

# ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ДАННЫХ, СОДЕРЖАЩИХ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ПУТЕМ УЧЕТА ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТАНДАРТНЫХ РЕГРЕССОРОВ SCIKIT-LEARN

## Постановка задачи

Имеется набор данных `dataset_0`, который содержит количественные предикторы `A_1`, `A_2`, `A_3`, `A_4`, `A_5` и количественную целевую переменную `b`. Набор данных `dataset_0` представляет собой точную зависимость целевой переменной `b` от предикторов.

Даны два набора данных `dataset_1` и `dataset_2`, каждый из которых содержит количественные предикторы `A_h_1`, `A_h_2`, `A_h_3`, `A_h_4`, `A_h_5` и количественную целевую переменную `b_d`. Наборы данных `dataset_1` и `dataset_2` моделируют результаты измерений `b` от предикторов и сгенерированы по данным `dataset_0` путем случайных отклонений предикторов в пределах 1% и целевой переменной `b` в пределах 5% от соответствующих точных значений из `dataset_0`.

Необходимо по данным `dataset_1` и `dataset_2` спрогнозировать значение целевой переменной `b_max` при значениях предикторов ( $1800 + j1000$ ,  $1500 + j1000$ ,  $1800 + j1400$ ,  $2000 + j1700$ ,  $1500 + j1200$ ). Датасет `dataset_0` использовать только для валидации обученных моделей.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

### 1. Характеристика датасетов

Значения предикторов в каждом наборе данных являются положительными комплексными числами, максимальное значение которых не превышает  $1230 + j513$ . Значения целевой переменной в каждом наборе данных также являются положительными комплексными числами, максимальное значение которых не превышает  $83 + j109$ .

Для `dataset_0` выявлена функциональная линейная зависимость целевой переменной от всех предикторов. При этом имеется практически абсолютная мультиколлинеарность всех предикторов.

Для dataset\_1 и dataset\_2 коэффициенты корреляции для всех предикторов между собой практически равны 1, а для целевой переменной с предикторами практически равны 0.99. Таким образом, для dataset\_1 и dataset\_2 также имеются практически функциональная линейная зависимость целевой переменной от предикторов и практически абсолютная мультиколлинеарность всех предикторов.

## 2. Обучение различных моделей

Данная задача относится к классу задач экстраполяции регрессии.

Обучение моделей выполнено на языке Python 3.

Обучение проводилось как при разбиении на обучающую и тестовую выборки (70/30), так и на полных наборах данных.

Модели строились на всех предикторах, которые масштабировались с помощью MaxAbsScaler.

Для обучения моделей применялись алгоритмы:

1) LinearRegression, Ridge, Lasso, ElasticNet, TheilSenRegressor из библиотеки scikit-learn с поиском оптимальных значений их гиперпараметров по сетке с кросс-валидацией.

2) регуляризация Тихонова с поиском коэффициента регуляризации  $\alpha$  методом обобщенной невязки [1].

Алгоритмы scikit-learn не поддерживают работу с комплексными числами, что не позволяет построить непосредственные модели регрессии для данных, содержащих комплексные числа, с помощью стандартных регрессоров scikit-learn. Для устранения этого препятствия автором разработан метод преобразования исходного датасета размером  $M \times N$  с комплексными числами в датасет размером  $2M \times (2N - 1)$  с вещественными числами, что позволило использовать для построения достоверных моделей регрессии комплексных чисел стандартные регрессоры scikit-learn (подробнее смотри репозиторий автора [https://github.com/GorshkovAndrey/Regression\\_of\\_complex\\_numbers\\_using\\_sklearn](https://github.com/GorshkovAndrey/Regression_of_complex_numbers_using_sklearn)).

Отличие алгоритма регуляризации Тихонова от модели Ridge из scikit-learn состоит в том, что коэффициент регуляризации  $\alpha$  определяется по условию оптимизации нестандартной метрики – обобщенной невязки, учитывающей информацию о погрешности измерения предикторов и целевой переменной.

Решение задачи регрессии – системы линейных уравнений  $Az = b$  для модели на основе алгоритма регуляризации Тихонова имеет следующий вид

$$z = (A^T A + \alpha E)^{-1} A^T b \quad (1)$$

Уравнение обобщенной невязки для определения коэффициента регуляризации  $\alpha$  имеет следующий вид

$$\|Az(\alpha) - b\|^2 - (h\|z(\alpha)\| + d)^2 = 0 \quad (2)$$

$$h = \delta_A \|A\| \quad (3)$$

$$d = \delta_b \|b\| \quad (4)$$

где  $\| \cdot \|$  – обозначение нормы матрицы или вектора;

$\delta_A$  – относительная погрешность измерения элементов матрицы  $A$ ;

$\delta_b$  – относительная погрешность измерения элементов вектора  $b$ .

По условию данной задачи  $\delta_A = 0,01$ ,  $\delta_b = 0,05$ .

Метрики, результаты прогноза целевой переменной  $b\_max$  и их осредненные значения Mean для различных моделей регрессоров из библиотеки scikit-learn приведены в таблицах 1 – 7. Там же приведены результаты прогноза Regularized для модели на основе алгоритма регуляризации Тихонова и **точный прогноз** Accurate.

Таблица 1 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_1 (random\_state = 1902 для train\_test\_split)

	LinRegr	Ridge	Lasso	ElastNet	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2 train	0.988	0.988	0.987	0.987	0.987	0.988	0.931	
R2 test	0.981	0.982	0.985	0.984	0.981	0.983	0.928	
b_max_complex	(305.464+440.399j)	(272.488+411.849j)	(192.317+320.62j)	(222.348+343.56j)	(271.979+427.573j)	(252.919+388.8j)	(159.659+324.404j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	535.966	493.831	373.876	409.234	506.746	463.825	361.565	337.449

Таблица 2 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_1 (random\_state = 1903 для train\_test\_split)

	LinRegr	Ridge	Lasso	ElastNet	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2 train	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.932	
R2 test	0.985	0.984	0.985	0.985	0.985	0.985	0.929	
b_max_complex	(208.258+343.867j)	(166.59+329.601j)	(220.384+327.825j)	(217.115+327.2j)	(194.87+341.702j)	(201.443+334.039j)	(160.012+325.055j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	402.015	369.309	395.017	392.682	393.363	390.079	362.305	337.449

Таблица 3 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_1 (обучение на полном наборе данных)

	LinRegr	Ridge	Lasso	ElastNet	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2	0.987	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.933	
b_max_complex	(210.911+350.847j)	(173.188+330.798j)	(185.271+314.552j)	(192.028+321.218j)	(201.778+364.422j)	(192.635+336.367j)	(160.015+325.052j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	409.362	373.392	365.059	374.24	416.555	387.622	362.303	337.449

Таблица 4 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_2 (random\_state = 1994 для train\_test\_split)

	LinRegr	Ridge	Lasso	ElastNet	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2 train	0.99	0.99	0.989	0.989	0.989	0.989	0.936	
R2 test	0.977	0.978	0.98	0.98	0.977	0.979	0.907	
b_max_complex	(288.46+435.473j)	(272.626+420.048j)	(231.557+337.462j)	(231.365+337.574j)	(271.936+439.099j)	(259.189+393.931j)	(159.907+324.525j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	522.347	500.765	409.267	409.25	516.485	471.551	361.783	337.449

Таблица 5 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_2 (random\_state = 1961 для train\_test\_split)

	LinRegr	Ridge	Lasso	ElastNet	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2 train	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.93	
R2 test	0.985	0.986	0.987	0.986	0.983	0.986	0.939	
b_max_complex	(102.463+215.89j)	(152.992+296.72j)	(155.754+281.007j)	(158.619+292.201j)	(91.844+216.47j)	(132.334+260.458j)	(160.358+325.441j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	238.971	333.84	321.285	332.478	235.148	292.148	362.804	337.449

Таблица 6 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_2 (обучение на полном наборе данных)

	LinRegr	Ridge	Lasso	ElastNet	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987	0.933	
b_max_complex	(189.993+321.392j)	(170.353+329.699j)	(188.332+299.377j)	(207.623+310.257j)	(175.489+323.464j)	(186.358+316.838j)	(160.354+325.421j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	373.35	371.109	353.688	373.319	368.002	367.581	362.784	337.449

Таблица 7 – Метрики и результаты прогноза целевой переменной для dataset\_0 (обучение на полном наборе данных)

	LinRegr	Ridge	TheilSen	Mean	Regularized	Accurate
R2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
b_max_complex	(147.1+303.7j)	(147.1+303.7j)	(147.1+303.701j)	(147.1+303.7j)	(147.1+303.701j)	(147.1+303.7j)
b_max_modul	337.449	337.449	337.45	337.449	337.45	337.449

Примечание. dataset\_0 сгенерирован при коэффициентах  $z = (0.04 + j0.02, 0.035 + j0.015, 0.03 + j0.02, 0.02 + j0.012, 0.016 + j0.01)$

### 3. Анализ прогнозов различных моделей

Для dataset\_1 диапазон модуля осредненного прогноза Mean различных моделей регрессоров scikit-learn составил от 387,6 до 463,8. Диапазон прогноза регуляризованного решения, учитывающего информацию о погрешности измерения предикторов и целевой переменной, составил от 361,6 до 362,3.

Для dataset\_2 диапазон модуля осредненного прогноза Mean различных моделей регрессоров из библиотеки scikit-learn составил от 292,1 до 471,6. Диапазон прогноза регуляризованного решения, учитывающего информацию о погрешности измерения предикторов и целевой переменной, составил от 361,8 до 362,8.

Для dataset\_0 значение модуля прогноза составляет 337,5. Это же значение получается при вычислении **точного прогноза** по выражению  $b_{\max} = A_{\max} \cdot z$ , где  $z = (0.04 + j0.02, 0.035 + j0.015, 0.03 + j0.02, 0.02 + j0.012, 0.016 + j0.01)$  – коэффициенты регрессии для генерации dataset\_0. Значение модуля прогноза регуляризованного решения с учетом того, что погрешности измерения переменных для dataset\_0 равны нулю, также составило 337,5.

Таким образом, несмотря на отличные метрики всех моделей регрессоров из библиотеки `scikit-learn`, результаты их прогнозов не только имеют неприемлемую точность, но и являются неустойчивыми – небольшие погрешности измерений данных приводят к недопустимым погрешностям прогноза целевой переменной (в терминологии ML это означает, что модели переобучаются). При этом модель регуляризации Тихонова, учитывающая информацию о погрешности измерения предикторов и целевой переменной, выдает устойчивый прогноз с приемлемой точностью. Так в данной задаче разброс (variance) осредненного модуля прогноза различных моделей из библиотеки `scikit-learn` составил  $\pm 23\%$  при смещении (bias)  $13\%$ , тогда как разброс (variance) прогноза модели регуляризации Тихонова составил  $\pm 0,2\%$  при смещении (bias)  $7\%$ .

#### 4. Выводы

1. Алгоритмы `scikit-learn` не поддерживают работу с комплексными числами, что не позволяет построить непосредственные модели регрессии для данных, содержащих комплексные числа, с помощью стандартных регрессоров `scikit-learn`.
2. Разработан метод преобразования исходного датасета размером  $M \times N$  с комплексными числами в датасет размером  $2M \times (2N - 1)$  с вещественными числами, что позволяет использовать для построения достоверных моделей регрессии комплексных чисел стандартные регрессоры `scikit-learn`.
3. Игнорирование даже незначительной погрешности измерения предикторов и целевой переменной может привести к крайне большой погрешности прогноза экстраполяции регрессии (как для наборов данных, содержащих комплексные числа, так и для наборов данных, содержащих только вещественные числа).
4. Модели, обученные на наборах данных с мультиколлинеарными предикторами по условию оптимизации стандартных метрик из библиотеки `scikit-learn`, могут привести к неустойчивым прогнозам экстраполяции с недопустимой погрешностью.
5. Для моделей, обучаемых на наборах данных с мультиколлинеарными предикторами, для получения устойчивого прогноза экстраполяции с допустимой погрешностью следует использовать регуляризацию с учетом погрешности измерения предикторов и целевой переменной.

#### Список литературы

1. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В.В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с.