Отчет о выполнении лабораторной работы 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Г. А. Багров

ФРКТ МФТИ, 19.11.2022

Цель работы: изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье, компьютер (монитор в виде экрана осциллографа).

Теоретические сведения:

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно-модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.
Периодическая функция может быть представлена в виде бесконечного ряда гармонических функций — ряда Фурье:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \text{ или } f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right] \tag{1}$$

Здесь $\omega_0=2\pi/T$, где T - период функции $f(t)$. Коэффициенты a_n, b_n определяются по формуле:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt,\\ b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь t_1 — время, с которого начинается отсчет.

Коэффициенты c_n могут быть найдены по формуле:

$$c_n=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt.$$

Наборы коэффициентов разложения в комплексной $\{c_n\}$ и действительной $\{a_n, \varphi_n\}$ формах связаны соотношением:

$$a_n = 2|c_n|, \qquad \varphi_n = \arg c_n = arctan(\frac{b_n}{a_n}).$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

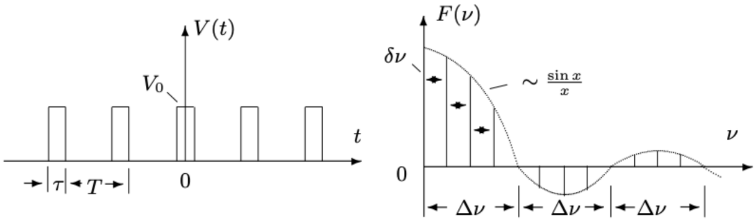


Рис. 1: Прямоугольные импульсы, их спектр

Введем величину: $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.
Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega t)\, dt = 2V_0 \frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2} = 2V_0 \frac{\sin(\pi n\tau/T)}{\pi n} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{3}$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.
Поскольку функция четная, то $b_n = 0$.
Пусть T кратно τ. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{4}$$

Периодическая последовательность цугов

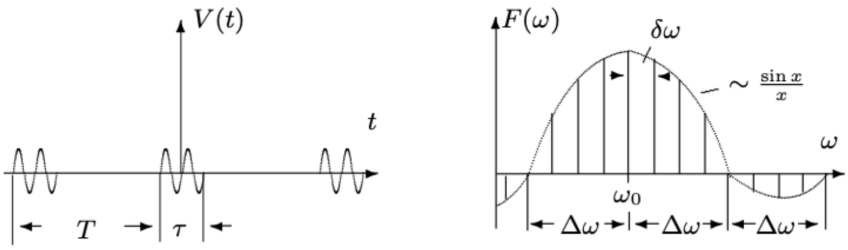


Рис. 2: Цуги, их спектр

Возьмём цуги колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T. Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t=0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0\cos(\omega_0 t)\cdot\cos(n\Omega_1 t)\,dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin\left[(\omega_0-n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0-n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0+n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0+n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}}\right). \tag{5}$$

Пусть T кратно τ. Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0.

Амплитудно-модулированные колебания

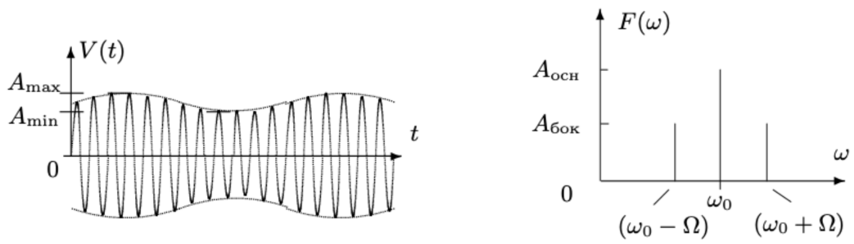


Рис. 3: Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0\left[1+m\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t. \tag{6}$$

Коэффициент m называется глубиной модуляции. При $m<1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max}-A_{min}}{A_{max}+A_{min}}. \tag{7}$$

Преобразуя (6), можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0\cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0+\Omega)\,t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0-\Omega)\,t. \tag{8}$$

Экспериментальная установка

Исследуемый сигнал $f(t)$ и синусоидальный сигнал от вспомогательного генератора, называемого в таких системах гетеродином, подаются на вход смесителя. Смеситель — элемент, преобразующий колебания с частотами ν_1 и ν_2 в колебания на комбинированных частотах: $\nu_1+\nu_2$ и $\nu_1-\nu_2$. "Разностный"сигнал смесителя поступает на фильтр — высокодобротный колебательный контур, настроенный на некоторую фиксированную резонансную частоту ν_0. Таким образом, если $f(t)$ содержит гармонику $\nu = \nu - \nu_0$ (ν — частота гетеродина), она будет усилена, а отклик будет пропорционален её амплитуде.

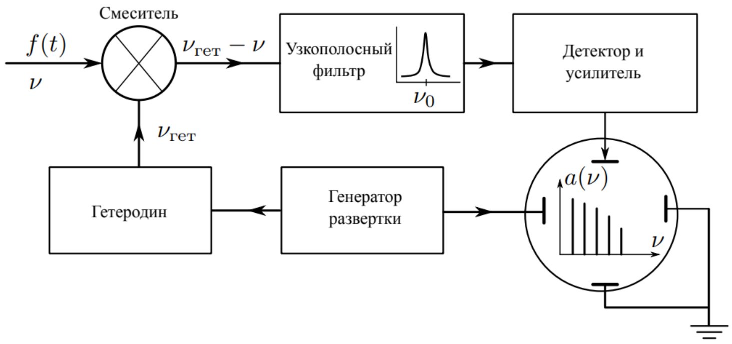


Рис. 4: Структурная схема анализатора спектра

В спектральном анализаторе частота гетеродина пропорциональна напряжению, подаваемому на развертку по оси X встроенного в анализатор осциллографа. Выходной сигнал подается на канал Y. На экране анализатора возникает, таким образом, график, изображающий зависимость амплитуды гармоник входного сигнала от частоты, т. е. его спектр (при этом информация о фазах гармоник теряется).

Ход работы и обработка результатов

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

1) Настроим генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс. Получим спектр сигнала.
Изменяя на генераторе параметры сигнала, будем наблюдать, как изменяется спектр.

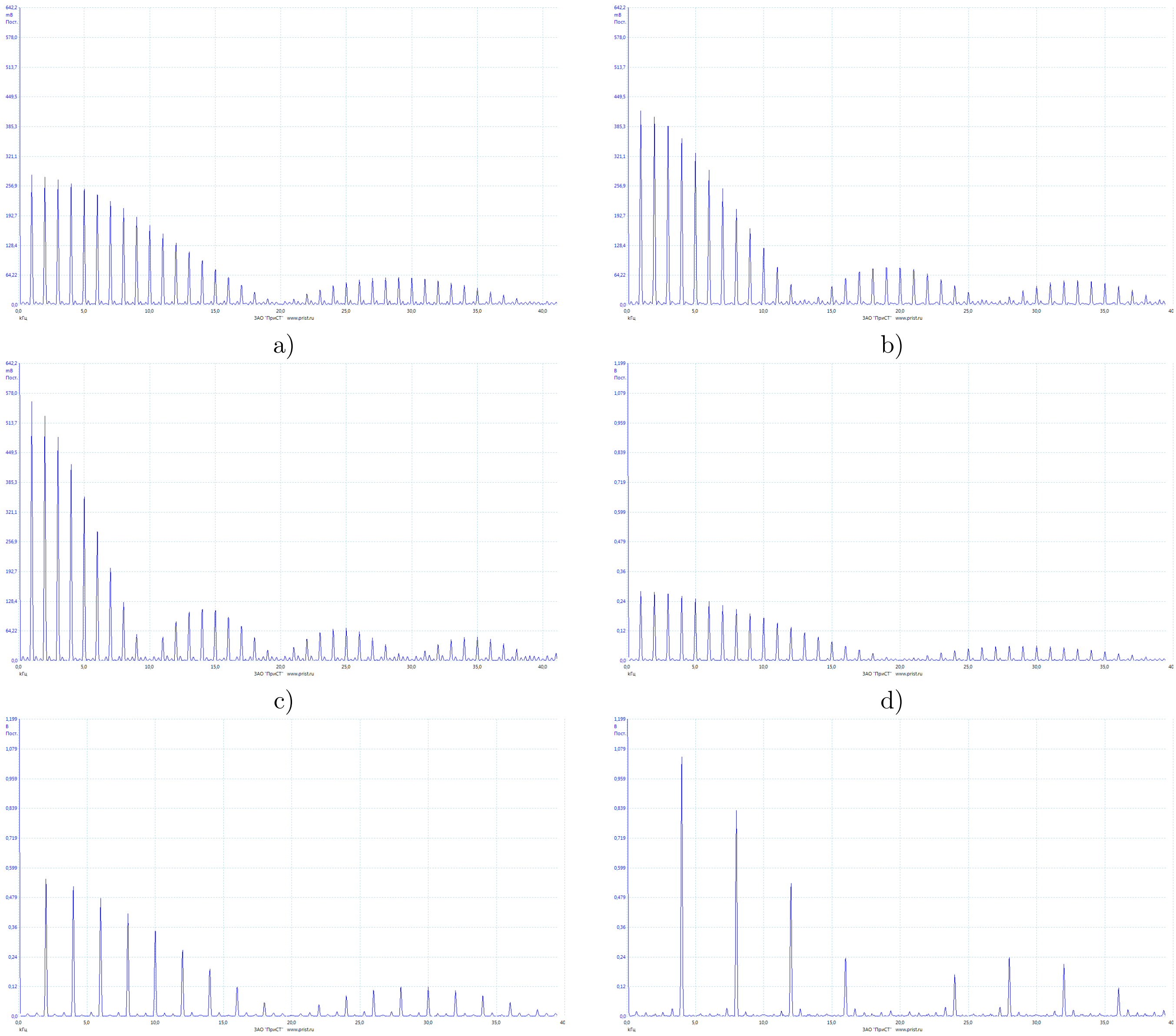


Рис. 5: Спектр сигнала при: a) $\nu = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс; b) $\nu = 1$ кГц, $\tau = 75$ мкс; c) $\nu = 2$ кГц, $\tau = 75$ мкс; d) $\nu = 2$ кГц, $\tau = 100$ мкс e) $\nu = 2$ кГц, $\tau = 50$ мкс; f) $\nu = 4$ кГц, $\tau = 50$ мкс;

На рисунке 5 масштаб графиков d-f отличается от масштаба a-c в 2 раза по оси y (напряжение).

Из графиков видно, что при увеличении ν в k раз, $\Delta\nu$ остается неизменным, а $\delta\nu$ также увеличивается в k раз. При увеличении τ в k раз, $\Delta\nu$ уменьшается в k раз, а $\delta\nu$ остается неизменным.

2) При фиксированных параметрах $\nu = 1$ кГц и $\tau = 50$ мкс измерим высоты (амплитуды) a_n и частоты ν_n первых 6 гармоник спектра (см. таблицу 1). По формуле (3) расчитаем теоретические

значения амплитуд спектра. Экспериментальные значения сходятся с теоретическими с точностью 3%.

n	ν_n, кГц	a_n, мВ	$a_{\text{n;теор}}$, мВ
1	1	282	282
2	2	276	276
3	3	270	268
4	4	261	258
5	5	250	246
6	6	239	232

Таблица 1: характеристики спектра с частотой 1 кГц

3) Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от времени импульса τ в диапазоне от 20 до 200 мкс при фиксированной $\nu = 1$ кГц. Ширина измеряется от центра спектра до первой гармоники с нулевой амплитудой.

τ, мкс	$1/\tau$, 1/мс	$\Delta\nu$, кГц
40	25,0	25,0
80	12,5	12,5
120	8,3	8,0
160	6,3	6,0
200	5,0	5,0

Таблица 2: Зависимость ширины прямоугольного испульса от времени импульса

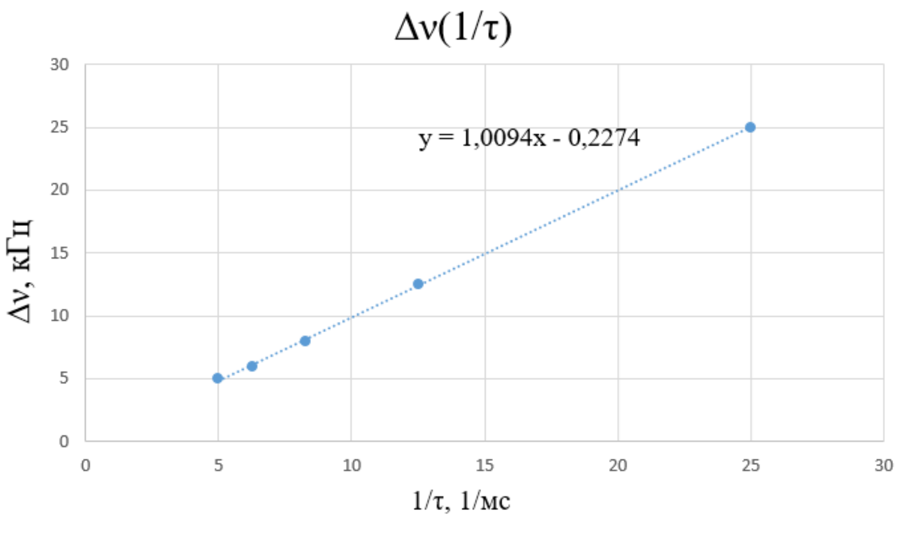
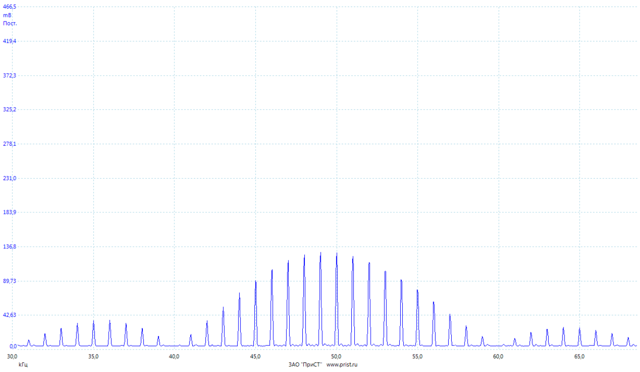


Рис. 6: График зависимости ширины импульса от времени импульса

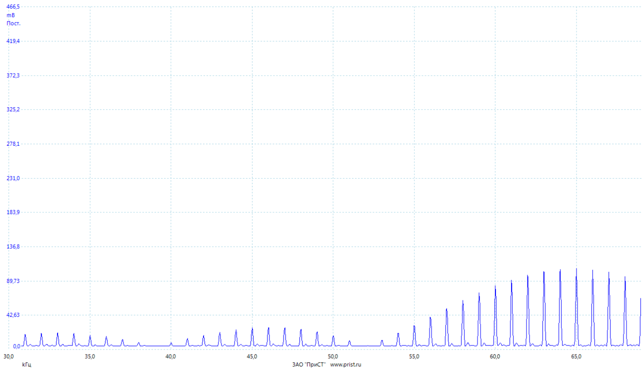
Угол наклона графика (вычисленный по МНК) равен $1,0$, что говорит о том, что соотношение неопределенности выполнено, т.е. $\Delta\nu \cdot \tau = 1$.

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов

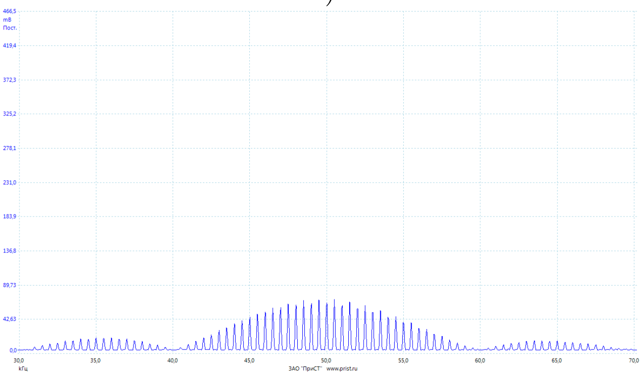
4) Установим на генераторе режим подачи периодических импульсов синусоидальной формы. Частоту несущей установим $\nu_0 = 50$ кГц, период повторения $T = 1$ мс ($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц), число периодов в одном импульсе $N = 5$ (длительность импульса $\tau = N/\nu_0 = 100$ мкс).
Получим на экране осциллографа спектр сигнала. Изменяя параметры сигнала: основную частоту ν_0, период сигнала T и количество циклов в цуге N, будем наблюдать, как изменяется вид спектра (см. рис.7).



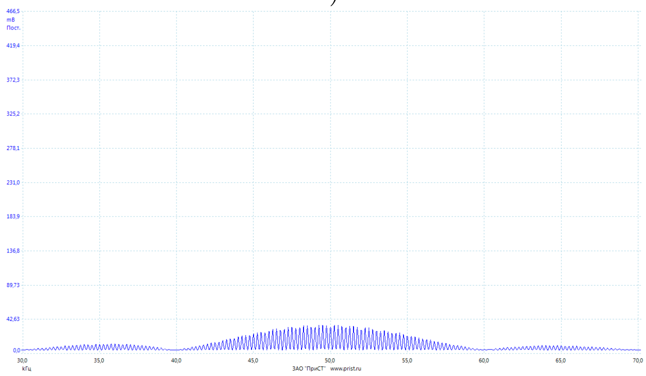
a)



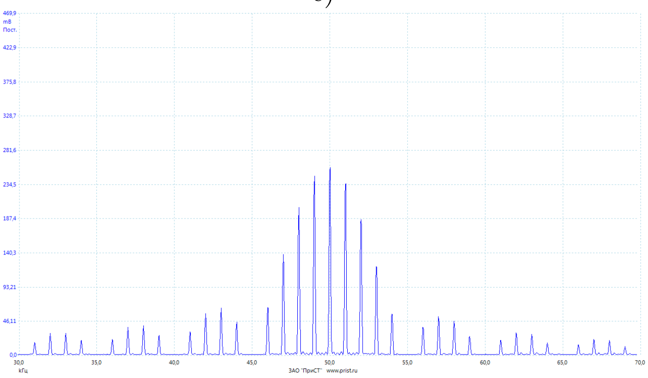
b)



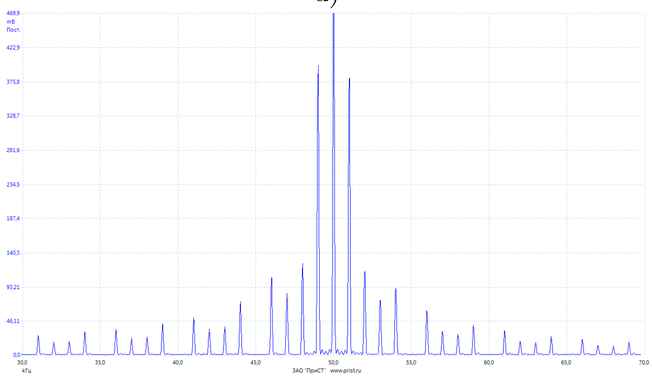
c)



d)



e)



f)

Рис. 7: Спектр сигнала при: a) $\nu_{\text{повт}} = 50$ кГц, $T = 1$ мс, N = 5; b) $\nu_{\text{повт}} = 65$ кГц, $T = 1$ мс, N = 5; c) $\nu_{\text{повт}} = 50$ кГц, $T = 2$ мс, N = 5; d) $\nu_{\text{повт}} = 50$ кГц, $T = 4$ мс, N = 5; e) $\nu_{\text{повт}} = 50$ кГц, $T = 1$ мс, N = 10; f) $\nu_{\text{повт}} = 50$ кГц, $T = 1$ мс, N = 20.

5) При фиксированных параметрах $\nu_0 = 50$ и $N = 5$ измерим зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами сигнала от периода T повторения импульсов. Построим также график зависимости $\delta\nu(1/T)$. См. рис. 8.

Проведем наилучшую прямую по МНК. По углу наклона графика ясно, что соотношение неопределенности также выполнено.

T, с	1/T, 1/с	$\delta\nu$, кГц
0,2	5,0	4,995
0,5	2,0	1,973
1	1,0	0,965
3	0,3	0,304
5	0,2	0,205

Таблица 3: Зависимость ширины прямоугольного испульса от времени импульса

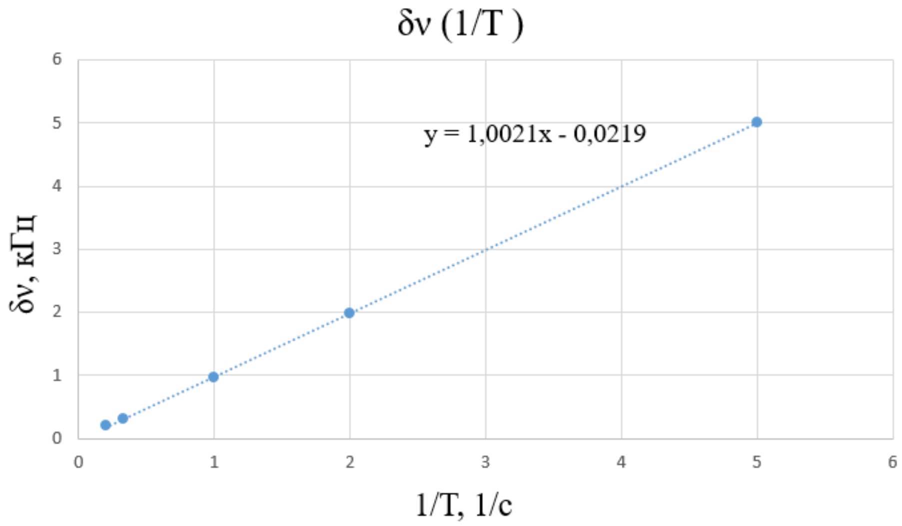


Рис. 8: График зависимости $\delta\nu$ $(1/T)$

Г. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

6) Установим на генераторе режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала. Установим частоту несущей $\nu_0 = 50$ кГц, частоту модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубину модуляции – 50% ($m_0 = 0,5$).

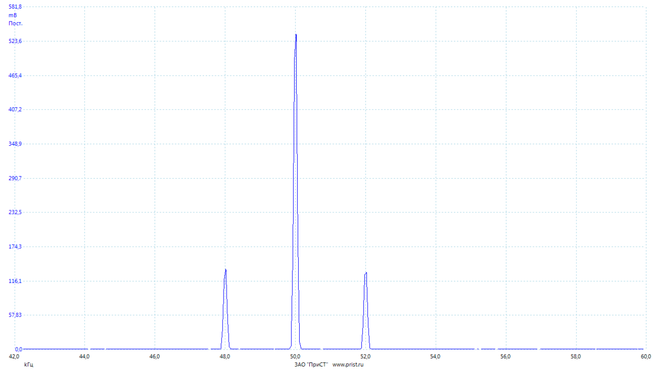
Измерим экспериментально максимальную и минимальную амплитуды сигнала:

$$A_{max} = 1239 \text{ мВ}, \qquad A_{min} = 413 \text{ мВ}.$$

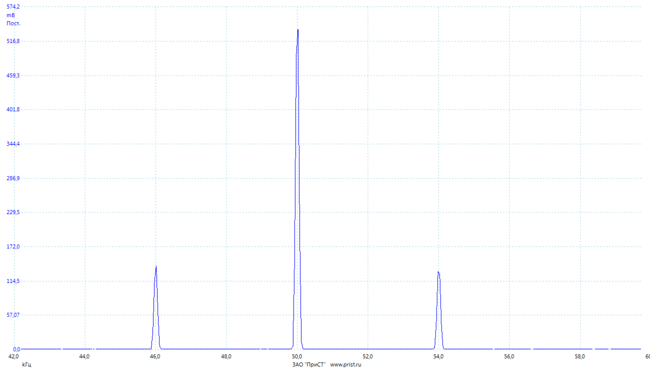
Посчитаем величину m:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = 0,5.$$

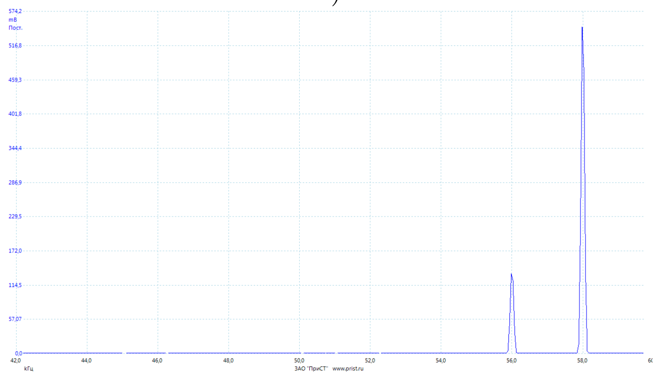
7) Изменяя несущую частоту ν_0 и частоту модуляции ν, будем наблюдать, как изменяется положение спектральных линий. При изменении несущей частоты изменяется положение центральной спектральной линии, при изменении частоты модуляции прямо пропорционально с коэффициентом 1 меняется расстояние между боковыми и центральной спектральными линиями.



a)



b)



c)

Рис. 9: Спектр сигнала при: a) $\nu_0 = 50$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц; b) $\nu_0 = 50$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 4$ кГц; c) $\nu_0 = 58$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц.

8) Меняя на генераторе глубину модуляции m в диапазоне от $0,1$ до 1, будем измерять отношение $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ амплитуд боковой и основной спектральных линий. Также построим график зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}(m)$.

m	$a_{\text{бок}}$, мВ	$a_{\text{осн}}$, мВ
0,1	27,0	536,2
0,25	64,5	536,2
0,4	104,0	536,2
0,6	158,4	536,2
0,8	211,6	536,2
1	266,5	536,2

Таблица 4: Зависимость отношения амплитуд боковой и основной спектральных линий от глубины модуляции

Угол наклона графика, вычисленный по МНК, равен $(0,498 \pm 0,004)$. Это значение близко к теоретическому: $a_{\text{бок}} = \frac{m}{2} a_{\text{осн}}$.

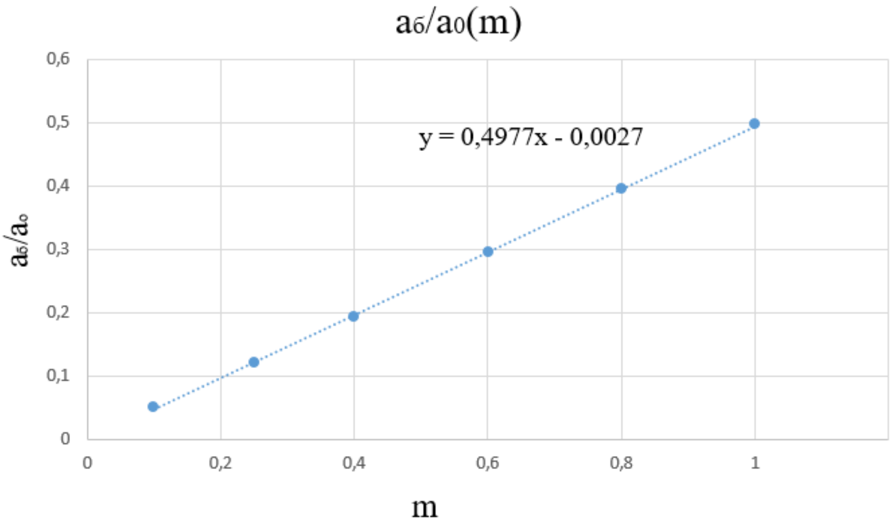
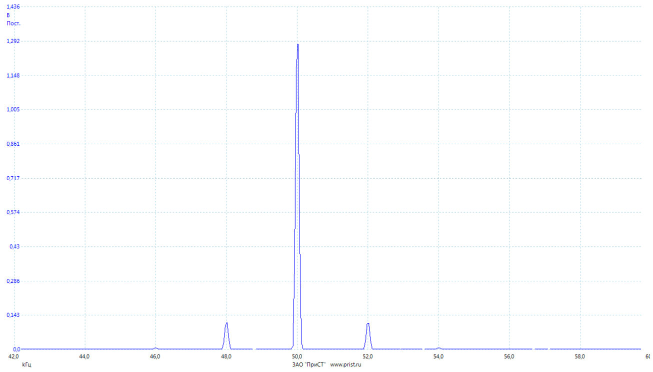


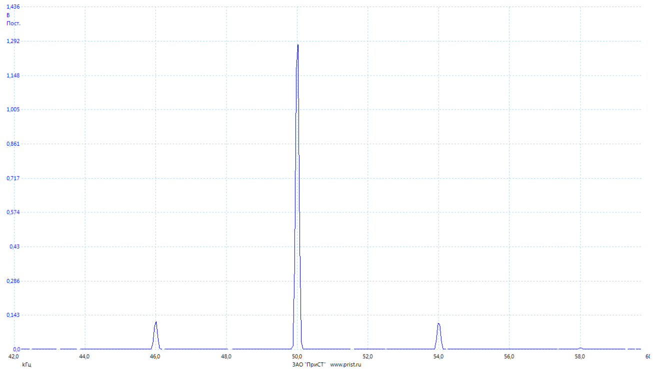
Рис. 10: График зависимости $a/a(m)$

Д. Исследование спектра сигнала, модулированного по фазе

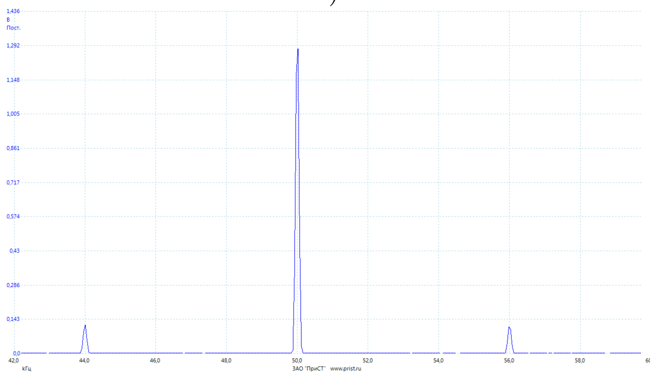
9) Установим на генераторе режим модулированного по фазе синусоидального сигнала с несущей $\nu_0 = 50$ кГц, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц и максимальным отклонением (глубиной модуляции) фазы $\varphi_m = 10^o$. Меняя параметры сигнала ν_0, $\nu_{\text{мод}}$, φ_m, будем наблюдать, как изменяется спектр.



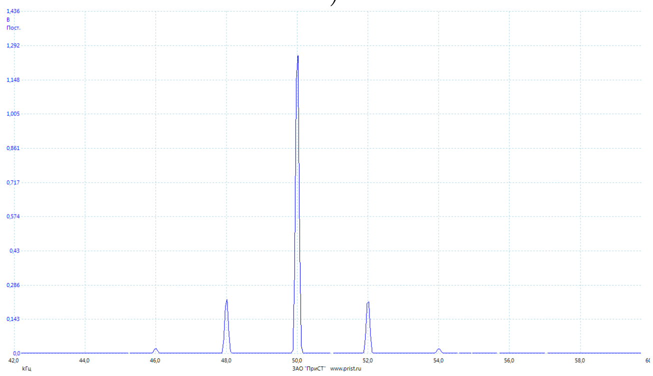
a)



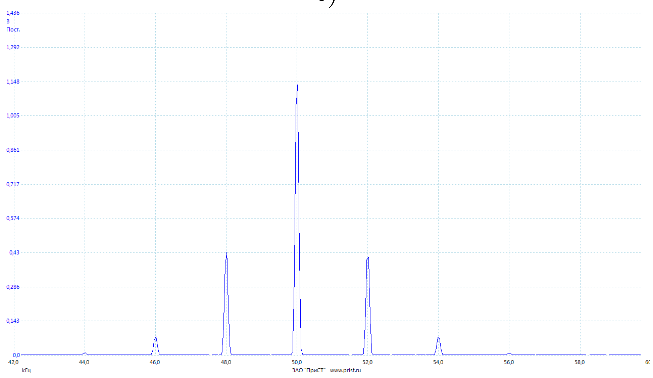
b)



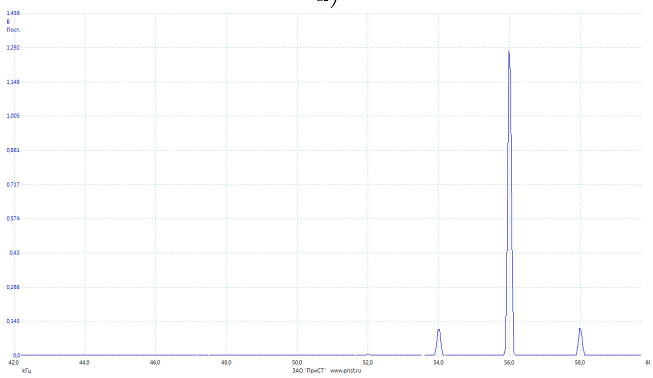
c)



d)



e)



f)

Рис. 11: Спектр сигнала при: a) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi_m = 10^o$; b) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 4$ кГц, $\varphi_m = 10^o$; c) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 6$ кГц, $\varphi_m = 10^o$; d) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi_m = 20^o$; e) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi_m = 40^o$; f) $\nu_0 = 56$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, $\varphi_m = 10^o$.

Из качественного изображения спектров видно, что изменение ν_0 влечет сдвиг спектра по горизонтальной оси, изменение $\nu_{\text{мод}}$ влечет прямо пропорциональное изменение расстояния между ближайшей боковой спектральной линией и центральной, изменение φ_m влечет изменение отношения амплитуд боковых спектральных линий к амплитуде центральной линии.

E. Изучение фильтрации сигналов

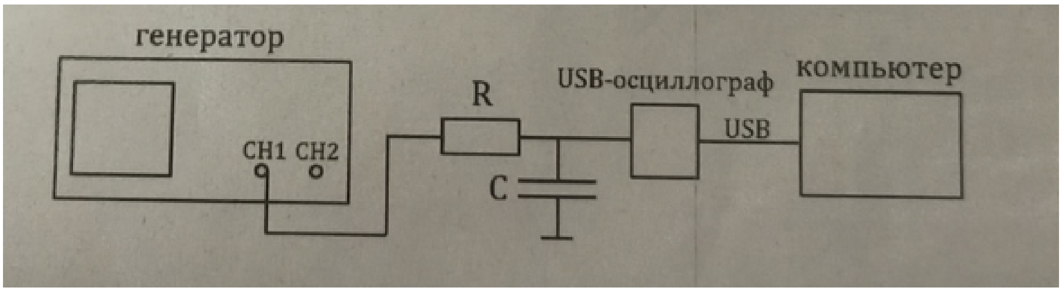


Рис. 12: Схема установки для изучения фильтрации сигналов

10) Соберем схему согласно рис. 12. Зафиксируем параметры интегрирующей RC-цепочки (ФНЧ): R = 3000 Ом, C = 1000 пФ. Характерное время $\tau_{RC} = RC = 3$ мкс, соответствующая частота $\nu_{RC} = 1/\tau_{RC} = 333$ кГц. Подадим на вход RC-цепочки сигнал в форме последовательности прямоугольных импульсов с периодом повторения $T = \tau_{RC}$ и длительностью импульса $\tau = \tau_{RC}/20$.

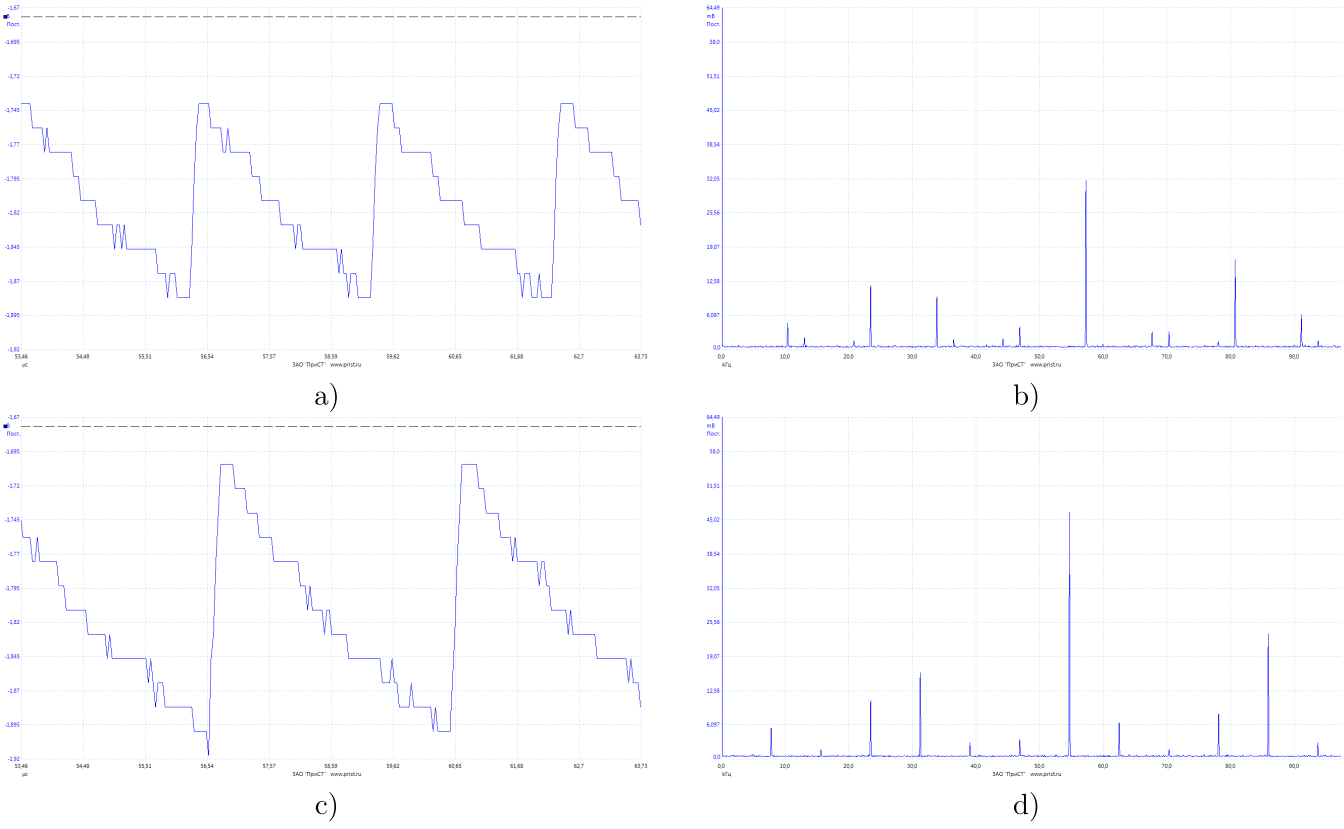


Рис. 13: Фильтрованный сигнал и его спектр при: a-b) T = 3 мкс; c-d) T = 4 мкс.

11) Измерим амплитуды спектральных гармоник фильрованного и нефильтрованного сигналов в зависимости от частоты при периоде повторения T = 4 мкс (см. табл. 5). Построим график зависимости амплитудного коэффициента фильтрации $K_n = \frac{a_n^{\text{ф}}}{a_n^{\text{о}}}$ от частоты ν (см. рис. 14).

n	ν, кГц	$a_n^{\text{ф}}$, мВ	$a_n^{\text{о}}$, мВ	K
1	7,8	5,5	200	0,0275
2	15,6	1,5	170	0,0088
3	23,5	10,7	250	0,0428
4	31,2	16,0	262	0,0611
5	39,0	2,8	180	0,0153
6	46,9	3,4	195	0,017
7	54,7	46,5	275	0,1691
8	62,5	6,5	218	0,0298
9	70,0	1,5	159	0,0094

Таблица 5: Зависимость характеристик сигнала от частоты

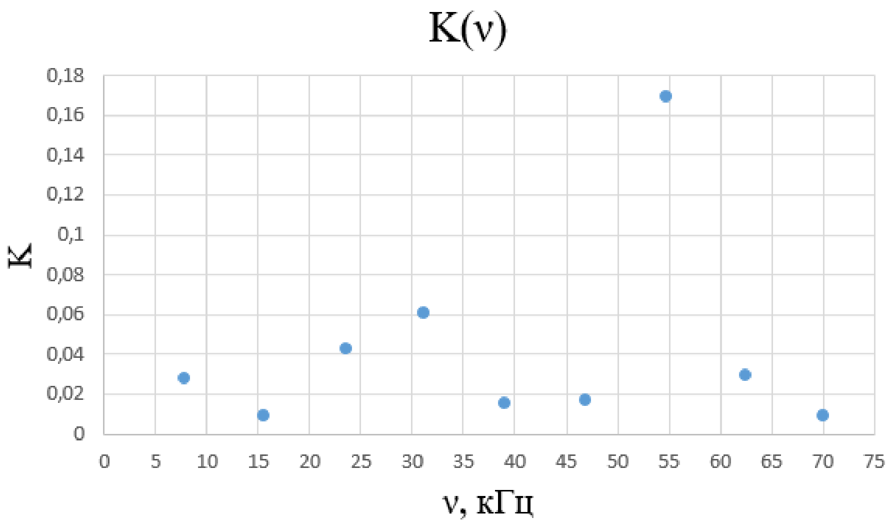


Рис. 14: График зависимости K(ν)

Из графика получаем, что $f \approx 55$ кГц. $\tau_{\text{RC}} = \frac{1}{2\pi f} \approx 2,9$ мкс, что примерно соответствует непосредственно расчитанному значению.

Выводы:

В данной работе были исследованы спектры периодических электрических сигналов: прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Также для них была проверена справедливость ряда теоретических соотношений.