Отчет о выполнении лабораторной работы 1.4.1
Изучение экспериментальных погрешностей на примере физического маятника

Г. А. Багров

ФРКТ МФТИ, 27.09.2021

Цель работы: 1) на примере изучения физического маятника познакомиться с понятиями систематической, случайной погрешности, прямыми и косвенными измерениями.
2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника: построить зависимость периода колебаний T от расстояния b и убедиться, что период имеет минимум; построить зависимость $(T^2 \cdot b)$ от a^2 и определить значение ускорения свободного падения;
3) убедиться в справедливости обратимости точек опоры и центра качения физического маятника.
4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.

В работе используются: металлический стержень, опорная призма, консоль, закреплённая на стене, подставка с острой гранью для определения центра масс маятника, секундомер, линейки металлические длиной 30, 50 и 100 см; электронные весы.

Теоретические сведения:

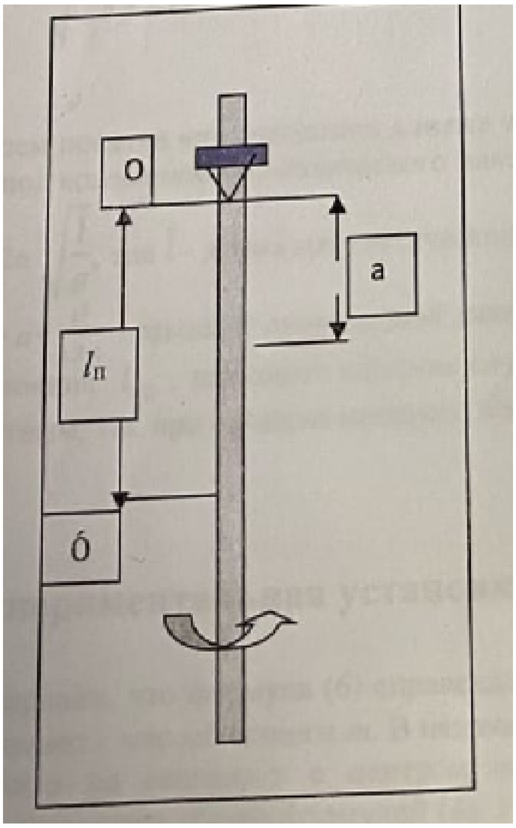


Рис. 1. Физический маятник

Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I – момент инерции маятника, φ – угол отклонения маятника от положения равновесия, t - время, - момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной l. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \tag{2}$$

где m – масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

$$M = -mga\sin\varphi. \tag{3}$$

Если угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$, так что

$$M \approx -mga\varphi \tag{4}$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для I и M в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{5}$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}. \tag{6}$$

С учётом массы призмы период колебаний равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\beta x_c}}$$

где x_c - расстояние от центра масс системы до точки подвеса; $\beta = 1 + \frac{m_1}{m_2}$; m_1 - масса призмы; m_2 - масса стержня.

Оборудование и экспериментальные погрешности:

Найдём максимальные абсолютные и относительные систематические погрешности:

Секундомер: $\Delta_c = 0,01$ с, t1 = 10,00 с, $\varepsilon^{\text{t}}_{\text{отн}} = \frac{\Delta_{\text{лин}}}{l1} \cdot 100\% = 0,1\%\cdot$
Линейка: $\Delta_{\text{лин}} = 0,1$ см, l1 = 50,0 см, $\varepsilon^{\text{лин}}_{\text{отн}} = \frac{\Delta_{\text{лин}}}{l1} \cdot 100\% = 0,2\%\cdot$

Тогда относительная погрешность измерения длин составит также $\varepsilon_{\max} \sim 0{,}2\%$
Таким образом, периоды колебаний следует измерять с относительной точностью $\approx 0,2\%$

Результаты измерений и обработка данных:

1) Оценим относительную систематическую погрешность измерения времени: $\sigma^{\text{реакц}}_{\text{отн}} \approx 1\%$.
Измеряем длину стержня при помощи линейки: l = 100 $\pm 0,1$ см,
$\sigma^{\text{l}}_{\text{отн}} = \frac{0{,}1\,\text{см}}{100\,\text{см}} \cdot 100\% = 0{,}1\%$
Измеряем массу призмы при помощи электронных весов: $m_{\text{пр}} = 76{,}6 \pm 0,1$ г,
$\sigma^{\text{mпр}}_{\text{отн}} = \frac{0{,}1\,\text{г}}{76{,}6\,\text{г}} \cdot 100\% = 0{,}1\%$.
Так же определяем массу стержня: $m_{\text{ст}} = 870{,}4 \pm 0,1$ г, $\sigma^{\text{mст}}_{\text{отн}} = \frac{0{,}1\,\text{г}}{870{,}4\,\text{г}} \cdot 100\% = 0{,}01\%$.

Отсюда $\sigma_{\text{макс}} = \sqrt{(\sigma^{\text{l}}_{\text{отн}})^2 + (\sigma^{\text{mпр}}_{\text{отн}})^2 + (\sigma^{\text{mст}}_{\text{отн}})^2 + (\sigma^{\text{реакц}}_{\text{отн}})^2} \approx 0,83\%$

2) Далее вычислим необходимый для нахождения периода колебаний коэффициент β: $\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}} = 1 + \frac{76{,}6\,\text{г}}{870{,}4\,\text{г}} = 1{,}088$.

3) Призма находится на расстоянии a = $\frac{l}{4}$ от центра стержня: расстояние от центра стержня до острия призмы: a = (250 ± 0,5) мм. Расстояние от центра стержня до центра масс системы: x_{c} = (228± 0,5) мм.

4) Проведём первый опыт для измерения периода колебаний, каждый раз отклоняя маятник на малый угол:
Время n = 10 колебаний составляет t = 15,30 с. Тогда период колебаний равен
$T_э = \frac{t}{n} = \frac{15{,}30}{10} = 1,530$ с. Период колебаний, полученный из формулы (7):
$T_{\text{теор}} = 2 \cdot 3,14\sqrt{\frac{12 \cdot (0{,}25\text{ м})^2 + (1\text{ м})^2}{12 \cdot 9{,}81\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 1{,}088 \cdot 0{,}23\text{ м}}} = 1,532$ с Итак, $T_{\text{теор}}$ и $T_э$ отличаются незначительно, на 0,13% $< 0,20\%$. Предварительное значение (выражаем g из формулы (7))
$g = \frac{\frac{T^2}{4\pi^2}\beta x_c}{a^2 + \frac{l^2}{12}} = 10,21\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, - отличие на ≈ 4 % $<$ 10 %.

5) Проведём серии измерений, расчитаем аналогичным образом T и g. Результаты представлены в таблице 1:

Среднее значение полученных результатов вычисляется по формуле:

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} t_i = 1.461c$$

Где N - количество измерений, t_i - результат i-го измерения
Случайная погрешность измерений считается равной среднеквадратичному отклонению:

$$\sigma_t^{сл} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i (t_i - \bar{t})^2} = 0.113c$$

Систематическая погрешность уже определна и равна погрешности секундомера, т.е. половине последнего разряда: $\sigma_t^{сист} = 0.005c$
Полная погрешность измерения времени вычисляется по формуле:

$$\sigma_t = \sqrt{(\sigma_t^{сист})^2 + (\sigma_t^{сл})^2} = 0.113c$$

Относительная погрешность измерения времени:

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_t}{\bar{t}} = \frac{0{,}113}{15{,}461} = 0{,}0073$$

5) Число колебаний, по которому сдедует измерять период колебаний можно вычислить как:

$$n \geq \frac{\sigma_t}{\epsilon_t \cdot T} \geq \frac{0{,}113}{0{,}0073 \cdot 1{,}53} = 10{,}1 \simeq 10 \text{ колебаний}$$

6) Найдём среднее ускорение свободного падения:

$$\overline{g} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i \simeq 9{,}876\frac{м}{c^2}$$

Среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_g^{сл} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_i (g_i - \overline{g})^2} = 0{,}134\frac{м}{c^2}$$

Погрешность ускорения свободного падения:

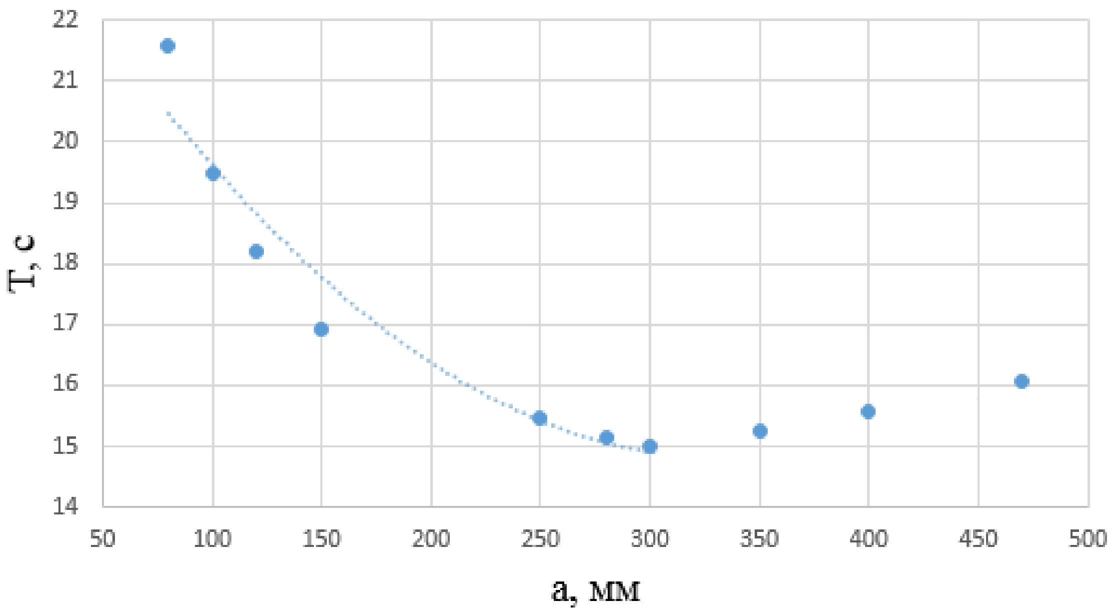
$$\sigma_g = \frac{\sigma_g^{сл}}{\sqrt{N}} = 0{,}042\frac{м}{c^2}$$

Итак, мы получаем, что ускорение свободного падения равно:

$$g = (9{,}88 \pm 0{,}03)\frac{м}{c^2}$$

7) Далее исследуем зависимость периода колебаний от положения острия призмы относительно центра масс стержня, см. рис.2:

Рис.2. Зависимость T(a)



Из графика видно, что зависимость T(a) имеет минимум. Этот минимум соответствует a = = 300 мм и $x_ц$ = 15,12 с. С другой стороны, из теоретической части (7) нам известна формула зависимости T(a). Найдём $a_{\min}$: ясно, что оно будет достигаться при $\frac{l^2}{12g\beta a} = \frac{12a}{12g\beta}$, т.е. при $a_{\min} = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{1000\text{мм}}{\sqrt{12}} \approx 289$ мм. $T(a_{\min}) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12}+a_{\min}^2}{g\beta x_{ц}}} = 1,525$с.

Таким образом, минимум T(a), определённый экспериментально, близок к минимуму, полученному с помощью теоретических расчётов.

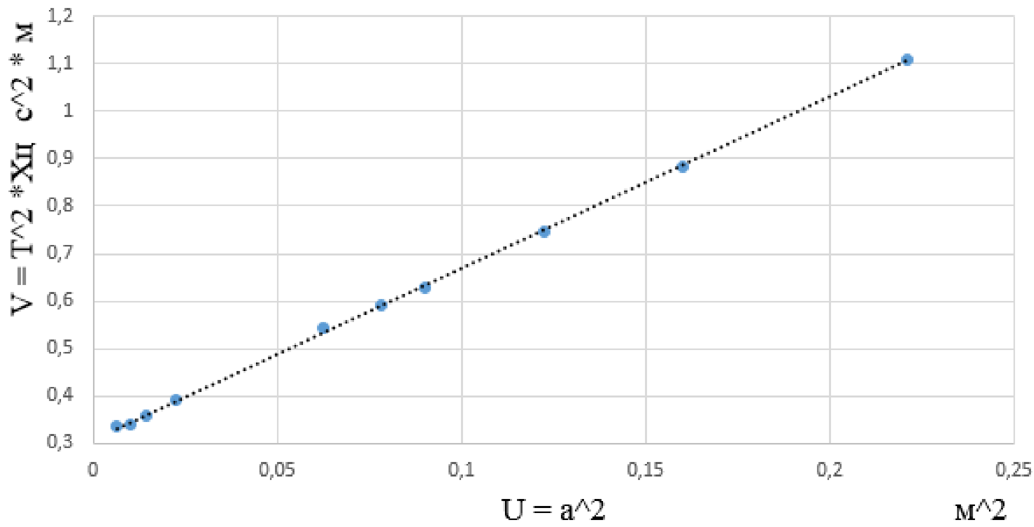
8) Измерение ускорения свободного падения методом наименьших квадратов (МНК):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12}+a^2}{g\beta x_c}} \Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2(l^2+12a^2)}{3g\beta x_c} \Rightarrow T^2 x_c = \frac{\pi^2}{3g\beta}(l^2+12a^2) \Rightarrow l^2+12a^2 = \frac{3g\beta}{\pi^2}^2 x_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{12}(\frac{3g\beta}{\pi^2}T^2 x_c - l^2); \quad a^2 = \frac{g\beta}{4\pi^2}(T^2 x_c) - \frac{l^2}{12}$$

Теоретически получается, что u = a^2 и v = $T^2 x_{ц}$ линейно зависимы. Построим график такой зависимости, используя экспериментальные данные (табл.1, рис.3):

Рис.3. Зависимость v(u)



Убеждаемся, что график - действительно прямая линия, соответственно задаваемая линией v = ku + b. Согласно методу наименьших квадратов:

$$k = \frac{<uv> - <u><v>}{<u^2> - <u>^2} \approx 3{,}7\,\frac{c^2}{м}$$

$$b = <v> - k<u> \approx 0{,}31\ м \cdot c^2$$

Случайные погрешности

$$\sigma_k^{сл} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \left(\frac{< v^2 > - < v >^2}{< u^2 > - < u >^2} - k^2\right)} \approx 0{,}016 \ \frac{м}{c^2}.$$

$$\sigma_b^{сл} = \sigma_k^{сл} \cdot \sqrt{< u^2 > - < v^2 >} \approx 0{,}001 \text{ м} \cdot c^2$$

Найдём погрешности расчёта $< u >$ и $< v >$:

$$\epsilon_v = \epsilon_{a^2} = \frac{2\Delta a}{a}$$

где $\Delta a = \sigma_л = 0{,}5$ мм.

$$\epsilon_u = \epsilon_{T^2 x_c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta(T^2)}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_c}{x_c}\right)^2} = \sqrt{\left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_c}{x_c}\right)^2}$$

Где $\Delta T = \sigma_T = \frac{\sigma_t}{n} = \frac{\sigma_t}{10}$, $\Delta x_c = \sigma_л = 0{,}5$

Итак, $\epsilon_u \approx 15 \cdot 10^{-}$, $\epsilon_v \approx 2 \cdot 10^{-}$
Систематические погрешности вычисления коэффициентов k и b вычисляются соотношениями:

$$\sigma_k^{сист} = k\sqrt{\epsilon_u^2 + \epsilon_v^2} \approx 4{,}19 \ \frac{м}{c^2}$$

$$\sigma_b^{сист} = b\sqrt{\epsilon_u^2 + \epsilon_v^2} \approx 1301 \text{ м} \cdot c^2$$

Полная погрешность коэффициентов k и b:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{сл})^2 + (\sigma_k^{сист})^2} = 0{,}02 \ \frac{м}{c^2}$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{сл})^2 + (\sigma_b^{сист})^2} = 0{,}004 \text{ м} \cdot c^2$$

Таким образом получим k $= 3{,}74 \pm 0{,}02 \ \frac{с^2}{мм}$, b $= 0{,}310 \pm 0{,}004$ м $\cdot$ с^2.

Найдём ускорение свободного падения (по наклону прямой):

$$g = \frac{(2\pi)^2}{k} = \frac{(2 \cdot 3{,}14)^2}{3{,}74} = 10,55 \ \frac{м}{с^2}$$

Погрешность вычисления ускорения свободного падения:

$$\sigma_g = g \cdot \epsilon_k = g\frac{\sigma_k}{k} \approx 0,06 \quad \frac{м}{с^2}$$

Итого получаем $g = 10,55 \pm 0,06 \ \frac{м}{с^2}$.

Выводы:

Проведённый опыт подтверждает в пределах погрешности справедливость формулы периода колебаний. Значение ускорения свободного падения, полученное усреднением ($g = 9,88 \pm 0,03\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$) и МНК ($g = 10,55 \pm 0,06\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$) в пределах погрешности удовлетворительно согласуется с табличным значением, хотя результат МНК получился заметно менее точным. Это объясняется тем, что количество измерений было невелико, а также тем, что сами измерения проводились не очень точно - так, на итоговую погрешность большое влияние оказала погрешность реакции экспериментаторов.

№ Опыта	a, мм	Хц, мм	n	t_n, с	$\bar{t}$, с	T, с	g, м/с^2	№ Опыта	a, мм	Хц, мм	n	t_n, с	$\bar{t}$, с	T, с	g, м/с^2
1	250	228	10	15,3	15,461	1,546	9,626	6	350	320	10	15,15	15,266	1,527	10,015
				15,53								15,2			
				15,44								15,28			
				15,5								15,27			
				15,47								15,25			
				15,56								15,41			
				15,31								15,22			
				15,65								15,24			
2	150	137	10	17,03	16,928	1,693	9,781	7	280	258	10	15,03	15,135	1,514	9,93
				16,76								15,13			
				16,97								15,08			
				16,66								15,1			
				16,91								15,22			
				16,97								15,2			
				16,93								15,09			
				17,06								15,15			
				17,15								15,19			
				16,84								15,16			
3	100	90	10	19,44	19,489	1,949	9,906	8	470	430	10	16	16,062	1,606	9,951
				19,5								16,06			
				19,37								16,04			
				19,53								16,06			
				19,63								16,03			
				19,4								16,05			
				19,56								16,12			
				19,37								16,1			
				19,59								16,1			
				19,5								16,06			
4	400	365	10	15,81	15,553	1,555	10,004	9	80	72	10	21,57	21,578	2,158	9,712
				15,41								21,55			
				15,5								21,49			
				15,47								21,57			
				15,62								21,56			
				15,5								21,6			
				15,44								21,61			
				15,56								21,63			
				15,68								21,6			
				15,54								21,6			
5	300	275	10	15,06	15,119	1,512	10,005	10	120	109	10	18,3	18,188	1,819	9,835
				15,06								18,17			
				15,16								18,2			
				15,21								18,12			
				15,16								18,15			
				15,22								18,1			
				15,03								18,15			
				15,2								18,31			
				15								18,18			
				15,09								18,2			

Таблица 1: все результаты измерений T при различных a, x_c, и результат g для каждого опыта.