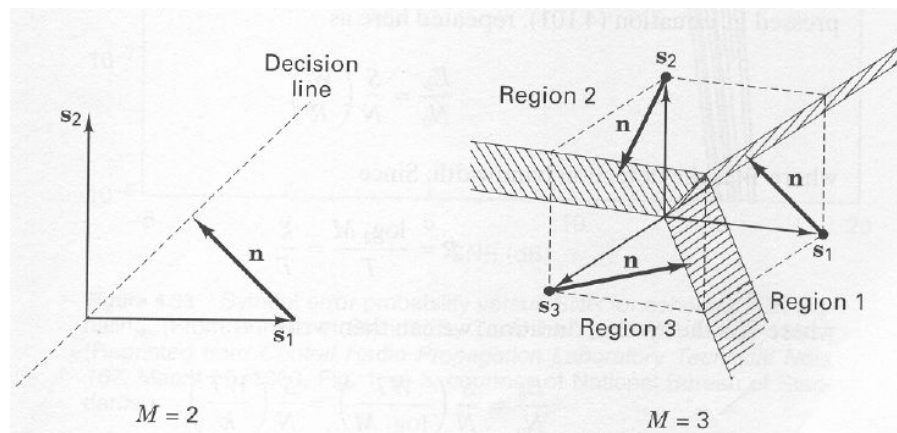
Puntualizando sobre el factor que está en análisis, al aumentar el valor de k y siempre trabajar con solo 2 bases, se comienza a resignar en las distancias entre regiones de decisión entre símbolos sucesivos, esto afecta directamente en la magnitud del ruido necesaria para generar un error a la hora de la decisión, esto se observa gráficamente de la siguiente manera:



Lo que se mencionó anteriormente significa que aumentar K hace que la probabilidad de error de bit aumente, porque cuando K se hace cada vez más grande, lo que sucede es que además de llevar más bits por símbolo, los mismos se amontonan en el espacio vectorial, es decir, la distancia entre las waveform disminuye, lo que significa que $Q(x)$ se hace más pequeño y esto implica que un ruido diminuto puede cambiar la decisión entre un símbolo u otro, entonces es más probable que erremos símbolos y bits.

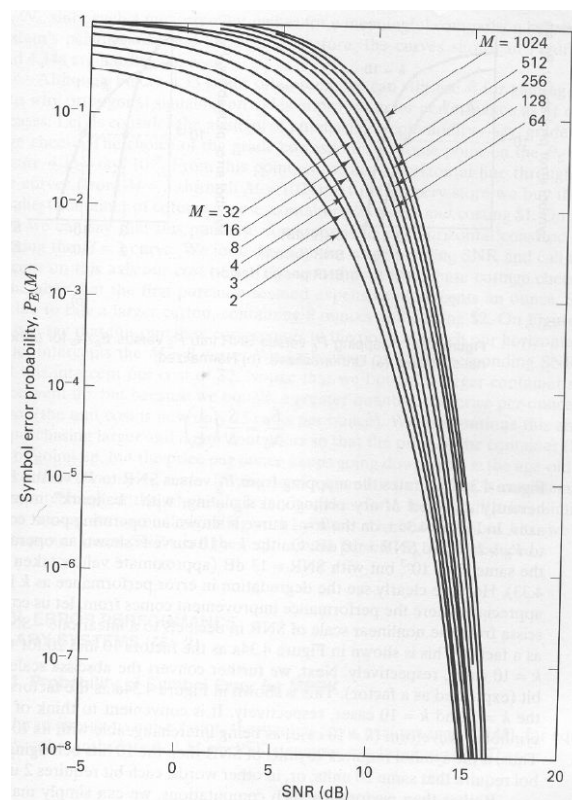
Representación vectorial de MFSK

Para el caso de FSK, se mantiene la ortogonalidad sin importar el valor de M que se utilice, esto permite que la región de decisión permanezca siempre a la misma distancia entre señales pero no se debe de olvidar que este aumento en K o M repercutirá negativamente en el ancho de banda necesario.



Al aumentar K pero mantener constante la energía por símbolo transmitida (potencia de transmisor) se debe tener en cuenta que cada símbolo comenzará a estar compuesto por más de un bit, haciendo que la energía en cada uno de los bits transmitidos disminuya por la relación $E_s = K \cdot E_b$. Además, La probabilidad de error de bits se calcula teniendo en cuenta la energía de waveform recibida respecto al ruido y como en FSK la distancia entre las waveform siempre es constante, la potencia de ruido necesaria para generar errores cuando cambia K es constante, esto significa que la probabilidad de error de bit no depende de K , depende de la potencia del transmisor o de E_s .

Si se sabe que la probabilidad de error de bit es independiente de la cantidad de bits que pongas, ¿Por qué no poner más? Porque en estos esquemas de modulación/demodulación tiene más sentido hablar de probabilidad de error de símbolo y resulta que es distinto el comportamiento.



Como se observa en la figura, si nosotros mantenemos la potencia asociada a cada símbolo constante, a medida que se aumente el M, se aumentará la probabilidad de error un símbolo. Este análisis hace un mejor reflejo sobre el aumento del M y su impacto sobre la performance.

Relación eb/no con SNR

Como se ha visto en los anteriores apartados, en un comienzo se habló sobre las relaciones que existen entre la probabilidad de error de bit (P_B) y la E_b/N_0 porque tratábamos esquemas de modulación binarios, donde un bit significaba la transmisión de un símbolo, luego al hablar sobre sistemas M-ario como MFSK (en donde ya la relación entre símbolos y bits dejaba de ser lineal) se mencionó el parámetro SNR, el cual nos da una mejor descripción de los efectos sobre la performance que tiene el aumento de M para los sistemas FSK. Pero para terminar de cerrar el tema de performance de los distintos sistemas, hay que tener en cuenta la relación que existe entre E_b/N_0 y SNR ya que cuando se analizan ambas gráficas en conjunto surgen muchas dudas. Pareciera que los comportamientos se invierten si consideramos como parámetro de referencia E_b/N_0 en vez de SNR, ¿Es esto correcto?. ¿Para solucionar la ambigüedad qué debemos hacer? Tomar un punto de una curva y ver cómo se relaciona con la otra. Para entender la relación primero debemos definir E_b/N_0 en función de SNR:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \left(\frac{W}{R} \right)$$

En donde W nos habla del ancho de banda de detector, tenemos que:

$$R = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{k}{T} \quad T = \text{periodo de simbolo}$$

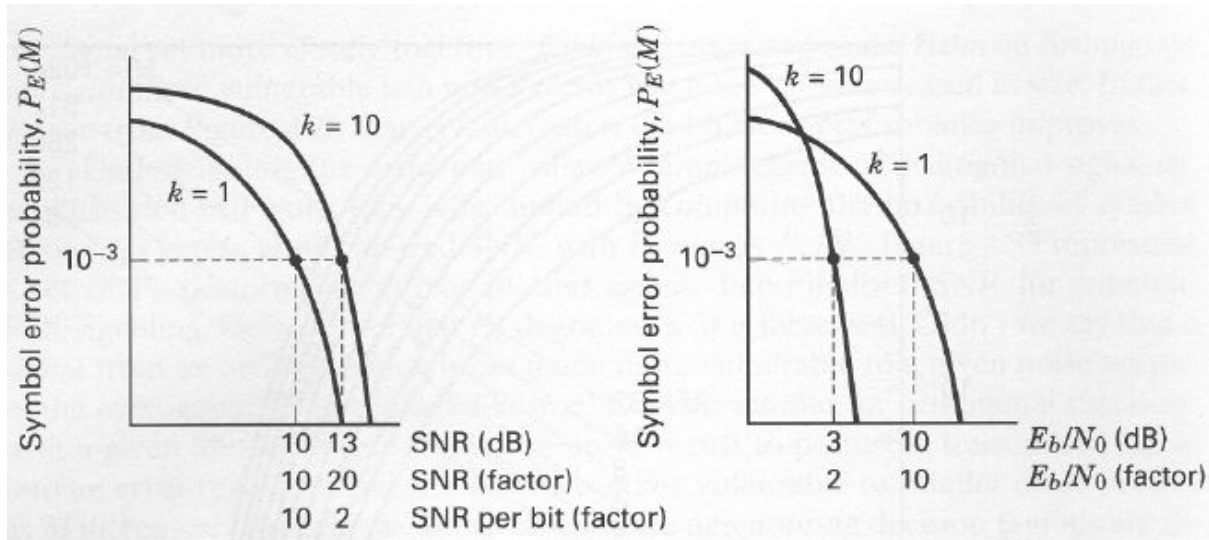
$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \left(\frac{WT}{\log_2 M} \right) = \frac{S}{N} \left(\frac{WT}{k} \right)$$

Considerando que para señales FSK el ancho de banda del detector W, es típicamente igual en valor a la tasa de símbolo $1/T$. Por lo que se podría decir que $WT \approx 1$, llegando a la relación final:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{S}{N} \left(\frac{1}{k} \right)$$

Un ejemplo para esta relación es, si se considera para la figura de la izquierda que relaciona Probabilidad de Error de Símbolo con SNR la curva asociada a K=10 siendo esta la que se ubica más a la derecha. Para pasar esta curva al análisis con respecto a

E_b/N_0 se debe convertir el valor de SNR de decibeles a veces y luego con dicho valor dividir por la cantidad de bit presentes en el mensaje digital “ k ”. De esta manera pasamos de SNR(voces) a E_b/N_0 (voces). Por último convertimos el valor de E_b/N_0 en decibeles para lograr obtener las cantidades que se observan en la figura derecha.



En definitiva, cada gráfica tiene lo suyo. La gráfica de $P_E(M)$ vs SNR nos dice que para mejorar la performance del sistema es necesario aumentar la potencia del transmisor si mantenemos el esquema de modulación fijo. Pero si aumentamos M , además de tener que aumentar indudablemente la potencia del transmisor, deberemos aumentar el ancho de banda de nuestro sistema. En la gráfica de $P_E(M)$ vs E_b/N_0 , nos dice que si dejamos la E_b/N_0 fija (Permitir aumentar la potencia de transmisión) la performance del sistema mejora, pero si mantenemos la potencia del transmisor, lo único que cambia es que necesitamos más ancho de banda para transmitir al cambiar de M y requerimos por bit menos energía. **En conclusión, aumentar el tamaño de M en MFSK nunca nos va a permitir mejorar la performance de error si es el unico parametro que podemos modificar.**

Probabilidad de error de símbolo MPSK y MFSK Coherentes y no coherentes

Con respecto a las performance de los MPSK y comenzando por los coherentes tenemos que para relaciones E_b/N_0 grandes, la probabilidad de error de símbolo en sistemas MPSK coherentes queda dada por:

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right) \quad E_s = E_b (\log_2 M) \quad \text{energía de símbolo}$$

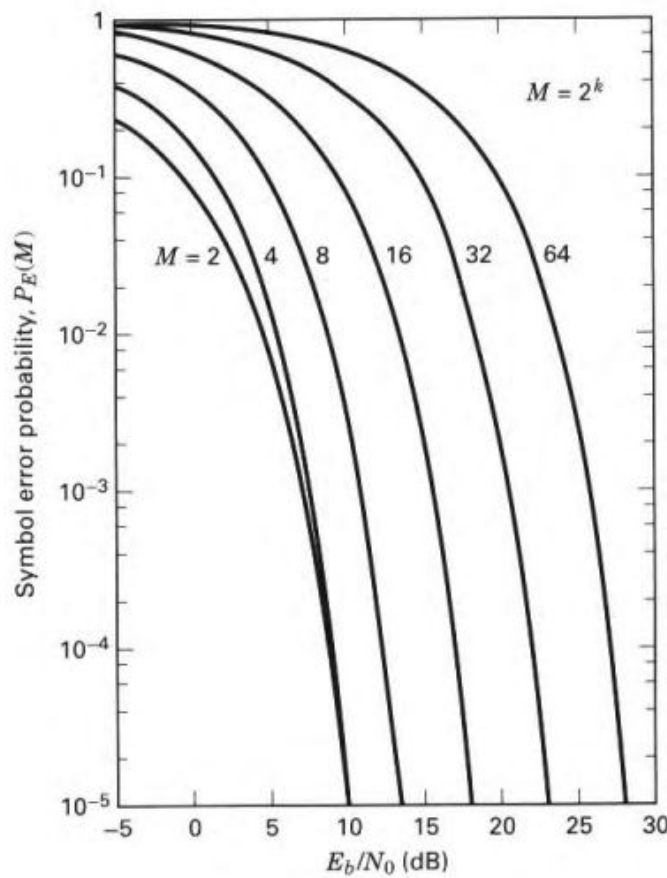


Figure 4.35 Symbol error probability for coherently detected multiple phase signaling. (Reprinted from W. C. Lindsey and M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1973, courtesy of W. C. Lindsey and Marvin K. Simon.)

En el caso de M-DPSK detectado diferencialmente coherente la expresión es:

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2M}}\right) \quad E_s = E_b (\log_2 M) \quad \text{energía de símbolo}$$

Para el caso de los esquemas MFSK, la probabilidad de error de símbolos, para símbolos igualmente probables, para el caso de detectores coherentes, se define como:

$$P_E(M) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad E_s = E_b (\log_2 M) \quad \text{energía de símbolo}$$

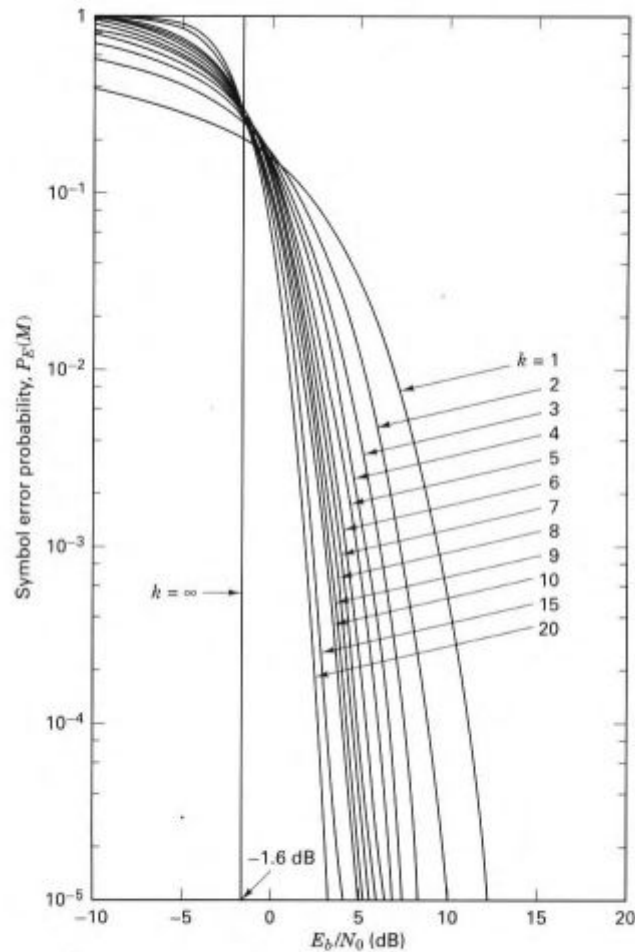


Figure 4.36 Symbol error probability for coherently detected M -ary orthogonal signaling. (Reprinted from W. C. Lindsey and M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973, courtesy of W. C. Lindsey and Marvin K. Simon.)

Para el caso de MFSK no coherente, la probabilidad de error de símbolo se expresa de la siguiente manera:

$$P_E(M) = \frac{1}{M} \exp\left(-\frac{E_s}{N_0}\right) \sum_{j=2}^M (-1)^j \binom{M}{j} \exp\left(\frac{E_s}{jN_0}\right)$$

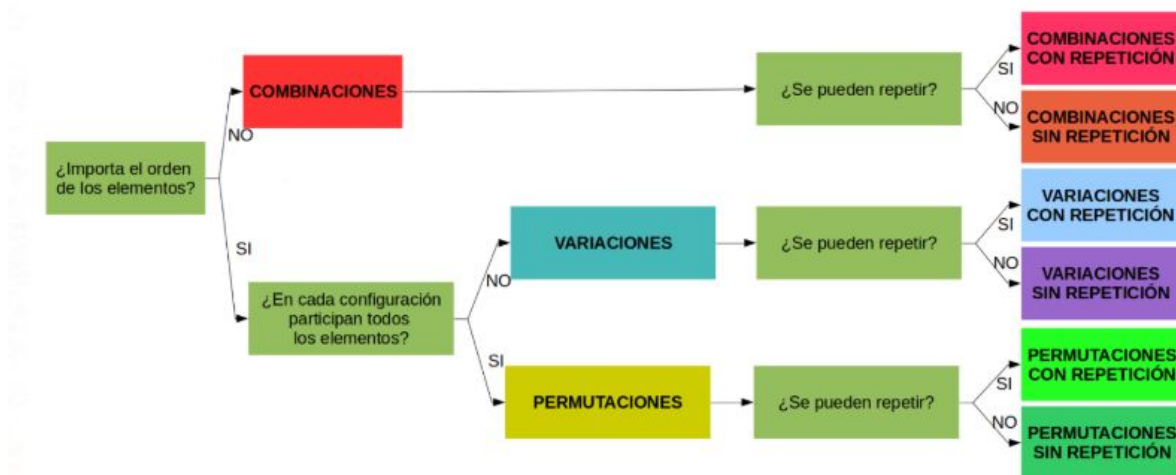
donde

$$\binom{M}{j} = \frac{M!}{j!(M-j)!}$$

Donde la última ecuación representa una combinatoria. Es decir, una ecuación que permite obtener todas las combinaciones con M elementos distintos agrupados de j elementos. Recordemos que la diferencia entre permutaciones y combinaciones es si importa o no el orden. Un ejemplo fácil para visualizar esta situación es la siguiente:

En una clase de 30 alumnos, queremos escoger una comisión de 5 alumnos. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer? Lo importante es que si un alumno fue elegido para formar parte del grupo, sin importar si el alumno fue puesto en la primera

posición o no de dicho grupo. Se consideran la combinación con el resto de alumnos. **Se tratan de combinaciones todas diferentes entre los elementos sin importar el orden.** Un grupo entre Julián, Carlos, Gerónimo, Lucas y Néstor se considera parte de la combinatoria y descarta todos los casos que cambian el orden de estos cinco alumnos. Es decir Carlos, Geronimo, Néstor , Julián y Lucas for example.



En CDA, esta ecuación representa el número de caminos posibles en los que j símbolos de salida de todos los M posibles pueden ser erróneos. Ejemplo: si usamos un sistema binario $M=2$ ¿Que tenemos?

$$P_B = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{2N_0} \right)$$

Pero.. Veníamos tan bien y me saltaste a hablar de probabilidades y combinatorias y toda la gilada y yo te pregunto ¿Que bosta tiene que ver con las probabilidades de error de símbolo?

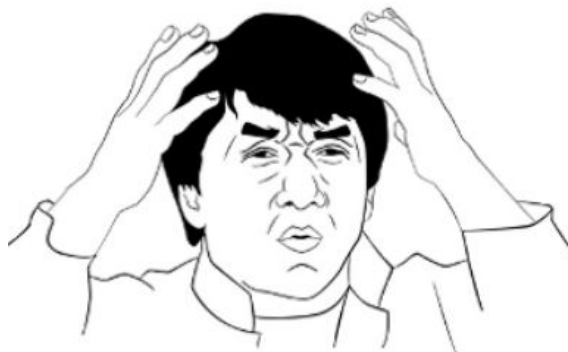
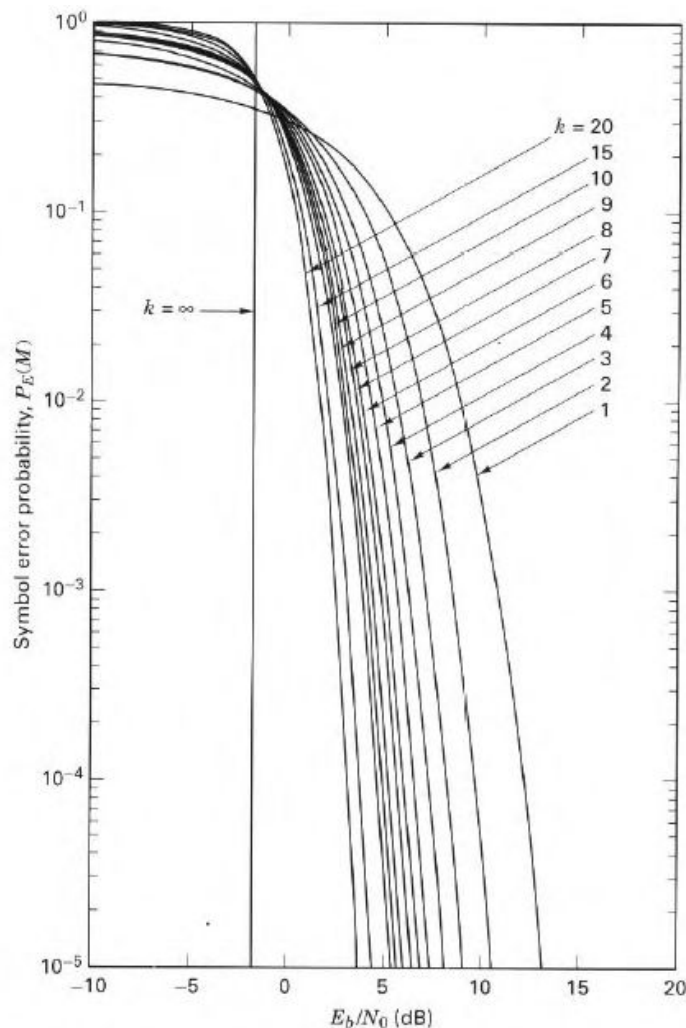


Figura : A consulta

Recordad que estamos hablando de **MFSK no coherente**. Con este la tenemos adentro con la distribución de Rician y Raylight ¿te acordas?

Bueno resulta que la probabilidad de error de símbolo es diferente en estos sistemas por la forma en la que se implementa el demodulador, es decir, mediante los filtros y detectores de envolvente.



La performance de error entre MFSK coherente y no coherente difiere mientras $k < 7$, si el valor de k supera dicho valor se nota una diferencia despreciable entre ambos esquemas. Entonces es posible decir que se encontró un límite superior en la probabilidad de error de símbolo

$$P_E(M) < \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{2N_0}\right)$$

Probabilidad de Error de bit vs Probabilidad de Error de símbolo para señales ortogonales

Para este análisis se plantea un ejemplo el cual describe estos dos tipos de probabilidades. Se pensará en un conjunto de 8 posibles mensajes, en donde cada mensaje está compuesto por 3 bits. En filas se pondrán los distintos posibles mensajes y

mediante columnas los bit que los componen. Si sucediera un error de decisión, esto transformaría la señal correcta en cualquiera de las otras 7 (M-1) señales incorrectas ya que todas tienen igual probabilidad por ser FSK.

	Bit position	
	0	1
Transmitted symbol	0	0
	0	1
	1	0
	0	1
	1	0
	1	1
	0	0
	0	1

¿Cuándo erraría un símbolo? En la figura se observa los distintos 8 posibles mensajes a transmitirse, con uno remarcado el cual se debe al mensaje que se transmitió, de esta manera nosotros podríamos decir que tenemos posibilidad de equivocarnos con los otros 7 símbolos restantes. Pero esto no significa que uno por error el símbolo o mensaje, erre la misma cantidad de bits que conforman al símbolo, si se observa la columna remarcada y junto con la fila también marcada, se puede observar que si se varía este bit que se encuentra en "1" se lo pasa a "0", solo habrá 4 (2^{k-1}) posibilidades de generar un símbolo distinto al transmitido, ya que los otros 3 mensajes restantes también cuentan con un 1 en esa misma ubicación, lo cual no significaría para dicha posición un error de bit. Esto ya nos permite comenzar a sospechar que la relación entre P_B y P_E no es lineal para $K > 1$ o $M > 2$.

Una vez hecho el análisis, se puede obtener las relaciones de probabilidades de error para este ejemplo, siendo $P_E = (2^k - 1) = 7$ y $P_B = (2^{k-1}) = 4$

$$\frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M - 1} = \frac{4}{7}$$

$k=2 ; M=8$

En el resultado obtenido se puede ver que P_B es cercano a la mitad de P_E . Si ahora generalizamos y comenzamos a aumentar el valor de M o de k, la diferencia entre estas dos probabilidades tenderá a ser cada vez más cercana al doble, por lo que podemos concluir en que al plantear el límite para k, se llega a:

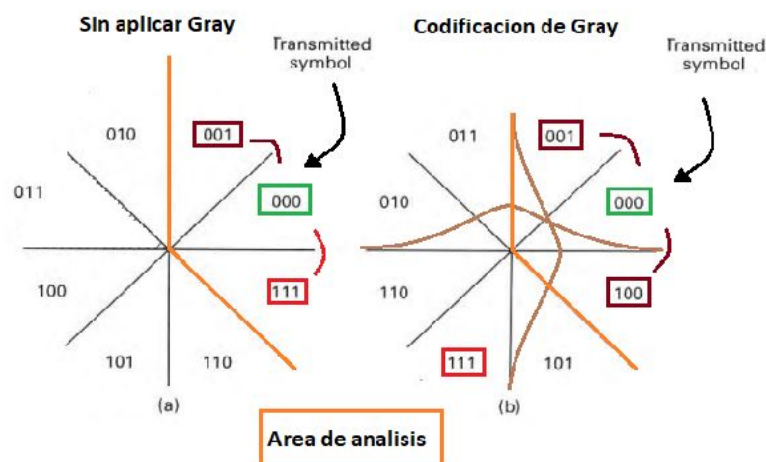
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_B}{P_E} = \frac{1}{2}$$

Probabilidad de Error de bit vs Probabilidad de Error de símbolo para señales de fase múltiple - Código Gray

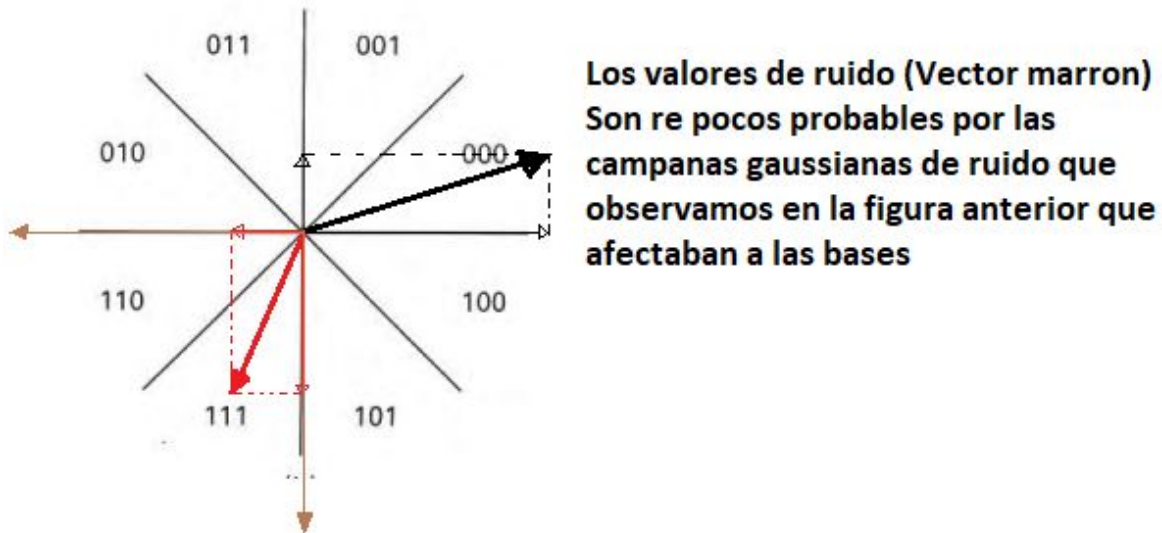
Para el caso de MPSK, P_B es menor o igual que P_E , como en el caso de señales MFSK. Solo que existe una pequeña diferencia. Para señales ortogonales, si comparamos un símbolo seleccionado arbitrariamente con otro cualquiera de los $(M-1)$ símbolos o waveform posibles, la probabilidad de error de símbolo es siempre la misma, ya que son equidistantes uno del otro para toda combinación posible. Sin embargo para MPSK, cada vector de señal o waveform no es equidistante con los $(M-1)$ símbolos restantes, por lo tanto la probabilidad de error de símbolo no es igual para todas las combinaciones, es decir, que depende del par de vectores que esté comparando. Entonces, mediante una asignación convencional de los mensajes digitales a las waveform, en determinados instantes de tiempo un error de símbolo podría implicar el error de 2 o más bits rompiendo la relación que se vio en MFSK donde prácticamente la probabilidad de error de bit era la mitad de la probabilidad de error de símbolo.

De esta forma, a menudo en sistemas MPSK se utiliza un código binario M-ario tal que la secuencia binaria correspondiente al símbolo adyacente (Fase cambiada) difiere en una sola posición de bit, entonces cuando un símbolo erróneo M-ario ocurrió es muy probable que se haya errado solamente un bit.

Esta forma de construir los modelos de modulación/demodulación para esquemas MPSK se denomina Codificación de Gray. La codificación de Gray tiene como propósito distribuir correctamente la probabilidad de error de bit respecto a la probabilidad de error de símbolo, es decir, asegurarse la mayoría de las veces que cuando se erra un símbolo se esté errando 1 bit, no 2 o 3 o 4 dependiendo de la asignación de los mensajes digitales. Es una técnica que **no tiene ningún costo adicional** sobre el sistema y **no va a evitar que tengamos errores**, solo va a hacer que la probabilidad de error de bit no sea una variable aleatoria respecto a la probabilidad de error de símbolo. ¿Si no aplicas Gray cómo se te ocurre graficar la probabilidad de error de bit cuando depende del símbolo errado?



Es decir, para que se erren 3 bits es necesario que al vector $s_i(t)$ que transporta el mensaje digital 000 le afecte un vector de ruido de las siguientes magnitudes



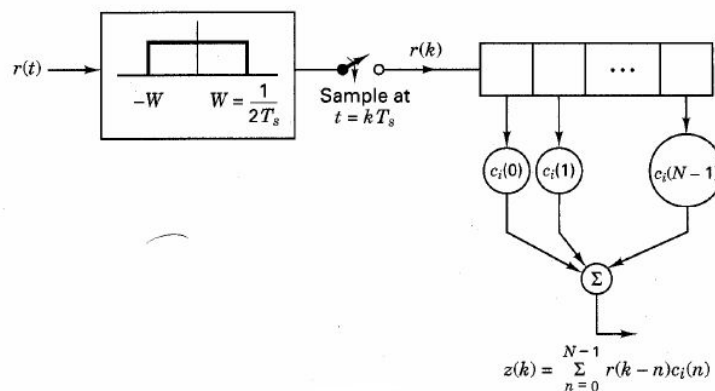
Filtro acoplado Digital

Ya se ha planteado el Filtro acoplado del tipo analógico, de la siguiente manera:

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{Para otros valores} \end{cases}$$

En donde fue descrita la implementación del correlador como la integración del producto de la señal recibida (señal + ruido) con la señal de referencia. Ahora se hará una descripción de la implementación mediante técnicas digitales, en donde se supondrá que $r(t)$ es una señal $s_i(t)$ más ruido $n(t)$, siendo el ancho de banda de la señal $W = 1/2T$ en donde T es la duración del símbolo. Por lo que la mínima velocidad de muestreo teniendo en cuenta Nyquist es $2W$. Esto genera que el periodo de muestreo debe ser menor o igual, a la duración del pulso.

El sistema digital se representa de la siguiente manera:



Como se observa el muestreo post filtrado tiene una relación $T_s = kT_{\text{sampling}}$, esto nos permite tomar k muestras en el periodo del pulso " T_s ", en donde dependerá de los coeficientes $c_i(N-1)$ que tengamos destinado a nuestro filtro acoplado digital.

$$r(k) = s_i(k) + n(k) \quad i = 1, 2 \quad k = 0, 1, \dots$$

En este caso el k nos habla de la muestra que se ha tomado y i representa a una de las M posibles prototipos o señales que podría haber sido transmitida.

Planteando un ejemplo en donde $N=4$, lo cual nos representa la cantidad de muestras que tomaremos por símbolo, en donde los conjuntos de coeficientes constituyen la respuesta al impulso de nuestro filtro, de manera discreta, la representación es:

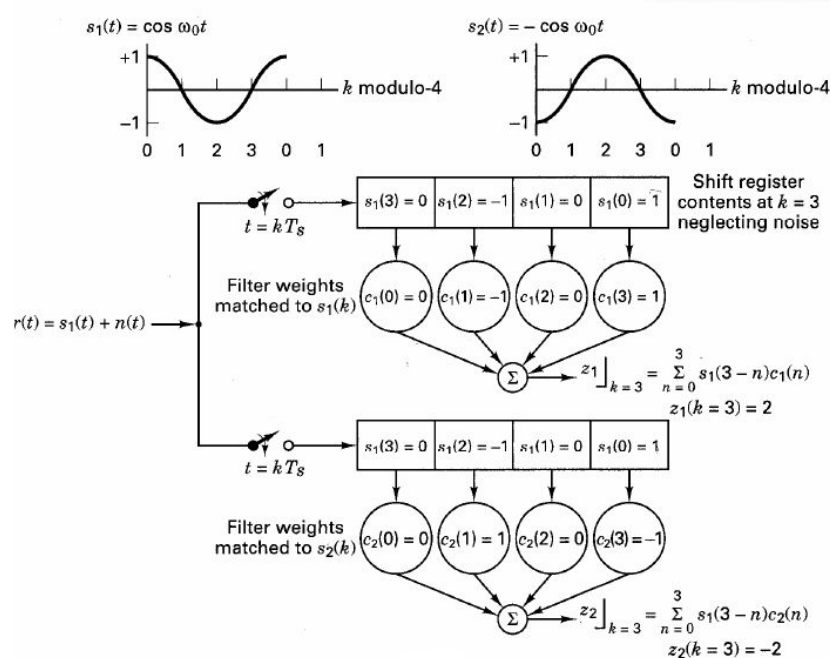
$$c_i(n) = s_i[(N-1)-n] = s_i(3-n)$$

Usando una fórmula discreta de la integral de convolución, se obtiene a la salida:

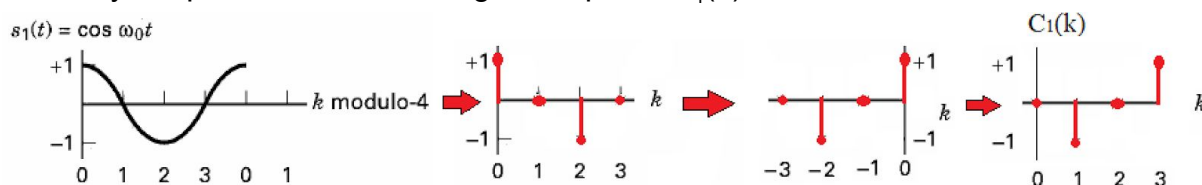
$$z_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(k-n)c_i(n)$$

Si se asume que el ruido tiene media cero se puede decir que las muestras de la señal recibida tendrán media igual a $s_i(k)$, si se transmitió $s_i(t)$, la salida será:

$$\mathbf{E}\{z_i(k)\} = \sum_{n=0}^{N-1} s_i(k-n)c_i(n) \quad k = 0, 1, \dots, \text{modulo-}N$$



Enviando una $s_1(t)$, al sistema planteado, se observa que la $r(t)$ es muestreado 4 veces por pulso, debido a que es igual a la cantidad de coeficientes utilizados. Se debe de prestar atención en que la muestra de más a la derecha, en los $s_1(k)$ corresponde a $k=0$ y va ascendiendo hacia la izquierda. Mientras que para los coeficientes superiores que corresponden a la S_1 waveform prototipo del modulador, es decir, a la S_1 muestreada, invertida y desplazada $N-1$. Esto significa que el $C_1(k)$ se realiza así:



Este procedimiento se hará de igual manera para los coeficientes que corresponden a S_2 para este ejemplo o para S_M en un caso general. Luego en la salida los valores que se obtendrán por la sumatoria corresponderá a la multiplicación entre las muestras de $r(k)$ o, para este caso en particular $s(k)$, junto con los valores de los coeficientes. Obteniendo:

$$z_1(k=3) = \sum_{n=0}^3 s_1(3-n)c_1(n) = 2$$

$$z_2(k=3) = \sum_{n=0}^3 s_1(3-n)c_2(n) = -2$$

La decisión final del filtro sobre cuál símbolo ha sido transmitido, será por cual de las sumatorias devuelve el mayor valor, siendo para este ejemplo la rama superior dando $Z_1(k=3) = 2$.

Notar finalmente que la operación de convolución es aplicada de otra manera para este caso. Además, de ser una convolución discreta solo para los valores correspondientes a

múltiplos de T_s , se calcula de una manera distinta, ya que el almacenamiento de la señal mediante registros permite tener en el receptor presente $S[k-n]$, entonces con los $C[n]$ calculamos la convolución:

$$y[n] = S[n] * h[n] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[k] \cdot h[n-k] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} S[n-k] \cdot h[k] \quad \text{Forma en la que se implementa.} \end{array} \right.$$