INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Ano letivo 2022/2023
Duração: 1 hora

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

SEGUNDO TESTE - janeiro de 2023

Justifique devidamente todas as respostas.

---

1. (Cotação: 1 + 1 +1 valores) Considere o ponto $A = (-1, 1, 0)$ e os vetores $u = (2, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine:

   (a) O produto vetorial $u \times v$.

   (b) A equação cartesiana da reta r que contém a origem do referencial cartesiano e é perpendicular aos vetores u e v.

   (c) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que

   $$\overrightarrow{AP} \cdot (v \times u) = 0,$$

   isto é, tais que o produto misto dos vetores envolvidos é igual a 0.

2. (Cotação: 1,5 + 1,5) Considere o conjunto $A = \{(1, 0, -1), (2, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $B = \{(x, y) : y + 3x = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por A, $\langle A \rangle$, e indique uma base desse espaço.

   (b) Prove que B é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

3. (Cotação: 1 +1,5+1,5) Considere as aplicações lineares

   $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (x + 3y + z, -x + 2z) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & (2x - y - z, 3y + z, 2z) \end{array}$$

   Determine:

   (a) O núcleo de f e indique a dimensão deste espaço vetorial.

   (b) A matriz que representa g quando considerada a base $A = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Os valores próprios de g, averigue a existência de uma base de $\mathbb{R}^3$ de vetores próprios e conclua se g é um operador diagonalizável.