1. 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$；

(2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$；

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$；

(4) $\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]$.

(1) $f(x)=1$, $2h=A_{-1}+A_0+A_1$

$f(x)=x$ $0=-hA_{-1}+hA_1$

$f(x)=x^2$ $\frac{2}{3}h^3=h^2A_{-1}+h^2A_1$

联立解得 $\begin{cases} A_0=\frac{4}{3}h \\ A_1=\frac{1}{3}h \\ A_{-1}=\frac{1}{3}h \end{cases}$

$f(x)=x^3$, $A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=0$

$f(x)=x^4$ $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-h}^{h}x^4=\frac{2}{5}h^5$

$A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=\frac{2}{5}h^5$

故具有3次代数精度

(2) $f(x)=1$ $4h=A_{-1}+A_0+A_1$

$f(x)=x$ $0=-A_{-1}h+A_1h$

$f(x)=x^2$ $\frac{16}{3}h^3=h^2A_{-1}+h^2A_1$

解 $\begin{cases} A_0=-\frac{4}{3}h \\ A_1=\frac{8}{3}h \\ A_{-1}=\frac{8}{3}h \end{cases}$

$f(x)=x^3$ $0=A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

$f(x)=x^4$ $\int_{-2h}^{2h}x^4\mathrm{d}x=\frac{64}{5}h^5 \neq A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

$=\frac{16}{3}h^5$

具有3次代数精度

(3) 用 $\begin{cases} x_1=-0.2899 \\ x_2=0.5266 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=0.6899 \\ x_2=0.1266 \end{cases}$

有2次代数精度

(4) $a=\frac{1}{12}$，有3次代数精度