

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA
PRIMEIRO TESTE - Novembro de 2023

Apenas é permitido o uso do formulário que se encontra no fim do teste.
 Justifique devidamente as suas respostas.

1. (Cotação: 1 + 1) Considere $z_1 = -1 - i$ e $z_2 = 1 - 3i$.

(a) Escreva $\frac{z_2 \times \bar{z}_2}{z_1} + z_1 \times i$ na forma algébrica.

(b) Resolva, em \mathbb{C} , a equação $z^3 - 2z_1 = 0$ e represente as soluções no plano complexo.

2. (Cotação: 1 + 1 + 1) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2k+1 & 0 \\ 3 & k-1 & 2k^2+k \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- (a) $AB - 3D$.
 (b) Os valores de k para os quais a matriz C_k é invertível.
 (c) A matriz dos cofatores e a matriz inversa de C_k quando $k = -1$.

3. (Cotação: 1 + 1) Seja A uma matriz quadrada de ordem 5. Indique se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas e justifique a sua opção.

- (a) $|2A^{-1} * A| = 2$.
 (b) $|A * A^T| = |A|^2$.

4. (Cotação: 1,5 + 1,5) Considere o sistema de equações lineares, que depende dos parâmetros a e b , representado matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ a^2 - 2a \end{bmatrix}.$$

- (a) Classifique o sistema em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$;
 (b) Resolva o sistema quando $a = 2$ e indique o seu conjunto solução.

Formulário:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

$$\sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$