INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Ano letivo 2023/2024
Duração: 2 horas
Fevereiro de 2024

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

EXAME - Época de Recurso

Justifique devidamente todas as respostas.

Grupo I

1. (Cotação: 1 +1) Considere $z_1 = 3e^{i3\pi/4}$ e $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$:

   (a) Determine $z_1^4 + z_2$ e indique o resultado na forma algébrica.

   (b) Determine, em $\mathbb{C}$, o conjunto solução da equação $z^3 = z_1$.

2. (Cotação: 1+1+1+1,5) Considere as seguintes matrizes:

   $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = [c_{ij}]_{5\times 5}$, tal que $|C| = \dfrac{1}{9}$.

   Calcule, se possível:

   (a) $AB - B$;

   (b) O determinante da matriz $3C$;

   (c) O determinante da matriz $-C^{-1}$;

   (d) A matriz adjunta de A e a inversa A^{-1};

3. (Cotação: 2 + 1,5) Considere o sistema de equações lineares, que depende do parâmetro $a \in \mathbb{R}$,

$$S : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y + a^2 z = a \\ 2y + 2az = -2 \end{cases}$$

   (a) A partir da matriz ampliada do sistema, classifique S em função do parâmetro a.

   (b) Determine o conjunto solução do sistema S, quando $a = 1$.

Grupo II

4. (Cotação: 1,5 +1,5) Considere os pontos $A = (1, 2, -1)$ e $B = (2, 0, 1)$ e os vetores $v = (1, -1, 2)$ e $u = (2, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Identifique o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que $\overrightarrow{AP} \bullet (u \times v) = 0$ (o produto misto é igual a zero).

   (b) Determine uma equação cartesiana da reta r que contém os pontos A e B.

5. (Cotação: 1,5 + 1,5) Considere o conjunto $A = \{(1, 0, 3), (1, 1, -1), (2, 1, 2)\}$ e o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) : x + y - z = 0 \wedge x + 2z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine o subespaço gerado por A, $\langle A \rangle$, e indique a sua dimensão.

(b) Indique uma base e a dimensão S.

6. (Cotação: 1+ 1,5 + 1,5) Considere as aplicações lineares

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (2x-y+z, -4x+2y-2z) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (-x+2y, 3x+4y) \end{array}$$

e as bases $A = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(1,2),(0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

(a) Determine o núcleo de f e indique a sua dimensão.

(b) Calcule a matriz $[f]_B^A$ que representa f quando considerada a base A em $\mathbb{R}^3$ e a base B em $\mathbb{R}^2$.

(c) Determine os valores próprios de g. Justifique se g é diagonalizável e, caso afirmativo, indique uma matriz diagonal semelhante à matriz que representa g quando considerada a base canónica.

Formulário:

- $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $\quad tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.
- $cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
- $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $\quad sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- As raízes índice n de um número complexo $z = |z|\, e^{i\theta}$ são dadas pela fórmula:

$$\sqrt[n]{|z|}e^{i\dfrac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$