INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Ano letivo 2020/2021
Duração: 1 hora

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

SEGUNDO TESTE - janeiro de 2021

Justifique devidamente todas as respostas.

---

1. (Cotação: 1 + 1 + 1 valor) Considere os pontos $A = (-1,3,0), B = (2,-1,1)$ e $C = (2,0,-1)$ e os vetores $v = (1,-2,3)$ e $u = (2,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine:

   (a) A equação geral do plano $\pi : P = A + kv + tu, \quad k,t \in \mathbb{R}$.

   (b) A equação cartesiana da reta r perpendicular a π, que contém o ponto B.

   (c) O lugar geométrico dos pontos $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tais que

   $$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) = 0,$$

   isto é, o produto misto dos vetores envolvidos é igual a 0.

2. (Cotação: 1,5 + 1,5 valores) Considere o conjunto $A = \{(1,-2,0),(2,1,1),(1,3,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $B = \{(x,y) : 2y - 4x = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por A, $\langle A \rangle$, e justifique se A é uma base de $\langle A \rangle$.

   (b) Prove que B é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, indique a sua dimensão.

3. (Cotação: 1,5 + 1,5 + 1 valores) Considere as aplicações lineares

   $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & (2x-6y, 3x-9y, -x+3y) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+5y, 3x+3y) \end{array}$$

   Determine:

   (a) O subespaço núcleo de f e a sua dimensão. Recorra ao teorema da dimensão para indicar a dimensão do espaço imagem de f.

   (b) A matriz que representa g quando considerada a base $A = \{(1,-1),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Os valores próprios de g e o espaço dos vetores próprios associado a um dos valores próprios.

Soluções

1. .

   (a) $\pi : -6x + 3y + 4z - 15 = 0$

   (b) $r : \dfrac{x-2}{-6} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$

   (c) $\pi : 7x + 6y + 3z - 11 = 0$

2. .

(a) $\langle A \rangle = \{(x, y, z) : 2x + y - 5z = 0\}$. $dim(\langle A \rangle) = 2$, logo A não pode ser uma das suas bases.

(b) $dim(B) = 1$

3. .

(a) $Nuc(f) = \{(x, y) : x = 3y\}$ e $dim(Im(f) = 1$.

(b) A matriz que representa g quando considerada a base A é $M = \begin{bmatrix} -4/3 & -11/3 \\ -4/3 & 16/3 \end{bmatrix}$.

(c) $\lambda = 6$ e $\lambda = -2$. $E_{\lambda=6} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e $E_{\lambda=-2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{3}{5}x\}$.