Ano letivo 2022/2023
Duração: 50 minutos
C

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

PRIMEIRO TESTE - Novembro de 2022

Justifique devidamente as suas respostas.

---

1. (Cotação: 1 + 1,5) Considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = 2 - 2i$.

   (a) Escreva $\dfrac{z_2}{z_1} + i^{122}$ na forma algébrica.

   (b) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 + z_1 = 0$ e represente as soluções no plano complexo.

2. (Cotação: 1,5 + 1) Considere as seguintes matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & k \end{bmatrix}$.

   Calcule:

   (a) A matriz AB e indique os valores de k para os quais B é invertível.

   (b) A matriz inversa B^{-1}, quando $k = 5$.

3. (Cotação: 1,5 + 1,5) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 6-2\alpha \end{bmatrix}.$$

   (a) Classifique o sistema $AX = B$, em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$;

   (b) Use o método de Gauss para resolver o sistema $AX = B$, quando $\alpha = 0$.

4. (Cotação: 1 + 1) Sejam A e B matrizes quadrada de ordem 4. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.

   (a) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

   (b) $|2A^{-1}| = \dfrac{2}{|A|}$.

Formulário:

$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $\quad tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $\quad sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$