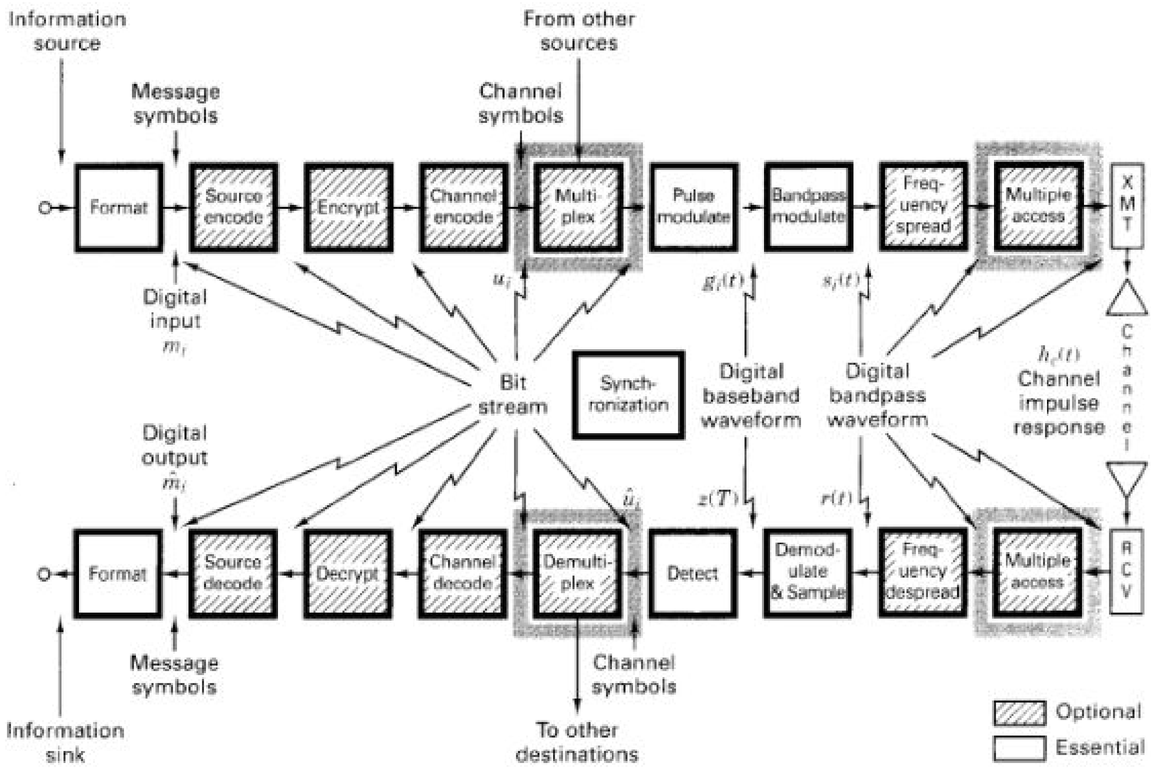
Métodos de Acceso

Capítulo 2



Sistema de espectro ensanchado

Los sistemas de espectro ensanchado ó comúnmente conocidos como Spread Spectrum (SS) tuvieron su aparición y auge a finales de la segunda guerra mundial. Como es de esperar, en el contexto mundial que se estaba viviendo, las necesidades respecto a los sistemas de comunicaciones eran totalmente distintas, tenían un enfoque más bien militar. Por lo tanto se clasificaban a los sistemas de comunicaciones como buenos o malos si eran capaces de garantizar las siguientes condiciones entre muchisimas mas:

→ Comunicación libre de interferencia (Evitar todo tipo de espionaje o sabotaje)

→ Un sistema propietario de guia (Generación de dispositivos inteligentes propietarios que no sean interceptables - Ejemplo de misiles teledirigidos)

→ Sistema de comunicación difícil de ser rastreado.

Para terminar de entender estas características habría que remontarse a los primeros años de la década de los años 40. Particularmente, en 1941 medio mundo estaba en guerra y el otro medio estaba a punto de entrar en ella. Con el nuevo planteamiento estratégico de la

Blitzkrieg (guerra relámpago) basado en el empleo masivo y coordinado de la aviación como artillería volante y las unidades acorazadas como caballería mecanizada, los ejércitos alemanes habían barrido las fuerzas polacas y francesas de forma rotunda y tremendamente rápida. Ahora el peligro de una más que posible invasión se cernía sobre la Gran Bretaña, y después... ¿quién podría pararlos?
Hedy Lamarr conocía de cerca las prácticas de gobierno de Hitler y alimentaba un profundo rencor hacia los nazis, por lo que decidió aportar su contribución personal al esfuerzo de guerra de los aliados. En primer lugar ofreció su trabajo y su preparación como ingeniera al recientemente creado National Inventors Council pero su oferta fue amablemente rechazada por las autoridades, que le aconsejaron que basará su participación en su físico y en su éxito como actriz, promoviendo la venta de bonos de guerra. Lejos de desanimarse u ofenderse, consultó a su representante artístico e idearon una campaña en la que cualquiera que adquiriese 25.000 o más dólares en bonos, recibiría un beso de la actriz. En una sola noche vendió 7 millones de dólares.
Pero Hedy no estaba satisfecha, deseaba aportar sus conocimientos a fines técnicos que mejorasen las oportunidades de los ejércitos aliados, y examinó qué podría hacerse en los campos más sensibles a la innovación (Contaba con conocimiento previo respecto a las telecomunicaciones porque había estudiado ingeniería pero abandonó para dedicarse a cumplir su sueño de ser actriz). El área de las comunicaciones era especialmente crítica en una guerra de movimiento y la radio resultaba el medio de comunicación más adecuado. Por otra parte, también se estaban experimentando sistemas de guiado de armas por control remoto mediante señales de radio. Y el uso de estas señales radioeléctricas presentaba dos problemas fundamentales:

- En primer lugar, las transmisiones eran absolutamente vulnerables. Debido a la duración de los mensajes, el enemigo podía realizar un barrido de frecuencia en diferentes bandas y tener tiempo de localizar la emisión. Una vez hallada, era fácil determinar el lugar de origen sintonizando, a la misma longitud de onda, dos o más receptores con antenas direccionales, situándolos en diferentes emplazamientos y localizando la emisora por triangulación. Conseguido esto, podían generarse interferencias que impidiesen la recepción, o atacar directamente el transmisor según conviniese. Es obvio el riesgo que esto representaba para los operadores de las estaciones, especialmente si se trataba de espías situados en territorio enemigo.

- El segundo aspecto negativo era la propia inseguridad en la recepción de la señal de radio, no solo por las interferencias intencionadas que ya se han apuntado, sino por la afectación de la propagación de las ondas debida a causas meramente naturales, como accidentes geográficos, meteorología, reflexiones en la alta atmósfera, etc.

El sistema propuesto por Hedy partía de una idea tan simple como eficaz. Se trataba de transmitir los mensajes u órdenes de mando fraccionándolos en pequeñas partes, cada una de las cuales se transmitiría secuencialmente cambiando de frecuencia cada vez, siguiendo un patrón pseudoaleatorio. De este modo, los tiempos de transmisión en cada frecuencia eran tan cortos y además estaban espaciados de forma tan irregular, que era prácticamente imposible recomponer el mensaje si no se conocía el código de cambio de canales.

El mensaje o la orden (en caso de control remoto) utilizaba un sistema binario, modulando la frecuencia portadora con una señal de baja frecuencia fija, de 100 o 500 Hz, lo que permitía añadir filtros sintonizados a estas frecuencias en el receptor para eliminar las señales parásitas mejorando la calidad de la recepción. El receptor estaba sintonizado a las frecuencias elegidas para la emisión y tenía el mismo código de cambio, saltando de frecuencia sincrónicamente con el transmisor. Este procedimiento se conoce ahora como "transmisión en espectro ensanchado por salto de frecuencia", en inglés Frequency Hopping Spread Spectrum (FHSS).
Las principales ventajas que presentan las señales de este tipo de sistemas es que son altamente inmunes a ruidos e interferencias y difíciles de reconocer e interceptar. Las transmisiones de este tipo suenan como ruidos de corta duración, o como un incremento en el ruido en el receptor, excepto para el que esté usando la secuencia de salto que se está empleando en el transmisor. Además, estas transmisiones pueden compartir una banda de frecuencia con muchos tipos de transmisiones convencionales con una mínima interferencia. No es necesario que las frecuencias de emisión sean contiguas.
Estas técnicas de comunicación permitieron encontrar muchas más aplicaciones en diversas áreas, entre ellas "Reducción de la densidad de energía", "el acceso múltiple" y "rango de alta resolución", lo cual aportaron a los aliados una notable ventaja sobre sus enemigos y a la finalización de la guerra. Sin embargo, a lo largo de los años, se obtuvieron muchas más aplicaciones de uso civil y comercial como en las redes WIFI que llevaron a implementar masivamente las técnicas de espectro ensanchado.
Pero **¿Qué es un sistema de espectro ensanchado y qué características cumple?** Para que un sistema sea considerado de espectro ensanchado debe cumplir las siguientes características:

1- La señal o waveform ocupa un ancho de banda mucho mayor al mínimo necesario para enviar la información para una técnica de modulación en particular. Es decir, se pide como dato el ancho de banda ocupado por las waveform y el esquema de modulación. En función de la relación se determina si es un candidato posible a sistema de espectro ensanchado.

2- El ensanchado es llevado a cabo por medio de una señal de expansión, frecuentemente llamada "señal código" o "Lista de códigos" dependiendo el tipo de técnica de espectro ensanchado. En cualquier caso es independiente de los datos.

3- El receptor Spread Spectrum utiliza una réplica sincronizada de la señal de ensanchamiento usada para expandir la información.

Es con estas consideraciones presentes, que se desarrollan y detallan dos tipos de espectro ensanchado como lo es SS-DS (Secuencia directa) y SS-FH (Salto en frecuencia), los cuales brindan menor vulnerabilidad ante:

→ jammer o interferidores
→ A las interferencias en general
→ Reducen las probabilidades de ser interferidos
→ Permiten el acceso aleatorio de múltiples usuarios con direccionamiento selectivo
→ Cuentan con alta resolución temporal
→ Implementan pulso de sincronismo universal mediante la utilización de GPS

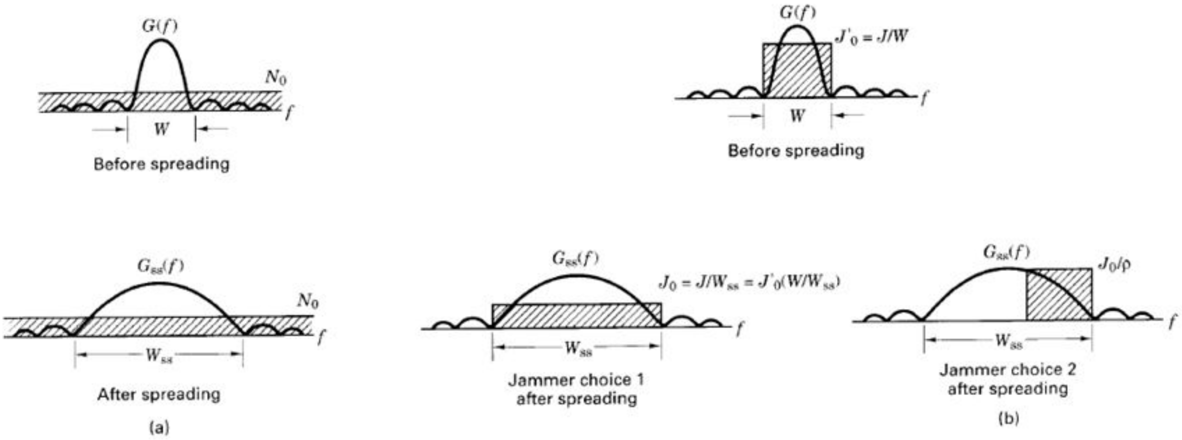
Se habla de menor vulnerabilidad ya que no se puede obtener un sistema inviolable, sino que se busca que sea lo más robusto posible ante las intenciones de interferencia de 3ros, generando que a los interesados en interrumpir el sistema deban de realizar una mayor inversión económica ó en el tiempo, para cumplir con sus intenciones o en el mejor de los casos, desistir debido a esta causa.

Beneficios más importantes de SS

Se sabe que el ruido blanco Gaussiano cuenta con un espectro de potencia infinita y uniforme en todas las frecuencias afectando a nuestras señales de interés pero sólo en aquellas componentes en la que se encuentra presente la señal. Como se comentó en la introducción, SS fue desarrollado con el fin de prevenir interferencias por parte de Jammers mediante la ampliación del espectro en el cual se encuentra nuestra señal de interés. Se supone que quienes quieren interceptarnos desconocen las señales que se están utilizando pero si conocen de su ubicación espectral y tiempo de operación (Tiempo Símbolo). ¿De que le sirven estos datos al jammer? Conocer la cantidad de señales bases presentes en el ancho de banda. Para obtener este dato se considera un sistema de detección coherente FSK suponiendo el caso crítico, la mayor cantidad de señales base por ancho de banda. Por lo tanto, siguiendo este análisis, en el dominio de la frecuencia pueden coexistir alrededor de $W/(R_s/2)$ ó $2WT_s$ señales base. ¿Por que $R_s/2$? Es la separación mínima en frecuencia que deben tener las waveform generadas por el modulador para que sean mutuamente ortogonales una con la otra y el demodulador pueda detectarlas correctamente. Sin embargo, el jamming no conoce a priori cuales son las funciones bases empleadas en el sistema de comunicación, por lo tanto se ve forzado a que elija entre dos opciones:

1- Interferir todas las señales bases coordenadas del sistema en el espectro que ha detectado energía. Aplicando igual cantidad de potencia a cada una y resultando en una pequeña cantidad de potencia disponible en cada coordenada.

2- La otra opción es decidir por una fracción de señales a la cual se va a interferir pero con una potencia mayor.

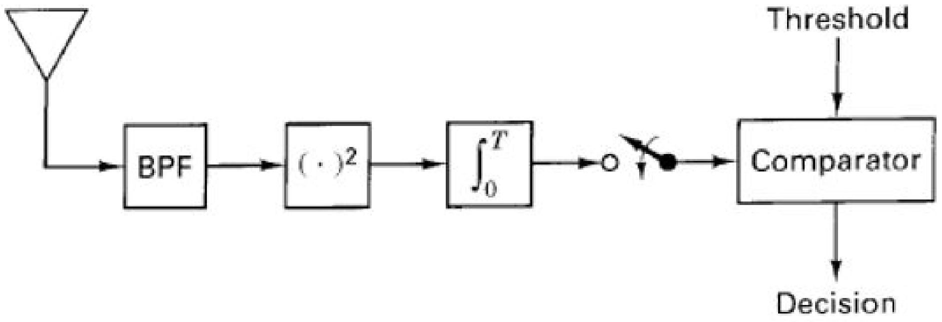


Como se ve mediante las gráficas y con respecto a las 2 posibles implementaciones que tiene el jammer, cuanto mayor sea el set de señales que se utilicen y por lo tanto el ancho de banda de SS, la tarea de interferir por parte del jammer será más complicado. Dejando a la vista uno de los principales beneficios de la implementación de espectro ensanchado contra las interferencias.

Reducción de la densidad de energía

En búsqueda de pasar desapercibido ante la presencia de un jammer es que los sistemas de espectro ensanchado pueden contar con la característica de una baja probabilidad de interceptación (LPI), que tiene como fin generar un efecto de mínima potencia en el espectro, camuflando la potencia de la señal con la potencia del ruido en el canal a ojos del jammer.

Dada una potencia transmitida, la técnica del espectro ensanchado tiene como finalidad dispersar la señal en un ancho de banda mucho mayor al requerido inicialmente. Entonces la señal queda por debajo de los niveles típicos de ruido y cuando el jammer integra sobre un ancho de banda igual al de la señal original, no la detecta. El jammer para detectarla debería utilizar el ancho de banda de la señal expandida, es decir, utilizar un equipo radiómetro de una calidad mucho mayor. Pero, en definitiva ¿Que es un radiómetro? Es un instrumento de medición de potencia, que consta de un filtro para elegir el rango de frecuencias a analizar, un elemento que eleva al cuadrado la señal que ingresa ya filtrada y un integrador, cuya función combinada de estos dos últimos es obtener cada un tiempo T un valor de energía. Luego, se ingresa a un comparador (porque en la ausencia de señal existen valores de energía diferentes de cero pero corresponden a ruido. De esto se aprovecha SS, hacerse pasar por ruido) y se determina si existe alguna señal presente.
Otra característica para los SS es tener una baja probabilidad de posición fija (LPPF) y está asociado con la dificultad para un interferente de saber desde dónde proviene la señal y por lo tanto en donde se encuentra ubicado el transmisor.



Resolución en tiempo fino

Las señales de Spread Spectrum pueden ser utilizadas para alcanzar o determinar la posición. Ya que la distancia puede ser determinada midiendo el retraso de tiempo desde que la señal fue emitida hasta que es recibida nuevamente producto de una reflexión. La detección de una reflexión significa la presencia de un objetivo frente al sistema de comunicación pero no es solo eso, porque es una idea muy básica de radar.

En Spread Spectrum puede ser determinada con precisión la posición. ¿Por que con SS sí y con otro sistema no? Porque en primer lugar la incertidumbre temporal está asociada al ancho de banda de las señales pulso que se envían. Convengamos de entrada que si no se cuenta con el ancho de banda suficiente, los pulsos enviados por el sistema de radar no tendrán la capacidad de variar rápidamente en el tiempo, generando una incertidumbre en la medición. ¿Cuando detectamos un objetivo? Cuando la tensión supera un umbral, idealmente debería ser inmediato e instantáneo, apenas la señal llega a tomar el valor que corresponde, pero resulta que desde que comienza a incrementarse hasta que supera el umbral, ocurre un Δt. En conclusión, nos enteramos luego de Δt que existe un objetivo y creemos que la distancia es mayor porque se considera en el tiempo de propagación de ida y vuelta dicho error.

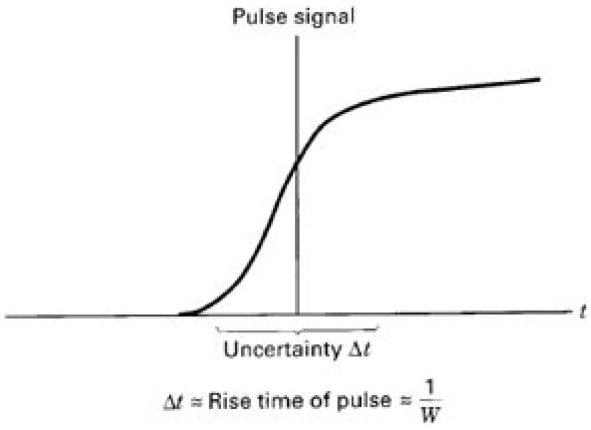


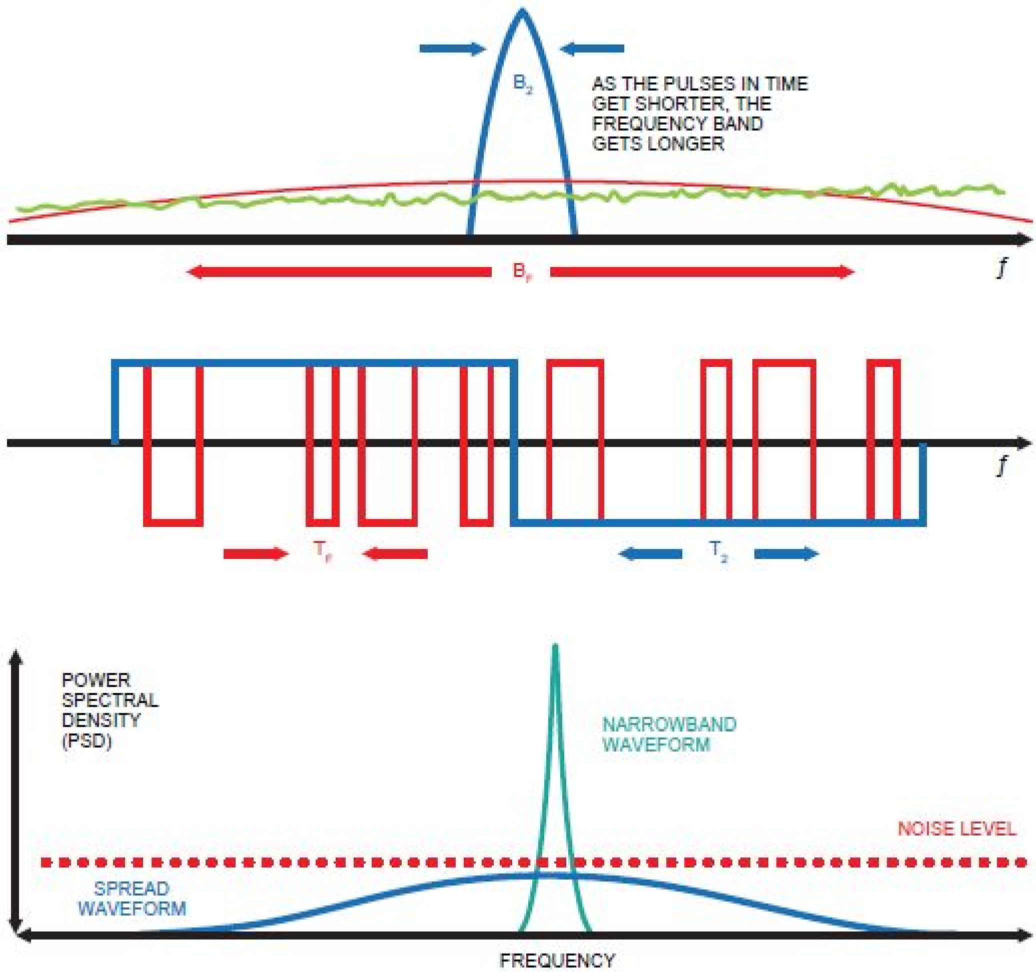
Figure 12.3 Time-delay measurement.

Por esta razón necesitamos si o si de la presencia de mayor ancho de banda para que las pendientes de las señales recibidas sean mayores y se pueda medir el tiempo de forma precisa.
Sin embargo, hay quienes cuestionarían la implementación de la técnica de espectro ensanchado argumentando que no tienen problemas con la utilización de mayor ancho de banda. En este caso, sigue siendo conveniente utilizar Spread Spectrum frente a cualquier técnica de modulación digital convencional. ¿Por qué? Ante la presencia de canales AWGN, la medición de un único pulso transmitido en cualquier técnica convencional puede dificultarse, no así con SS. En esta última, se genera una secuencia larga de pulsos de corta duración que reemplazan al único pulso utilizado por el resto de técnicas de modulación. En la recepción, la secuencia recibida es correlacionada junto con la réplica local y el resultado de la correlación es usado para realizar una predicción del retardo en tiempo o rango medido. Claro, se planteó que un único símbolo en cualquier técnica de modulación convencional era difícil de detectar de forma precisa en canales Gaussianos y con esta técnica se quiere transmitir N pulsos más angostos en lugar de un único pulso más largo. ¿Por qué funciona?, ¿No empeora Eb/No? Si, empeora pero no afecta. La respuesta es que si bien parecería indetectable para cualquier receptor convencional en comunicación digital, en esta técnica, al conocer el código empleado para la expansión en ancho de banda, la señal antes de atravesar el proceso de demodulación es recuperada entre el ruido mediante un proceso definido como DESPREADING (desentrañar). El cual solo va a funcionar cuando la señal recibida este perfectamente sincronizada con la señal código. Esta propiedad es explotada al máximo en el receptor para buscar el retardo temporal que sufrió la señal transmitida y lograr determinar la ubicación. Resulta lógico que esta medición será más precisa y a mayor distancia cuanto mayor sea la cantidad de pulsos enviados según la señal código por tiempo de símbolo (Periodicidad de la autocorrelación).

Acceso múltiple

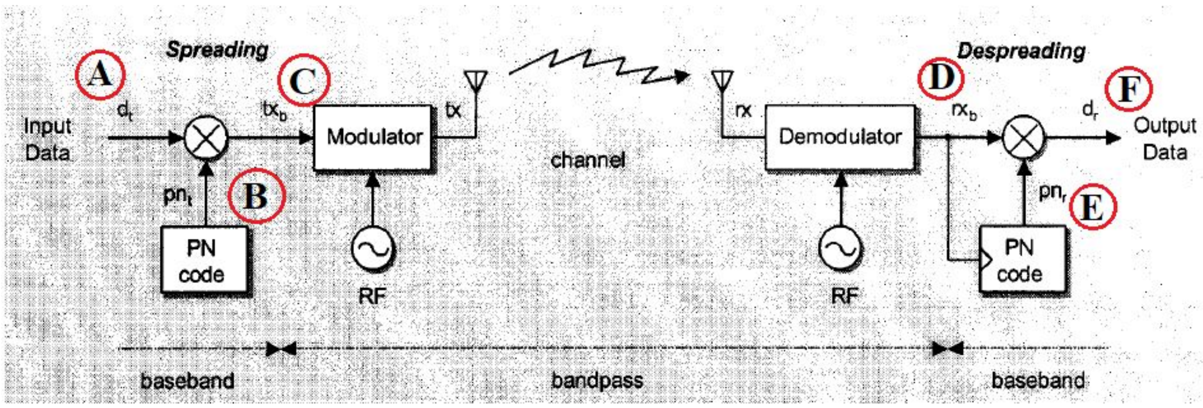
Dentro del marco de las comunicaciones inalámbricas (Móviles), la evolución en el modo de acceso ha pasado por Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA), Acceso Múltiple por División de Tiempo (TDMA) y últimamente Acceso Múltiple por División de Código

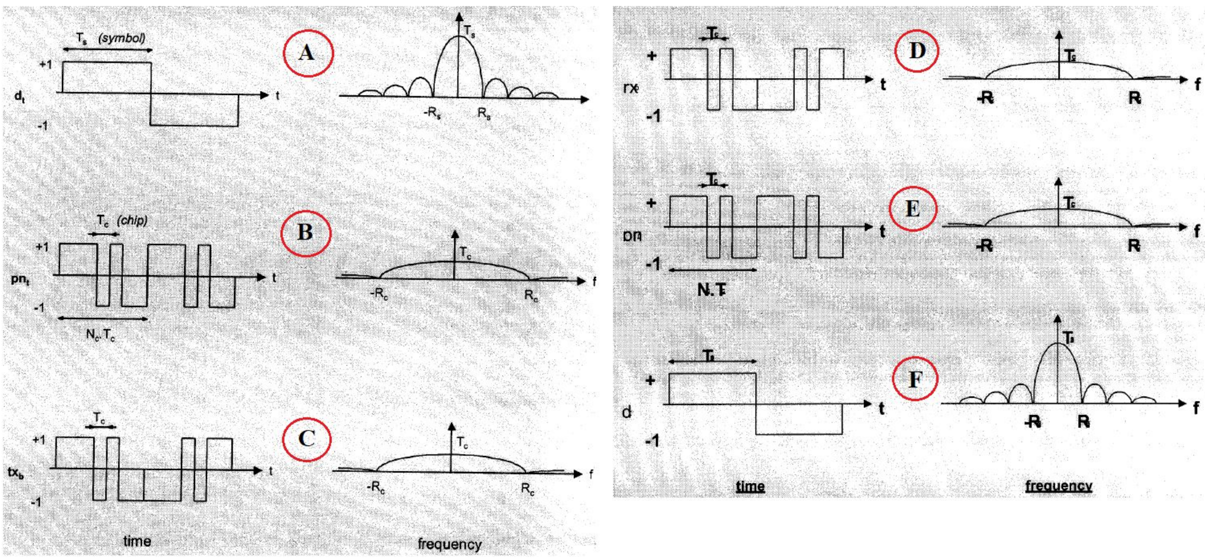
(CDMA), el cual se está posicionando como el modo de acceso múltiple que domina las comunicaciones inalámbricas digitales del principio del siglo XXI.
Como ya se ha detallado, CDMA implementa Spread Spectrum. El espectro ensanchado se basa en la expansión del espectro de la señal a transmitir por medio de secuencias ortogonales. De esta forma, el receptor solo puede demodular la señal si conoce la secuencia que se ha utilizado en su expansión. Mientras que los demás transmisores que utilicen la misma banda ven la señal básicamente como ruido. Entonces, el truco en estas técnicas de modulación está en esconder la señal de información frente a interferencias en un ancho de banda mayor, utilizando diferentes bases para DS-SS o saltos en diferentes bandas de frecuencia a lo largo del tiempo para FH-SS siguiendo un patrón pseudoaleatorio dictado por un código PN. Sin embargo para poder decodificar las señales CDMA debe haber una estricta sincronización entre las señales CDMA recibidas y el código generado en el receptor.



El Acceso Múltiple por División de Código se ha convertido en un candidato importante para la próxima generación de los sistemas de comunicaciones móviles, terrestres y satelitales. Aunque las técnicas de espectro ensanchado han sido utilizadas para aplicaciones militares por medio siglo, solo hasta ahora se ha reconocido que esta técnica combinada con algunos pasos adicionales puede proporcionar una capacidad más alta y mejor flexibilidad para las comunicaciones de radio celular móvil desde el punto de vista que no existen límites absolutos para el número permitido de usuarios simultáneos. En estos sistemas, N usuarios

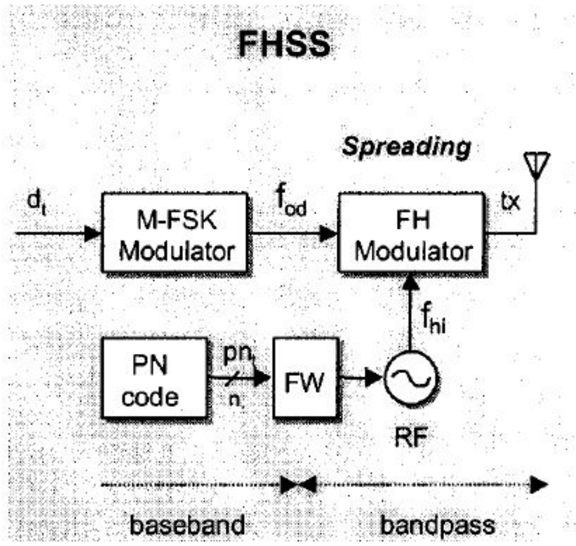
usan la misma banda de frecuencias todo el tiempo con muy poca interferencia entre ellos, a pesar de que se asume que todas las señales tienen la misma potencia S.
Como se ha comentado, para esconder la información de las señales en un ancho de banda mucho más grande, existen dos técnicas: DS-SS y FH-SS que pueden ser utilizadas como técnicas de acceso múltiple para compartir un recurso de comunicaciones entre numerosos usuarios de manera coordinada proporcionando privacidad en las comunicaciones de los usuarios mediante diferentes señales de difusión o códigos PN.
Con respecto a DS-SS, esta técnica implementa una secuencia digital pseudo aleatoria generada previamente a la modulación que modifica la información para que de manera conjunta con un esquema de modulación M-PSK varían la fase de la señal pseudo aleatorio. Esta secuencia digital cuenta con una velocidad asociada de $R_C = 1/T_C$ que tiene la característica de ser un entero múltiplo de la tasa de símbolo $R_S=1/T_S$ con R_c siempre mayor a R_s. Con respecto al ancho de banda esperado, estará asociado a la velocidad R_C y por un filtro de banda base.



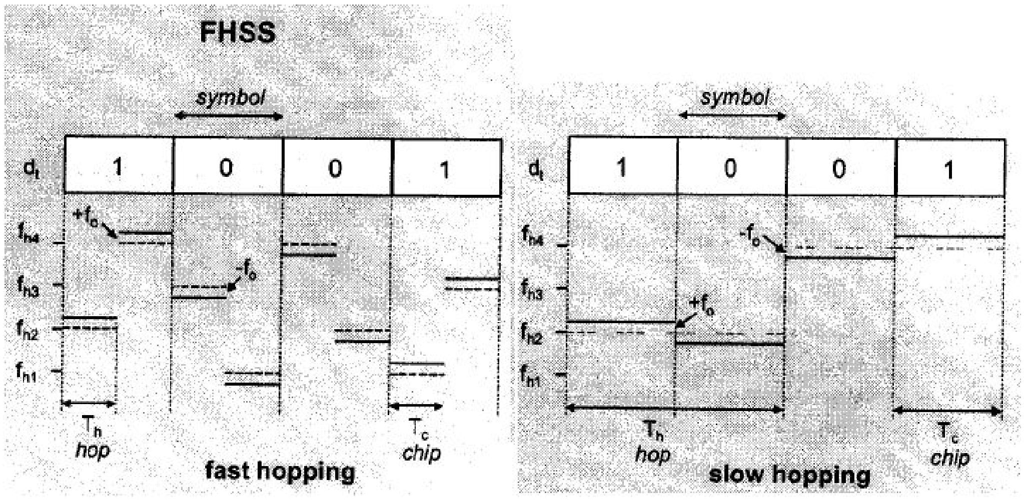


FHSS:
Con respecto a la otra técnica de Spread Spectrum que se tiene en cuenta, se implementa nuevamente una secuencia pseudoaleatoria pero posterior al esquema de modulación digital implementado. ¿Con qué finalidad? controlar un sintonizador de frecuencias, es decir, un dispositivo que de acuerdo a una entrada digital genera una señal sinusoidal a su salida a una frecuencia determinada. Entonces los datos digitales modulados en frecuencia mediante esquemas M-FSK se multiplican por la señal resultante del sintetizador y pasan

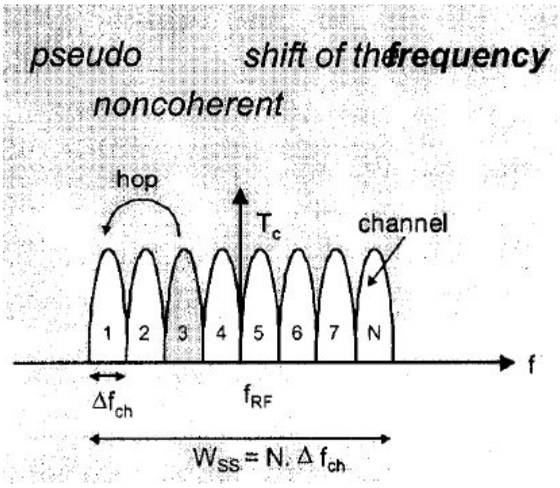
por un filtro pasa bandas. Como la señal pseudoaleatoria cambia en el tiempo, se genera una lista de frecuencias que van a conformar el grupo de saltos realizados por el sistema.
Esta “doble modulación”, por así decirlo, permite que la información sea escondida en los diferentes saltos en frecuencia.
¿Cuántos saltos pueden efectuarse? La cantidad de combinaciones binarias posibles que permita el código PN de longitud “N” . Por lo tanto, para obtener este valor se aplica potencia de 2, resultando en 2^N combinaciones posibles. La rapidez con la cual el código PN cambia de un código a otro dentro de todas las posibilidades que brinda la lista definirá si se trata de fast-Frecuency Hopping ó slow-Frecuency Hopping. Sin embargo, dicho valor debe estar en función de los tiempos de símbolos de las waveform en M-FSK.



Se define una velocidad de salto de frecuencia R_H, por lo que el transmisor ocupará una determinada frecuencia de carrier un periodo $T_H = 1/R_H$ pero a diferencia de DS-SS la tasa de salto puede ser menor o mayor al tiempo de símbolo ¿Por qué? Porque el ensanchamiento en frecuencia viene dado por la magnitud de los saltos en frecuencia que realiza el sistema. En estos casos, los espectros de las waveform conservan las formas y el ancho de banda del esquema de modulación convencional solo que a lo largo del tiempo varían su posición espectral. Para un usuario que no conoce cómo funciona el sistema y utiliza un analizador de espectros para determinar el ancho de banda, observará que en total el sistema utiliza Wss, pero esto ocurre luego de observar un tiempo relativamente largo en donde se den todos los saltos que tiene frecuency hopping. Sin embargo, en cada salto, el ancho de banda ocupado por las waveform es el de un esquema MFSK convencional. Para Secuencia directa esto no es así, porque el ensanchamiento se realiza directamente sobre el ancho de banda de la waveform que resulta del sistema de modulación MPSK. Entonces en todo instante de tiempo, un usuario no autorizado observará que el sistema de comunicación utiliza un ancho de banda Wss.
Conclusión, Si se expande el ancho de banda de las waveform resultantes del modulador para generar Wss es DS-SS, por lo tanto el spreading es anterior al proceso de modulación.
Si no se expande el ancho de banda de las waveform resultantes del modulador para generar Wss es FH-SS, porque la expansión viene dada por desplazamientos en frecuencia de ese espectro pequeño a lo largo del tiempo.



Con respecto al ancho de banda se considera que esta técnica divide a la totalidad en N canales que se ocuparán alternadamente según el patrón dado por la secuencia pseudoaleatoria. Es por esta razón que debido a estos saltos es que se debe tener una estricta sincronización entre transmisor y receptor. Con respecto a la potencia, el canal N que sea asignado por la secuencia, contendrá toda la potencia para el instante en el que sea asignado, como se ve en la siguiente figura:



Por último, con respecto a la etapa de demodulación y para la presente técnica, es que se utiliza demodulación del tipo no coherente, ya que al estar constantemente cambiando de frecuencia acorde al código PN los cuales entre saltos cuentan con discontinuidades en la fase asociada.

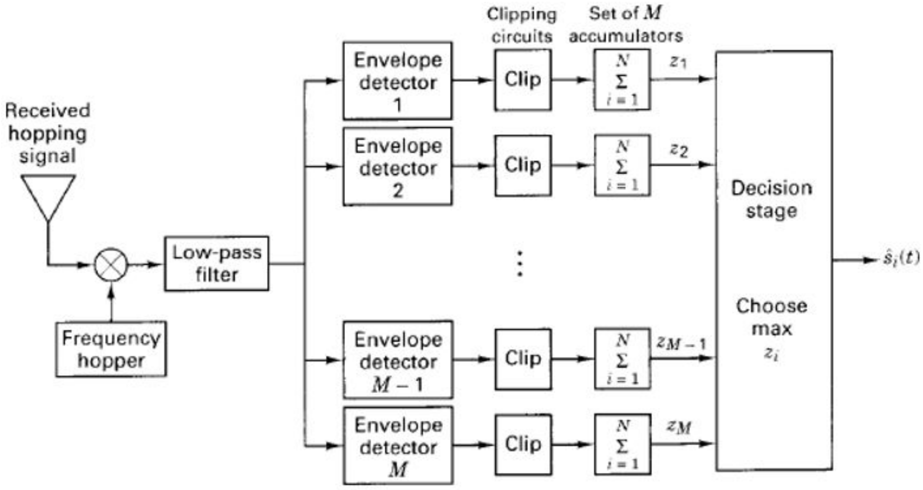


Figure 12.16 FFH/MFSK demodulator.

Una vez aclarada las nociones básicas de ambas técnicas de modulación, se realiza un análisis para determinar el grado de robustez o protección del mismo frente a interferencias de potencia finita. ¿Qué se busca? Encontrar alguna expresión matemática parametrizada que refleje los beneficios de estas técnicas de modulación. Si esta ecuación existe sería posible estudiar sus parámetros, de qué dependen y optimizarlos para sacar el máximo provecho.

Por eso, en primer lugar se analiza desde un punto de vista matemático qué implica la expansión en frecuencia del espectro de la señal de información. Desde un punto de vista algebraico, las técnicas de SS distribuyen una señal de baja dimensión en una señal de amplia dimensión. ¿Qué significa esto? Que si no se especifica cuales son las señales en el tiempo que generan en el dominio de la frecuencia el efecto del ancho de banda expandido, podría existir una infinidad de funciones f(t) que den origen a dicho espectro. Estas posibles señales, se generarían mediante la combinación lineal de un conjunto de funciones bases ortogonales afectadas por un coeficiente. Como el dato es el ancho de banda, estas funciones bases deben ser ortogonales en la frecuencia, por lo tanto existen un conjunto finito de acuerdo al mismo. Mientras mayor es el ancho de banda observado, podría pensarse que son mayor la cantidad de funciones bases usadas en la frecuencia que permiten obtener dicho espectro. Es por esta razón que la técnica de espectro expandido mapea una señal que posee D bases dentro de un espectro que contiene N posibles bases ortogonales. Hablando mal y pronto, esconde la D bases dentro de N. Por lo tanto un usuario autorizado y que en teoría conoce las D bases ortogonales utilizadas para modular la información, no le afecta la expansión del espectro, mira dentro de las hipotéticas “N” bases y extrae solo las verdaderas “D”.

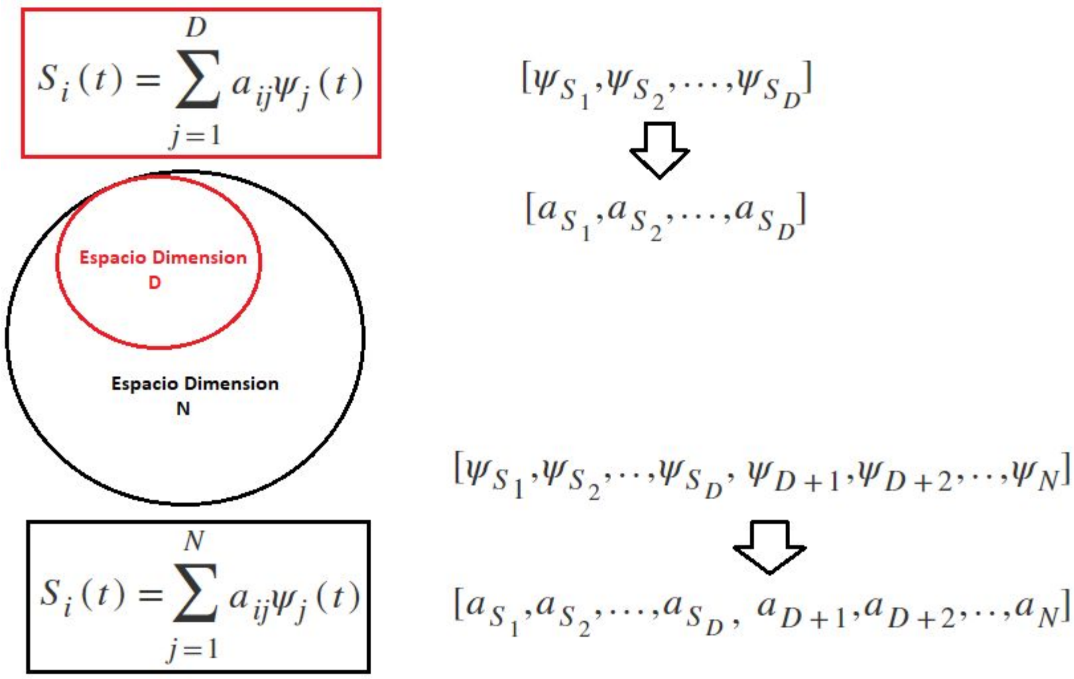
El jammer como resultado de este análisis no tiene posibilidad de conocer las señales bases utilizadas en un momento determinado, el único recurso que tiene para interferir es distribuir la potencia disponible en el espacio total, resultando en pequeñas señales interferentes en cada función base de este espacio total o interferir sólo una fracción del ancho de banda con mayor potencia pero sin afectar a la fracción no contemplada.

Haciendo más riguroso el planteo, se consideran un conjunto de D señales ortogonales (como si fuera M-FSK), de modo que existen un conjunto de $S_i(t)$ $1<i<D$, en un espacio

N-dimensional. Se puede representar esas D señales en las bases del espacio de dimensión N como:

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\psi_j(t) \quad i = 1, 2, ..., D; \quad 0 \leq t \leq T$$

$$D << N$$



Donde cada coeficiente se obtiene de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \int_0^T S_i(t)\psi_j(t) * dt$$

Estos valores resultan ser las proyecciones de las señales sobre las bases ó coloquialmente hablando, el grado de parecido que existe entre las señales a representar y las funciones base.

Además, se sabe que cada función base para que sea definida como tal, debe cumplir con la propiedad de ortogonalidad, lo cual implica que la comparación con ella misma devuelve una correlación cruzada máxima y cuando se compara con otra señal base distinta devuelve un valor nulo, demostrando que es imposible obtener información de una función base analizando otra de ellas.

$$\int_0^T \psi_j(t)\psi_k(t) * dt = \{1 \; para \; j = k \; y \; 0 \; para \; otro \; caso$$

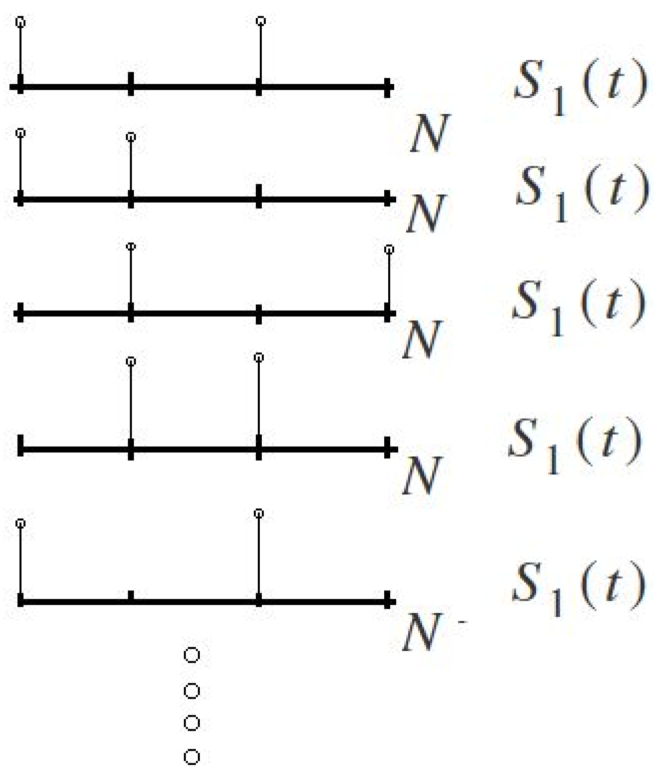
Con toda esta información presente, puede establecerse que cada símbolo (waveform) transmitido bajo la técnica de ensanchamiento de espectro tendrá un conjunto de

coeficientes a_{ij} que cambiaran de símbolo a símbolo de forma prácticamente aleatoria. La elección de este conjunto es mediante el código PN pseudoaleatorio con la finalidad de esconder la señal de información de dimensión D dentro del espacio de dimensión mayor (N).
La selección aleatoria de los coeficientes es independiente a los datos, incluso si el mismo símbolo es enviado repetidamente, el conjunto de a_{ij} usado para transmitir es nuevamente seleccionado de forma aleatoria.
Es importante en este caso, analizar el conjunto de variables aleatorias a_{ij}. ¿Qué valores pueden tomar? En el caso de M-FSK los valores de a_{ij} pueden tomar los valores “a” ó “0” para cada función base, porque las waveform son un conjunto de señales mutuamente ortogonales en todos los casos. ¿Con qué probabilidad toman estos valores? en el caso de “a”, con una probabilidad de 1/M que coincide con la probabilidad de la transmisión de símbolos equiprobables dentro de un set de M posibilidades, pero en el caso del valor “0” es distinto, porque de los M símbolos que son posibles de transmitir, M-1 veces el valor que se obtiene a la salida del filtro acoplado a dicha señal base es “0”.
Con el mismo enfoque, puede analizarse M-PSK, aunque es un poco más difícil, porque dependiendo el orden del sistema modulador es la constelación que se genera para las diferentes waveform. Allí puede interpretarse de la cantidad de valores que puede asumir a_{ij} para cada base y la probabilidad con la cual pueden asumir dichos valores.
Para simplificar al máximo la exposición del concepto se asume que el conjunto de variables aleatorias a_{ij} pueden asumir solo dos valores +- a , con una probabilidad de ½.

La energía en cada señal del conjunto de “D” señales será igual por mas que se haya realizado un mapeo a un espacio de dimensión mayor. La potencia no va a cambiar con el ensanchamiento de espectro. Por lo tanto, se tendrá que:

$$E_s = \int_0^T \overline{S_i^2}(t)dt = \sum_{j=1}^{N} \overline{a^2{}_{ij}} \quad i = 1, 2, ..., D$$

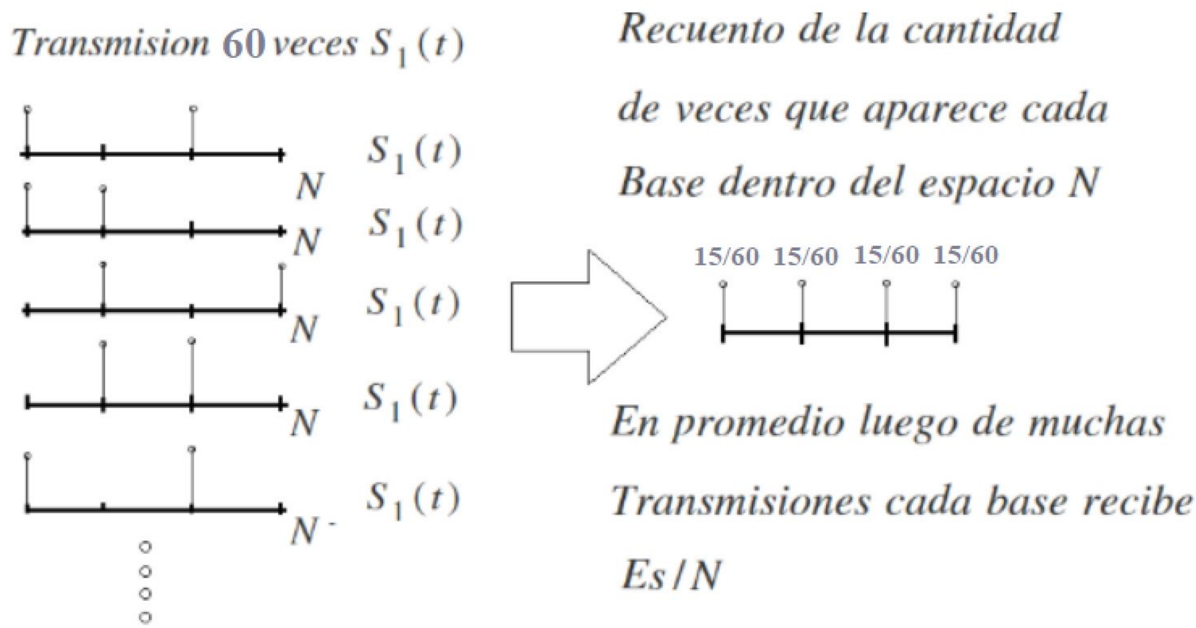
Donde la barra refleja el valor medio luego de haber realizado un conjunto de transmisiones, dato de crucial importancia porque las D bases van alternando de forma aleatoria entre N por cada símbolo y para una cantidad muy grande de transmisiones terminan utilizando todas la bases. Entonces, por cada transmisión, se calcula potencia y se va incorporando al cálculo del valor medio.



Los coeficientes independientes tienen media nula y correlación dada por la siguiente ecuación:

$$\overline{a_{ij}a_{ik}} = \{E_S/N \; para\, j = k \; ; \; 0 \; para\; otro\; caso$$

Un ejemplo para entender cómo se está planteando el análisis de energía:



Esto muestra que la energía de símbolo luego de un largo tiempo pareciera estar distribuida en N bases diferentes.
Se supone que el jammer no tiene un conocimiento a priori de la selección de los coeficientes a_{ij} , por lo tanto considera que los coeficientes están uniformemente distribuidos

sobre las N bases para realizar la mayor cantidad de daño. Si el jammer decide distribuir su potencia finita uniformemente sobre la totalidad del espacio de la señal, la forma de onda del jammer w(t) puede expresarse como:

$$w(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j \psi_j(t)$$

Donde $\psi_j(t)$ hacen referencia a cada una de las N posibles bases dentro del ancho de banda de espectro expandido. La energía de la señal será:

$$E_w = \int_0^T w(t)^2 dt = \sum_{j=1}^{N} b^2{}_j$$

Por lo tanto, en este caso, el jammer incorporara sobre cada señal base una potencia asociada:

$$b^2{}_j = E_w / N$$

El jammer podría seleccionar otro criterio para elegir el valor de $b^2{}_j$, lo cual le permitirá distribuir de una forma distinta la energía disponible. En este caso, el objetivo es disminuir la relación señal a ruido (SNR) para que el receptor digital cometa una mayor cantidad de errores en la detección.
Si se analiza el receptor, considerando solamente el efecto del jammer e ignorando al ruido

$$r(t) = S_i(t) + w(t)$$

¿Qué se tendrá a la salida de los filtros acoplados? Primero habría que analizar desde un punto de vista algebraico como está perjudicando el jammer a la waveform transmitida.

$$[0,0,a_1,0,0,a_D,0,\ .\ .\ ..\ .\ .\ .\ .\ ,a_2]$$

$$\boldsymbol{+}$$

$$[b_1,b_2,b_3,b_4,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,b_N]$$

$$[\ b_1\ ,b_2,\ a_1+b_3,\ b_4\ ,\ .\ .\ .,a_D+b_5\ \ ,\ .\ .\ .,a_2+b_N]$$

La señal resultante de la suma, que se encuentra expresada en función de sus coeficientes, en un banco de correladores es correlacionada con un conjunto dado de funciones $S_i(t)$ esperadas, entonces la salida de uno de los correladores es:

$$z_i = \int_0^T r(t) * S_i(t) dt = \int_0^T (S_i(t) + w(t)) S_i(t)$$

$$z_i = \int_0^T r(t) * S_i(t)dt = \int_0^T (S_i(t)S_i(t)\ dt + \int_0^T w(t)S_i(t)\ dt$$

$$z_i = \int_0^T r(t) * S_i(t)dt = \sum_{j=1}^{N} (a^2{}_{ij} + b\,{}_j a_{ij})$$

Vectorialmente se puede observar que :

$$[0,0,a_1,0,0,a_D,0,\ \ldots\ldots\ldots,a_2] \times [0,0,a_1,0,0,a_D,0,\ \ldots\ldots\ldots,a_2]$$

$$+$$

$$[b_1,b_2,b_3,b_4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,b_N] \times [0,0,a_1,0,0,a_D,0,\ \ldots\ldots\ldots,a_2]$$

Luego se calcula la esperanza de la variable aleatoria z_i y se encuentra que el segundo miembro dentro de la expresión, en particular a_{ij} , tiene un valor esperado o esperanza Nula, ¿Por qué? Porque es una variable aleatoria discreta que solamente puede asumir dos valores posibles “+-a” y son equiprobables, entonces ese término se cancela. El valor medio de una variable aleatoria discreta se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i.$$

En el caso de “b_j”, también es una variable aleatoria pero es independiente a a_{ij}, entonces el cálculo de la esperanza es de la siguiente forma:

$$E_{zi} = E(\sum_{j=1}^{N}(a^2{}_{ij})) + E(\sum_{j=1}^{N}(b_j a_{ij}))$$

Analizando el segundo término que implica el producto de dos variables aleatorias independientes :

$$\mathbf{E(XY) = E(X).\ E(Y)}$$

$$\sum_{j=1}^{N}(E(b_j).E(a_{ij}))$$

Entonces la expresión puede ser trabajada de la siguiente forma:

$$E_{zi} = \sum_{j=1}^{N} E(a^2{}_{ij}) + \sum_{j=1}^{N}(E(b_j).E(a_{ij}))$$

$$E(a_{ij}) = \tfrac{1}{2}\ a\ +\ \tfrac{1}{2}(-\,a) = 0$$

$$E(a^2{}_{ij}) = \tfrac{1}{2}\, a^2 + \tfrac{1}{2}\, a^2 = a^2$$

$$E_{zi} = \sum_{j=1}^{N} (a^2{}_{ij})$$

Si se supone que se ha transmitido $S_m(t)$, la salida del correlador se puede escribir como:

$$E_{(z_i/S_m)} = \sum_{j=1}^{N} \overline{a^2{}_{ij}} = \{Es\ para\ i = m\ ;\ 0\ para\ otro\ caso$$

Esta expresión refuerza los conceptos planteados al principio del análisis ¿por que? Porque para transmitir un determinado símbolo se utiliza un set de D señales escogidas aleatoriamente dentro de un conjunto de N señales.

$$[a_1,0,0,a_2,0,0,0,a_3,\ldots,a_D,0,0] \Rightarrow S_1(t) \qquad E_s = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}{}^2 \qquad a_{ij}{}^2 = \frac{E_s}{D}$$

$$[0,a_3,0,a_D,0,a_1,0,,\ldots,0,0,a_2] \Rightarrow S_2(t) \qquad E_s = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}{}^2 \qquad a_{ij}{}^2 = \frac{E_s}{D}$$

$$[a_2,0,0,a_3,0,a_D,0,,\ldots,0,0,a_1] \Rightarrow S_3(t) \qquad E_s = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}{}^2 \qquad a_{ij}{}^2 = \frac{E_s}{D}$$

Cuando la cantidad de símbolos transmitidos del mismo tipo es muy grande, a nivel general, se puede observar cómo se distribuye la energía entre N bases.

Sin embargo, el receptor para realizar la correcta correlación de la señal debe conocer estas D señales y cómo cambian en función del tiempo para cada símbolo, que es lo mismo que conocer la secuencia aleatoria de a_{ij}.

Si se asume que todas las D señales son igualmente probables. Entonces el valor esperado en la salida de cualquiera de los D correladores es:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i.$$

A la salida de uno de los correladores con una de las D bases, existen dos valores posibles cuando no hay ni interferencia ni ruido: “0” cuando la señal que arriba al filtro acoplado no está acoplada a la base en cuestión y “Es” cuando lo esta. Como todas las bases son equiprobables, puede pensarse el valor esperado a la salida del filtro acoplado de la siguiente forma:

$$E_{(z_i)} = \frac{D-1}{D}.0 + \frac{1}{D}Es$$

$$E_{(z_i)} = \frac{Es}{D}$$

Posteriormente, se puede plantear la varianza a la salida de uno de los correladores z_i , dado que se transmitió S_i cuando hay interferencia por parte del jammer. Para ello se utilizará la siguiente expresión:

$$z_i = \sum_{j=1}^{N} (a^2{}_{ij} + b_j a_{ij})$$

Serán necesarias las expresiones de la media y la varianza para una variable aleatoria discreta y algunas de sus propiedades como se describe a continuación :

Definición del valor medio → $E(x) = \; = \sum_{k=0}^{N-1} p_i x_i$

Definición de varianza → ${}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} p_i(x_i \; -)^2$

Propiedades:

→ $E(X + a) = E(X) + a$
→ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
→ $E(aX) = a.E(X)$
→ $E(XY) = E(X).E(Y)$ → si X e Y son independientes.
→ $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
→ $Var(X) \geq 0$
→ $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ → siendo a y b números reales cualesquiera. De esta propiedad se deduce que la varianza de una constante es cero, es decir, $Var(a) = 0$
→ $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov\,(X, Y)$ → donde Cov(X,Y) es la covarianza de X e Y. (En el caso que sean independientes, no se considera la covarianza).
→ $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov\,(X, Y)$

Y sin olvidar las siguientes expresiones que reflejan la varianza de un producto de variables aleatorias:

$$Var(XY) = E(X^2 Y^2) - E(XY)^2$$

Donde se utilizan dos fórmulas, entre ellas incluida la de la covarianza:

$$E(X^2Y^2) = Cov(X^2, Y^2) + E(X^2)E(Y^2)$$

$$E(XY)^2 = (Cov(X, Y) + E(X)E(Y))^2$$

Entonces la varianza del producto de dos variables aleatorias resulta ser:

$$Var(XY) = Cov(X^2, Y^2) + (Var(X).E(X)^2).(Var(Y).E(Y)^2) \; - (Cov(X, Y) + E(X)E(Y))^2$$

Si las variables aleatorias son independientes, significa que $Cov(X^2, Y^2)$ = $Cov(X, Y)$ = 0 y la expresión se reduce a:

$$Var(XY) = (Var(X).E(X)^2).(Var(Y).E(Y)^2) \; - (E(X)E(Y))^2$$

Al operar algebraicamente y realizar la distributiva, se cancelan los términos relacionados a $(E(X)E(Y))^2$. Entonces:

$$Var(XY) = Var(X).Var(Y) + Var(X).E(Y)^2 + Var(Y).E(X)^2$$

Teniendo en cuenta estas expresiones y propiedades, se busca obtener la varianza sobre la variable aleatoria z_i:

$$var(z_i/Si) = \sum_{j,k} b_j b_k a_{ij} a_{ik}$$

Considerando que los coeficientes, por ortogonalidad solo serán distintos de cero cuando j=k

$$var(z_i/Si) = \sum_{j=1}^{N} {b_j}^2 \overline{{a_{ij}}^2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$E_w = \sum_{j=1}^{N} b^2_{\ j} \text{ y } \overline{a_{ij}a_{ik}} = \{E_S/N \; para\, j = k$$

$$var(z_i/Si) = \sum_{j=1}^{N} {b_j}^2 \tfrac{Es}{N}$$

$$var(z_i/Si) = \tfrac{EwEs}{N}$$

Para completar la varianza a la salida del correlador i-ésimo, dado que la señal m-ésima fue transmitida, donde i ≠ m, puede ser calculada:

$$var(z_i/Sm) = \frac{EwEs}{N} + \frac{Es^2}{N}$$

Para la salida del correlador i-ésimo, se puede expresar a la relación señal interferencia como:

$$SJR = \frac{Potencia\ pico\ de\ la\ señal}{Varianza\ de\ la\ componente\ de\ ruido}$$

Donde la Potencia de la señal se obtiene como la media al cuadrado (Valor esperado “Esperanza” al cuadrado) y la potencia del jammer o ruido interferente que está dado por la varianza de z_i.

$$SJR = \sum_{m=1}^{D} \frac{E^2(Zi/Sm)}{var(Zi/Sm)} P(Sm) = \frac{E_s{}^2/D^2}{E_w E_s/N} * \frac{1}{D} = \frac{E_s N}{E_w D}$$

Se puede ver como la SJR queda asociada con un factor “N/D”, sabiendo que la utilización de bases “D” es mucho menor que las N disponibles bases y por lo tanto D<<N. Permitiendo un factor mayor que uno para esta relación señal interferencia, esto está asociado a que el jammer implementa potencia en las N bases y el transmisor solo en D bases. A este factor se lo conoce como Ganancia de Procesamiento, que es el parámetro que expresa la ventaja de rendimiento del sistema de espectro ensanchado sobre un sistema de banda estrecha y se lo asocia de la siguiente manera:

$$Gp = \frac{N}{D} \approx \frac{2WssT}{2WminT} = \frac{Wss}{R}$$

Wss hace referencia al ancho de banda de Spread Spectrum y Wmin es el ancho de banda utilizado por los datos. Para el caso de secuencia directa, Wss es aproximadamente Rch y Wmin es similar a Rs o R.

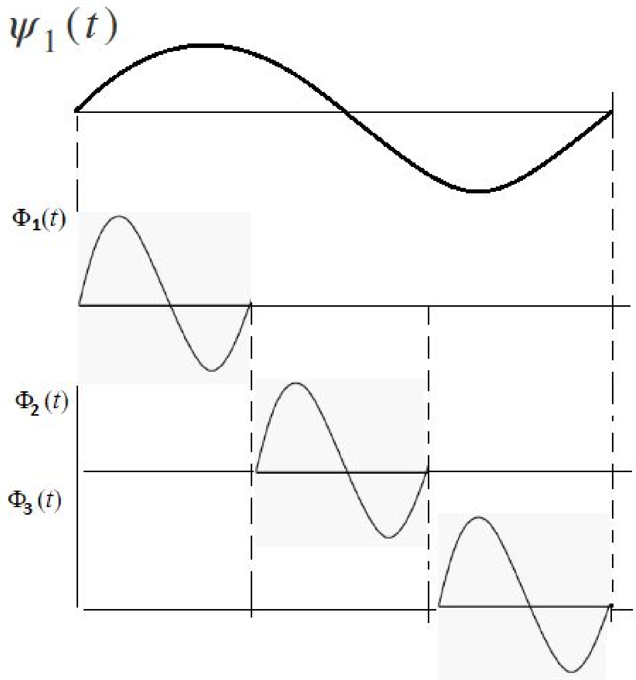
$$Gp = \frac{Rch}{R}$$

Ganancia de procesamiento en Secuencia Directa

Para aplicar direct secuence se utiliza un esquema de modulación M-PSK, el cual utiliza únicamente dos bases para representar cualquier tipo de waveform cuya diferencia se encuentra precisamente en la fase de la señal. En función de este concepto, se selecciona un set de funciones base ortonormales iguales al utilizado en M-PSK pero de dimensión 2N que estará presente por cada tiempo de bit, ya que al aplicar spread spectrum no será posible utilizar solamente dos bases para representar las waveform resultantes, deberá plantearse bases por cada tiempo de chip como las siguientes:

$$\Phi_k(t) = \{\sqrt{\tfrac{2}{Tc}}cos(2\pi fct)\ para\ kTc \le t \le (k+1)Tc\ \ y\ 0\ para\ otro\ valor$$

$$\overline{\Phi_k}(t) = \{\sqrt{\tfrac{2}{Tc}}sen(2\pi fct)\ para\ kTc \le t \le (k+1)Tc\ \ y\ 0\ para\ otro\ valor$$

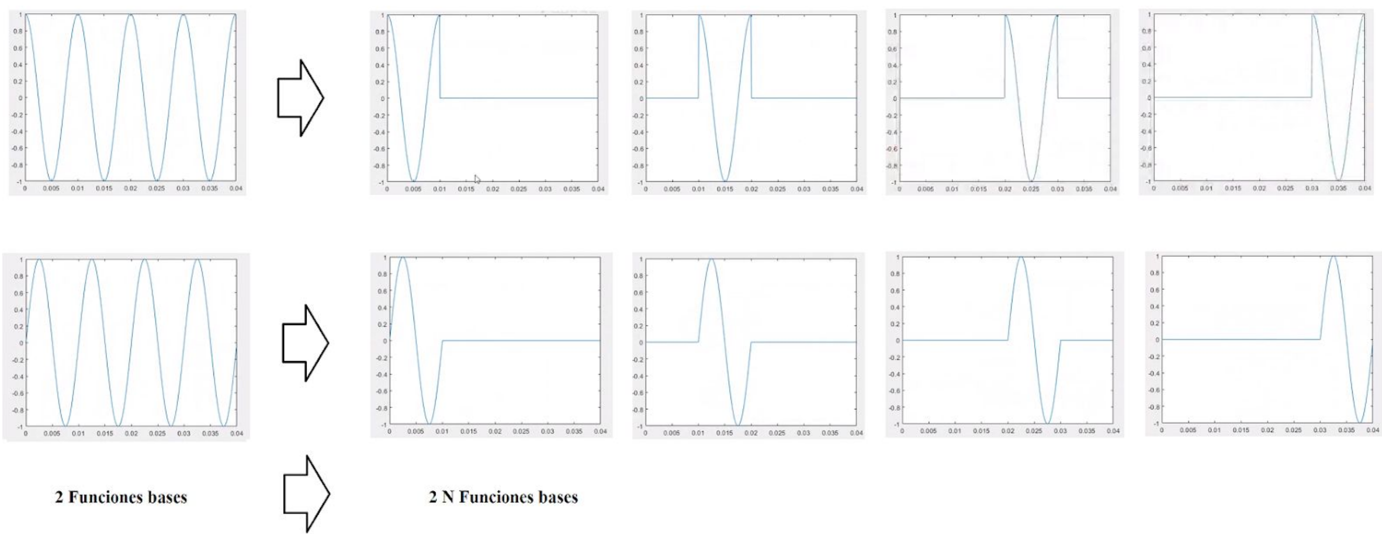


Los dibujos de las funciones son conceptuales

Donde:

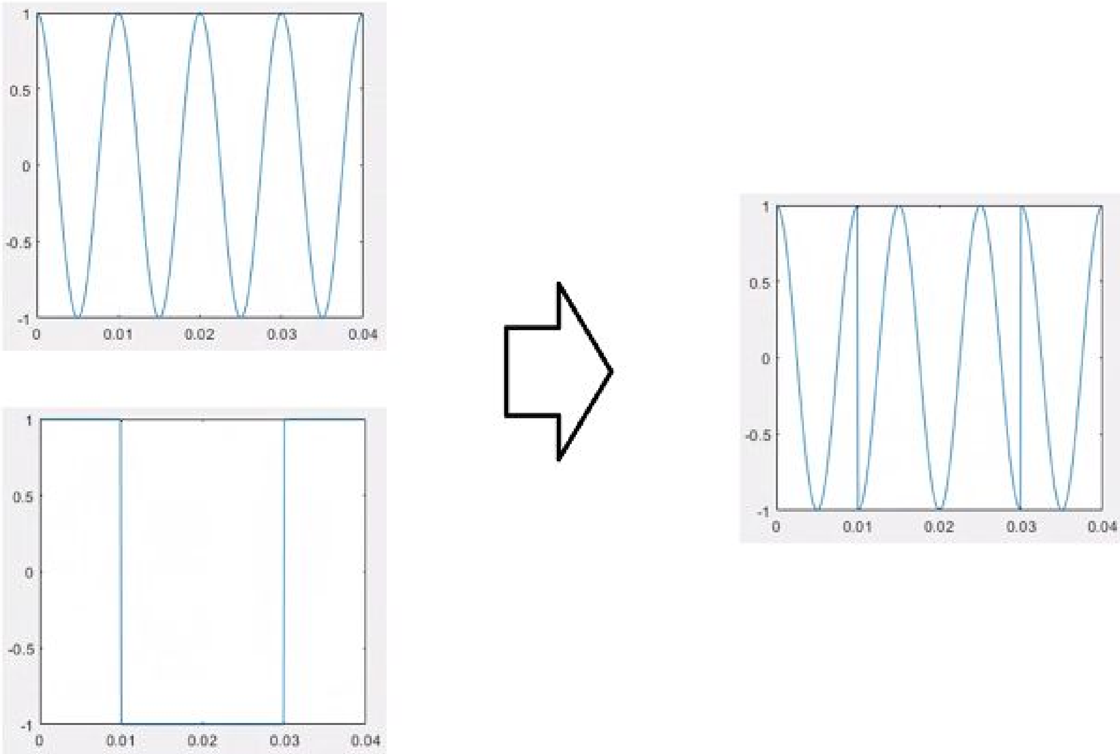
$$k = 0, 1, 2, ..., N - 1$$
$$Tc = Duración\ del\ chip$$
$$N = Número\ de\ chip\ por\ bit$$

Esto está aclarando que dependiendo la cantidad de chip por bit serán la cantidad de bases ortonormales (2N) utilizadas por el sistema de spread spectrum.



Si se considera a la señal transmitida en un intervalo de información, que para BPSK es un bit y se encuentra conformado por N chips, es:

$$S(t) = p(t) * d(t)$$



Donde “p(t)” es el código PN y “d(t)” son las diferentes waveform convencionales en un modulador digital BPSK.

$$S(t) = p(t)\sqrt{\tfrac{2Eb}{Tb}}cos(2\pi fct)$$

$$S(t) = \sqrt{\tfrac{Eb}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \Phi_k(t) \;\; para\ 0 \le t \le Tb$$

C_k está asociado al código PN, siendo la secuencia de código aleatorio que puede tomar valores entre +- 1. Haciendo que se considere a la señal de dimensión N.
Con respecto al jammer y como ya se ha comentado que afecta a todas las bases, se lo puede expresar como:

$$J(t) = \sum_{k=0}^{N-1} j_k \Phi_k(t) + \sum_{k=0}^{N-1} j_k \overline{\Phi}_k(t) \; para\ 0 \le t \le Tb$$

Con respecto a la potencia promedio y si se considera igual potencia en las bases asociadas al seno y al coseno, se llega a:

$$J(t) = \frac{1}{Tb}\int_0^{Tb} J^2(t)dt = \frac{1}{Tb}\sum_{k=0}^{N-1} {j_k}^2 + \frac{1}{Tb}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{j_k}^2$$

Dado que j tiene componentes en fase y componentes en cuadratura, al realizar la integral, se demuestra que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} {j_k}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{j_k}^2$$

$$J = \frac{2}{Tb}\sum_{k=0}^{N-1} {j_k}^2$$

Teniendo en cuenta a la señal y al jammer, a la hora de la recepción se encuentra la siguiente señal:

$$r(t) = p(t)d(t) + J(t)$$

La misma enfrentará un sistema basado en filtros acoplados, en donde las señales de referencias serán las bases utilizadas por el sistema de modulación BPSK convencional afectadas por el código PN. De esta forma, si la señal r(t) contiene la waveform modificada por el mismo patrón pseudoaleatorio, al realizar el proceso de correlación cruzada se obtiene la salida esperada sin grandes variaciones, producto de que la señal jammer sigue siendo de espectro expandido. Para representar estos beneficios a la hora de la recepción se utilizaba la relación señal-jammer (SJR) que de alguna forma parametrizaba y representaba mediante parámetros del sistema como energía de símbolo, energía de jammer y ganancia de procesamiento las ventajas de spread spectrum. Por eso se busca en DSSS con BPSK obtener la expresión de SJR.

Para ello es necesario comenzar el análisis en el receptor y precisamente a la salida de un detector coherente mediante un correlador como filtro acoplado:

$$U = \int_0^{Tb} r(t).(p(t)\sqrt{\frac{2}{Tb}}cos(2\pi fct))dt$$

$$U = U_s + U_j$$

$$U = \sqrt{\frac{2}{Tb}}\int_o^{Tb} (p(t).d(t) + J(t)).p(t)cos(2\pi fct)dt$$

$$U = \sqrt{\tfrac{2}{Tb}} \int_0^{Tb} (p(t).d(t)).p(t)cos(2\pi fct)dt \; + \sqrt{\tfrac{2}{Tb}} \int_0^{Tb} J(t).p(t)cos(2\pi fct)dt$$

En el caso de la componente directamente asociada a la señal de interés, se encuentra que:

$$U_s = \sqrt{\tfrac{2}{Tb}} \int_0^{Tb} (p(t)^2.d(t).cos(2\pi fct))dt$$

$$U_s = \sqrt{\tfrac{2}{Tb}} \int_0^{Tb} 1.d(t).cos(2\pi fct)dt$$

$$U_s = \sqrt{\tfrac{2}{Tb}}.\sqrt{\tfrac{2Eb}{Tb}}.\tfrac{1Tb}{2}$$

$$U_s = \pm\sqrt{Eb}$$

$$= E(U_s) = \sqrt{Eb} \; valor\ medio\ esperado\ para\ la\ transmisi\acute{o}n\ de\ un\ s\acute{\imath}mbolo$$

$$\mu^2 = E(U_s)^2 = Eb \;\; Potencia\ de\ un\ s\acute{\imath}mbolo\ transmitido$$

Con respecto a la componente de la señal recibida referida al jammer se espera:

$$U_j = \sqrt{\tfrac{2}{Tb}} \int_0^{Tb} J(t).p(t)cos(2\pi fct)dt$$

Recordando que:

$$\Phi_k(t) = \sqrt{\tfrac{2}{Tc}} cos(2\pi fct)$$

$$cos(2\pi fct) = \sqrt{\tfrac{Tc}{2}}\; \Phi_k(t)$$

Expresando la señal de referencia para el filtro acoplado mediante sus bases:

$$U_j = \sqrt{\tfrac{2}{Tb}}.\sqrt{\tfrac{Tc}{2}}.\int_0^{Tb} J(t).(\sum_{k=0}^{N-1} c_k.\Phi_k(t)).dt$$

Esta expresión implica que se debe integrar y sumar los resultados por cada tiempo de chip para lograr obtener la integral en el tiempo de bit. Por lo tanto podría obtenerse la siguiente expresión equivalente:

$$U_j = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k.\int_{kTc}^{(k+1)Tc} J(t).\Phi_k(t).dt$$

La señal del jammer J(t) también quedaría entonces expresada por sus bases para integrarse en cada tiempo de chip:

$$U_j = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k.\int_{kTc}^{(k+1)Tc} (j_k\Phi_k(t) + j_k\overline{\Phi}_k(t)).\Phi_k(t).dt$$

Operando matemáticamente:

$$U_j = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k.(\int_{kTc}^{(k+1)Tc} j_k\Phi_k(t).\Phi_k(t).dt + \int_{kTc}^{(k+1)Tc} j_k\overline{\Phi}_k(t).\Phi_k(t).dt\,)$$

$$U_j = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k.(\int_{kTc}^{(k+1)Tc} j_k\Phi_k(t).\Phi_k(t).dt)$$

$$U_j = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k j_k$$

Como U_j está asociada con C_k, la cual es una variable aleatoria binaria independiente igualmente distribuida, se obtiene la media y varianza que constituyen la potencia de jammer tanto de continua como de alterna. De esta forma, se lograría uno de los elementos de la ecuación para la SJR.

$$\mathbf{E(XY) = E(X).\ E(Y)}$$

$$E(U_j) = E(\sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k j_k)$$

$$E(U_j) = E(\sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.(c_0 j_0 + c_1 j_1 + c_2 j_2 + c_3 j_3 + ... + c_{N-1} j_{N-1}))$$

$$E(U_j) = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.(E(c_0 j_0) + E(c_1 j_1) + E(c_2 j_2) + E(c_3 j_3) + ... + E(c_{N-1} j_{N-1}))$$

Al ser variables independientes $C_k.J_k$, puede expresarse:

$$E(U_j) = \sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}.(E(c_0)E(j_0) + E(c_1)E(j_1) + E(c_2).E(j_2) + E(c_3)E(j_3) + ... + E(c_{N-1})E(j_{N-1}))$$

El valor esperado de cualquier "C_k" es:

$$E(c_k) = \tfrac{1}{2}\ 1\ +\ \tfrac{1}{2}(-1) = 0$$

Por lo tanto, como “C_k” afecta a todos los términos por igual:

$$\mu = E(Uj) = 0 \quad Valor\ medio\ igual\ a\ cero.$$

$$\mu^2 = E(Uj)^2 = 0\ Potencia\ continua\ de\ ruido.$$

Se demuestra que la potencia continua del jammer es nula ya que viene dada por la media al cuadrado. Luego, teniendo presente que la potencia promedio del jammer se puede expresar como:

$$J = \tfrac{2}{Tb} \sum_{k=0}^{N-1} {j_k}^2$$

Se obtiene la varianza:

$$Var(U_j) = Var(\sqrt{\tfrac{Tc}{Tb}}. \sum_{k=0}^{N-1} c_k j_k)$$

$$Var(U_j) = \tfrac{Tc}{Tb} Var((c_0 j_0) + (c_1 j_1) + (c_2 j_2) + (c_3 j_3) + ... + (c_{N-1} j_{N-1})$$

Como son todas variables independientes, la varianza de una suma es la suma de varianzas, en donde no influye la covarianza. Esto permite escribir la siguiente expresión:

$$Var(U_j) = \tfrac{Tc}{Tb}(Var(c_0 j_0) + Var(c_1 j_1) + Var(c_2 j_2) + Var(c_3 j_3) + ... + Var(c_{N-1} j_{N-1})$$

Analizando cada término correspondiente a la suma se encuentra:

$$Var(c_0 j_0) = Var(c_0).Var(j_0) + Var(c_0).E(j_0)^2 + Var(j_0).E(c_0)^2$$

$$Var(c_0) = \tfrac{1}{2}(1 - 0)^2 + \tfrac{1}{2}(-1 - 0)^2 = 1$$

$$E(c_0) = \tfrac{1}{2}1 + \tfrac{1}{2}(-1) = 0$$

$$E(c_0)^2 = 0^2 = 0$$

$$Var(c_0 j_0) = Var(j_0) + E(j_0)^2$$

Usando una propiedad de la varianza:

$$Var(j_0) = E({j_0}^2) - E(j_0)^2$$

Reemplazando:

$$Var(c_0 j_0) = E(j_0{}^2) - E(j_0)^2 + E(j_0)^2$$

Resultando para cada término de la sumatoria:

$$Var(c_0 j_0) = E(j_0{}^2)$$

$$Var(c_0 j_0) = \sum_{k=0}^{N-1} p_i . j_0{}^2 = \tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2$$

Esta ultima expresion aplica a todas las varianzas calculadas, de tal forma que es posible obtener:

$$Var(U_j) = \tfrac{Tc}{Tb}\left(\tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2 + \tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2 + \tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2 + \tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2 + \ldots + \tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2\right)$$

Sacando factor común:

$$\tfrac{Tc}{Tb}\left(\tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2\right)(1 + 1 + 1 + 1 + \; \ldots.. + 1)$$

$$\tfrac{Tc}{Tb}\left(\tfrac{1}{N} . \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2\right)N$$

Luego se trabaja la expresión multiplicando y dividiendo por 2 en busca de reemplazar $\tfrac{2}{Tb} \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2$ por $\tfrac{JTc}{2}$

$$var(Uj) = \tfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2 = \tfrac{Tc*2}{2*Tb} \sum_{k=0}^{N-1} j_k{}^2$$

$$var(Uj) = \tfrac{JTc}{2} \; Potencia\ de\ alterna\ asociada\ al\ ruido$$

Con respecto a la relación señal - jammer a la salida y entrada del receptor, teniendo en cuenta que es el cociente entre la potencia instantánea de la señal y la varianza de la interferencia.

$$(SJR)_0 = \frac{Potencia\ pico\ de\ la\ señal\ a\ la\ salida\ del\ filtro\ acoplado}{Potencia\ de\ ruido\ a\ la\ salida\ del\ filtro\ acoplado} = \frac{E(U_s)^2}{E(U_j)^2 + Var(U_j)}$$

$$(SJR)_0 = \frac{\sqrt{Eb}^2}{0 + (JTc/2)}$$

$$(SJR)_0 = \frac{Eb}{JTc/2} = \frac{2Eb}{JTc}$$

Mientras que la relación señal interferencia a la entrada del receptor es:

$$(SJR)_i = \frac{Potencia\ de\ la\ señal\ a\ la\ entrada\ del\ receptor}{Potencia\ de\ ruido\ a\ la\ entrada\ del\ receptor}$$

$$(SJR)_i = \frac{Eb/Tb}{J}$$

Ahora se puede realizar un análisis de ganancias en el proceso de detección. Esto implica expresar las relaciones (SJR) tanto de entrada como de salida mediante un cociente. Una relación de veces.

$$(SJR)_0 = \frac{2Tb}{Tc}(SJR)_i$$

Convirtiendo a decibeles, se obtiene:

$$(SJR)_0[dB] = (SJR)_i[dB] + 10.log_{10}(2) + 10.log_{10}(Tb/Tc)$$

$$Gp = \frac{Tb}{Tc}$$

$$(SJR)_0[dB] = (SJR)_i[dB] + 3\ dB + 10log_{10}G_p$$

Es importante remarcar de la última ecuación, que los factores que modifican la relación señal-interferencia a la salida del filtro acoplado son:

$\rightarrow$ *Ganancia debido a la detección coherente* $= 3[dB]$

$\rightarrow$ *Ganancia debido a la técnica SS* $= Gp = \frac{Tb}{Tc}$

De ellos, el único variable es la Ganancia por SS. Teniendo presente que SS funciona mediante el aumento en ancho de banda a costa de la variación del T_C, cuanto menor sea el parámetro en cuestión y por lo tanto mayor W, se conseguirá una mayor Ganancia de procesamiento.

$$Gp = \frac{Tb}{Tc} = \frac{N}{D} \approx \frac{2WssT}{2WminT} = \frac{Wss}{R}$$

Ganancia de procesamiento en Secuencia directa Banda Base

Dejando de lado los sistemas de comunicación en banda de paso y centrándonos en los banda base, las señales a transmitirse por parte del modulador digital binario son:

$$d(t) = \pm \sqrt{\frac{Eb}{Tb}}$$

Donde "Eb" es la energía de bit y "Tb" es el tiempo de bit expresado en segundos. Si esto realmente ocurre significa que estamos en presencia de un esquema de modulación digital binaria de banda base NRZ-L. Al aplicar Spread Spectrum se observa que la señal temporal de duración "Tb" a la salida del modulador digital puede ser expresada como:

$$s(t) = d(t) * p(t)$$

$$r(t) = d(t)p(t) + J(t)\ para\ 0 \leq t \leq Tb$$

La misma enfrentará un sistema basado en filtros acoplados, en donde las señales de referencias serán las bases utilizadas por el sistema de modulación PCM NRZ-L convencional afectadas por el código PN. De esta forma, si la señal r(t) contiene la waveform modificada por el mismo patrón pseudoaleatorio, al realizar el proceso de correlación cruzada se obtiene la salida esperada sin grandes variaciones, producto de que la señal jammer sigue siendo de espectro expandido. Para representar estos beneficios a la hora de la recepción se utilizaba la relación señal-jammer (SJR) que de alguna forma parametrizaba y representaba mediante parámetros del sistema como energía de símbolo, energía de jammer y ganancia de procesamiento las ventajas de spread spectrum. Por eso se busca en DSSS con PCM NRZ-L obtener la expresión de SJR.

Para ello es necesario comenzar el análisis en el receptor y precisamente a la salida de un correlador, el cual es utilizado como filtro acoplado:

$$U = \int_0^{Tb} r(t)\sqrt{\frac{Eb}{Tb}}.p(t)dt$$

$$U = \int_0^{Tb} (\ d(t).p(t) + J(t)\ ).\sqrt{\frac{Eb}{Tb}}\ p(t)\ dt$$

Expandiendo de la siguiente manera el producto entre r(t) y p(t), se logra obtener aquellos términos netamente asociados a la señal de interés y a la señal de jammer a la salida del correlador:

$$r(t)p(t) = d(t)p^2(t) + J(t)p(t) = d(t) + J(t)p(t)$$

La señal r(t) expresada de una manera distinta, afronta la etapa de correlación cruzada con la waveform esperada que está modificada por el código PN y que es utilizada como referencia para el proceso, obteniendo:

$$U = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} d(t).p(t).p(t).dt + \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} J(t).p(t)dt$$

$$U = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} d(t).dt + \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} J(t).p(t)dt$$

$$U = U_s + U_j$$

En el caso de que no exista interferencia:

$$U = U_s$$

Las decisiones se basarán en los resultados de U_S, que dependen del símbolo transmitido. En este caso, las waveform que entrega el modulador digital poseen la forma $\pm\sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}$. Por lo tanto los valores de U serán:

$$U_s = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} \pm \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}.dt$$

$$U_s = \pm\sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}.\sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}.T_b$$

$$U_s = \pm E_b$$

Esto permite definir un umbral de decisión, según si U $\gtrless$0. El resultado es distinto porque se está usando como filtro acoplado la propia waveform y no las bases. Recordemos que las bases para sistemas digitales banda base tenían la forma:

$$\Phi_k(t) = \sqrt{\tfrac{1}{Tb}}$$

Esta última aclaración es importante, porque en el desarrollo matemático que sigue se hace uso del concepto de bases para hacer referencia a “p(t)”.

$$p(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \,.\, \Phi_k(t)$$

$$\Phi_k(t) = \sqrt{\tfrac{1}{Tc}} \;\; para \;\; kT_c < t \; < (k+1)T_c$$

Tal que, las waveform tienen dos formas de ser expresadas:

$$s(t) = d(t) * p(t)$$

$$s(t) = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}.p(t)$$

$$s(t) = \sqrt{\tfrac{Eb}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k.\Phi_k(t) \ para \ 0 \le t \le Tb$$

De esta forma, se puede considerar que la señal del jammer, la señal que se está transmitiendo y p(t) son:

$$J(t) = \sqrt{\tfrac{E_j}{Tb}} \quad ; \quad d(t) = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \ ; \ \int_0^{Tb} p(t).dt = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\sqrt{Tc}$$

Se llega a que en la salida del correlador, se obtiene:

$$U = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} d(t).dt + \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} J(t).p(t)dt$$

Reemplazando a “J(t)” y “d(t)” por sus expresiones equivalentes, se logra:

$$U = \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}} \int_0^{Tb} \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}.dt + \sqrt{\tfrac{Eb}{Tb}}.\sqrt{\tfrac{E_j}{Tb}}. \int_0^{Tb} p(t).dt$$

Integrando:

$$U = Eb + \frac{\sqrt{EbEj}}{Tb} \sum_{k=0}^{N-1} c_k\sqrt{Tc}$$

$$U = Eb + \frac{\sqrt{EbEjTc}}{Tb} \sum_{k=0}^{N-1} c_k$$

Como Tb=N.Tch se puede reemplazar para obtener la siguiente expresión:

$$U = Eb + \frac{\sqrt{EbEj}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k$$

En donde la potencia de continua y alterna puede encontrarse a partir de las expresiones asociadas a la esperanza y varianza:

$$E(U) = E(Eb + \frac{\sqrt{EbEj}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k)$$

$$E(U) = E(\ Eb\ +\ \frac{\sqrt{EbEj}}{N}(c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_{N-1}))$$

$$E(U) = E(\ Eb)\ +\ \frac{\sqrt{EbEj}}{N}(E(c_0) + E(c_1) + E(c_2) + ... + E(c_{N-1}))$$

$$E(c_0) = \tfrac{1}{2}1 + \tfrac{1}{2}(-1) = 0$$

El valor medio es:

$$E(U) = Eb$$

Para obtener la varianza es necesario plantear:

$$Var(U) = Var(\ Eb\ +\ \frac{\sqrt{EbEj}}{N}.\sum_{k=0}^{N-1} c_k)$$

$$Var(U) = Var(\ \frac{\sqrt{EbEj}}{N}\sum_{k=0}^{N-1} c_k)$$

$$Var(U) = \frac{EbEj}{N^2}Var(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_{N-1})$$

$$Var(c_0) = \tfrac{1}{2}(1-0)^2 + \tfrac{1}{2}(-1-0)^2 = 1$$

$$Var(U) = \frac{EbEj}{N^2}(1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1)$$

$$Var(U) = \frac{EbEj}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} 1$$

$$Var(U) = \frac{EbEj}{N^2}N$$

$$Var(U) = \frac{E_bE_j}{N}$$

Con respecto a la relación señal - jammer a la salida y entrada del receptor, teniendo en cuenta que es el cociente entre la potencia instantánea de la señal y la varianza de la interferencia.

$$(SJR)_0 = \frac{Potencia\ pico\ de\ la\ señal\ a\ la\ salida\ del\ filtro\ acoplado}{Potencia\ de\ ruido\ a\ la\ salida\ del\ filtro\ acoplado} = \frac{E(U)^2}{Var(U)}$$

$$(SJR)_0 = \frac{Eb^2}{\frac{EbEj}{N}} = \frac{Eb}{\frac{Ej}{N}} \text{ ó } \frac{Eb.N}{Ej}$$

$$(SJR)_i = \frac{Potencia\ de\ la\ señal\ a\ la\ entrada\ del\ receptor}{Potencia\ de\ ruido\ a\ la\ entrada\ del\ receptor} = \frac{\sqrt{EbTb}}{\sqrt{EjTb}} = \frac{Eb}{Ej}$$

$$(SJR)_0 = N * (SJR)_i$$

Convirtiendo a decibeles, se obtiene:

$$(SJR)_0[dB] = (SJR)_i\,[dB] + 10.log_{10}(N)$$

$$Gp = \frac{N}{1}$$

$$(SJR)_0[dB] = (SJR)_i\,[dB] + 10log_{10}G_p$$

Con respecto a la probabilidad de error, considerando que los datos son equiprobables y posterior al despreading se puede llegar a:

$$Pe = \frac{1}{2}P(\frac{H2}{d1(t)}) + \frac{1}{2}P(\frac{H1}{d2(t)})$$

$$Pe = \frac{1}{2}P(\frac{e}{\sqrt{\frac{Eb}{Tb}}}) + \frac{1}{2}P(\frac{e}{-\sqrt{\frac{Eb}{Tb}}})$$

$$Pe = P((U < 0)/\sqrt{\frac{Eb}{Tb}})$$

$$Pe = Q(Eb/\sqrt{\frac{EbEj}{N}})$$

Donde “Eb” es la energía de la señal y “ $\sqrt{\frac{EbEj}{N}}$ ” es la densidad espectral de potencia de interferencia. Esta expresión es equivalente a la utilizada para un sistema de comunicación digital en presencia de ruido AWGN, donde $Q(Eb/No)$ representa la relación entre energía de señal frente a densidad espectral de potencia de ruido “No”. Como en estos casos no se está considerando el efecto del ruido para el modelado del sistema, se obtiene la probabilidad de error solo en función de las interferencias:

$$Pe = Q(\sqrt{\frac{Eb}{Ej}N})$$

Este análisis se puede desarrollar ya que el proceso de spreading y despreading, el cual cuenta con múltiples posibles señales queda en una etapa intermedia previa al

cálculo de las probabilidades de error. Para el sistema, desde el punto de vista del proceso de toma de decisión, existen dos waveform posibles de recibir.
Se puede plantear un ejemplo como el siguiente:

$$Si \ \{ \ Eb/Ej \ = \ -9.5dB \ (0.11) \ \ y \ \ N = 200(23dB)$$

entonces:

$$Eb/Ej = 10^{(-9.5/10)} = 0.1122$$
$$Pe = Q(\sqrt{0.11 * 200})$$
$$Pe = Q(\sqrt{22}) \approx 1.5x10^{-6}$$