Задача о ранце

Г. Э. Сербин, Е. Д. Мелешко
Группа ФН2-41Б
Руководитель И. Ю. Савельева

МГТУ им. Н. Э. Баумана

27 августа 2020 г.

Постановка задачи

Задача о ранце

Имеется набор предметов, каждый из которых характеризуется двумя положительными параметрами — весом и ценностью. Требуется собрать в ранец такую совокупность предметов, чтобы их суммарная ценность была максимальной, при этом вместимость ранца ограничена. Каждый предмет разрешается брать не более одного раза.

Входные данные: количество предметов, вес и ценность каждого предмета, ограничение суммарного веса ранца.
Выходные данные: номера использованных предметов.
Замечание. Вес и стоимость считаем вещественными числами.

Обзор методов решения

Задача о ранце — *NP*-полная задача комбинаторной оптимизации. Для нее не найден алгоритм, решающий её за полиномиальное время.

Точные алгоритмы:

- Метод перебора.
- Метод ветвей и границ.

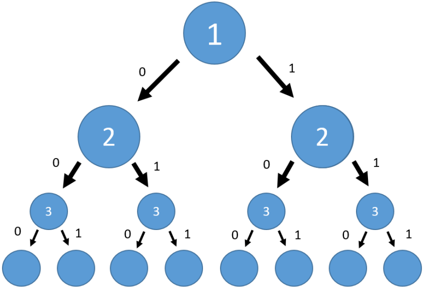
Приближенные алгоритмы:

- Жадный алгоритм.
- Приближенная схема полностью полиномиального времени.

Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ — дополненный метод полного перебора, осуществляющий перебор возможных решений с отсечением некоторых бесперспективных вариантов.

- Основой алгоритма является древовидный полный перебор.
- Для каждой подветви выполняем оценку сверху наилучшего потенциального решения, которое можно из нее извлечь.
- Исключаем заведомо неоптимальные ветви дерева полного перебора.



Оценка сверху для подветви

Жадный алгоритм для оценки сверху

1. Отсортировать предметы по параметру $c = \frac{p}{w}$, где p — стоимость предмета, w — его вес.
2. Класть в ранец вещи с наибольшим c до тех пор, пока это возможно.
3. Той вещью, которая не поместилась (если такая есть) заполнить ранец полностью так, как будто вещи можно брать частично.

Полученная стоимость — оценка сверху для данной подветви.
Сложность жадного алгоритма — $O(n)$, где n — количество предметов.
Сложность полного перебора — $O(2^n)$.
Замечание. Время работы метода ветвей и границ сильно опирается на входные данные.

Приближенная схема полностью полиномиального времени для целых стоимостей

Пусть i-ый предмет имеет стоимость p_i и вес w_i, обозначим

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i, \qquad P = \max_{i \in 1..n} p_i.$$

Пусть $w(k, p)$ — минимальный вес, необходимый для того, чтобы уложить предметы с номерами, не превосходящими $k \in [0..n]$, общей стоимостью не менее $p \leq S$.
Составим таблицу $w(k, p)$ размером $n \times S$.

Правило заполнения таблицы (по столбцам):

$$w(0, 0) = 0; \qquad w(0, p) = \infty, \; p > 0;$$
$$w(k+1, p) = \min\{w(k, p), w(k, p - p_{k+1}) + w_{k+1}\}.$$

Пусть W — вместимость рюкзака. Тогда максимальное p, для которого верно $w(n, p) \leq W$, будет оптимальной стоимостью. Если сохранять номера предметов, реализующих данные $w(n, p)$, то будет получено решение.

ПСППВ для вещественных стоимостей и оценка точности

Пусть P_{min} — нижняя оценка суммарной стоимости оптимального решения задачи. Заданная величина $\varepsilon > 0$ — точность решения. Обозначим

$$K_\varepsilon = \frac{P_{min}}{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) n}, \qquad p'_i = \left[\frac{p_i}{K_\varepsilon}\right].$$

Далее, на новом наборе стоимостей p'_i реализуем алгоритм для целых стоимостей и получим некоторое решение.
Пусть A_ε — общая стоимость набора предметов, который вернул алгоритм.

$$A_\varepsilon \geq A_{opt} - nK_\varepsilon, \qquad A_{opt} \geq P_{min},$$

где A_{opt} — оптимальная стоимость для данной задачи. Тогда

$$\frac{A_\varepsilon}{A_{opt}} \geq \frac{A_{opt} - nK_\varepsilon}{A_{opt}} = 1 - \frac{nP_{min}}{A_{opt} n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)} \geq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, получена оценка

$$A_\varepsilon > (1 - \varepsilon) A_{opt}.$$

Сравнение методов

Метод ветвей и границ.

- Точное решение задачи.
- Интуитивно понятен и просто реализуем.
- Не требует дополнительного выделения памяти.
- Для некоторых задач способен быстро выдавать ответ, несмотря на большое количество входных данных.
- Время работы растет экспоненциально.

Приближенная схема полностью полиномиального времени.

- Решает задачу за полиномиальное время.
- Можно задать точность решения.
- Находит только приближенное решение.
- Требует дополнительного выделения памяти.

Примеры решения модельных задач

Пример 1. Работа методов при сравнительно большом количестве случайных предметов $n = 50$.

Метод	Стоимость	Вес	Время (сек)	Точность
Метод ветвей и границ	$6{,}96 \cdot 10^8$	$7{,}94 \cdot 10^5$	1373	100%
ПСППВ	$6{,}94 \cdot 10^8$	$7{,}31 \cdot 10^5$	0,6	99,65%

Пример 2. Тот же набор предметов, но теперь все предметы помещаются в ранец.

Метод	Стоимость	Вес	Время (сек)	Точность
Метод ветвей и границ	$25{,}84 \cdot 10^8$	$36{,}66 \cdot 10^8$	0,03	100%
ПСППВ	$25{,}76 \cdot 10^8$	$4{,}79 \cdot 10^8$	0,5	99,7%

Заключение

- Познакомились с задачей о ранце.
- Реализовали алгоритмы «метод ветвей и границ» и «приближённая схема полностью полиноминального времени» на языке программирования C++ и в системе компьютерной алгебры MATLAB.
- Исследовали и сравнили два метода на предмет эффективности, выявили их преимущества и недостатки.