Ano letivo 2023/2024
Duração: 1 hora

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

SEGUNDO TESTE - janeiro de 2024

Justifique devidamente todas as respostas.

1. (Cotação: 1 + 1 +1 valores) Considere os pontos $A = (-1, 1, -1)$, $B = (1, 1, -3)$ e $C = (1, 2, 0)$ e o plano $\pi : 2x + y - 3z + 1 = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine os vetores com norma igual a $\sqrt{11}$ que são perpendiculares aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

   (b) Determine uma equação cartesiana da reta r que contém o ponto B e é perpendicular ao plano π.

   (c) Justifique se a reta $s : (x, y, z) = (2, 1, 2) + k(3, -3, 1)$ está contida no plano π.

2. (Cotação: 1,5 + 1,5) Sejam os conjuntos $A = \{(1, -1), (2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(x, y, z) : x + 3y - z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Prove que B é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e indique a sua dimensão.

   (b) Determine o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por A e indique uma base desse espaço.

3. (Cotação: 1 +1,5+1,5) Considere as aplicações lineares

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (-x + y - 2z, 2x - 2y + 4z) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (2x - y - z, 3y, y + z) \end{array}$$

   Determine:

   (a) O espaço imagem de f e indique a sua dimensão.

   (b) A matriz $[f]_B^A$ que representa f quando considerada a base $A = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ em $\mathbb{R}^3$ e a base $B = \{(-2, 1), (1, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Os valores próprios de g e conclua, justificando, se g é um operador diagonalizável.