Álgebra Linear e Geometria Analítica

Edite Cordeiro

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Setembro de 2020

Sumário

O conjunto $\mathbb{C}$ é uma extensão do conjunto dos números reais onde qualquer equação algébrica é possível.

Exemplo

A equação $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$ tem duas soluções reais.

No entanto a equação

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \quad x \quad = \tfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \tfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

não tem soluções reais, porque $\sqrt{-4}$ não existe em $\mathbb{R}$.

Se, no entanto, considerarmos um universo que contenha $\mathbb{R}$ e contenha uma unidade i, tal que $i^2 = -1$, esta equação tem duas soluções:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} \Leftrightarrow x = 1 + i \vee x = 1 - i$$

Representação algébrica de números complexos

Surge assim o conjunto dos números complexos,

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Considerado um número $z = x + yi$, dizemos que:

- x é a parte real de z e denotamos por $Re(z)$.
- y é o coeficiente da parte imaginária de z, denotada por $Im(z)$.

A representação de z como $x + yi$ diz-se forma algébrica de z.

Dado um complexo $z = x + yi$, dizemos que:

- Se $x = 0$ e $y \neq 0$, então z é imaginário puro;
- Se $y = 0$, então z é um número real.

Tem-se por isso, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Potências da unidade imaginária i

Por definição, a unidade imaginária i é tal que $i^2 = -1$.
Consequentemente:

$$\begin{array}{l|l|c|l}
i^1 = i & i^5 = i^4 i = i & \cdots & i^{4k+1} = (i^4)^k i = i \\
i^2 = -1 & i^6 = i^4 i^2 = -1 & \cdots & i^{4k+2} = (i^4)^k i^2 = -1 \\
i^3 = -i & i^7 = i^4 i^3 = -i & \cdots & i^{4k+3} = (i^4)^k i^3 = -i \\
i^4 = 1 & i^8 = i^4 i^4 = 1 & \cdots & i^{4k} = (i^4)^k = 1
\end{array}$$

Potências de base i

Uma potência de base i e expoente $n \in \mathbb{N}$ é igual à potência de base i e expoente igual ao resto da divisão de n por 4, isto é,

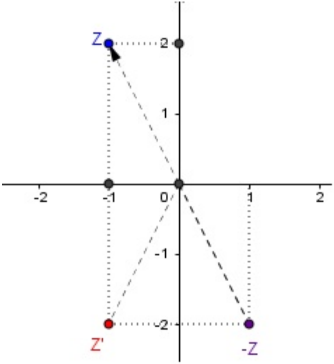
$$i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k i^r = i^r.$$

Exemplo: $i^{123} = i^3$ porque $123 = 4 \times 30 + 3$.

Representação gráfica de números complexos

Definimos conjugado de um complexo $z = x + yi$ como $\bar{z} = x - yi$.

A representação gráfica de números complexos faz-se no plano de Argand-Gauss, um plano cartesiano onde representamos números complexos. O coeficiente da parte imaginária é representado no eixo Oy e a parte real no eixo Ox.



Por exemplo, $z = -1 + 2i$ é representado através do afixo $Z = (-1, 2)$.

Z' é o afixo do conjugado de z, $\bar{z} = -1 - 2i$.

$-Z$ é o afixo do simétrico de z, $-z = 1 - 2i$.

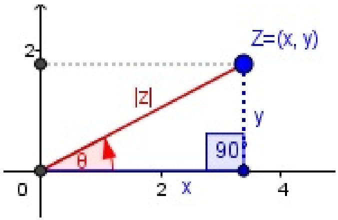
O valor absoluto ou módulo de de um número complexo $z = x + yi$ é a distância da sua representação gráfica à origem, tal como acontece com os números reais.

Por exemplo,

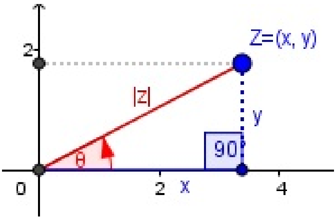
$$|-3| = dist(-3,0) = dist(3,0) = |3| = 3.$$

A representação gráfica de $z = x + yi$ sugere que apliquemos o Teorema de Pitágoras para calcular a distância de $Z = (x, y)$ a $O = (0, 0)$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



A representação trigonométrica de $z = x + yi$ relaciona-se com o seu módulo, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e com o ângulo polar θ (ângulo compreendido pelo semi-eixo positivo dos xx e pelo vetor $\vec{OZ}$).



Relacionamos

$$cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \quad \text{e} \quad sen(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

ou ainda

$$x + yi = |z|\cos(\theta) + |z|\,sen(\theta)i.$$

O ângulo θ diz-se argumento de z, que denotamos por $\arg(z) = \theta$.

Dado um complexo $z = x + yi$, tem-se

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\, sen(\theta)), \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \angle(\vec{Ox}, \vec{OZ})$$

Determinamos o argumento de $z = x + yi$ por análise da sua localização gráfica e considerando

$$tg(\theta) = \frac{y}{x}.$$

Fórmula de Euler

A comparação das séries que representam e^{ix}, $\cos(x)$ e $sen(x)$ permitiu constatar que:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\, sen(x).$$

Podemos agora considerar

$$z = x + yi = z = |z|(\cos(\theta) + i\, sen(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

A esta última chamamos forma exponencial de z.

Habitualmente denota-se $\cos(\theta) + i\, sen(\theta)$ pela abreviatura $cis(\theta)$.

Exemplo

Vamos descrever $z = -2 - 2i$ na forma trigonométrica:

- $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$
- $\theta \in 3Q$ e $tg(\theta) = \frac{-2}{-2} = 1$, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Então $z = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ou $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$.

Exemplo

Também se $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$, então

$$z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\, sen(\frac{5\pi}{6}) = 2(-\cos(\frac{\pi}{6}) + i\, sen(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i.$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo

Seja $z = 1 - i$. Tem-se $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e

$$tg(\theta) = -1 \wedge \theta \in 4Q, \quad \text{logo} \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Então:

$$z = \sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

Consideremos dois números complexos

$$z_1 = x_1 + y_1 i = |z_1| cis(\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + y_2 i = |z_2| cis(\theta_2).$$

Igualdade de números complexos

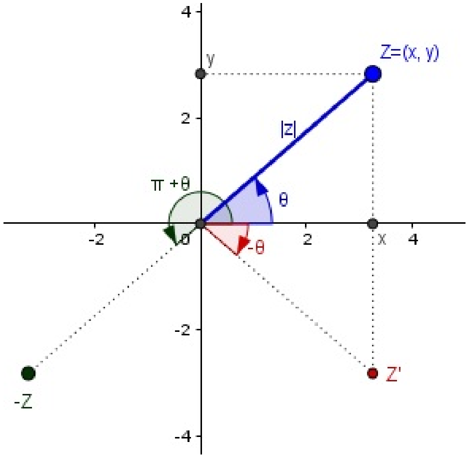
Na forma algébrica:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Na forma trigonométrica:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Por exemplo, $2cis(\frac{\pi}{6}) = 2cis(\frac{\pi}{6} + 2\pi)$.



De acordo com a representação gráfica acima, tem-se:

- $Z = (x, y) \hookrightarrow z = x + yi = |z|cis(\theta)$;
- $Z' = (x, -y) \hookrightarrow \bar{z} = x - xi = |z|cis(-\theta)$;
- $-Z = (-x, -y) \hookrightarrow -z = -x - xi = |z|cis(\theta + \pi)$.

Adição de números complexos

Dados $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Multiplicação de números complexos

Dados $z_1 = x_1 + y_1 i = |z_1| cis(\theta_1)$ e $z_2 = x_2 + y_2 i = |z_2| cis(\theta_2)$, tem-se:

$$z_1 \times z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \quad \text{(forma algébrica)}$$

ou

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| cis(\theta_1 + \theta_2) \quad \text{(forma trigonométrica)}$$

Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i = |z_1| cis(\theta_1)$ e $z_2 = x_2 + y_2 i = |z_2| cis(\theta_2)$,
Notar que

$$z_2 \bar{z}_2 = (x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i) = x_2^2 + y_2^2 = |z_2|^2.$$

Este facto é usado para dividir números complexos na forma algébrica.

Divisão de números complexos

O quociente de z_1 por z_2 $(z_2 \neq 0)$ é

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad \text{(forma algébrica)}$$

ou

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} cis(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{(forma trigonométrica).}$$

As fórmulas para a multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica resultam da aplicação de certas identidades trigonométricas e são devidas ao matemático Moivre.

Uma potência de expoente natural n significa que a base multiplica por ela própria n vezes.

Potências z^n, com $z = |z|cis(\theta)$

$$\begin{aligned} z^n &= (z \times z \times \cdots \times z) \\ &= |z|cis(\theta) \cdot |z|cis(\theta) \cdots |z|cis(\theta) \\ &= |z|^n cis(\theta + \theta + \cdots + \theta) \\ &= |z|^n cis(n\theta) \end{aligned}$$

Exemplo

$(2cis(\frac{\pi}{3}))^6 = 64cis(2\pi) = 64cis(0) = 64.$

Euler demonstrou que qualquer número real x tem exatamente n raízes complexas, provando que no universo $\mathbb{C}$ a equação polinomial

$$x^n - a = 0$$

de grau n possui exatamente n soluções.

Este facto foi provado para qualquer equação polinomial de grau n, através do seguinte teorema:

Teorema Fundamental da Álgebra

Toda equação polinomial de grau n com coeficientes reais ou complexos tem no universo dos números complexos n soluções.

Fórmula da radiciação

As raízes índice n de um número complexo z são as soluções da equação $x^n = z$. Consequentemente, um número complexo z tem n raízes índice n.

Raízes de índice n de $z = |z| cis(\theta)$

Dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{|z| cis(\theta)} = \sqrt[n]{|z|} cis \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \text{ para } k = 0, ..., n-1.$$

Notar que as n raízes de índice n de z

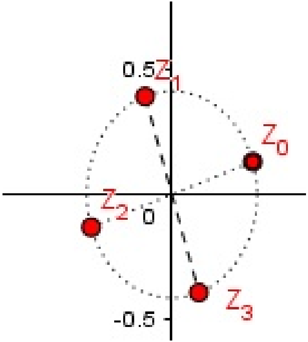
- Dispõem-se sobre uma circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$;
- Têm argumentos sucessivamente espaçados de $\frac{2\pi}{n}$.

A equação $z^4 = 1 + i$ tem 4 soluções em $\mathbb{C}$

Com efeito,

$$z^4 = 1 + i \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\sqrt{2} cis(\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow$$

$$z = \sqrt[8]{2} cis(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$



$$z_0 = \sqrt[8]{2} cis(\tfrac{\pi}{16}), z_1 = \sqrt[8]{2} cis(\tfrac{9\pi}{16}), z_2 = \sqrt[8]{2} cis(\tfrac{17\pi}{16}), z_3 = \sqrt[8]{2} cis(\tfrac{25\pi}{16}).$$

Além das propriedades das operações aritméticas no universo $\mathbb{R}$, as quais também se verificam em $\mathbb{C}$, temos ainda:

Propriedades

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $Re(-z) = -Re(z)$
5. $Im(-z) = -Im(z)$
6. $|-z| = |z|$
7. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
8. $|e^z| = e^{Re(z)}$
9. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
10. $|zw| = |z||w|$
11. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, com $w \neq 0$
12. $|\overline{z}| = |z|$

Sejam os complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ e sejam $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$ os seus correspondentes afixos.

Determinamos que o módulo da diferença de dois complexos é igual à distância entre os seus afixos, isto é

$$|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{Z_1 Z_2}|.$$

Com efeito:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

e

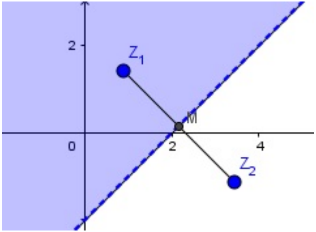
$$|\overrightarrow{Z_1 Z_2}| = |Z_2 - Z_1| = |(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

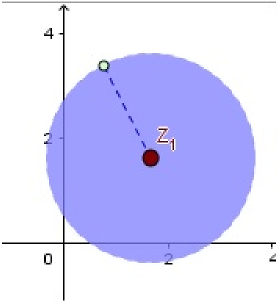
Sejam dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. O lugar geométrico dos complexos z tais que:

- $|z - z_1| = k$, $k \in \mathbb{R}^+$, é a circunferência centrada no afixo Z_1 com raio k.
- $|z - z_1| = |z - z_2|$ é a mediatriz do segmento de reta $[Z_1 Z_2]$.

Naturalmente, tem-se:

- $|z - z_1| < k$ representa o círculo centrada no afixo Z_1 com raio k.
- $|z - z_1| < |z - z_2|$ representa o semiplano determinado pela mediatriz de $[Z_1Z_2]$, que contem Z_1.





Por exemplo, a condição $|z - i| > 3$ representa o exterior da circunferência com centro no afixo de $z_1 = i$ e raio 3.

Exemplo

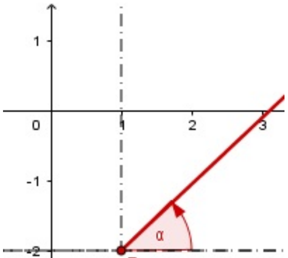
A condição $|z+i-1| = |z-5|$ representa mediatriz de $[Z_1 Z_2]$, onde $Z_1 = (1,-1)$ e $Z_2 = (5,0)$.

Notar que $|z+i-1| = |z-5| \Leftrightarrow |z-(1-i)| = |z-5|$.

Dado um complexo $z_1 = x_1 + y_1 i$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$:

- A condição $Re(z-z_1) = k \Leftrightarrow x = x_1 + k$ representa uma reta vertical.
- A condição $Im(z-z_1) = k \Leftrightarrow y = y_1 + k$ representa uma reta horizontal.

A condição $Arg(z-z_1) = \alpha$, para uma amplitude fixa α, define a semirreta com origem no afixo de z_1, formando um ângulo de amplitude α com a semirreta paralela ao eixo Ox que passa em Z_1.



Uma matriz é uma tabela de valores dispostos por m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Abreviadamente: $A = [a_{ij}]$ para $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$

Notar que:

- O elemento a_{ij} da matriz está situado na linha i e na coluna j.
- Designamos por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz do tipo } 3 \times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \pi & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz do tipo } 2 \times 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz do tipo } 1 \times 3 \text{ (matriz linha)}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz do tipo } 3 \times 1 \text{ (matriz coluna).}$$

Matriz quadrada

Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se matriz quadrada de ordem n e denota-se por A_n.

Os elementos $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$ dizem-se principais e constituem a diagonal principal de A_n.

Exemplos

Sejam as matrizes:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Os elementos principais de A são $a_{11} = 1$ e $a_{22} = 0$.

Os elementos principais de B são $b_{11} = b_{22} = 3$ e $b_{33} = -4$.

Traço de uma matriz quadrada e matriz nula

O traço de uma matriz $A_n = [a_{ij}]$ é a soma dos elementos da diagonal principal de A, isto é:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Por exemplo, $tr(\left[\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{array}\right]) = 3 + 3 - 4 = 2.$

Matriz nula

Uma matriz diz-se nula se todas as suas entradas forem iguais a zero e denotamos por $0_{m \times n}$ ou 0_n.

Por exemplo:

$$0_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad 0_{2\times 4} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n cujos elementos são todos 0 exceto os elementos principais que são iguais a 1, diz-se matriz identidade de ordem n e denota-se por I_n.

Isto é, $I_n = [a_{ij}]$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} .$$

Por exemplo:

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Duas matrizes A e B são iguais se e só se forem do mesmo tipo e tiverem os elementos homólogos iguais isto é, se forem do mesmo tipo e $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j.

Exemplo

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se que se $a = 4$ então $A = B$. No entanto $A \neq C$.

Adição

Se A e B são matrizes do tipo $m \times n$, então a matriz soma resulta de adicionar os elementos homologos das duas matrizes, isto é, se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, então

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n},$$

para $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Observamos que $A + B$ não existe.
A matriz $B + C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ é do tipo 2×3.

Sejam $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então:

1. $A + B = B + A$ (Propriedade comutativa)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Propriedade associativa)
3. $A + 0 = 0 + A = A$ (Existência de elemento neutro)
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$ (Existência de matriz simétrica).

Exemplo

A matriz simétrica de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é

$-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, porque $A + (-A) = [0]_{3\times 3}$.

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cA = [ca_{ij}]_{m\times n}$.

Por exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, então $5A = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -10 & 15 & 10 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz

Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $c, d \in \mathbb{R}$. Então:

1. $c(A + B) = cA + cB$;
2. $(c + d)A = cA + dA$;
3. $c(dA) = (cd)A$.

Lembrar que dados dois vetores $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$, o seu produto escalar é dado por

$$(v_1, v_2, v_3) \bullet (u_1, u_2, u_3) = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3.$$

Matricialmente, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$$

Mais geralmente, tem-se:

Definição

O produto de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ por uma matriz $B = [b_{ij}]_{n\times k}$ é a matriz $AB = [c_{ij}]_{m\times k}$, cujas entradas c_{ij} se obtêm como o produto interno da i-ésima linha de A com a j-ésima coluna de B.

Notar que só podemos multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

Exemplo:

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinamos $A \times B$, fazendo:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times(-1) - 1\times 0 + 0\times 0 & 1\times 2 - 1\times 1 + 0\times 0 \\ -1\times(-1) + 1\times 0 - 1\times 0 & -1\times 2 + 1\times 1 - 1\times 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício

Calcule, se possível, as matrizes $B \times A$ e $B \times C$.

Propriedades

Se A, B e C forem matrizes do tipo conveniente e $k \in \mathbb{R}$, então:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva da multiplicação em relação à adição).
3. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.
4. $A0 = 0$ e $0A = 0$ (matriz nula é o elemento absorvente).
5. $IA = A$ e $AI = A$, (a matriz identidade, I, é o elemento neutro)

Por exemplo, se $A \times B$ existe, então $(-2A) \times 3B = -6(A \times B)$.

A transposta de uma matriz $A = [a_{i,j}]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $A^t = [a_{j,i}]$ do tipo $n \times m$, que resulta de trocar cada elemento na posição i, j para a posição j, i.

Transposta de $A = [a_{i,j}]$

$A^T = [a_{j,i}]$ para $(j, i) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da transposição de matrizes

Sejam A e B do tipo adequado e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $\left(A^T\right)^T = A$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$.
4. $(kA)^T = kA^T$.

Matriz inversa

Seja $A = [a_{i,j}]$ uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A diz-se invertível ou regular se existir uma matriz B do mesmo tipo tal que $AB = I_n = BA$.

Nesse caso, B diz-se inversa de A e denotamos $B = A^{-1}$. Tem-se

$$AA^{-1} = I \text{ e } A^{-1}A = I.$$

Caso a matriz A não seja invertível, então diz-se matriz singular.

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ são inversas uma da outra porque

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema da unicidade da inversa

A inversa de uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, caso exista, é única.

Com efeito, se B e C são inversas de A, tem-se
$AB = BA = I_n = AC = CA$.

Mas $AB = ABI_n = ABAC = AI_nC = AC$.

Além disso, $AB = AC \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Leftrightarrow I_nB = I_nC \Leftrightarrow B = C$.

Teorema

Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então $BA = I_n$ se e só se $AB = I_n$.

Exercício

1. Determine, caso exista, a inversa de $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Prove que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não são inversas uma da outra.

Propriedades

Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n e seja $k \in \mathbb{R} \mid \{0\}$. Então:

1. AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
2. A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;
3. kA é invertível e $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
4. A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
5. $I_n^{-1} = I_n$.

Potências de uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

- $A^0 = I_n$;
- $A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k\ \ fatores}, \quad k \in \mathbb{N}$;
- $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1}}, \quad k \in \mathbb{N}$.

Matriz diagonal

Matriz diagonal é uma matriz quadrada de ordem n cujos elementos não principais são todos nulos.

Por exemplo, as matrizes a seguir são diagonais:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Matriz escalar é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais.

Por exemplo, as matrizes a seguir são escalares:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Seja $D = [d_{ij}]_{n\times n}$uma matriz diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

Proposição

A matriz $D = [d_{ij}]_{n\times n}$ é invertível se e só se todas as entradas da diagonal principal são não nulas.
Além disso, D^{-1}, também é uma matriz diagonal e é representada por

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

Nota: As entradas principais de D^{-1} são os valores inversos dos elementos principais de D.

Proposição

Seja $D = [d_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz diagonal . Para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, a matriz D^k é diagonal e pode ser representada como:

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

Nota: Se D for invertível esta proposição é válida para todo o $k \in \mathbb{Z}$

Em geral, o produto de matrizes diagonais é fácil de determinar.
Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} \end{bmatrix}$$

- Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ diz-se triangular superior se os elementos abaixo da diagonal principal são todos 0, isto é, se $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
- Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ diz-se triangular inferior se os elementos acima da diagonal principal são todos 0, isto é, se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos

Em baixo a matriz A é triangular superior e a matriz B é triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Propriedades

1. A transposta de uma matriz triangular inferior é uma matriz triangular superior e vice-versa.
2. Uma matriz triangular é invertível se e só se todos os elementos principais são não nulos.
3. O produto de duas matrizes triangulares inferiores (superiores) é uma matriz triangular inferior (superior).
4. A inversa de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular inferior (superior).

Exercício

Considere as matrizes triangulares superiores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Justifique que A é invertível e B é singular. Determine AB.

Definição

Uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se simétrica se $A^T = A$.

Exemplos de matrizes simétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sejam A e B duas matrizes simétricas, do mesmo tipo. Então,

1. A^T é simétrica.
2. $A + B$ é simétrica.
3. $A - B$ é simétrica.
4. kA é simétrica $(k \in \mathbb{R})$.

Exercício

Mostre que a matriz $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ é simétrica.

A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa, isto é, em geral $AB \neq BA$.

Matrizes permutáveis

Dadas duas matrizes A e B, dizemos que A e B comutam ou são permutáveis se $AB = BA$.

Propriedade

A e B comutam $\Leftrightarrow$ AB é simétrica.

Exercício

Verifique se AB e AC comutam, sendo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Definição

Se A é uma matriz quadrada invertível tal que $A^{-1} = A^T$, então diz-se matriz ortogonal.

A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ é ortogonal, porque:

$$A^T A = AA^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição

Uma matriz A diz-se em escada por linhas se:

1. Cada linha não nula está acima de todas as linhas nulas de A.
2. Se o primeiro elemento não nulo na linha i está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz em escada por linhas.

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Podemos transformar qualquer matriz numa matriz em escada por linhas realizando as seguintes operações elementares:

Operações elementares sobre as linhas da matriz

1. Permutar linhas;
2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo;
3. Adicionar uma linha com o produto de outra por um escalar.

Exemplo

Transformemos a matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underrightarrow{l_3 = l_3 + l_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definição

Chamamos característica de uma matriz A ao número de linhas não nulas da matriz depois de transformada numa matriz em escada por linhas e denotamos por $car(A)$.

Exercício

Determine a característica das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Algoritmo da inversa de uma matriz via matriz ampliada

Fazendo uso das operações elementares sobre as linhas (ou colunas) de uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, podemos determinar a sua inversa (caso exista), procedendo do seguinte modo:

Algoritmo

i) Escrever a matriz ampliada $[A|I_n]$;

ii) Usando as operações elementares sobre as linhas de $[A|I_n]$, transformar $[A|I_n]$ em $[C|D]$, com C em escada por linhas;

iii) Caso C tenha alguma linha nula, então A não é invertível; caso contrário, transformar $[C|D]$ em $[I_n|E]$ e identificar E com A^{-1}.

Exercício

Determine, caso exista, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Determinante de uma matriz quadrada

Definição

O determinante de uma matriz quadrada $A = [aij]_{n \times n}$ é a soma de $n!$ termos, onde cada termo é o produto de n elementos de A, cada um dos quais pertencendo a uma linha e a uma coluna diferente.

O sinal de cada termo é $+$ se a permutação que o origina for par e é $-$ se essa permutação for ímpar.

Denotamos por $det(A)$ ou $|A|$, o determinante de A.

Determinante de ordem 1:

Se $A = [a_{11}]$, então $|A| = a_{11}$.

Determinante de ordem 2:

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

O sinal $-$ deve-se à permutação ímpar $(2, 1)$.

Determinante de uma matriz de ordem 3

Determinante de ordem 3:

Os seis termos do determinante de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ são:

1. $a_{11}a_{22}a_{33}$;
2. $a_{12}a_{23}a_{31}$;
3. $a_{13}a_{21}a_{32}$;
4. $a_{13}a_{22}a_{31}$;
5. $a_{11}a_{23}a_{32}$;
6. $a_{12}a_{21}a_{33}$.

Os três primeiros são positivos e os três últimos negativos. Assim,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}$$

Notar que o determinante de uma matriz de ordem 4 é, por definição, a soma algébrica de $4!(= 24)$ parcelas.

As seguintes propriedades permitem-nos agilizar o cálculo do valor determinante das matrizes quadradas.

Propriedades

Dada uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tem-se:

1. O determinante muda de sinal quando se trocam duas linhas (ou colunas) de A.
2. A multiplicação de uma linha (ou coluna) de A por $k \in \mathbb{R}$, determina uma matriz com determinante $k|A|$;
3. O determinante não se altera se a uma linha (ou coluna) de A adicionarmos um múltiplo de outra.
4. Se A for uma matriz triangular (superior ou inferior) então o $|A|$ é o produto dos elementos principais.
5. Se A tiver uma linha (ou coluna) de zeros, então $|A| = 0$.

Usando as propriedades 3 e 5, também determinamos que se uma fila (linha ou coluna) de A for múltipla de outra, então $|A| = 0$.

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times 0 = 12.$$

Notar que A é uma matriz triangular, logo $|A| = 4 \times 3$.

Exercício

Use as propriedades consideradas atrás para calcular:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Outras propriedades dos determinantes

Sejam A e B matrizes de ordem n e $k \in \mathbb{R}$. Então:

1. $|AB| = |A||B|$;
2. $|kA| = k^n|A|$;
3. $|A^T| = |A|$;
4. Se A for ortogonal, então $|A| = \pm 1$;
5. Se A for invertível, então $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Exercício

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

Calcule $|A^{-1}|$ sem calcular a inversa de A.

Definições

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz quadrada.

Chamamos submatriz A_{ij} à matriz que se obtém de A por eliminação da linha i e da coluna j.

Ao número $C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ chamamos complemento algébrico ou cofator associado a a_{ij}.

Exemplo

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Tem-se:

- $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $C_{23} = (-1)^5(3+4) = -7$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n é igual à soma dos produtos das entradas de uma qualquer linha (ou coluna) pelos respetivos cofatores, isto é, para qualquer $i = 1, ..., n$,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij},$$

ou, no caso das colunas, para qualquer $j = 1, ..., n$,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

Exemplo

Pelo Teorema de Laplace, considerando o produto das entradas da segunda linha pelos respetivos cofatores, tem-se:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+1) = 1$$

Matriz dos cofatores

A matriz dos cofatotes de uma matriz A quadrada corresponde a substituir todas as entradas de A pelos respetivos cofatores.

Por exemplo, dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Tem-se:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 11 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta

À transposta da matriz dos cofatores de A chamamos matriz adjunta de A e denotamos por $adj(A)$.

Matrizes invertíveis

Uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite inversa se e só se $det(A) \neq 0$.

Também, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite inversa se e só se $car(A) = n$.

Existência e cálculo da inversa de uma matriz quadrada

Se A^{-1} existe, ela pode ser determinada como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A).$$

Exercício

Caso exista, determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$;
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

Uma equação linear é do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são valores fixos e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são incógnitas.

Se $b = 0$, a equação diz-se homogénea.

Um sistema de equações lineares é uma conjunção de equações lineares.

O sistema diz-se linear homogéneo se é uma conjunção de equações lineares homogéneas.

Exemplos

1. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ é um sistema de equações lineares.
2. $\begin{cases} x^2 + 2y - z = 1 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases}$ é não linear, por causa do termo x^2.

Definição

Solução de um sistema com n incógnitas é todo o n-uplo

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

que transforma todas as equações do sistema em identidades verdadeiras.

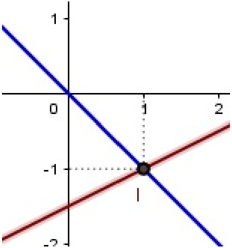
Classificação dos sistemas

1) Um sistema linear que não tem soluções diz-se impossível.
2) Um sistema com pelo menos uma solução, diz-se possível.
   i) O sistema diz-se possível e determinado, caso tenha solução única;
   ii) O sistema diz-se possível e indeterminado, caso tenha várias soluções.

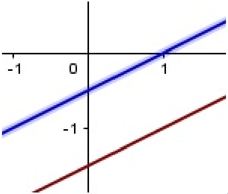
Lembrar que toda a equação de grau 1 com duas variáveis (x, y) representa uma reta.

Exemplos

O sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$
tem solução única $(1, -1)$, isto é, as duas retas intersetam-se nesse ponto.

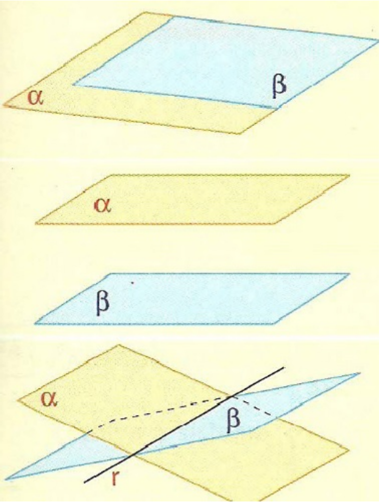


O sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
é impossível porque as duas retas não se intersetam.



As equações lineares com 3 variáveis, $ax + by + cz = d$, representam superfícies planas do espaço tridimensional.

Exercício



Indique o conjunto de interseção dos planos em cada uma das imagens ao lado.

Classifique o sistema de equações lineares correspondente a cada imagem.

Nota: Todo o sistema de equações lineares com mais de uma solução tem uma infinidade de soluções.

Definição

Dois sistemas de equações lineares dizem-se equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, as equações $-x-y=0$ e $2x+2y=0$ são equivalentes.

Exercício

Prove que o sistema homogéneo

$$\begin{cases} -x-y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$$

é indeterminado e indique o seu conjunto solução.

Um sistema homogéneo é sempre possível. Porquê?

Exemplo

O sistema $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ é impossível, porque as duas equações são incompatíveis.

Representação matricial de sistemas de equações lineares

As propriedades do cálculo matricial podem ser usadas na resolução de sistemas de equações lineares.

Seja um sistema com m equações lineares e n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Por definição de multiplicação de matrizes, podemos reescrever o sistema de equações na designada de forma matricial do sistema

$$AX = B.$$

Resolução de sistemas $AX = B$ via inversa de A

Dado o sistema $AX = B$ e se A^{-1} existe, então podemos efetuar:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Nota: Este método apenas se aplica se a matriz dos coeficientes for quadrada e invertível, isto é, só resolve sistemas de solução única.

Exemplo

Consideremos o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

Matricialmente, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Efetuando a inversa, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

A designada regra de Cramer usa o conceito de determinante e suas propriedades para resolver sistemas de equações lineares.

É especialmente útil para a resolução de sistemas determinados.

Regra de Cramer

Seja $AX = B$ um sistema de n equações lineares e n incógnitas. Se $|A| \neq 0$, então, o sistema tem solução única:

$$(x_1, x_2, \dots x_n) = (\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, \frac{|A_n|}{|A|}),$$

sendo as matrizes $A_i, \quad (i = 1, 2, \dots n)$ obtidas de A por substituição da i-ésima coluna por B.

Exemplo

Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes tem determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Pela Regra de Cramer, tem-se

$$x = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad y = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calcule z.

Este método de resolução de um sistema linear relaciona-se com a obtenção de sistemas equivalentes a este mas mais fácil de resolver.

Para tal podemos recorrer às seguintes operações elementares, as quais determinam sistemas equivalentes ao anterior:

1. A troca de duas equações de um sistema;
2. A multiplicação de uma equação por $k \in \mathbb{R} \mid \{0\}$;
3. A substituição de uma equação pela soma da mesma com um múltiplo escalar de outra equação outras duas.

Mas isto corresponde a considerar as operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada

$$[A|B]$$

do sistema $AX = B$.

Algoritmo

Dado um sistemas $AX = B$ de equações lineares:

1. Escrever a matriz ampliada do sistema;
2. Transformar a matriz ampliada numa matriz em escada por linhas, recorrendo a operações elementares;
3. Escrever o novo sistema correspondente a essa matriz;
4. Resolver o sistema.

Por exemplo, seja o sistema cuja matriz ampliada se segue e efetuemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right]$$

Regressando ao sistema $\left\{\begin{array}{r} 2x + y + 2z = 1 \\ -y + 4z = -3 \\ -4z = 8 \end{array}\right.$, resolvemos por substituição.

A característica de matrizes e a classificação de sistemas

Lembrar que a característica de uma matriz A, $car(A)$, corresponde ao número de linhas não nulas da matriz, depois de estar escrita em escada por linhas.

Teorema

Seja o sistema $AX = B$ com n incógnitas. Tem-se:

- O sistema é possível somente se $car(A) = car(A|B)$.
    i) Possível determinado **(PD)**, quando $car(A) = car(A|B) = n$
    ii) Possível indeterminado **(PI)**, quando $car(A) = car(A|B) < n$
- O sistema é impossível **(I)** quando $car(A) < car(A|B)$.

Por exemplo, o sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ -3x + 3y & = & 3 \end{array} \right.$ é impossível, porque

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right].$$

Na resolução de problemas traduzidos por sistemas de equações, por vezes convém considerar algumas incógnitas como parâmetros em função dos quais avaliamos esses sistemas.

O sistema a seguir não é linear se considerarmos z e α como incógnitas:

$$S: \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-y-z & = & 0 \\ x+2y+\alpha z & = & \beta \end{array} \right. .$$

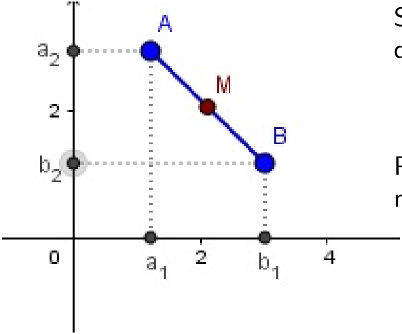
Podemos observar S como um sistema de equações lineares com incógnitas x, y e z e parâmetros α e β, em função dos quais classificamos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha & \beta \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha-4 & 2\beta-3 \end{array} \right]$$

Assim, concluímos:

- Se $\alpha \neq 2$, $car(A) = car(A|B) = n = 3$, logo S é PD.
- Se $\alpha = 2$ e $\beta = 3/2$, $car(A) = car(A|B) = 2 < n = 3$, logo S é PI.
- Se $\alpha = 2$ e $\beta \neq 3/2$, $car(A) < car(A|B)$, logo S é I.

No referencial cartesiano bidimensional, um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ fica determinado pela sua distância cada um dos eixos e pelo quadrante em que se encontra, isto é, pelas suas coordenadas cartesianas (x, y).



Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ dois pontos de $\mathbb{R}^2$. Lembrar que

$$\vec{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Pelo teorema de Pitágoras determinamos a distância de A a B:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

O ponto médio do segmento de reta $[AB]$ tem coordenadas

$$M = (\frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}).$$

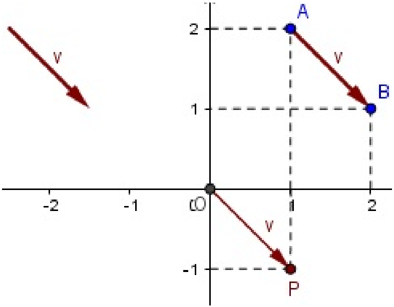
Definimos vetor através do seu comprimento direção e sentido.

Dado um vetor v e um ponto A, a soma $A+v$ corresponde a um ponto B, extremidade de v quando aplicado em A

Por exemplo, seja o vetor v da figura ao lado e seja $A=(1,2)\in\mathbb{R}^2$. Observamos que $A+v=B=(2,1)$, ou ainda

$$\vec{v}=\vec{AB}=B-A=(1,-1).$$

Notar também que $\vec{v}=\vec{OP}$ com $P=(1,-1)$ e $O=(0,0)$.



No sistema de coordenadas cartesianas, a cada ponto P associamos o vetor $\vec{OP}=P-O=P$ com as mesmas coordenadas de P.

Uma reta no plano cartesiano pode ser definida por:

- Dois pontos da reta;
- Um ponto da reta e o seu declive;
- Um ponto e um vetor diretor da reta.

Dados dois pontos fixos no plano, $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, a reta AB tem a direção do vetor

$$\vec{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (v_1, v_2)$$

e tem declive

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

A equação vetorial da reta AB é

$$(x, y) = (a_1, a_2) + k(v_1, v_2), \quad k \in \mathbb{R},$$

Da equação vetorial deduzimos a equação cartesiana

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

ou ainda podemos transformar na equação reduzida

$$y = \frac{v_2}{v_1} x + b.$$

Exemplo

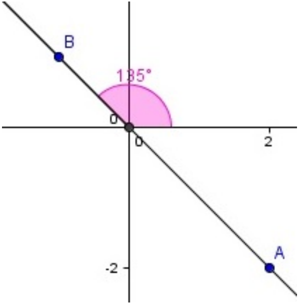
A equação vetorial da reta AB, com $A = (2, -2)$ e $B = (-1, 1)$, é dada por

$$(x, y) = (-1, 1) + k(3, -3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Por eliminação do parâmetro k, obtemos a equação reduzida

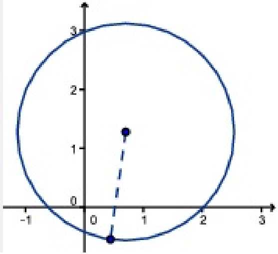
$$y = -x$$

Esta reta interseta o eixo Oy na origem e tem declive -1.



Circunferência é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, que se distanciam de um ponto $C = (c_1, c_2)$ (centro) uma dada medida r, isto é,

$$||\vec{CP}|| = r$$



Como $||\vec{CP}|| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$, surge assim a equação cartesiana da circunferência:

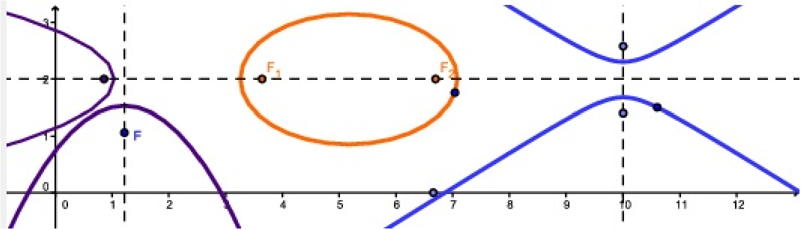
$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Exercício

Determine a equação cartesiana da circunferência que contém os pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (1, -2)$, sendo $\bar{AB}$ um dos seus diâmetros.

Em geometria, cónicas são as curvas determinadas pela interseção de um plano com um cone reto.

Essas curvas podem ser elipses, parábolas ou hipérboles.



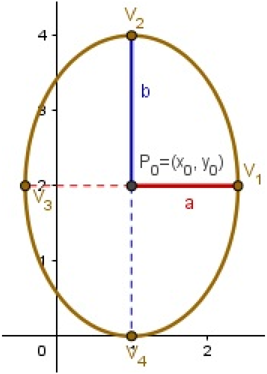
Vamos representar analiticamente as que têm eixos de simetria na direção de Oy ou de Ox.

Elipse é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tais que a soma das distâncias dos mesmos a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual à medida do seu eixo maior. Isto é, de acordo com a figura ao lado tem-se:

$$||\vec{F_1P}|| + ||\vec{F_2P}|| = 2a \qquad (1)$$

ou

$$||\vec{F_1P}|| + ||\vec{F_2P}|| = 2b \qquad (2)$$



Das equações vetoriais acima deduzimos a equação cartesiana:

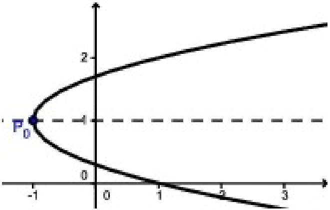
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde $P_0 = (x_0, y_0)$ representa o centro de simetria da elipse.

A equação cartesiana da parábola com vértice em $P_0 = (x_0, y_0)$ depende do seu eixo de simetria e de $k \in \mathbb{R}$.

$$(y - y_0)^2 = k(x - x_0) \qquad (3)$$

$$(x - x_0)^2 = k(y - y_0) \qquad (4)$$



A Equação (3) representa uma parábola com eixo de simetria horizontal, voltada para a direita se $k \in \mathbb{R}^+$; caso contrário está voltada para a esquerda.

A Equação (4) representa uma parábola com eixo de simetria vertical voltada para cima se $k \in \mathbb{R}^+$; caso contrário está voltada para baixo.

Exercício

Represente graficamente a parábola de equação $y^2 + 4x + 5 = 0$.

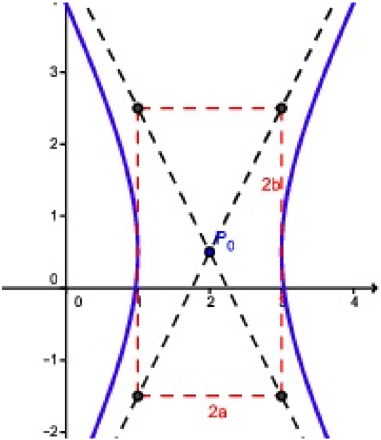
A equação cartesiana da Hipérbole com centro de simetria em $P_0 = (x_0, y_0)$ é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1,$$

conforme os vértices sejam
$V_1 = P_0 + (a, 0)$ e $V_2 = P_0 + (-a, 0)$
ou
$V_1 = P_0 + (0, b)$ e $V_2 = P_0 + (0, -b)$



Exercício

Represente graficamente a hipérbole de equação $4y^2 - x^2 + 4x - 8 = 0$.

Equação geral das cónicas

As cónicas são representadas por equações de segundo grau nas variáveis x e y,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A, B, \cdots, F \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

sendo A, B e C não simultaneamente nulos.

Exercício

Identifique as curvas de equação:

- $4x^2 + y^2 - 2y = 0$
- $2y^2 + 8y - 6x = 0$

Representamos elementos no espaço recorremos ao referencial cartesiano tridimensional $Oxyz$.

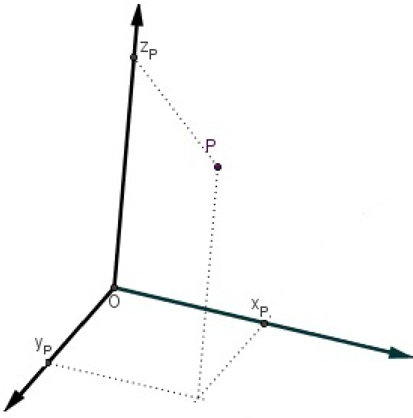
Por exemplo, dizer que um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ tem coordenadas cartesianas $(2,3,2)$, significa dizer que P se escreve como a combinação linear

$$P = 2i + 3j + 2k$$

dos vetores unitários

$$i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1),$$

orientados segundo os eixos do referencial, tal como a imagem sugere.



Consideremos, em $\mathbb{R}^3$, um ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ com um vetor $u = (u_1, u_2, u_3)$.

A soma $A + u$ é igual ao ponto $B = (b_1, b_2, b_3)$, tal que $\vec{AB} = u$.

Além disso, $\vec{u}$ tem comprimento (ou norma) igual à distância de A a B,

$$||u|| = d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

O ponto médio do segmento de reta $[AB]$ tem coordenadas

$$M = (\frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_3 + a_3}{2}).$$

Exemplo

A superfície esférica que contém $B = (-1, 0, 2)$ e cujo centro é $C = (0, -2, 4)$ tem raio $r = d(B, C) = 3$ e é definida pela equação cartesiana

$$x^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9.$$

- Dois vetores u e v dizem-se colineares se tiverem a mesma direção, isto é, se existir $k \in \mathbb{R} \mid \{0\}$, tal que $u = kv$;
- Dois vetores u e v dizem-se normais se quando aplicados no mesmo ponto determinam um ângulo reto.

Se u e v são colineares, denotamos por $u//v$;
Se u e v são normais, denotamos por $u \perp v$.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, os vetores $u = (2, -3, 1)$ e $v = (-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ são colineares, porque $u = -2v$.

Será que os vetores $u = (2, -3, 1)$ e $w = (3, 1, -3)$ de $\mathbb{R}^3$ são normais?

Produto interno ou produto escalar

Sejam u, v dois vetores de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Definimos produto interno usual ou produto escalar de u e v como o número real

$$u \bullet v = ||u|| \cdot ||v|| \cos(\hat{uv}).$$

Notar que o produto escalar $u \bullet v$ é igual a zero somente se $u = 0$ ou $v = 0$ (vetor nulo) ou u e v são normais.

Propriedades do produto escalar

Dados os vetores u, v e w e $k \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. $u \bullet v = v \bullet u$;
2. $u \bullet v = 0$ somente se $u = 0$ ou $v = 0$ ou $u \perp v$;
3. $k(u \bullet v) = ku \bullet v = u \bullet kv$;
4. $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$;

Produto escalar de vetores no plano cartesiano

Consideremos dois vetores u e v definidos pelas suas coordenadas cartesianas.

- Se $u, v \in \mathbb{R}^2$, então $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ e $u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2$;
- Se $u, v \in \mathbb{R}^3$, então $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Exemplo

O produto escalar dos vetores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (2, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ é o escalar

$$u \bullet v = 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) = -1$$

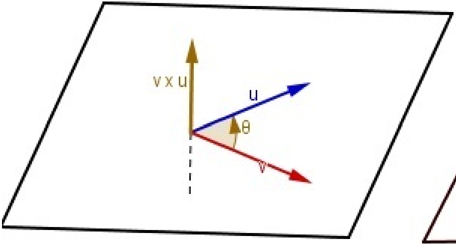
O produto escalar dos vetores $a = (3, -1)$ e $b = (2, 6)$ de $\mathbb{R}^2$ é o escalar

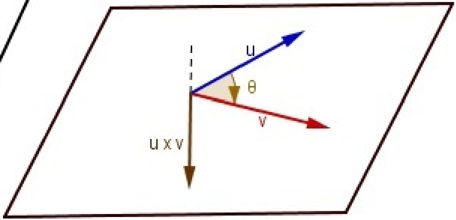
$$a \bullet b = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 0$$

Notar que a e b são vetores normais.

O produto vetorial ou produto externo de dois vetores $u, v \neq 0$ não colineares é o vetor $u \times v$, tal que:

1. $u \times v$ é perpendicular aos vetores u e v;
2. $||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v||| \, sen((u,\hat{\ } v))|$;
3. $u \times v$ tem sentido determinado pela mão direita (acompanhar com os dedos da mão direita, o movimento de rotação do vetor u para se aproximar de v e considerar o sentido do polegar).





Considerando n o vetor unitário na direção e sentido de $u \times v$, isto é, $n \perp u$ e $n \perp v$, tem-se:

$$u \times v = ||u|| \cdot ||v|| \, sen((u \hat{,} v))n.$$

No sistema cartesiano tridimensional, o produto vetorial de dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ é definido como

$$u \times v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2).$$

Trata-se de um vetor perpendicular aos vetores u e v e pode mais facilmente ser representado matricialmente como

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3)i - (u_1 v_3 - v_1 u_3)j + (u_1 v_2 - v_1 u_2)k.$$

Exemplo

$$(1, 2, -1) \times (2, 0, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -3, -4)$$

Propriedades

Sejam os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

1. $u \times v \times w = u \times (v \times w)$ (associativa);
2. $u \times v = -v \times u$ (anti-comutativa);
3. $u \times v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0 \vee (u \hat{,} v) = 0 \vee (u \hat{,} v) = 180$.

Notar que o produto vetorial de vetores colineares é igual ao vetor nulo.

Exemplo

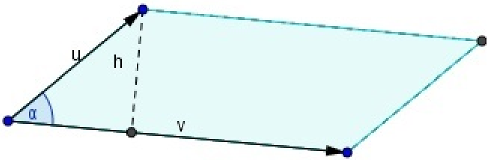
$$(1, -2, 3) \times (-2, 4, -6) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

porque os vetores $(1, -2, 3)$ e $(-2, 4, -6)$ são colineares.

De acordo com a definição de $u \times v$, determinamos que

$$||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \, sen(\angle(u, v)).$$

Este valor representa a área do paralelogramo determinado por u e v.



Com efeito, de acordo com a figura acima, a área do paralelogramo é dada por $A = ||v|| \cdot h$. Além disso, $||u|| \, sen(\angle(u, v)) = h$.

O produto misto de três vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, é o escalar determinado como

$$u \bullet (v \times w).$$

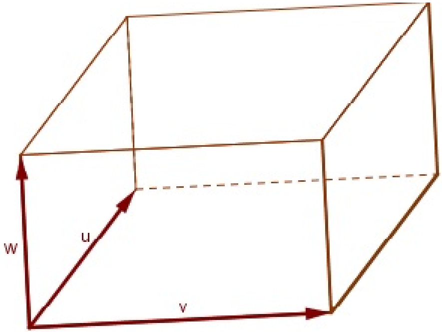
Uma forma prática para o seu cálculo é a seguinte:

$$u \bullet (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

O valor absoluto do produto misto

$$|u \bullet (v \times w)|$$

representa o volume do paralelepípedo definido pelos vectores u, v e w.



À semelhança da equação vetorial da reta no plano, também dados dois pontos $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, a reta AB é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço, tais que

$$P = A + k\vec{AB}, \quad \text{para qualquer} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Da equação vetorial da reta AB,

$$AB : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \quad k \in \mathbb{R}.$$

e eliminando o parâmetro k, obtemos a equação cartesiana:

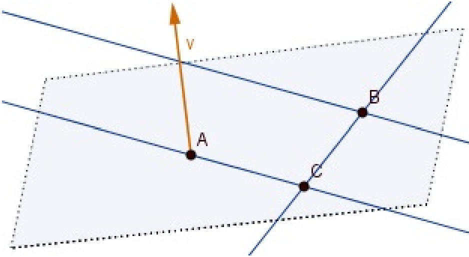
$$AB : \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}.$$

Exercício

Determine a equação vetorial e a equação cartesiana da reta AB, sendo $A = (-3, 1, 2)$ e $B = (-1, 2, -2)$.

Um plano no espaço pode ser definido por:

- Três pontos não colineares;
- Duas retas concorrentes;
- Duas retas paralelas;
- Um ponto e um vetor perpendicular ao plano.



Um plano que contém um ponto A e é perpendicular ao vetor v é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$, tais que

$$\vec{AP} \bullet v = 0.$$

Exemplo

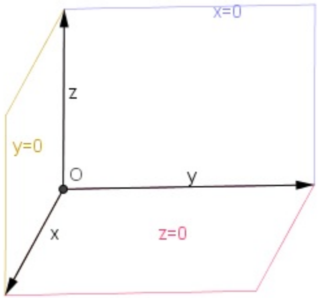
O plano que contém $A = (1, 0, 2)$ e é perpendicular a $v = (-1, 3, 2)$ tem equação $(x - 1, y, z - 2) \bullet (-1, 3, 2) = 0 \Leftrightarrow$
$-x + 1 + 3y + 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 2z - 3 = 0.$

No exemplo anterior, obtivemos a **equação geral** do plano, isto é, uma equação linear nas variáveis x, y, z,

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Em particular, as equações dos planos coordenados são as seguintes:

- $xOy : z = 0$;
- $xOz : y = 0$;
- $yOz : x = 0$.



No âmbito dos sistemas de equações lineares já referimos que dois planos podem ser paralelos (estritamente paralelos ou coincidentes) ou concorrentes (perpendiculares ou oblíquos).

Exemplo

Os planos definidos pelas equações $x - y + 2z = 0$ e $3x - 3y + 6z = 3$ são estritamente paralelos, porque não se intersetam e os vetores normais a um plano também são normais ao outro.

E quanto à posição relativa de três planos, o que poderá acontecer?

Exercício

Determine a posição relativa dos planos definidos pelas equações $x - 2y + z = 1$, $x + y = 3$ e $-2x + 4y - 2z = -2$.

Definição

Uma superfície quádrica é uma superfície, que em $\mathbb{R}^3$, é definida por uma equação polinomial de 2 grau em três variáveis,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde $A, B, \ldots, J$ são constantes reais.

Como exemplos de algumas superfícies de $\mathbb{R}^3$, são as geradas pela rotação de cónicas em torno de um eixo de simetria;

- Uma esfera é gerada por uma circunferência;
- Um elipsoide de revolução é gerado por uma elipse;
- Um paraboloide de revolução é gerado por uma parábola;
- Um hiperboloide de revolução é gerado por uma hipérbole.

Um **elipsoide** com centro em (x_0, y_0, z_0), tem **equação reduzida**

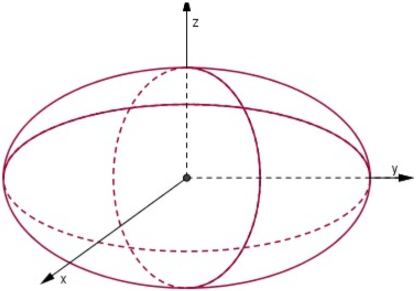
$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

A interseção desta superfície curva com planos paralelos aos planos coordenado ou é o conjunto vazio ou é uma elipse.

Por exemplo, $\mathcal{E} \cap x = x_0$ é a elipse

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

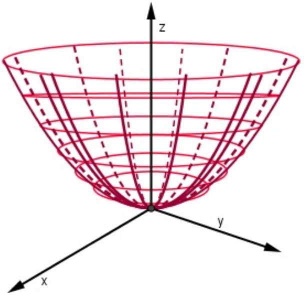
do plano yOz.



Notar que a equação do elipsoide representa uma superfície esférica quando $a = b = c$.

O **paraboloide elíptico** centrado na origem e ao longo de Oz, tem equação

$$\mathcal{P}_E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0$$



Notar que:

- $\mathcal{P}_E \cap x = 0$ é uma parábola;
- $\mathcal{P}_E \cap y = 0$ é uma parábola;
- $\mathcal{P}_E \cap z = 1$ é uma elipse.

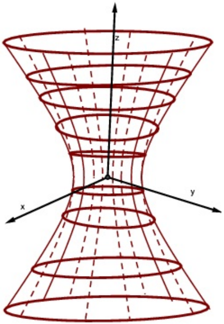
Além disso, se $c < 0$, o paraboloide fica voltado para baixo.

O **hiperboloide** da imagem abaixo tem equação

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad c > 0$$

Confira os seguintes factos:

- $\mathcal{H} \cap x = 0$ é uma hipérbole;
- $\mathcal{H} \cap y = 0$ é uma hipérbole;
- $\mathcal{H} \cap z = 0$ é uma elipse.



Exercício:

Determine o hiperboloide com eixo ao longo de Ox.

Definição

Um espaço vetorial real é um conjunto $V \neq \emptyset$ munido das operações adição e multiplicação escalar, tais que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades a seguir se verificam:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativa);
2. $u + v = v + u$ (comutativa)
3. Existe $0 \in V$, tal que $u + 0 = u$ (elemento neutro);
4. Existe $-u \in V$, tal que $-u + u = 0$ (simétrico);
5. $(a + b)v = av + bv$;
6. $a(u + v) = au + av$;
7. $(ab)v = a(bv)$;
8. $1v = v$.

Se na definição anterior considerarmos escalares complexos em vez de escalares reais, então V diz-se um espaço vetorial complexo.

Exemplos de espaços vetoriais reais:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;
2. O conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n;
3. O conjunto $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ dos vetores-linhas;
4. O conjunto $M_{1\times n}(\mathbb{R})$ dos vetores-colunas;
5. O conjunto $F(R) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ das funções reais de variável real;
6. O conjunto $P_n[\mathbb{R}]$ dos polinómios de grau inferior ou igual a n.

Definição

Dado um espaço vetorial V, dizemos que um subconjunto $W \subseteq V$ diferente do vazio é um subespaço vetorial de V, quando:

i) Para quaisquer $u, v \in W$, tem-se $u + v \in W$;

ii) Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $v \in W$, tem-se $av \in W$.

Um subespaço vetorial $S \subseteq V$ é um espaço vetorial.

Exemplo

O conjunto

$$W = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Com efeito, sejam os vetores $u = (u_1, 2u_1), v = (v_1, 2v_1) \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se:

i) $O = (0, 0) \in W$, logo $W \neq \emptyset$;

ii) $u + v = (u_1 + v_1, 2(u_1 + v_1)) \in W$;

iii) $au = (au_1, 2au_1) \in W$.

Todo o espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços:

- O conjunto formado somente pelo vetor nulo;
- O próprio V.

A estes subespaços chamamos subespaços triviais.

V poderá ter outros subespaços - os subespaços próprios.

Alguns subespaços próprios

1. O conjunto $\{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^2$;
2. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um subespaço próprio de $\mathbb{C}$;
3. O conjunto $S_n(\mathbb{R})$ das matrizes simétricas é um subespaço próprio do espaço $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas.

Exemplo

O conjunto $S = \{X \in M_{22}(\mathbb{R}) : det(X) = 0\}$ das matrizes singulares, não é um subespaço de $M_{22}(\mathbb{R})$. Com efeito,

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{B}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S, \quad \text{mas} \quad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \notin S.$$

Definição

Seja $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial V. Dizemos que um vetor v é combinação linear dos elementos de C, se existirem $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n.$$

Exemplo

O vetor $v = (-1, -2) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de $C = \{(1, 0), (1, -1)\}$, porque $v = -3(1, 0) + 2(1, -1)$.

Exercício

Prove que o vetor $v = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ não é combinação linear dos vetores $(1, 0, 2)$ e $(0, -1, 1)$.

Definição

Espaço gerado por um subconjunto S de um espaço vetorial V, que denotamos por $\langle S \rangle$, é o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S.

Se S é um conjunto finito então $\langle S \rangle$ diz-se finitamente gerado.

Exemplo

$$\begin{aligned}
\langle (1,2,3) \rangle &= \{k(1,2,3) : k \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(1k, 2k, 3k) : k \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) : x = 1k, y = 2k, z = 3k, k \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y/2 = z/3\}
\end{aligned}$$

O espaço vetorial acima é finitamente gerado, mas o conjunto de geradores não é único.

Como o vetor $(2,4,6)$ é combinação linear de $(1,2,3)$, então:

$$\langle (1,2,3) \rangle = \langle (1,2,3),(2,4,6) \rangle.$$

É relevante considerar a noção de dependência linear de um conjunto de vetores, relacionada com a existência de pelo menos um vetor que é combinação linear dos restantes.

Definições

1. Um conjunto $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V, diz-se linearmente dependente,(**LD**), se existirem $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos tais que

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \cdots + k_n v_n = 0. \tag{6}$$

2. Caso a Igualdade (6) se verifique apenas quando $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, então A diz-se um conjunto linearmente independente, (**LI**).

Exemplos

O conjunto $A = \{(1,2,-3),(-2,0,1),(0,4,-5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LD, porque o sistema homogéneo $k_1(1,2,-3) + k_2(-2,0,1) + k_3(0,4,-5) = (0,0,0)$ é indeterminado.

O conjunto $B = \{(1,2,-3),(-2,0,1),(0,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI, porque o sistema homogéneo $k_1(1,2,-3) + k_2(-2,0,1) + k_3(0,0,-1) = (0,0,0)$ tem a solução única $(0,0,0)$.

Definição

Um conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V, diz-se uma base desse espaço quando verifica as seguintes condições:

- B é linearmente independente;
- $\langle B \rangle = V$, isto é, o subespaço gerado por B é igual a V.

Base é o menor conjunto de vetores desse espaço que o gera.

Teorema

Quaisquer duas bases de um espaço vetorial finitamente gerado, têm sempre o mesmo número de vetores.

Definição

O número de vetores de qualquer base de um espaço vetorial finitamente gerado V, diz-se dimensão de V, $dim(V)$.

Exemplo

$A = \{(1,2),(0,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, porque é LI e para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existem escalares k_1, k_2 tais que

$$(x,y) = k_1(1,2) + k_2(0,-1).$$

De facto, $(x,y) = x(1,2) + (2x-y)(0,-1)$.

$\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2, significa que as bases de $\mathbb{R}^2$ são conjuntos LI de dois dos seus vetores.

Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Designamos por base canónica de $\mathbb{R}^2$ a base $C = \{(1,0),(0,1)\}$.

As coordenadas cartesianas dos elementos de $\mathbb{R}^2$ são os escalares (x, y) que escrevem esses elementos como combinação linear de C.

Por exemplo, $(3,5) = 3(1,0) + 5(0,1)$.

Naturalmente, a base canónica de $\mathbb{R}^3$ é definida pelo conjunto dos vetores unitários

$$C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

e qualquer ponto de coordenadas cartesianas (x, y, z) se escreve como combinação linear

$$x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Em geral, as coordenadas de $v \in V$ na base B, são os escalares que escrevem v como combinação linear dos vetores de B.

Exemplo

Seja $v = (2,5) \in \mathbb{R}^2$, o que significa $v = 2(1,0) + 5(0,1)$.
As coordenadas de v na base $A = \{(1,2),(0,-1)\}$ são

$$v_A = (2,-1),$$

porque $2(1,2) - 1(0,-1) = (2,5)$.

Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Tem-se:

- A interseção $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V.
- A soma $W_1 + W_2 = \{v : v = w_1 + w_2, \quad w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ é um subespaço de V.

Além disso, se W_1 e W_2 são finitamente gerados, então

$$dim(W_1 + W_2) = dim W_1 + dim W_2 - dim(W_1 \cap W_2).$$

Exemplo

Seja $V = M_{22}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e sejam os subespaços

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{e} \quad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Então,

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad S_1 + S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Além disso,

$$dim(S_1) = dim(S_2) = 2, \quad dim(S_1 \cap S_2) = 1, \quad \text{e} \quad dim(S_1 + S_2) = 3$$

Observamos que, $dimS_1 + dimS_2 = dim(S_1 + S_2) + dim(S_1 \cap S_2)$.

Seja um espaço vetorial E e sejam $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ duas das suas bases.

As coordenadas de qualquer $v \in E$ dependem da base considerada. As combinações lineares

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n \quad \text{e} \quad v = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_n w_n, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

significam

$$v_A = (x_1, x_2, \dots x_n) \quad \text{e} \quad v_B = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Podemos, em particular, escrever os vetores w_i de B na base A:

$$\begin{cases} w_1 & = & a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{n1} v_n \\ w_2 & = & a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{n2} v_n \\ \dots & & \\ w_n & = & a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{nn} v_n \end{cases}$$

Então,

$$v_B = y_1(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{n1} v_n) + \cdots + y_n(a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{nn} v_n)$$

Associando os termos em v_i, tem-se:

$$v_B = (y_1 a_{11} + \cdots + y_n a_{1n})v_1 + \cdots + (y_1 a_{n1} + \cdots + y_n a_{nn})v_n$$

Como as coordenadas em relação a uma base são únicas, tem-se:

$$y_1 a_{11} + \cdots + y_n a_{1n} = x_1, \quad \cdots, \quad y_1 a_{n1} + \cdots + y_n a_{nn} v_n = x_n.$$

Matricialmente, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Isto é,

$$P_A^B v_B = v_A$$

sendo P_A^B a matriz mudança da base A para a base B.

Notar que as colunas de P_A^B correspondem aos escalares que escrevem cada vetor de B como combinação linear de A.

Exemplo

Sejam $A = \{(1,1),(1,0)\}$ e $B = \{(1,2),(-4,-3)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. A matriz mudança de base de A para B é a matriz

$$P_A^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (1,2) & = & a_{11}(1,1) + a_{21}(1,0) \\ (-4,-3) & = & a_{12}(1,1) + a_{22}(1,0) \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, tem-se $P_A^B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Em particular, seja $v = (0,5)$. Então $v_A = (5,-5)$, $v_B = (4,1)$ e

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

significa que $P_A^B v_B = v_A$.

Matriz mudança de base como um produto de matrizes

Por exemplo, se $v = (2,3)$ significa que $v = 2(1,0) + 3(0,1)$ (combinação linear dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^2$). Além disso:

- v na base $A = \{(3,1),(1,-2)\}$ tem coordenadas $v_A = (1,-1)$;
- v na base $B = \{(1,-1),(2,1)\}$ tem coordenadas $v_B = (-\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$.

Observar que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot v_A = v \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot v_B = v$$

Relacionando estas duas igualdades, obtemos,

$$v_A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot v_B$$

Como $v_A = P_A^B v_B$, concluímos que

$$P_A^B = A^{-1} \cdot B$$

sendo $A = [a_{i,j}]_{2\times 2}$ e $B = [b_{i,j}]_{2\times 2}$ as matrizes colunas são os vetores das bases A e B, respetivamente.

Em geral, dadas duas bases A e B de um espaço vetorial V de dimensão n, podemos considerar as matrizes

$$A = [a_{i,j}]_{n \times n} \quad \text{e} \quad B = [b_{i,j}]_{n \times n}$$

cujas colunas são os vetores das bases A e B, respetivamente. Então, podemos calcular a matriz mudança de base P_A^B como o produto de duas matrizes, isto é:

$$P_A^B = A^{-1} \cdot B$$

Exercício

Considere $v = (2, 3, -1)$ e sejam $A = \{(2, 1, -1), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$ e $B\{(0, 1, -1), (1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$.

1. Determine v_B
2. Calcule a matriz mudança de base, da base A para a base B.
3. Verifique que $v_A = P_A^B v_B$

As matrizes mudança de base são sempre invertíveis e verificam-se as seguintes propriedades:

Propriedades

Se A e B são bases de um espaço vetorial E de dimensão n, então:

1. Dado $v \in E$, tem-se $[v]_A = P_A^B \cdot [v]_B$;
2. Dado $v \in E$, tem-se $[v]_B = (P_A^B)^{-1} \cdot [v]_A$;
3. $(P_A^B)^{-1} = P_B^A$;
4. $P_C^B = P_A^B \cdot P_C^A$.

Exemplo

Sejam as bases $A = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B = \{(1,2),(-4,-3)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Então:

$$P_A^B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_B^A = (P_A^B)^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Nota: As colunas de P_A^B são os vetores de B, porque A é a base canónica.

Definição

Espaço euclidiano é qualquer espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno.

A operação produto interno induz uma métrica, isto é, determina o comprimento de cada vetor v do espaço como $|v| = \sqrt{v \bullet v}$.

Exemplo

O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é um espaço euclidiano, por se tratar de um vetorial real de dimensão finita e estar munido do produto interno usual definido por

$$(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

que determina o comprimento de cada vetor $v = (v_1, v_2)$ como

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Definição

Uma base $A = \{v_1, v_2, v_n\}$ de um espaço euclidiano E diz-se ortogonal se $v_i \bullet v_j = 0$, para quaisquer vetores $v_i, v_j \in A$, tal que $i \neq j$.

São exemplos de bases ortonornais as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, porque os seu vetores são ortogonais e são unitários.

Já observámos que uma matriz ortogonal M tem inversa igual à sua transposta. Além disso, o determinante de M é 1 ou -1.

Um conceito alternativo de matriz ortogonal é o seguinte:

Propriedade

Uma matriz é ortogonal somente se os seus vetores coluna (ou linha) formam uma base ortonormal.

As designadas matrizes de rotação são matrizes ortogonais.

A rotação em torno da origem de um dado ângulo de um espaço vetorial é uma aplicação que permite rodar os elementos do espaço desse ângulo, preservando a ortonormalidade.

Por exemplo, a rotação do sistema cartesiano xOy de um ângulo θ em torno da origem faz-se através da matriz:

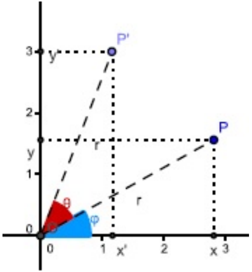
$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathit{sen}(\theta) \\ \mathit{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

Isto é, a matriz mudança de base R transforma $P \in \mathbb{R}^2$ em $P' \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$P' = RP.$$

Com efeito, de acordo com a figura ao lado, consideremos o ponto $P = (x, y)$. As coordenadas polares (r, φ) de P determinam

$$x = r\cos\varphi \quad \text{e} \quad y = r\,sen(\varphi).$$



A rotação de P de um ângulo de amplitude θ determina o ponto $P' = (x', y')$, tal que

$$\begin{cases} x' = r\cos(\varphi+\theta) \\ y' = r\,sen(\varphi+\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = r\cos(\varphi)\cos(\theta) - r\,sen(\varphi)\,sen(\theta) \\ y' = r\cos(\varphi)\,sen(\theta) + r\,sen(\varphi)\cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\,sen(\theta) \\ y' = x\,sen(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, R transforma P em P'.

Matrizes de rotação / matriz mudança de base

A matriz de rotação

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathit{sen}(\theta) \\ \mathit{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

é ortogonal e as suas linhas (ou colunas) correspondem a vetores ortonormais que definem uma base de $\mathbb{R}^2$.

Também a matriz de rotação do sistema tridimensional, em torno do eixo Ox,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathit{sen}(\theta) \\ 0 & \mathit{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

determina uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Observe que o conjunto dos vetores linha são ortonormais, o mesmo acontecendo aos vetores coluna.

Seja E um espaço vetorial munido de produto interno. Como determinar as coordenadas de vetores de E em relação a bases ortogonais?

Propriedade

Se $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é uma *base ortonormal* de E, então para qualquer $v \in E$ temos

$$v = (v \bullet w_1)w_1 + (v \bullet w_2)w_2 \cdots + (v \bullet w_n)w_n.$$

Teorema

Seja $A = \{w_1, w_2, \dots, w_r\} \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $w_i \bullet v_j = 0$, para $i \neq j$. Então:

1. A é linearmente independente;
2. Se $v \in \langle A \rangle$, então $v = k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_r w_r$, com

$$k_i = \frac{v \bullet w_i}{|w_i|^2}.$$

Aos escalares

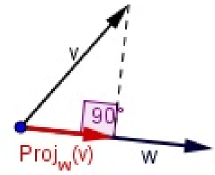
$$k_i = \frac{v \bullet w_i}{|w_i|^2}$$

chamamos coeficientes de Fourier de v em relação a w_i.

Projeção ortogonal de um vetor sobre outro

A projeção ortogonal de um vetor v sobre o vetor $w \neq 0$ é o múltiplo escalar de w,

$$proj_w(v) = \frac{v \bullet w}{|w|^2} w$$



Projeção ortogonal de um vetor $v \in E$ num subespaço W

Sejam E um espaço euclidiano, W um subespaço de E e $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ uma base ortogonal de W. Então

$$proj_W(v) = \frac{v \bullet w_1}{|w_1|^2} w_1 + \frac{v \bullet w_2}{|w_2|^2} w_2 + \cdots + \frac{v \bullet w_n}{|w_n|^2} w_n.$$

Exemplo

Sejam as bases ortogonais $B = \{(1,0,\sqrt{3}),(0,1,0),(-\sqrt{3},0,1)\}$ e $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $v = (1,2,3)$. Então:

$$proj_B(1,2,3) = k_1(1,0,\sqrt{3}) + k_2(0,1,0) + k_3(-\sqrt{3},0,1), \quad \text{com}$$

$$k_1 = \frac{(1,2,3)\bullet(1,0,\sqrt{3})}{4}, k_2 = (1,2,3)\bullet(0,1,0), k_3 = \frac{(1,2,3)\bullet(-\sqrt{3},0,1)}{4}$$

Observar que $proj_C(1,2,3) = (1,2,3)$.

Teorema da melhor aproximação

Sejam E um espaço euclidiano e W um subespaço de E. Se $v \in E$ tal que $v \notin W$ então o vetor $proj_w(v)$ é a melhor aproximação de v em W. Isto é,

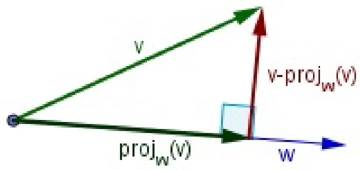
$$||v - proj_w(v)|| < ||v - w||, \quad \text{para qualquer} \quad w \in W.$$

Vetor ortogonal a um conjunto de vetores ortogonais

Sejam $w \in E \mid \{0\}$ e $v \in E$. Então

$$v' = v - \frac{v \bullet w}{|w|^2} w$$

é ortogonal a w.



Teorema

Seja $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ um conjunto ortogonal de vetores do subespaço $W \subset E$ e seja $v \in E$. Então, os coeficientes de Fourier

$$k_i = \frac{v \bullet w_i}{|w_i|^2}$$

são únicos, tais que

$$v' = v - k_1 w_1 - k_2 w_2 - \cdots - k_r w_r$$

é ortogonal a cada um dos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_r$.

O teorema anterior permite-nos transformar qualquer base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um dado espaço vetorial E em outra base ortogonal $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{|w_1|^2} w_1 \\
w_3 &= v_3 - \frac{v_3 \bullet w_1}{|w_1|^2} w_1 - \frac{v_3 \bullet w_2}{|w_2|^2} w_2 \\
&\vdots \\
w_n &= v_n - \frac{v_n \bullet w_1}{|w_1|^2} w_1 - \frac{v_n \bullet w_2}{|w_2|^2} w_2 - \cdots - \frac{v_n \bullet w_{n-1}}{|w_{n-1}|^2} w_{n-1}
\end{aligned}$$

Este método é conhecido como o algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Seja o subespaço $S = \langle (1,1,1,1), (3,3,-1,1), (-2,0,6,8) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ de dimensão 3.

Determinamos uma base ortogonal $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ de S, fazendo:

$$w_1 = (1,1,1,1);$$

$$w_2 = (3,3,-1,1) - \frac{(3,3,-1,1) \bullet (1,1,1,1)}{|(1,1,1,1)|^2}(1,1,1,1);$$

$$w_3 = (-2,0,6,8) - \frac{(-2,0,6,8) \bullet (1,1,1,1)}{|(1,1,1,1)|^2}(1,1,1,1) - \frac{(-2,0,6,8) \bullet w_2}{|w_2|^2} w_2.$$

Efetuando os cálculos, tem-se

$$C = \{(1,1,1,1), (3/2, 3/2, -5/2, -1/2), (-2,0,-2,4)\}.$$

O processo de Gram-Schmidt conduz à fatorização de matrizes, o que permite a resolução de sistemas de equações lineares grandes, como aqueles que ocorrem na Astrofísica.

Este processo também determina a seguinte propriedade:

Propriedade

Todo o espaço vetorial munido de produto interno possui uma base ortonormal.

Exercício

Transforme a base $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ numa base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Exercício

Determine uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$.

Sejam v um vetor do espaço euclidiano E e seja W um subespaço de E. Dizemos que v é ortogonal a W se v é ortogonal a cada vetor de W.

O conjunto de todos os vetores de E que são ortogonais a W diz-se complemento ortogonal de W e é denotado por $W^\perp$.

Exemplo

Seja $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja W o plano de equação $x + y - z = 0$.

Observamos que $W = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 2

O vetor $v = (1, 1, -1)$ é ortogonal ao plano W. Além disso,

$$W^\perp = \{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício

Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ ortogonal ao subespaço $S = \{(x, y, z) : x = -z \wedge y = 2z\}$.

Propriedades

Seja W um subespaço de um espaço euclidiano E. Então:

1. $W^\perp$ é um subespaço de E;
2. $(W^\perp)^\perp = W$;
3. $dim(W^\perp) + dim(W) = dim(E)$;
4. $W \oplus W^\perp = E$, tal que $W \cup W^\perp = E$ e $W \cap W^\perp = \{0\}$;

A soma direta,

$$W \oplus W^\perp = E,$$

significa que $\forall v \in E, \quad v = w + w', \quad \text{com} \quad w \in W, w' \in W^\perp$.

Teorema

Sejam E um espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de E.

Qualquer vetor $v \in E$ pode ser expresso de maneira única como:

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{tal que} \quad v_1 = proj_W(v) \in W \quad \text{e} \quad v_2 = proj_{W^{\perp}}(v) \in W^{\perp}.$$

Exemplo

Sejam o subespaço $W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ e $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Tem-se v_1 igual a

$$\begin{aligned} proj_W(v) &= \frac{v \bullet w_1}{|w_1|^2} w_1 + \frac{v \bullet w_2}{|w_2|^2} w_2 \\ &= (1, 1, 1) \bullet (1, 0, 0)(1, 0, 0) + (1, 1, 1) \bullet (0, 1, 0)(0, 1, 0) \\ &= (1, 1, 0) \end{aligned}$$

Tem-se também
$v_2 = v - proj_W(v) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1) \in W^{\perp}$

Definição

Uma aplicação $T : E \to V$ de um espaço vetorial E em outro espaço vetorial V é linear que verifica as propriedades da linearidade a seguir:

i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para quaisquer $x, y \in E$;

ii) $T(kx) = kT(x)$, para quaisquer $x \in E$ e $k \in \mathbb{R}$.

A noção de aplicação linear pressupõe que os espaços E e V tenham o mesmo universo de escalares, que nós consideramos ser $\mathbb{R}$.

Uma transformação linear também se diz um homomorfismo.

Se a aplicação for bijetiva (injetiva e sobrejetiva), então diz-se isomorfismo.

Exemplos

a) A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma das transformações lineares mais simples. De facto, $f(x+y) = a(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(kx) = a(kx) = kf(x)$.

b) A função quadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = 3x^2$, não é linear porque $g(x+y) = 3(x+y)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 6xy \neq g(x) + g(y)$.

Propriedades das aplicações lineares

Seja $T : E \to V$ uma aplicação linear do espaço E em V. Tem-se:

1. $T(0_E) = 0_V$;
2. $T(-v) = -T(v)$, para qualquer $v \in E$;
3. Se $v = \sum_{i=1}^{n}(k_i v_i)$, então $T(v) = \sum_{i=1}^{n}(k_i T(v_i))$ $\quad (v_i \in E$ e $k_i \in \mathbb{R})$.

Consideremos a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$f(1,0,-1) = (1,-1), f(2,0,1) = (2,1), f(0,-1,1) = (0,2),$$

sendo $B = \{(1,0,-1),(2,0,1),(0,-1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

Pelas propriedades da linearidade de f, podemos calcular $f(v)$, para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$.

Por exemplo, se $v = (8,2,-1)$ então $v_B = (2,3,-2)$, porque $2(1,0,-1) + 3(2,0,1) - 2(0,-1,1) = (8,2,-1)$

Pela linearidade de f, obtemos:

$$\begin{aligned} f(8,2,-1) &= 2f(1,0,-1) + 3f(2,0,1) - 2f(0,-1,1) \\ &= 2(1,-1) + 3(2,1) - 2(0,2) \\ &= (8,-3) \end{aligned}$$

Exercício

Calcule a expressão analítica que define a função f acima.

Podemos definir uma aplicação linear através das imagens dos vetores de uma base $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ do espaço de partida.

Com efeito, qualquer $v \in V$ tem imagem através de f dada por

$$f(v) = f(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + \cdots + k_n f(v_n)$$

Exemplo

Seja $A = \{(1,2), (0,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $f(1,2) = (2,3,1)$ e $f(0,-1) = (1,0,3)$.

Para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) = k_1(1,2) + k_2(0,-1) \Leftrightarrow k_1 = x \quad \text{e} \quad k_2 = 2x - y.$$

Então tem-se

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,2) + (2x-y)(0,-1) = xf(1,2) + (2x-y)f(0,-1) \\ &= x(2,3,1) + (2x-y)(1,0,3) = (4x-y, 3x, 7x-3y). \end{aligned}$$

Sejam V e E espaços vetoriais e $f : V \to E$ e $g : V \to E$ aplicações lineares. Então também são aplicações lineares as funções seguintes:

- $f + g$ definida por $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$;
- kf definida por $(kf)(v) = kf(v)$;
- $f \circ g$ definida por $(f \circ g)(v) = (f[g(v)])$, caso $g(V) \in D_f$.

Exemplo

Sejam as aplicações lineares:

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (y, x-z) \end{array} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (x+y, x-2y) \end{array}$$

A aplicação composta $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$g(f(x,y,z)) = g(f(x,y,z)) = g(y, x-z) = (x+y-z, -2x+y+2z)$$

e é linear, tal com são f e g.

Notar que $f \circ g$ não existe.

Observamos que numa aplicação linear as coordenadas do vetor imagem são combinação linear das coordenadas do vetor objeto.

Por exemplo, uma aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tem imagem $f(x, y, z) = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ dada por

$$(u, v) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{33}z).$$

Tal corresponde à seguinte representação matricial de f:

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Especificamente, se $f(x, y, z) = (x - y, 2y + z)$, então

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, quando consideradas as bases canónicas dos espaços vetoriais envolvidos, define a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} f_A\colon & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \longrightarrow & A\cdot v \end{array}$$

Exemplo

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ induz $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$f_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z+3w \\ -y+z \\ x-z+2w \end{bmatrix}.$$

Isto é, $f_A(x,y,z,w) = (x+2z+3w, -y+z, x-z+2w)$.

Seja,a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x, y, x - y)$.

Observamos que, relativamente às bases canónicas $C_{\mathbb{R}^2}$ e $C_{\mathbb{R}^3}$ dos respetivos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, se tem:
$T(1, 0) = (1, 0, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$
e
$T(0, 1) = (0, 1, -1) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) - 1 \cdot (0, 0, 1)$. Então, a matriz

$$A = \left[\begin{array}{cc} T(1,0)_{C_{\mathbb{R}^3}} & T(0,1)_{C_{\mathbb{R}^3}} \end{array} \right].$$

representa T, quando são consideradas as bases canónicas dos espaços de partida e de chegada da aplicação.

Também, considerando as bases não canónicas $B = \{(1, 2), (3, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $D = \{(1, 2, 0), (2, -3, 1), (0, -1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, se tem que

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc} T(1,2)_D & T(3,5)_D \end{array} \right]$$

representa T, quando consideradas as bases B em $\mathbb{R}^2$ e D em $\mathbb{R}^3$.

Matrizes de transformações lineares relativas a bases dadas

Atendendo a que
$T(1,2) = (1,2,-1) = 2/3 \cdot (1,2,0) + 1/6 \cdot (2,-3,1) - 7/6 \cdot (0,-1,1)$
e
$T(3,5) = (3,5,-2) = 2 \cdot (1,2,0) + 1/2 \cdot (2,-3,1) - 5/2 \cdot (0,-1,1)$,
então,

$$T(x,y) = (x,y,x-y) \quad \text{é representada por} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 2 \\ 1/6 & 1/2 \\ -7/6 & -5/2 \end{bmatrix},$$

quando consideramos em $\mathbb{R}^2$ a base $B = \{(1,2),(3,5)\}$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $D = \{(1,2,0),(2,-3,1),(0,-1,1)\}$.

A diagrama a seguir traduz a situação:

$$\begin{tikzcd} C_{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "A"] & C_{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "M"] \\ B \arrow[u, "N"] \arrow[r, "A_1"'] & D \end{tikzcd}$$

De facto,

$$A_1 = MAN \quad \text{com} \quad N = P^{B}_{C_{\mathbb{R}^2}} \quad \text{e} \quad M = P^{C_{\mathbb{R}^3}}_{D}.$$

Lembrar que as colunas de $P^{B}_{C_{\mathbb{R}^2}}$ são os vetores de B e M é a inversa da matriz cujas colunas são os vetores de D.

Exemplo

Seja a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida pela matriz,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

quando considerada a base $B = \{(1,0,1),(0,-1,0),(0,0,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Determinemos a matriz A_1 que representa f considerando a base B de $\mathbb{R}^3$ e a base $D = \{(1,2),(-1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$

De acordo com o diagrama abaixo, temos:

$$A_1 = MA \quad \text{com} \quad M = P_D^{C_{\mathbb{R}^2}}.$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "A_1"'] & C_{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "M"] \\ & D \end{tikzcd}$$

Assim,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 7/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

Definição

Seja a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, isto é, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ tem entradas reais. Definimos como subespaços fundamentais de A:

- O espaço dos vetores coluna de A, $Col(A)$.
- O espaço dos vetores linha de A, $Col(A^T)$.
- O espaço nulo (ou núcleo de f_A), $Nuc(f_A) = \{X \in \mathbb{R}^m : AX = 0\}$.
- O espaço nulo à esquerda de A, $Nuc(A^T) = \{X \in \mathbb{R}^n : A^T X = 0\}$.

Definição

Dada uma aplicação linear $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ao conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^m$ que são imagem de algum vetor de $\mathbb{R}^n$ chamamos conjunto imagem (ou contradomínio) de f_A. Isto é,

$$Im(f_A) = \{AX \in \mathbb{R}^m : X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Calculemos o núcleo e o conjunto imagem da aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & (x-y,z) \end{array}$$

$Nuc(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1,x_2,x_3) = (0,0)\} = \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$

De facto, $f(x_1,x_2,x_3) = (0,0) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, x_3) = (0,0) \Leftrightarrow$
$x_1 - x_2 = 0 \wedge x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0.$

Quanto à imagem de f,

$$Im(f) = \{f(v) \in \mathbb{R}^2 : v \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^2.$$

Com efeito, $f(v_1,v_2,v_3) = (v_1 - v_2, v_3) = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$, porque a diferença de números reais é um número real.

Seja a aplicação linear $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Então:

1. Se $Nuc(f_A) = \{0_E\}$, então f_A é uma aplicação injetiva.
2. Se $Im(f_A) = \mathbb{R}^m$, então f_A é uma aplicação sobrejetiva.
3. $dim(Nuc(f_A)) + dim(Im(f_A)) = n$.

Exemplo

A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y + z)$, tem

$$Nuc(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0)\} = \{(4z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Trata-se de um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1. Como o espaço de partida de f tem dimensão 3, então

$$1 + dim(f(\mathbb{R}^3)) = 3 \Leftrightarrow dim(f(\mathbb{R}^3)) = 2.$$

Subespaços de uma matriz e complemento ortogonal

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Tem-se:

- O espaço núcleo de f_A é igual ao complemento ortogonal do espaço linha, $Col(A^T)$, e ambos estão contidos em $\mathbb{R}^n$.
- espaço coluna de A, $Col(A)$, é o complemento ortogonal ao espaço nulo de A^T, estando ambos contidos em $\mathbb{R}^m$.

Isto é,

$$Nuc(f_A) = (Col(A^T))^\perp \quad \text{e} \quad (Col(A))^\perp = Nuc(f_{A^T})$$

Propriedades

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, se $dim(Col(A)) = r$, então:

1. $dim(Col(A^T)) = r$;
2. $dim(Nuc(f_A)) = n - r$;

Definições

1. Uma transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, cujos espaços de partida e de chegada são iguais, diz-se operador linear.
2. Um operador linear f diz-se simétrico se a matriz que o representa numa base ortonormal é simétrica (igual à sua transposta).

Exemplo

O operador linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x, y, z) = (2x - y + 2z, -x - 3y + 5z, 2x + 5y + 3z)$$

é simétrico, porque

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

é simétrica e representa f na base canónica $C_{\mathbb{R}^3}$.

- O operador linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que determina a projeção de vetores de $\mathbb{R}^2$ sobre a reta $r : y = -2x$ é definido por

$$f(v) = pro_u v = \frac{u \bullet v}{|u|^2} u,$$

onde $u = (1, -2)$ é a direção de r. Isto é,

$$f(x, y) = \frac{x - 2y}{5}(1, -2) = (\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5}).$$

Notar que f não é simétrico.

- A ampliação/redução de um fator k em $\mathbb{R}^3$ é o operador linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido na base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Naturalmente, a função identidade $I_E : E \to E$ sobre um espaço vetorial E é definida por $f(v) = v$.

Definição

Uma aplicação linear $f : E \to E$ diz-se invertível se existir uma aplicação linear $g : E \to E$, tal que

$$f \circ g = g \circ f = I_E$$

e escrevemos $f^{-1} = g$.

Propriedades

Seja $f : E \to E$ um operador linear sobre o espaço vetorial E.

- Se $f : E \to E$ é bijetiva (isomorfismo), então f é invertível e f^{-1} também é uma aplicação linear isomorfa.
- A aplicação $f : E \to E$ é invertível somente se $det([A]) \neq 0$, sendo A uma matriz que representa f numa qualquer base de E.

Lembrar que, uma função admite inversa quando é injetiva.
Sendo f um operador linear, f é invertível se o núcleo de f se reduzir ao espaço nulo, $Nuc(f) = \{0_E\}$.

Exemplo

A transformação linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(x, y, z) = (x - 2y, y + 3z, x + y + z),$$

é invertível, porque a matriz que lhe está associada,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Observar que $Nuc(g) = \{(0, 0, 0)\}$.

Como outros exemplos de operadores invertíveis, temos os operadores ortogonais, isto é, operadores que quando consideradas bases ortonormais são representados por matrizes A ortogonais $(A^{-1} = A^T)$, Dado um operador linear $f : E \to E$, vamos determinar que vetores se transformam num múltiplo deles próprios, isto é,

$$f(v) = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definições

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $f : E \to E$ um operador linear.

- Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio ou autovalor de f se existir um vetor $v \in E \mid \{0\}$, tal que $f(v) = \lambda v$.
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de f e v é qualquer vetor tal que $f(v) = \lambda v$, então dizemos que v é um autovetor ou vetor próprio de f associado a λ.

Exemplo

Seja o operador linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $f(x, y) = (x, -y)$. Como $f(x, 0) = (x, 0)$, então os vetores $(x, 0)$ são vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

Seja λ um valor próprio do operador linear $f : E \to E$. O conjunto nulo de $f(v) - \lambda v$, isto é,

$$E_\lambda = \{v \in E : f(v) - \lambda v = 0\}$$

é um subespaço de E , que designamos de subespaço próprio de f associado a λ.

Notar que λ é um autovalor de f somente se o operador $f - \lambda I$ é não injetivo. Como uma consequência, tem-se:

Teorema

Seja o operador linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definido na base canónica de $\mathbb{R}^n$ pela matriz $[f]_{n \times n}$. Então λ é autovalor de f somente se

$$det([f] - \lambda I_n) = 0.$$

Ao polinómio $det(f - \lambda I)$ na variável λ, chamamos polinómio caraterístico de f e as soluções da equação caraterística $det(f - \lambda I) = 0$ são os valores próprios de f.

Seja o operador linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que definimos sobre a base $C_{\mathbb{R}^2}$ por

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A equação caraterística

$$det(f - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}) = 0,$$

determina os valores próprios $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$.

O espaço próprio associados a $\lambda = 1$ é dado por

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 : f(v) = v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, -y) = (x, y)\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

O espaço próprio associados a $\lambda = -1$ é dado por

$$E_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, -y) = (-x, -y)\} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Notar que $det([f])$ é igual ao produto dos seus valores próprios.

Algoritmo para o cálculo de valores e espaços próprios

Teorema

O produto dos valores próprios de uma matriz é igual ao seu determinante.

Para o cálculo dos valores e vectores próprios de uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, efetuamos:

Algoritmo

- Resolver a equação característica $|A - \lambda I| = 0$.
- Para cada solução λ_i de $|A - \lambda I| = 0$, determinar o núcleo do operador associado a $A - \lambda_i I$, isto é, calcular

$$E_{\lambda_i} = \{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i)v = 0\}.$$

Exercício

Calcule os valores e os espaços próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplicidade algébrica e geométrica de um valor próprio

Definições

1. A multiplicidade de cada valor próprio no polinómio característico diz-se multiplicidade algébrica do valor próprio.
2. A dimensão do subespaço próprio associado a um valor próprio, diz-se multiplicidade geométrica do valor próprio.

Exemplo

A multiplicidade algébrica dos valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

corresponde à multiplicidade das raízes de $|A - \lambda I| = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.
Observamos que $\lambda = 1$ tem multiplicidade 2 e $\lambda = 2$ é raíz simples.

Determine a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

Observamos que valores próprios distintos estão associados a espaços próprios distintos.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinamos os valores próprios de A, efetuando

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 4.$$

O espaço próprio associado a $\lambda = 1$ é dado por

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - I)v = 0\} = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Como $dim(E_1) = 2$, então 1 tem multiplicidade geométrica 2.

Tal permite-nos determinar em E_1 dois vetores próprios linearmente independentes

Definição

Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ dizem-se semelhantes se existir uma matriz invertível $P = [p_{ij}]_{n \times n}$, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Notar que se Se A e B são semelhantes, então $|A| = |B|$.

A relação de semelhança é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva). Além disso, se A e B são matrizes semelhantes, então:

1. A e B tem os mesmos valores próprios e com a mesma multiplicidade algébrica;
2. A e B representam o mesmo operador linear.

Definição

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ diz-se diagonalizável se existir uma matriz diagonal $D = [d_{ij}]_{n\times n}$ e uma matriz invertível $P = [p_{ij}]_{n\times n}$, tal que

$$D = P^{-1}AP.$$

A P chamamos matriz diagonalizante.

A propriedade a seguir relaciona o problema da diagonalização de uma matriz quadrada com os seus vetores próprios.

Teorema

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é diagonalizável somente se tiver n vetores próprios linearmente independentes.

Se um operador linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é representado por uma matriz diagonal, então qualquer matriz A que representa f relativamente a uma dada base B, é diagonalizável.

Além disso, tem-se:

Teorema

Um conjunto de vetores próprios não nulos de $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ associados a valores próprios distintos, é linearmente independente.

Corolário

Se a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tiver n valores próprios distintos, então é diagonalizável.

Teorema

Se a matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ tem n valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que existem n vetores próprios $v_1, v_2, \ldots v_n$ linearmente independentes, então $P = [v_1, v_2, \ldots v_n]$ é tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

A matriz P tem como vetores coluna os vetores próprios v_i, $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Verifique se são diagonalizáveis.

Todas as matrizes simétricas são diagonalizáveis, de acordo com o teorema a seguir:

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz simétrica. Então:

- A possui n valores próprios e são todos reais;
- Vetores próprios de A associados a valores próprios distintos são ortogonais entre si.

Nas matrizes simétricas (ou hermitianas, no caso do universo complexo) existem bases ortonormais naturais naturais que são formadas por vectores próprios.