

# Отчет о выполнении лабораторной работы 4.7.1

## Двойное лучепреломление

Г. А. Багров

ФРКТ МФТИ, 11.03.2023

**Цель работы:** изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления  $n_o$  — обыкновенной и  $n_e$  — необыкновенной волны в кристалле.

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

**Экспериментальная установка**

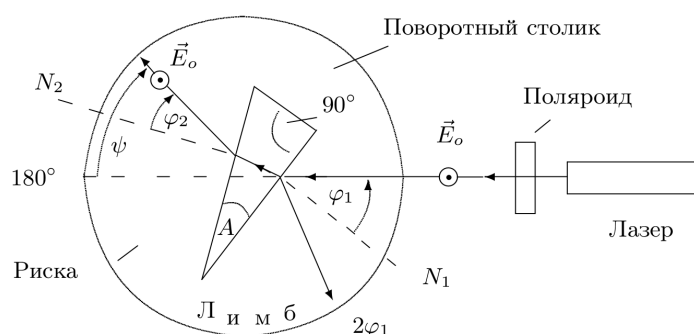


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

### Теоретические сведения:

При падении световой волны на границу изотропной среды в этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропна, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется двойным лучепреломлением.

*Плоские волны в кристаллах.* Фундаментальные уравнения Максвелла справедливы без всяких изменений и в кристаллических средах. Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны.:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}; \quad \vec{B} = \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

После некоторых преобразований получим, что

$$[\vec{k}\vec{H}] = -\frac{\omega}{c}\vec{D}; \quad [\vec{k}\vec{E}] = \frac{\omega}{c}\vec{B}.$$

Введем единичный вектор нормали  $\vec{N}$  к фронту волны и скорость распространения фронта в направлении этой нормали  $v$ . Тогда  $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{N}$  и предыдущие соотношения перейдут в

$$\vec{D} = \frac{c}{v} [\vec{N}\vec{H}]; \quad \vec{B} = \frac{c}{v} [\vec{N}\vec{E}]. \quad (1)$$

Отсюда видно, что векторы  $\vec{D}, \vec{H}, \vec{N}$  взаимно перпендикулярны. Значит, плоские волны в кристалле поперечны в отношении векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ . Однако в общем случае они не поперечны в отношении вектора  $\vec{E}$ .

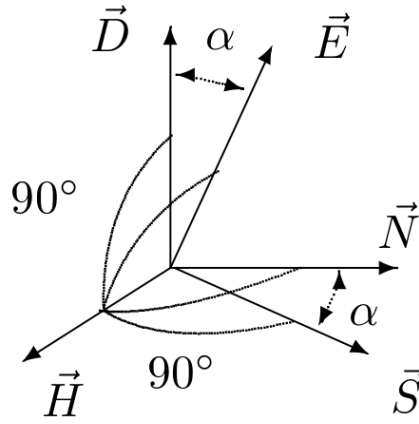


Рис. 2. Расположение векторов  $\vec{D}, \vec{E}, \vec{N} = \vec{k}, \vec{S}, \vec{H}$  в анизотропной среде

Для характеристики оптических свойств анизотропной среды требуется девять величин  $\varepsilon_{ij}$ , образующих тензор диэлектрической проницаемости. Он вводится посредством отношений

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z). \quad (2)$$

Благодаря тензорной связи между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  направления этих векторов в кристаллах, вообще говоря, не совпадают. Плоскость  $(\vec{E}, \vec{H})$  обладает тем свойством, что перпендикуляр к ней определяет направление вектора Пойнтинга  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]$ , то есть направление распространения световых лучей. Четыре вектора  $\vec{D}, \vec{E}, \vec{N}, \vec{S}$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{H}$ . Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1.

*Оптически одноосные кристаллы.* Всю совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипсоида. Значение диэлектрической проницаемости для любого направления выражается длиной радиуса-вектора эллипсоида, проведенного по этому направлению. Три значения диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , соответствующие осям эллипсоида, называются главными значениями диэлектрической проницаемости и соответственно  $\sqrt{\varepsilon_x}, \sqrt{\varepsilon_y}, \sqrt{\varepsilon_z}$  — главными показателями преломления.

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида, тензор диэлектрической проницаемости приводится к диагональному виду, и проекции векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  на оси координат связаны простыми соотношениями:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z. \quad (3)$$

В оптически одноосном кристалле, каковым является исландский шпат, эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нём оптическая ось совпадает с осью вращения эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значений диэлектрических проницаемостей приняты обозначения  $\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$ . В дальнейшем нам потребуется связь между проекциями векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  на оптическую ось кристалла ( $\vec{D}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\parallel}$ ) и на плоскость, перпендикулярную оси ( $\vec{D}_{\perp}$  и  $\vec{E}_{\perp}$ ):

$$\vec{D}_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{\perp}. \quad (4)$$

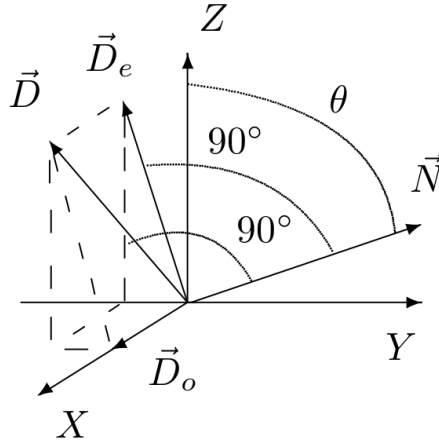


Рис. 3. Расположение векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{D}$  в анизотропной среде: ( $\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{D}_e$ ;  $\vec{D}_o \perp \vec{D}_e$ ;  $\vec{D} \perp \vec{N}$ );  $\vec{N}$  и  $\vec{D}_e$  лежат в плоскости  $(Z,Y)$ ;  $\vec{D}_o$  перпендикулярен плоскости  $(Z,Y)$

Волну в одноосном кристалле можно разделить на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции  $\vec{D}_o$  которой перпендикулярен главному сечению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции  $\vec{D}_e$ , лежащим в главном сечении (рис. 2) *Главным сечением кристалла* называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкновенную волну, которой вектор  $\vec{D}_o$  перпендикулярен главному сечению. Тогда  $D_{oz} = 0$ , и из условия  $D_z = \varepsilon_z E_z$  следует, что  $E_{oz} = 0$ . Кроме того, так как  $D_{oy} = \varepsilon_{\perp} E_{oy}$  и  $D_{ox} = \varepsilon_{\perp} E_{ox}$ , то можно записать

$$\vec{D}_o = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_o. \quad (5)$$

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответствующий показатель преломления. Из (2) имеем

$$D_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o$$

или, учитывая (5),

$$\varepsilon_{\perp} E_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o,$$

откуда

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \quad \text{и} \quad n_o = \frac{c}{v_o} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}.$$

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и ее показатель преломления не зависят от направления распространения.

У необыкновенной волны вектор  $\vec{D}_e$  не параллелен  $\vec{E}_e$ , и связь между ними сложнее, чем в (5).

Для того чтобы найти скорость распространения  $v$  и показатель преломления необыкновенной волны  $n = c/v$ , достаточно найти связь между вектором электрической индукции этой волны  $\vec{D}_e$  и проекцией на него вектора электрического поля волны  $E_{eD}$ . Тогда, подставляя  $D_e = \varepsilon E_{eD}$  в (2), приходим к соотношения

$$\varepsilon E_{eD} = \frac{c}{v} H_e; \quad H_e = \frac{c}{v} E_{eD},$$

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Роль величины  $\varepsilon_{\perp}$  теперь играет величина  $\varepsilon$ , а показатель преломления необыкновенной волны равен  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Найдём связь между  $D_e$  и  $E_{eD}$ . Для этого разложим векторы  $\vec{D}_e$  и  $\vec{E}_e$  на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

$$\begin{aligned} \vec{D}_e &= \vec{D}_{e\parallel} + \vec{D}_{e\perp}. \\ \vec{E}_e &= \vec{E}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp}. \end{aligned}$$

Учитывая (4), находим

$$E_{eD} = \frac{\vec{E}_e \vec{D}_e}{D_e} = \frac{E_{e\parallel} D_{e\parallel} + E_{e\perp} D_{e\perp}}{D_e} = \frac{D_{e\parallel}^2 / \varepsilon_{\parallel} + D_{e\perp}^2 / \varepsilon_{\perp}}{D_e}$$

или

$$E_{eD} = D_e \left( \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} \right) = \frac{D_e}{\varepsilon},$$

где  $\theta$  — угол между оптической осью  $Z$  и волновой нормалью  $N$ :

$$\sin \theta = \frac{D_{e\parallel}}{D_e}, \quad \cos \theta = \frac{D_{e\perp}}{D_e}. \quad (6)$$

Таким образом,  $\varepsilon$  и соответственно скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от угла между оптической осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны  $n = \sqrt{\varepsilon}$  через главные показатели преломления  $n_o, n_e$  и угол  $\theta$ :

$$\frac{1}{[n(\theta)]^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}. \quad (7)$$

При  $n_o - n_e \ll n_o$  и  $n_e$  (для исландского шпата  $n_o = 1,655, n_e = 1,485$  для  $\lambda = 0,63$  мкм) (7) можно упростить:

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta. \quad (8)$$

**Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата.** Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3). В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор  $\vec{D}_o$  перпендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор  $\vec{D}_e$  параллелен верхней грани. Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор  $\vec{D}$  направлен

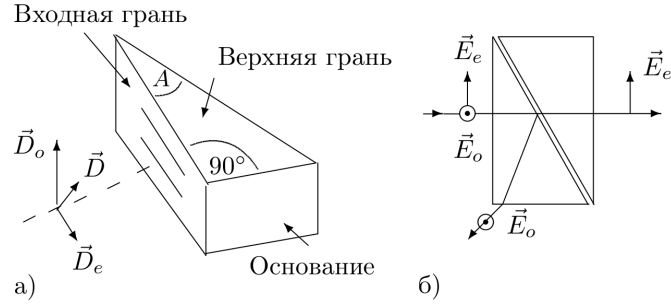


Рис. 4. а) Исследуемая призма из исландского шпата. Штриховкой указано направление оптической оси кристалла. б) Ход лучей в поляризационной призме

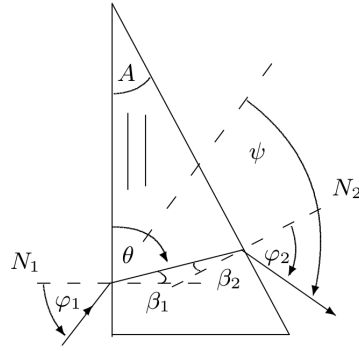


Рис. 5. Ход лучей в призме

вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса, а показатель преломления призмы для нее равен  $n_o$ . Волна, в которой вектор  $\vec{D}$  направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы  $\phi_1$  и угол  $\phi_2$  на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin \phi = n \sin \beta_1;$$

$$\sin \phi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(A - \beta_1).$$

При этом мы выразили угол падения на вторую грань призмы  $\beta_2$  через угол преломления на первой грани призмы  $\beta_1$  и угол при вершине призмы  $A$ . Как видно из рис. 4, эти углы связаны простым соотношением  $A = \beta_1 + \beta_2$ . Учитывая, что угол преломления  $\beta_1$  связан с углом  $\theta$  между осью кристалла и волновой нормалью  $\vec{N}$  соотношением  $\theta + \beta_1 = \pi/2$ , находим  $n$  и  $\theta$ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}; \quad (9)$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n}.$$

Для обыкновенной волны  $n$  не будет зависеть от угла  $\theta$ , а для необыкновенной волны зависимость  $n$  от  $\theta$  должна описываться выражением (7).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой ( $\psi$  на рис. 4) минимален для симметричного хода лучей, то есть когда  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin \left( \frac{\psi_m + A}{2} \right)}{\sin \left( \frac{A}{2} \right)}, \quad (10)$$

где  $\psi_m$  — угол наименьшего отклонения.

Если призма не изотропна, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла близким к  $\pi/2$ , то в качестве оценки формулу (10) можно использовать для определения  $n_e$ .

#### Измерение данных:

- 1) Проведём юстировку системы: отцентрируем экран по лучу лазера так, что луч проходит через 0 и 180.
- 2) Определим угол  $A$ , для этого добьемся, чтобы отраженный луч шел ровно назад для меньшего катета ( $\theta_1$ ) и гипотенузы ( $\theta_2$ ). По формуле

$$A = 180^\circ - (\theta_1 - \theta_2)$$

Найдем  $A$ :

$$\theta_1 = (296 \pm 1)^\circ$$

$$\theta_2 = (153 \pm 1)^\circ$$

$$A = (37 \pm 1)^\circ$$

- 3) Определим разрешенное направление поляризатора. Далее оно нам понадобится, чтобы отделять обыкновенную волну от необыкновенной.

Экспериментально найдём зависимость углов отклонения волн от угла падения (погрешность измерения считаем  $1^\circ$ ) - см. табл. 1. Далее построим график зависимости показателя преломления от квадрата косинуса угла между оптической осью и волновым вектором.

$2\varphi_1$	10	13	18	20	24	28	32	35	40	46	49
$2\pi + \psi_e$	204.0	203.0	202.5	201.5	201.0	200.5	200.5	200.0	200.0	200.0	200.0
$\sigma$	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
$2\pi + \psi_o$	216.5	214	212	211	210	209	208.5	208	207.5	206.9	206.6
$\sigma$	2.2	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
$\varphi_1$	4.5	6.5	9	10	12	14	16	17.5	20	23	24.5
$\varphi_e$	24.5	22.5	22	21.5	21	20.7	20.5	20	20	20	20
$\psi_o$	36.5	34	32	31	30	29	28.5	28	27.5	27.0	26.5
$\phi_e$	57	53	50	48.5	46	43.5	41.5	39.5	37	34	32.5
$\phi_o$	69	64.5	60	58	55	52	49.5	47.5	44.5	40.9	39.1
$\cos^2 \theta \cdot 10^2$	0.3	0.6	1.1	1.4	2.0	2.6	3.4	4.1	5.2	6.8	7.6
$n_e(\theta)$	1.50	1.48	1.49	1.49	1.49	1.49	1.50	1.49	1.49	1.50	1.50
$\cos^2(\theta) \cdot 10^2$	0.2	0.5	0.9	1.1	1.6	2.2	2.8	3.3	4.3	5.6	6.3
$n_o(\theta)$	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65

Таблица 1. Измеренные и рассчитанные в ходе выполнения работы углы и показатели преломления

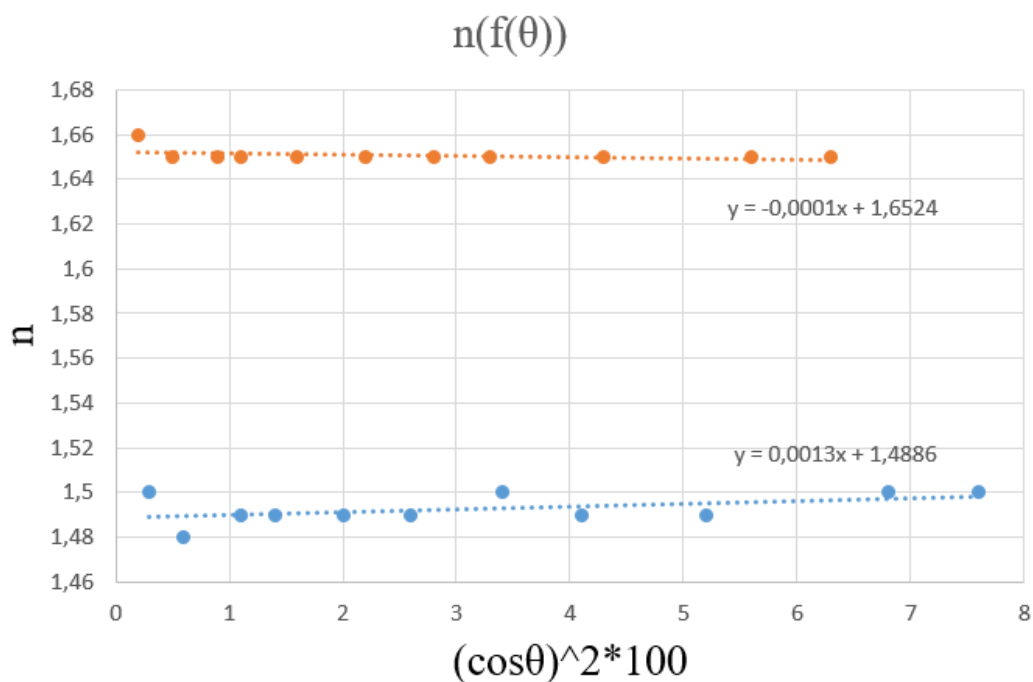


Рис. 6. Зависимость показателя преломления от угла между оптической осью и волновым вектором

#### Расчёт показателей преломления на основании трёх экспериментов:

4) Расчёт по обыкновенной и необыкновенной волне. Сопоставив аппроксимацию нижнего графика (необыкновенной волны) с уравнением (8), и найдя константу верхнего графика (обыкновенной волны), получим, что:

$$\text{При } A = 37^\circ \quad n_o = 1.65 \pm 0.02; \quad n_e = 1.49 \pm 0.04;$$

5) Расчёт по углу падения в условиях полного внутреннего отражения. Подставив измеренное значение угла падения в уравнение (9), учитывая, что  $\phi_2 = 90^\circ$ :

$$\phi_{1o} = (1.5 \pm 0.3)^\circ; \quad \phi_{1e} = (-6.5 \pm 0.3)^\circ;$$

$$n_o = 1.66 \pm 0.03; \quad n_e = 1.53 \pm 0.03.$$

6) Расчёт по углу наименьшего отклонения. Определив углы наименьшего отклонения, по формуле (10) получим:

$$\varphi_o^m = 26.1 \pm 1; \quad \psi_e^m = 20 \pm 1.$$

$$\text{При } A = 37^\circ \quad n_o = 1.64 \pm 0.003; \quad n_e = 1.50 \pm 0.04;$$

**Выводы:** В данной работе были получены значения показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волн в исландском шпате тремя методами. Полученные значения  $n$  значения совпадают с теоретическими с учётом погрешностей. Также отметим, что значения  $n_o$  практически совсем не зависят от угла падения, в то время как при этих же условиях  $n_e$  слегка меняется.



Рис. 7. Фотография экспериментальной установки