

Модель QUBO для оптимизации проблемы маршрутизации транспортных средств

Морев Георгий
МФТИ

I. Введение

Задача маршрутизации транспортных средств (VRP) [1] является базовой NP-полной математической задачей, связанной с оптимизацией планирования, логистики и транспортировки. Цель состоит в том, чтобы спланировать поездки на транспортных средствах для максимально эффективного обслуживания заданного количества клиентов. Благодаря недавнему интересу к квантовым отжиговым машинам, которые стали коммерчески доступными компанией D-Wave Systems Inc. [2], исследование VRP как квадратичная безусловная бинарная оптимизация (QUBO) стало очень важным, особенно в попытке достичь квантово-механической оптимизации реальных проблем. Также стоит отметить, что в данной статье будет рассматриваться более обобщенная версия задачи, а именно MDCVRP (Multi-depot capacitated vehicle routing problem), то есть у каждой дороги будет стоимостная функция и будет несколько складов.

II. Постановка задачи

Пусть $G = (V, E)$ - полный граф, где $V = \{1, \dots, n\}$ - набор вершин, представляющих n местоположений клиентов, также будут k вершин, являющиеся складами, E - набор неориентированных рёбер. У каждого ребра $(i, j) \in E, i \neq j$ есть неотрицательная стоимость D_{ij} . Эта стоимость может, например, представлять (географическое) расстояние между двумя клиентами i и j . Кроме того, предположим, что на складе размещено m_k транспортных средств с вместимостью Q_k . Кроме того, каждый клиент имеет определенный спрос q_i . MDCVRP состоит из поиска набора маршрутов транспортных средств, таких что:

- все маршруты начинаются и заканчиваются на депо
- каждый клиент в V посещается ровно один раз ровно одним транспортным средством
- сумма спроса клиентов на маршруте не превышает вместимости транспортных средств
- Для каждого маршрута сумма спросов клиентов не превышает вместимости транспортного средства
- сумма стоимостей всех маршрутов минимальна с учетом ограничений, указанных выше

III. Модель QUBO

Модель QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) описывает задачу оптимизации в виде квадратичной формы:

$$H(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} Q_{ij} x_i x_j = x^T Q x \quad (1)$$

, где:

- x - вектор бинарных переменных (0 или 1),
- Q - симметричная матрица коэффициентов размера $N \times N$.

QUBO минимизирует гамильтониан $H(x)$, который соответствует энергии системы.

IV. Модель

A. Параметры

Определим параметры, которые мы будем использовать:

- Задаваемые параметры
 - T - Множество всех клиентов
 - D - Множество всех складов
 - K - множество всех машин
 - $D_{ij}, (i, j \in T)$ - расстояние между клиентами
 - $D_{di}, (d \in D, i \in T)$ - расстояние между клиентами и складами
 - $V_d, (d \in D)$ - Количество товаров на складе
 - $Q_k, (k \in K)$ - Вместимость машины
 - $q_i, (i \in T)$ - Количество товаров необходимое клиенту
 - $y_{kd}, (k \in K, d \in D)$ - 1, если машина k стоит на складе d
- Оптимизируемые параметры
 - $x_{ijk}, (i, j \in T, k \in K)$ - 1, если машина k поедет к клиенту j после клиента i
 - u_{ik} - 1, если машина k посетит клиента i первым
 - n_{ik} - 1, если машина k посетит клиента i последним

B. Целевые функции и ограничения

Целевая функция: Функция описывающая издержки для передвижения всех машин. Данную функцию мы хотим минимизировать.

$$\text{Min: } \sum_{k \in K} \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} D_{ij} x_{ijk} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in T} \sum_{d \in D} D_{id} u_{ik} y_{kd} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in T} \sum_{d \in D} D_{id} n_{ik} y_{kd} \quad (2)$$

Ограничение 1: Нельзя поехать к тому же покупателю.

$$\forall i \in T, \forall k \in K : x_{iik} = 0 \quad (3)$$

Ограничение 2: К каждому покупателю должна приехать ровно одна машина.

$$\forall i \in T : \sum_{k \in K} \sum_{j \in T} x_{jik} + \sum_{k \in K} u_{ik} = 1 \quad (4)$$

Ограничение 3: От каждого покупателя должна уехать ровно одна машина.

$$\forall i \in T : \sum_{k \in K} \sum_{j \in T} x_{ijk} + \sum_{k \in K} n_{ik} = 1 \quad (5)$$

Ограничение 4: Каждая машина должна отъехать ровно с одного склада.

$$\forall k \in K : \sum_{i \in T} u_{ik} = 1 \quad (6)$$

Ограничение 5: Каждая машина должна приехать ровно на один склад.

$$\forall k \in K : \sum_{i \in T} n_{ik} = 1 \quad (7)$$

Ограничение 6: “Целостность маршрута”. Если машина приехала к покупателю, то она должна уехать от него.

$$\forall k \in K, \forall i \in T :$$

$$u_{ik} + \sum_{j \in T} x_{jik} - n_{ik} - \sum_{p \in T} x_{ipk} = 0 \quad (8)$$

Ограничение 7: У машин не должно быть возможности иметь на своем маршруте цикл из городов, который они не посещают.

Например, представим сценарий, когда дано 2 склада D_1, D_2 , в каждом из которых по 1 машине, V_1 на D_1 и V_2 на D_2 . Пусть также есть 4 покупателя: $C_i, i = 1...4$. Потенциально маршруты могли распределиться так:

- Для V_1 : $D_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1, C_2 \rightarrow C_3, C_3 \rightarrow C_2$
- Для V_2 : $D_2 \rightarrow C_4 \rightarrow D_2$

Данные маршруты удовлетворяют всем ограничениям, наложенным выше, но не являются правильными потому что в цикл из покупателей C_2, C_3 никто никогда не заедет.

Обозначим за $\mathbb{P}(T)$ - множество всех подмножеств T , тогда необходимо наложить ограничение:

$$\forall S \in \mathbb{P}(T), 2 \leq |S| \leq |T| : \sum_{k \in K} \sum_{i, j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad (9)$$

Ограничение 8: Суммарное количество продуктов, доставленное покупателям не должно превышать вместимости машины.

$$\forall k \in K : \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} q_i x_{ijk} + \sum_{i \in T} q_i n_{ik} \leq Q_k \quad (10)$$

Ограничение 9: Суммарное количество продуктов, доставленное покупателям с каждого склада не должно превышать его вместимости.

$$\forall d \in D :$$

$$\sum_{k \in K} y_{kd} \left(\sum_{i \in T} \sum_{j \in T} q_i x_{ijk} + \sum_{i \in T} q_i n_{ik} \right) \leq V_d \quad (11)$$

Замечание: при реализации стоит создать фиктивные оптимизируемые параметры u_{0k} и n_{0k} , которые будут равны 1 в случае, если машине не надо никуда ехать.

С. Гамильтониан задачи

Общий подход:

Для ограничений вида $\sum_{i=1}^{n_x} A_i x_i = b$, где x_i - i -ый оптимизируемый параметр, Гамильтониан будет записан как $\left(\sum_{i=1}^{n_x} A_i x_i - b \right)^2$

Для ограничений вида $\sum_{i=1}^{n_x} A_i x_i \leq b$, чтобы представить модель QUBO придется сначала представить ограничение в виде равенства [3]. Это можно сделать путем введения резервных переменных, и записать Гамильтониан в виде $\left(\sum_{i=1}^{n_x} A_i x_i + \sum_{j=1}^{n_\lambda} 2^\lambda \lambda_j - b \right)^2$, где $n_\lambda = \lceil 1 + \log_2 b \rceil$.

Гамильтониан целевой функции:

$$H_O = \sum_{k \in K} \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} D_{ij} x_{ijk} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in T} \sum_{d \in D} D_{id} u_{ik} y_{kd} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in T} \sum_{d \in D} D_{id} n_{ik} y_{kd} \quad (12)$$

Ниже приведены члены Гамильтониана H_{C_i} , которые представляют i -ое ограничение, приведенное выше.

$$H_{C_1} = B \sum_{i \in T} \sum_{k \in K} (x_{iik}) \quad (13)$$

$$H_{C_2} = B \sum_{i \in T} \left(1 - \left(\sum_{k \in K} \sum_{j \in T} x_{jik} + \sum_{k \in K} u_{ik} \right) \right)^2 \quad (14)$$

$$H_{C_3} = B \sum_{i \in T} \left(1 - \left(\sum_{k \in K} \sum_{j \in T} x_{ijk} + \sum_{k \in K} n_{ik} \right) \right)^2 \quad (15)$$

$$H_{C_4} = B \sum_{k \in K} \left(1 - \left(\sum_{i \in T} u_{ik} \right) \right)^2 \quad (16)$$

$$H_{C_5} = B \sum_{k \in K} \left(1 - \left(\sum_{i \in T} n_{ik} \right) \right)^2 \quad (17)$$

$$H_{C_6} = B \sum_{i \in T} \sum_{k \in K} \left(u_{ik} + \sum_{j \in T} x_{jik} - n_{ik} - \sum_{p \in T} x_{ipk} \right)^2 \quad (18)$$

$$H_{C_7} = B \sum_{S \in \mathbb{P}(T), 2 \leq |S| \leq |T|} \left(\sum_{k \in K} \sum_{i, j \in S} x_{ijk} + \sum_{l=0}^{\lceil 1 + \log_2(|S| - 1) \rceil} 2^l \lambda_{lS} - |S| + 1 \right)^2 \quad (19)$$

$$H_{C_8} = B \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in T} \sum_{j \in T} q_i x_{ijk} + \sum_{i \in T} q_i n_{ik} + \sum_{l=0}^{\lceil 1 + \log_2 Q_k \rceil} 2^l \lambda_{lk} - Q_k \right)^2 \quad (20)$$

$$H_{C_9} = B \sum_{d \in D} \left(\sum_{k \in K} y_{kd} \left(\sum_{i \in T} \sum_{j \in T} q_i x_{ijk} + \sum_{i \in T} q_i n_{ik} \right) + \sum_{l=0}^{\lceil 1 + \log_2 V_d \rceil} 2^l \lambda_{ld} - V_d \right)^2 \quad (21)$$

Где B - большая константа, обозначающая штраф, который возникнет при нарушении ограничений.

Тогда Гамильтониан данной задачи получился равен:

$$H_F = H_O + \sum_{i=1}^9 H_{C_i} \quad (22)$$

V. Реализация

REFERENCES

- [1] J. H. Dantzig G. B. Ramser, "The Truck Dispatching Problem," *Management Science*, pp. 80–91, 1959.
- [2] G. S. L. T. H. F. D. N. R. B. A. J. J. J. B. P. C. E. M. E. C. J. P. K. K. L. E. L. N. O. T. P. I. R. C. T. M. C. T. E. T. C. J. S. U. S. W. J. W. B. G. Johnson M. W. Amin M. H. S., "Quantum annealing with manufactured spins," *Nature* 473, 2011.
- [3] T. Vyskočil S. Pakin and H. N. Djidjev, "Embedding Inequality Constraints for Quantum Annealing Optimization," *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2019.