

8. 用直接三角分解(杜利特尔(Doolittle)分解)求线性方程组的解.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{60} & -\frac{1}{45} \\ 0 & 0 & \frac{13}{15} \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \Rightarrow y_1 = 9, y_2 = -4, y_3 = -154$$

$$Ux = y \Rightarrow x_3 = -177, x_2 = 476.92, x_1 = -227.08$$

11. 下述矩阵能否分解为  $LU$  (其中  $L$  为单位下三角矩阵,  $U$  为上三角矩阵)? 若能分解, 那么分解是否唯一?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{bmatrix}$$

$A$  中  $\Delta_2 = 0$ , 故不能分解. 但由于  $\det A = -10 \neq 0$ , 故交换  $A$  的第 1 行与第 3 行, 则可以分解且分解是唯一的。

在  $B$  中  $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$  故不能分解, 但  $B$  可以分解为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

其中  $u_{32}, u_{33}$  为任意常数, 且  $U$  奇异, 故分解不唯一。

对于  $C$ ,  $\Delta_i \neq 0$  ( $i=1, 2, 3$ ) 故  $C$  可分解且分解唯一。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$