Álgebra Linear e Geometria Analítica

Caderno de exercícios propostos com soluções

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Departamento de Matemática

Edite Martins Cordeiro

2020/2021

Conteúdo

1 Números complexos

1.1 Números complexos - Exercícios propostos

1. Indique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $-3 \in \mathbb{Z}$.
   (b) $0 \in \mathbb{N}$.
   (c) $-5 \in \mathbb{Z}$.
   (d) $-5 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
   (e) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$.
   (f) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.
   (g) $4i \in \mathbb{R}$.
   (h) $\sqrt[3]{27} \in \mathbb{N}$.

2. Indique $Re(z)$, $Im(z)$ e $\bar{z}$ em cada um dos seguintes números complexos:

   (a) $z = \frac{3}{2} - 2i$.
   (b) $z = 2 + \frac{1}{2}i$.
   (c) $z = -\frac{4}{5}i$.

3. Represente no plano complexo:

   (a) $z = 5 + 3i$.
   (b) $z = -2 + 3i$.
   (c) $z = 4i$.
   (d) $z = -\frac{2}{3}$.
   (e) $z = -4 - 3i$.
   (f) $z = 5 - i$.

4. Calcule os números reais x, y tais que $2x + 3yi - 4y + 2i = -6 + 8i$

5. Considere $z = 2 + i$. Calcule:

   (a) $z + \bar{z}$.
   (b) $z - \bar{z}$.
   (c) $(z - \bar{z})^7$.
   (d) $(z - \bar{z})^{29}$.

6. Sejam $z_1 = 2 - 2i$ e $z_2 = -3 + 4i$. Calcule:

   (a) $|z_1|$.
   (b) $|z_2|$.
   (c) $z_1\bar{z_1}$ e compare com $|z_1|$.
   (d) $z_2\bar{z_2}$ e compare com $|z_2|$.

7. Efetue as operações seguintes, apresentando o resultado na forma algébrica:

   (a) $1 - 3i - (2 - i)(1 - i)$.
   (b) $(1 - i)^3 + 2i^{17}$.
   (c) $\dfrac{3i^{123} + 2}{i + 1} + 3i$.
   (d) $\dfrac{(1 - 2i)(2 + i)}{-i + 2}$.

8. Mostre que $6i^{6n} + 2i = \overset{+}{-} 6 + 2i$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

9. Prove que para $z = a + bi$, se tem:

   (a) $z + \bar{z} = 2a$
   (b) $z - \bar{z} = 2bi$
   (c) $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

10. Represente na forma trigonométrica cada um dos complexos a seguir:

    (a) $1 + \sqrt{3}i$.
    (b) $-3 - 3i$.
    (c) $\sqrt{3} - i$.
    (d) $4 - 4i$.

11. Sendo $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = -1 + i$, escreva na forma algébrica:

(a) $z_1^3 - 2z_1 + \bar{z}_2$. (b) $z_1^2 - z_2^2$. (c) $\dfrac{z_1}{2z_2}$. (d) $\bar{z}_1 z_2$.

12. Represente na forma algébrica os seguintes números complexos:

(a) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$; (c) $4cis(\frac{5}{4}\pi)$; (e) $cis(\frac{21\pi}{6})$;
(b) $3e^{\frac{5\pi}{6}i}$; (d) $e^{\frac{5\pi}{3}i}$; (f) $2e^{\frac{-5\pi}{3}i}$.

13. Dado o complexo $w = z + 3zi - 2i^3 + \bar{z}$, com $z = x + yi$, determine x e y ou uma relação entre x e y de modo que w represente:

(a) Um número real. (b) Um imaginário puro.

14. Considere os números $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = -3i + 3$ e determine:

(a) $z_1 z_2$. (c) $(\dfrac{z_2}{3})^7$. (e) $z_2^6 z_1$.
(b) $\dfrac{z_2}{z_1}$. (d) $\sqrt[3]{z_1}$. (f) $\sqrt[4]{z_1 \bar{z}_2}$.

15. Determine e represente graficamente as raízes índice n de $z = 1 - i$, para

(a) $n = 2$. (b) $n = 3$. (c) $n = 5$.

16. Considere $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$.

(a) Prove que $\bar{z}_1 z_2 = -2z_1 \Leftrightarrow z_2 = 2cis(\frac{\pi}{3})$.
(b) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 + z_1 = -2$.
(c) Determine e represente no plano de Argand as raízes quartas de z_1.

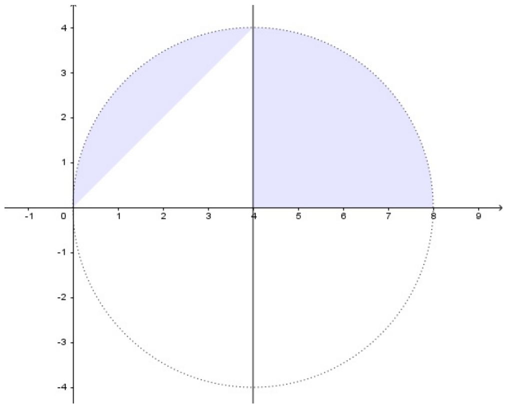
17. Resolva em $\mathbb{C}$ as equações seguintes:

(a) $z^3 + 8 = 0$. (d) $4z^2 - 8|z| = 0$.
(b) $z^6 - 64i = 0$ (e) $z^3 - 4z^2 + 9z = 0$.
(c) $4z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$. (f) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

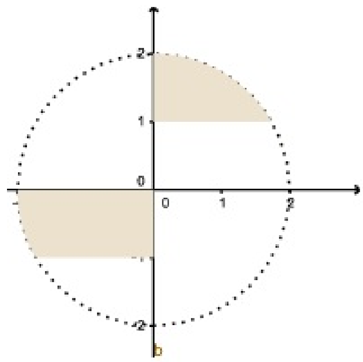
18. Represente no plano de Argand, os conjuntos definidos pelas condições de variável complexa seguintes:

(a) $|z - 1 + i| < 2$.
(b) $z\bar{z} < 3 \wedge |Arg(z)| < \frac{\pi}{4}$.
(c) $|Re(z + \bar{z})| \leq 2$.
(d) $|z + 1| \leq |z + 3i| \wedge \pi < Arg(z + 1) < \frac{3\pi}{2}$
(e) $|z + \frac{1}{i}| \leq 1 \wedge |Arg(z - i)| < \frac{\pi}{4}$.
(f) $Im(z - \bar{z}i) < 1 \wedge |z - \bar{z}| < 2$
(g) $Im(iz) = 2 \wedge |z - 2| > 2$.

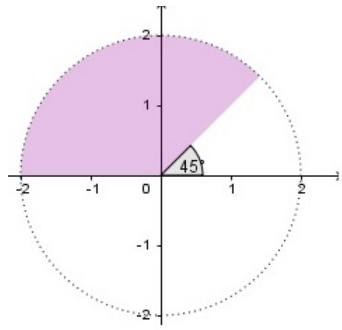
19. Defina por uma condição em $\mathbb{C}$, as regiões sombreadas a seguir:
    Região A



Região B



Região C



20. Sejam $z_1 = \dfrac{2}{1-i} + \dfrac{4}{i^5}$ e $z_2 = 3e^{\frac{3}{2}\pi i}$. Determine $z_1 z_2$ na forma $x + yi$.

21. Considere $z_1 = \dfrac{8e^{i\theta}}{-1+\sqrt{3}i}$ e $z_2 = e^{-2i\theta}$. Determine $\theta \in]0, \pi]$, tal que $\bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}$.

22. Determine $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, tal que $z = (cos(x) + isen(x))^{10}$ verifica a condição $Im(z) = Re(z)$.

23. Mostre que se $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$, então $|z| = 1$.

24. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações na variável x, determine o seu conjunto solução e represente-o no plano cartesiano:

    (a) $x^3 cis(\frac{3\pi}{4}) = x$.

    (b) $x^5 - 32i = 0$.

    (c) $(x^2+1)(x-3)^2 = 0$.

    (d) $x^3 = 8e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

1.2 Números complexos - Soluções

1. .

    (a) Verdade.

    (b) Falso.

    (c) Verdade.

    (d) Falso.

    (e) Falso.

    (f) Falso.

    (g) Falso.

    (h) Verdade.

2. .

    (a) $Re(z) = \frac{3}{2}$, $Im(z) = -2$ e $\bar{z} = \frac{3}{2} + 2i$;

    (b) $Re(z) = 2$, $Im(z) = \frac{1}{2}$ e $\bar{z} = 2 - \frac{1}{2}i$;

    (c) $Re(z) = 0$, $Im(z) = -\frac{4}{5}$ e $\bar{z} = \frac{4}{5}i$;

3. .

4. $x = 1$ e $y = 2$.

5. .

   (a) 4.

   (b) $2i$.

   (c) $-128i$.

   (d) $2^{29}i$.

6. Sejam $z_1 = 2 - 2i$ e $z_2 = -3 + 4i$. Calcule:

   (a) $|z_1| = \sqrt{8}$.

   (b) $|z_2| = 5$.

   (c) $z_1 \times \bar{z_1} = |z_1|^2$.

   (d) $z_2 \times \bar{z_2} = |z_2|^2$.

7. .

   (a) 0.

   (b) -2.

   (c) $\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$.

   (d) $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.

8. .

9. .

10. .

    (a) $2cis(\frac{\pi}{3})$.

    (b) $3\sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{4})$.

    (c) $2cis(\frac{11\pi}{6})$.

    (d) $\sqrt{32}cis(-\frac{\pi}{4})$.

11. .

    (a) $-16 - 43i$.

    (b) $5 - 10i$.

    (c) $-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}i$.

    (d) $-5 + i$.

12. .

    (a) $1 + \sqrt{3}i$;

    (b) $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;

    (c) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$;

    (d) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

    (e) $-i$;

    (f) $2e^{\frac{-5\pi}{3}i}$.

13. .

    (a) $x = -\frac{2}{3}$;

    (b) $x = \frac{3}{2}y$.

14. .

    (a) $(3 - 3\sqrt{3}) - (3 + 3\sqrt{3})i$;

    (b) $\frac{3+3\sqrt{3}}{4} + \frac{-3+3\sqrt{3}}{4}i$,

    (c) $8 + 8i$;

    (d) $\sqrt[3]{2}cis(-\frac{\pi}{9})$, $\sqrt[3]{2}cis(\frac{5\pi}{9})$, $\sqrt[3]{2}cis(\frac{11\pi}{9})$.

    (e) $2 \times 18^3 cis(\frac{\pi}{6})$;

    (f) $\sqrt[4]{6}\sqrt[8]{2}cis(\frac{-\frac{\pi}{12}}{4})$, $\quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$;

15. .

(a) $\sqrt[4]{2}cis(-\frac{\pi}{8})$, $\sqrt[4]{2}cis(\frac{7\pi}{8})$.

(b) $\sqrt[6]{2}cis(-\frac{\pi}{12})$, $\sqrt[6]{2}cis(\frac{7\pi}{12})$, $\sqrt[6]{2}cis(\frac{15\pi}{12})$.

(c) $\sqrt[10]{2}cis(-\frac{\pi}{20})$, $\sqrt[10]{2}cis(\frac{7\pi}{20})$, $\sqrt[10]{2}cis(\frac{15\pi}{20})$, $\sqrt[10]{2}cis(\frac{23\pi}{20})$, $\sqrt[10]{2}cis(\frac{31\pi}{20})$.

16. .

(a) .

(b) $\sqrt[6]{12}cis(-\frac{\pi}{18})$, $\sqrt[6]{12}cis(\frac{11\pi}{18})$, $\sqrt[6]{12}cis(\frac{23\pi}{18})$.

(c) $\sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi}{6})$, $\sqrt[4]{2}cis(\frac{2\pi}{3})$, $\sqrt[4]{2}cis(\frac{7\pi}{6})$, $\sqrt[4]{2}cis(\frac{5\pi}{3})$.

17. .

(a) $C.S. = 2cis(\frac{\pi}{3}), 2cis(\pi), 2cis(\frac{5\pi}{3})\}$.

(b) $C.S. = \{2cis(\frac{\pi}{12}), 2cis(\frac{5\pi}{12}), 2cis(\frac{9\pi}{12}), 2cis(\frac{13\pi}{12}), 2cis(\frac{17\pi}{12}), 2cis(\frac{21\pi}{12})\}$.

(c) $C.S. = \{\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{3}), \sqrt{2}cis(\frac{5\pi}{6}), \sqrt{2}cis(\frac{8\pi}{6}), \sqrt{2}cis(\frac{11\pi}{6})\}$.

(d) $C.S. = \{0, 2\}$.

(e) $C.S. = \{0, 2-\sqrt{5}i, 2+\sqrt{5}i\}$.

(f) $C.S. = \{cis(\frac{\pi}{2}), cis(\frac{3\pi}{2}\}$.

18. .

19. A $= \{z : (|z-4| \leq 4 \wedge (0 \leq arg(z-4) \leq \frac{\pi}{2}) \vee Im(z) > Re(z);$
B $= \{z : (|z| \leq 2 \wedge (0 \leq arg(z-i) \leq \frac{\pi}{2} \vee (-1 < Im(z) \leq 0 \wedge Re(z) < 0))\};$
C $= \{z : |z| \leq 2 \wedge \pi/4 \leq arg(z) \leq \pi\}$.

20. $-9-3i$.

21. $\{\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\}$.

22. $\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\}$.

23. .

24. .

(a) $CS = \{0, e^{\frac{5\pi}{8}i}, e^{\frac{13\pi}{8}i}\}$

(b) $CS = \{2e^{\frac{3\pi}{10}i}, 2e^{\frac{7\pi}{10}i}, 2e^{\frac{11\pi}{10}i}, 2e^{\frac{15\pi}{10}i}, 2e^{\frac{19\pi}{10}i}\}$.

(c) $CS = \{-i, i, 3\}$.

(d) $CS = \{2e^{\frac{4\pi}{9}i}, 2e^{\frac{10\pi}{9}i}, 2e^{\frac{16\pi}{9}i}\}$.

2 Matrizes e Determinantes

2.1 Matrizes e Determinantes - Exercícios propostos

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se for possível:

(a) $\frac{1}{2}C$ (c) $C + D$; (e) AB e BA; (g) CD^2;

(b) $A - 2B$; (d) $B - C^T$; (f) BCD; (h) DC^T.

2. Determine x e y, tais que $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ -1 & 2 & y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

3. Verifique se as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ comutam.

4. Prove que, dadas matrizes A, B e C de ordem conveniente, se tem $A^T(BC)^T = (CA)^T B^T$.

5. Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times k}$ e $B = [b_{ij}]_{k\times n}$ duas matrizes tais que $AB = C = [c_{ij}]_{m\times n}$. Indique como calculamos:

(a) A terceira coluna de C. (c) c_{35}

(b) A primeira linha de C. (d) c_{53}

6. Calcule a expressão geral de A^n ($n \in \mathbb{N}$), sendo A a matriz real seguinte:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, com $a \neq b$.

7. Transforme as seguintes matrizes escrevendo-as em escada por linhas e indique a sua característica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

8. Considere a matriz, em função dos parâmetros reais $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, a seguir:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 + \mu & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2 + \mu & \lambda + \lambda\mu \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a caraterística de B em função dos parâmetros.

(b) Diga para que valores dos parâmetros, a matriz B é invertível.

9. Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes, através do algoritmo da matriz ampliada:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

10. No cálculo do determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]6 \times 6$, diga qual o sinal que afeta cada uma das seguintes parcelas:

(a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; (b) $a_{21}a_{42}a_{13}a_{54}a_{35}a_{66}$; (c) $a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{66}$.

11. Calcule o determinante das matrizes a seguir e diga quais delas são invertíveis:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$; (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -6 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

12. Considere a matriz real

$$A_4 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores de x para os quais A_4 é invertível.

(b) Considere $x = 2$ e determine o elemento da segunda linha e terceira coluna de A_4^{-1}.

13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, determine a matriz B tal que

$$((A + B)^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

14. Sejam $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz real, B a matriz que resulta de multiplicar a primeira coluna de A por $\alpha \in \mathbb{R}$ e C a matriz que resulta de multiplicar a segunda coluna de A por $\beta \in \mathbb{R}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $|B| = |\alpha A|$;

(b) $|B + C| = (\alpha + \beta)|A|$;

(c) $|BC| = \beta\alpha|A|^2$;

(d) Se A é invertível e $\alpha \neq 0$, então $|B^{-1}A| = \alpha^{-1}$.

15. Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$.

16. Verifique, sem calcular o determinante que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 6.

17. Determine as matrizes adjunta e inversa das matrizes seguintes:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$; (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   .

18. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Resolva as seguintes equações:

   (a) $2A - X = B^{-1}$
   (b) $CX + B = BX + C$
   (c) $A^T - A^{-1} = (A + B + C)^T + X$

19. Sejam A e B matrizes do tipo 4×5, C uma matriz do tipo 5×4 e D uma matriz do tipo 4×2. Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique o tipo da matriz resultante.

   (a) $(A^T + C)D$. (b) $C^T(A + B)^2$ (c) $(A^T + C)(A^T + C)^T$.

20. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & 4 & k \end{bmatrix}$

   (a) Sem efetuar qualquer cálculo, diga o que se pode concluir quanto ao valor da característica de A quando $k = 4$.
   (b) Determine k de modo que a matriz seja regular.

21. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule:

   (a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 3 & 0 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

22. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ -2 & 3 & a+1 \\ 1 & -a & -1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine os valores de a para os quais a matriz A tem inversa;

(b) Determine a caraterística de A em função dos valores de a.

2.2 Matrizes e Determinantes - Soluções

1. (a) $\frac{1}{2}C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$;

   (b) $A - 2B = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$;

   (c) $C + D$ não existe, porque C e D não são do mesmo tipo;

   (d) $B - C^T$ não existe;

   (e) $AB = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -7 \\ 8 & 1 & -5 \\ 11 & -6 & -6 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 3 \\ -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$;

   (f) $BCD = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \\ 14 & -14 \end{bmatrix}$;

   (g) $CD^2 = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$;

   (h) $DC^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

2. $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{-5}{3}$.

3. Sim, $AB = BA$.

4. Porque $(BC)^T = A^T C^T$ e pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes.

5. .

   (a) Multiplicando cada linha da matriz A pela terceira coluna da matriz B.

   (b) Multiplicando a primeira linha da matriz A pela todas as colunas da matriz B.

   (c) Multiplicando a 3ª linha da matriz A pela 5ª coluna da matriz B.

   (d) Multiplicando a 5ª linha da matriz A pela 3ª coluna da matriz B.

6. (a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$.

7. As matrizes escrevem-se em escadas de linhas, usando as operações sobre as suas filas.

   (a) $Car(A) = 2$; (b) $Car(B) = 2$; (c) $Car(C) = 3$; (d) $Car(D) = 3$.

8. (a) Se $\lambda = 0 \wedge \mu \neq 0$, então $Car(B) = 3$; Se $\lambda \neq 0 \wedge \mu = 0$, então $Car(B) = 3$; Se $\lambda \neq 0 \wedge \mu \neq 0$, então $Car(B) = 4$; Se $\lambda = 0 \wedge \mu = 0$, então $Car(B) = 2$.

   (b) B é invertível quando $\lambda \neq 0 \wedge \mu \neq 0$.

9. .

   (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$. (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{-4}{23} \end{bmatrix}$.

10. (a) $+$; (b) $+$; (c) $-$.

11. .

    (a) $|A| = 0$, logo A não admite inversa; (c) $|C| = 0$, logo C não admite inversa;

    (b) $|B| = -10$, logo B admite inversa; (d) $|D| = 1$, logo A admite inversa.

12. (a) $x^4 - x^2 \neq 0$, isto é, $x \in \mathbb{R} \mid \{-1, 0, 1\}$;

    (b) $-dfrac412$.

13. $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

14. .

    (a) Falsa, porque $|B| = \alpha|A|$ e $|\alpha A| = \alpha^n |A|$;

    (b) Falsa, porque $|A + B| \neq |A| + |B|$;

    (c) Verdadeira;

    (d) Verdadeira, porque $|B^{-1}A| = |B^{-1}||A| = \frac{1}{|B|}|A| = \frac{1}{\alpha|A|}|A| = \alpha^{-1}$.

15. $x \in \{\frac{3-\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\}$.

16. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

17. .

    (a) $Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-1}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$.

    (b) $Adj(B) = \begin{bmatrix} -11 & -4 & 2 \\ 29 & 7 & 10 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = -\frac{1}{13} Adj(B)$.

(c) $Adj(C) = C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. .

(a) $X = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-3}{5} & \frac{11}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$

(b) $X = I_3$

(c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

19. .

(a) $(A^T + C)D$ é do tipo 5×2.

(b) $C^T(A + B)^2$ não está bem definida.

(c) $(A^T + C)(A^T + C)^T$ é do tipo 5×5.

20. .

(a) Se $k = 4$, então $Car(A) = 1$;

(b) $k \neq 4$.

21. .

(a) $-\frac{3}{2}$;

(b) -3

22. .

(a) $a \in \mathbb{R} \mid \{0, 3/2\}$;

(b) Se $a \in \mathbb{R} \mid \{0, 3/2\}$, então $Car(A) = 3$; caso contrário $Car(A) = 2$.

3 Sistemas de equações lineares

3.1 Sistemas de equações lineares - Exercícios propostos

1. Identifique se as equações a seguir são lineares:

   (a) $x + \sqrt{2}y - 2^{5/3}z = 1$;

   (b) $x + xy - 2z = 0$;

   (c) $x = -\sqrt{3}y + \frac{2}{3}z$;

   (d) $x^{2/3} - 2y - 5z = \sqrt[3]{6}$.

2. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 2y &= 1 \\ 6y - 3x &= -3 \end{cases}$.

   (a) Prove que $(3, 1)$ é solução do sistema;

   (b) Determine as restantes soluções do sistema e classifique-o.

3. Entre notas de 50 euros e de 10 euros, o João possui um total de 50 notas. Sabendo que essas notas somam um montante de 900 euros, quantas notas de 50 euros e quantas notas de 10 euros o João possui?

4. Escreva os sistemas a seguir na forma matricial:

   (a) $\begin{cases} 3x - 2y &= 1 \\ y &= 0 \\ 5x &= 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x + z &= -1 \\ y - x &= 0 \\ x + 5z &= 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ x - 2y + z &= 5 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x + 2y - z &= -1 \\ y - z &= 5 \\ 2x + z &= 3 \end{cases}$

5. Sejam os sistemas de equações lineares:

   (I) $\begin{cases} x - y &= 4 \\ 2x + y &= 1 \end{cases}$

   (II) $\begin{cases} 2x - y - z &= -3 \\ -x + 3y + z &= 2 \\ x + 3y &= 1 \end{cases}$

   (III) $\begin{cases} x + y + z &= -1 \\ x + 2y + 3z &= 3 \\ y + 2z &= 4 \end{cases}$

   (IV) $\begin{cases} 2x - y + 2z &= -1 \\ 2x - 8y - z &= 8 \\ x + 3z &= 8 \\ -x + 4y + z &= -4 \end{cases}$

   (a) Resolva pelo método da inversa da matriz dos coeficientes, o sistema de equações I;

   (b) Resolva pela regra de Cramer, o sistema de equações II;

   (c) Resolva pelo método de eliminação de Gauss, os sistemas III e IV.

6. Um comerciante de café vende três tipos de misturas de grãos. Um pacote com a "‘mistura da casa"’ contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café torrado. Um pacote com a "‘mistura especial"’ contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café torrado. Um pacote com a "‘mistura gourmet"’ contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café torrado. Com 30 quilos de café colombiano, 15 de café queniano e 25 de café torrado, quantos pacotes de cada mistura pode o comerciante preparar?

7. Considere o sistema $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha x + \alpha z & = & 1 \\ \alpha x - y + z & = & 0 \\ x - y + \alpha w & = & 1 \\ y + z & = & \alpha \end{array}\right.$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule em função de α:

      i. O determinante da matriz dos coeficientes do sistema;

      ii. A característica da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

   (b) Classifique o sistema em função dos valores do parâmetro α;

   (c) Calcule a inversa da matriz dos coeficientes, para $\alpha = 1$.

8. Classifique os seguintes sistemas em função dos parâmetros α e β:

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 5 \\ \alpha x - y + 3z & = & 6 \\ x - y + \alpha w & = & 1 \\ 2x + y - z & = & \beta \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & \alpha + 1 \\ x + \alpha y + z & = & 1 \\ x - y + \alpha z & = & 1 \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{r} x + z = 0 \\ 2x + y - \alpha z = -1 \\ 3x - y = \beta \\ 3z - y = \beta \end{array}\right.$

   (d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 4y + \beta z & = & 2 \\ x + (\alpha + 2)y & = & 1 \\ x + 2y & = & \beta \\ x + 2y + \alpha z & = & 1 \end{array}\right.$

9. Determine o valor de λ para o qual o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 5y + 2z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ 2x + \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

   tem soluções distintas do solução nula e calcule-as.

10. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha & -2 \\ 2\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule a característica da matriz A em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$;

   (b) Classifique o sistema $AX = B$, em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

   (c) Para $\alpha = 2$, determine $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $(-1/4, 1/4, 3/4, 0)$ seja solução do sistema $AX = B$.

11. Considere o sistema de equações, em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x + \alpha y + z & = & 2 \\ 3x + 3y + \beta z & = & \alpha \end{array}\right.$$

   Classifique-o em função dos parâmetros α e β.

12. Certo dia, o Paulo trocou 40 dólares e 20 libras por 78 euros. Nesse dia, na mesma instituição o Pedro trocou 50 dólares e 40 libras por 120 euros. Qual foi a cotação do dólar nesse dia? E da libra?

3.2 Sistemas de equações lineares - Soluções

1. .

   (a) Equação linear;

   (b) Equação não linear;

   (c) Equação linear;

   (d) Equação não linear;

2. (a) .

   (b) $\{(1+2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

3. O João possui 10 notas de 50 euros e 40 notas de 10 euros.

4. .

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5. .

   (a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -7/3 \end{bmatrix}$;

   (b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = -5,\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = 2,\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = -9$;

   (c) O sistema III tem conjunto solução $\{(x, -2x-6, x+5) : x \in \mathbb{R}\}$; O sistema IV é impossível.

6. O comerciante pode preparar 65 pacotes com a "‘mistura da casa"’, 30 pacotes com a "‘mistura especial"’ e 45 pacotes com a "‘mistura gourmet"’.

7. .

   (a) .

      i. $\alpha^2(2-\alpha)$;

      ii. Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, a característica da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada são iguais a 4; Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$, a característica da matriz dos coeficientes é 3, mas a característica da matriz ampliada é 4.

   (b) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, o sistema é possível e determinado. Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2$, o sistema é impossível.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. .

   (a) Se $\alpha \neq 4$, então o sistema é possível determinado; Se $\alpha = 4$ e $\beta = -8/7$, então o sistema é possível indeterminado; Se $\alpha = 4$ e $\beta \neq -8/7$, então o sistema é impossível;

   (b) Se $\alpha \neq 1$, então o sistema é possível determinado; Se $\alpha = 1$, então o sistema é impossível;

   (c) Se $\beta = 1$, então o sistema é possível determinado; Caso contrário, o sistema é impossível;

   (d) Se $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 1$ ou $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 2\alpha$, então o sistema é possível determinado; Se $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$, o sistema é possível indeterminado; Para outros valores de α e β, o sistema é impossível.

9. $\lambda = 2$. $C.S. = \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

10. .

    (a) Se $\alpha = 0$, então $Car(A) = 2$; Se $\alpha = 1$, então $Car(A) = 3$; Caso $\alpha \in \mathbb{R} \mid \{0, 1\}$, então $Car(A) = 4$.

    (b) Se $\alpha = 0$, então o sistema é impossível; Se $\alpha = 1 \neq \beta$, então o sistema é impossível; Se $\alpha = 1 = \beta$, o sistema é possível indeterminado; Se $\alpha \in \mathbb{R} \mid \{0, 1\}$, então o sistema é possível de solução única.

    (c) $\beta = 2$, porque a solução de $AX = B$ é $(-\frac{1}{4}, 2a - \frac{15}{4}, \frac{11}{4} - a, 2 - a)$.

11. Se $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 3$, o sistema é possível determinado; Se $\alpha = \beta = 3$, então o sistema é indeterminado; O sistema é impossível se $\alpha = 1$ ou $\alpha \neq 3 \wedge \beta = 3$.

12. A cotação do dólar foi de 1,2 e a cotação da libra foi de 1,5.

4 Geometria Analítica

4.1 Geometria Analítica - Exercícios propostos

1. Considere os pontos $A = (2, 3)$ e $B = (-1, 2)$ e determine:

   (a) Uma equação cartesiana da reta AB;

   (b) Uma equação da reta s que passa na origem do referencial e é perpendicular a AB;

2. Escreva uma equação cartesiana dos elementos geométricos de $\mathbb{R}^3$ seguintes:

   (a) Reta que passa nos pontos $(-1, 3, 5)$ e $(-4, 2, 3)$;

   (b) Plano que contém o ponto $(0, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $x - y - 3z - 1 = 0$;

   (c) Plano que contém o ponto $(0, 1, 2)$ e é perpendicular ao plano $x - y = 0$;

   (d) Plano que contém os pontos $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 2)$ e $(2, 0, 1)$.

3. Considere os vetores $u = (0, -1, -2), v = (2, 2, -1)$ e $w = (-1, 0, 1)$. Determine:

   (a) $|u \times v|$;

   (b) $u \times v + v \times w$;

   (c) $u \times v + v \times u$;

   (d) $u \times v \times w$;

   (e) $u \cdot v$;

   (f) $u \times w \cdot v$.

4. Determine um vetor ortogonal ao plano definido pelos pontos P, Q e R, quando:

   (a) $P = (1, -1, 0)$, $Q = (0, 1, 2)$, $R = (2, 0, 1)$;

   (b) $P = (1, -1, 2)$, $Q = (3, 1, 0)$, $R = (2, 5, 2)$;

   (c) $P = (0, -1, 0)$, $Q = (2, 1, 3)$, $R = (1, -2, 1)$.

5. Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $u = (3, -1, 4), v = (2, 0, 1)$ e $w = (-2, 1, 5)$.

6. Três vetores u, v e w são co-planares, ou seja, pertencem ao mesmo plano somente se o produto misto $u \cdot (v \times w) = 0$. Verifique se os vetores $u = (2, -1, 1), v = (1, 0, -1)$ e $w = (2, -1, 4)$ são co-planares.

7. Mostre que a reta de equação $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-9} = 3 - z$ é paralela ao plano de equação $2x + y - 3z - 4 = 0$.

8. Considere os pontos $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (0, 1, 3)$ e $P_3 = (2, -1, a)$.

   a) Determine os valores do parâmetro a para os quais os três pontos dados são colineares;

   b) Considere $a = 2$ e determine o plano definido pelos três pontos.

9. Considere, em $\mathbb{R}^3$, o plano $\pi : x - 2y + z + 3 = 0$ e os vetores $u = (-1, 5, 2)$, $v = (-2, a^2 - 2, 4)$ e $w = (-1, 1, 0)$. Determine:

   (a) Uma equação da reta perpendicular ao plano π que contém o ponto de interseção de π com o eixo Ox.

   (b) Os valores de a para os quais os vetores u e v são ortogonais.

   (c) Os vetores perpendiculares a u e w, com norma igual a $\sqrt{6}$.

10. Determine a equação cartesiana do plano que contém a reta $r : x = y = -z$ e é paralelo à reta $s : x = z + 1 \wedge y = 3z - 2$.

11. Determine a posição relativa dos seguintes pares de retas:

    (a) $\frac{x-1}{2} = y = z - 3$ e $x - 2 = \frac{y+1}{-4}, z = -1$;

    (b) $\frac{2x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -z$ e $\frac{x}{-3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{2}$;

12. Considere, em $\mathbb{R}^3$, o plano $\pi : x - 2y + z + 3 = 0$ e os vetores $u = (-1, 7, 2)$, $v = (-2, a^2 - 2, 4)$ e $w = (-1, 3, 0)$. Determine:

    (a) Uma equação da reta perpendicular ao plano $\pi : x - 2y + z + 3 = 0$ que contém o ponto de interseção de π com o eixo Oz.

    (b) Os valores de a para os quais os vetores u e v são colineares.

    (c) A posição relativa da reta $r : x + 1 = \dfrac{y-3}{2} = 1 - 2z$ com o plano $\pi : 2x - y + 5 = 0$.

13. Resolva cada um dos seguintes sistemas interprete geometricamente:

    (a) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 10z = 5 \\ 2x - y + 9z = 8 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 4x - 5z = -17 \end{cases}$

14. Considere as equações $x + ay + 2 = 0$, $2x + (a+1)y + (a-1)z = 1$ e $x + ay + (b+2)z = 2$ de três planos de $\mathbb{R}^3$. Determine, caso existam, os valores de a e b para os quais os três planos são paralelos.

15. Obtenha a equação da superfície esférica que passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (3, 1, 5)$ e cujo centro se encontra sobre o eixo Oy.

16. Prove que a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 4 = 0$ representa uma superfície esférica e determine o seu centro.

17. * Identifique e represente graficamente as cónicas de equação:

    (a) $x^2 + 4x + y + 2 = 0$;

    (b) $21y^2 - 4 - x = 0$;

    (c) $4x^2 + 9y^2 = 36$;

    (d) $y^2 - 4x^2 = 4$.

    (e) $4x^2 - 8x + y^2 + 2y + 1 = 0$.

    (f) $y^2 - 4y + 2x + 6 = 0$.

18. * Considere a superfície $S : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$.

    (a) Determine as curvas de interseção da superfície com os planos $\pi_1 : z = 2$ e $\pi_2 : y = -1$;

    (b) Identifique a superfície.

19. * Considere a superfícies $S_1 : \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{3}$ e $S_2 : \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = y^2$.

    (a) Determine as curvas de interseção das superfícies com os planos $\pi_1 : x = 2$ e $\pi_2 : y = 3$;

    (b) Identifique as superfícies.

20. * Indique a equação reduzida da superfície $S : 9x^2 - 4y^2 - 6z^2 = 36$ e determine as suas curvas de interseção com os planos coordenados.

Os exercícios com * são facultativos

4.2 Geometria Analítica - Soluções

1. .
   (a) $AB : -x + 3y - 7 = 0$;
   (b) $s : y = -3x$;

2. .
   (a) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{2}$;
   (b) $x - y - 3z + 7 = 0$;
   (c) $x + y + 1 = 0$;
   (d) $x + y + z - 3 = 0$.

3. .
   (a) $3\sqrt{5}$;
   (b) $(7, -5, 4)$;
   (c) $(0, 0, 0)$;
   (d) $(-4, -7, -4)$;
   (e) 0;
   (f) 3.

4. Por exemplo:
   (a) $v = (0, 3, -3))$;
   (b) $v = (12, -2, 10)$;
   (c) $v = (5, -1, -4)$.

5. $V = 17$.

6. Os vetores u e v não são co-planares.

7. .

8. .
   a) $a = -1$;
   b) $x + y - 1 = 0$.

9. Considere, em $\mathbb{R}^3$, o plano $\pi : x-2y+z+3 = 0$ e os vetores $u = (-1, 5, 2)$, $v = (-2, a^2-2, 4)$ e $w = (-1, 1, 0)$. Determine:
   (a) $x - 3 = -\frac{y}{2} = z$.
   (b) $a = 2 \vee a = -2$.
   (c) $(-1, -1, 2)$ e $(1, 1, -2)$.

10. $2x - y + z = 0$.

11. .
    (a) Retas não coplanares;
    (b) Retas paralelas.

12. .
    (a) $x = -\frac{y}{2} = z + 3$.

(b) $a = -4$ e $a = 4$.

(c) A reta r está contida no plano π.

13. .

(a) Sistema impossível, o que significa que os três planos não se intersetam.

(b) Sistema possível indeterminado. O conjunto solução $\{(x, y, z) : \frac{10y-50}{21} = x = \frac{5z-17}{4}\}$, representa a reta de interseção dos 3 planos.

14. $a = 1$ e $b = -2$.

15. $x^2 + (y - 15)^2 + z^2 = 230$.

16. $C = (1, 2, -2)$.

17. .

(a) Parábola voltada para baixo com vértice em $(-2, 2)$;

(b) Parábola voltada para a direita com vértice em $(-4, 0)$;

(c) Elipse centrada na origem e eixos $2a = 6$ e $2b = 4$;

(d) Hipérbole centrada na origem e eixos $2a = 2$ e $2b = 4$;

(e) Elipse centrada em $(1, -1)$ e eixos $2a = 2$ e $2b = 4$;

(f) Parábola voltada para a esquerda com vértice em $(-1, 2)$;

18. .

(a) $S_1 \cap \pi_1 : z = 1/3y^2 + 27/4$ é uma parábola do plano $x = 2$ e $S_1 \cap \pi_2 : z = 3/4(x+1)^2 + 3$ é uma parábola do plano $y = 3$. $S_2 \cap \pi_1 : y^2 - z^2/9 = 1$ é uma hipérbole do plano $x = 2$ e $S_2 \cap \pi_2 : x^2/36 + z^2/81 = 1$ é uma elipse do plano $y = 3$.

(b) S_1 é um paraboloide elítico e S_2 é um hiperboloide de duas folhas com eixo ao longo de Oz.

19. $S : x^2/4 - y^2/9 - z^2/6 = 1$ é um hiperboloide de duas folhas com centro na origem e eixo ao longo de Oz. $S \cap \{(x, y, z) : x = 0\} = \{\}$, $S \cap \{(x, y, z) : y = 0\} = \{(x, y, z) : x^2/4 - z^2/6 = 1\}$ e $S \cap \{(x, y, z) : z = 0\} = \{(x, y, z) : x^2/4 - y^2/9 = 1\}$.

20. $x^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 30$

5 Espaços Vetoriais

5.1 Espaços Vetoriais - Exercícios propostos

1. Verifique se os seguintes subconjuntos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais:

   (a) $A = \{(x, y, z) : y = 3x \wedge z = -x\}$;

   (b) $B = \{(x, y, z) : 2x - y + 3z + 1 = 0\}$;

   (c) $C = \{(x, y, z) : x + 3y + 2z = 0\}$.

2. Determine se os vetores dados geram $\mathbb{R}^3$:

   (a) $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 0, 1)$ e $w = (2, 1, 3)$;

   (b) $u = (2, 2, 2)$, $v = (0, 0, 3)$ e $w = (0, 1, 1)$;

   (c) $u = (3, 1, 4)$, $v = (2, -3, 1)$, $w = (1, 4, -1)$ e $t = (5, -2, 9)$.

3. Quais as condições para que dois vetores de $\mathbb{R}^3$ gerem uma reta? E um plano?

4. Verifique se o conjunto de vetores $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ é linearmente independente.

5. Determine os valores de k para os quais os vetores $u = (1, 0, 0, 2)$, $v = (1, 0, 1, 0)$ e $w = (2, 0, 1, k)$ são linearmente dependentes.

6. Quais dos seguintes conjuntos do espaço vetorial $\mathcal{P}_3$ dos polinómios de grau não superior a 3, são linearmente independentes?

   (a) $\{1, x, x^2, x^3\}$;

   (b) $\{1 + x + x^3, 1 - x - x^3, x^2, 3 + 2x^2\}$.

7. Determine se os seguintes conjuntos do espaço vetorial M_{22} das matrizes de ordem 2, formam um base. Caso responda negativamente, indique o espaço gerado por esses vetores.

   (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8. Sejam $V = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 2) \rangle$ e $E = \langle (0, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$ dois subespaços de $\mathbb{R}^3$. Determine:

   (a) A dimensão do espaço $V + E$;

   (b) A dimensão do espaço $V \cap E$.

9. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

   (a) $\mathbb{R}^2 = \langle (1, 2), (2, 1) \rangle$;

   (b) $\mathbb{R}^2 = \langle (-1, 1), (1, 3), (2, 5) \rangle$;

   (c) $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle$;

   (d) $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, -1), (1, 1, 2), (2, 2, 1) \rangle$;

   (e) $P_3(x) = \langle 1 + x, 1 - x, 1 + x^2, x + x^2 - x^3 \rangle$, onde $P_3(x)$ é o espaço dos polinómios de grau não superior a 3.

10. Determine as componentes de:
    (a) $(1,1,1)$ em relação à base $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$;
    (b) $2-3i$ em relação a $\{1+i, 1-i)\}$ de $\mathbb{C}$;
    (c) $(1,2,3,4)$ em relação à base $\{(1,1,0,1),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(0,-1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$;
11. Sejam $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0)\}$ e $B=\{(1,0,1),(1,2,1),(0,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Determine a matriz mudança de base $[P]_B^A$;
    (b) A partir de A, determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
12. A partir da base $B=\{(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)\}$ de $\mathbb{R}^3$, determine uma base ortonormal.
13. Determine as componentes de:
    (a) $(5,-4)$ em relação à base $A=\{(1,2),(0,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$;
    (b) $2-x$ em relação à base $A=\{1+x, 1-x\}$ do espaço de polinómios de grau inferior ou igual a 1;
    (c) $(1,2,3,4)$ em relação à base $A=\{(1,1,0,1),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^4$.
14. Considere no espaço $\mathbb{R}^4$ os subespaços vetoriais $S=\langle(1,0,1,0),(2,-3,2,0),(1,-1,1,0)\rangle$ e $G=\{(x,y,z,w): x=w, z=0\}$. Determine:
    (a) Uma base e a dimensão de cada um dos subespaços;
    (b) A interseção dos dois subespaços e a dimensão de $S+G$;
    (c) Uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vetores de G.
15. Sejam as bases $A=\{(1,2,-1),(3,4,2),(1,1,1)\}$ e $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Prove que $P_B^A=[A]^{-1}[B]$, onde $[A]$ e $[B]$ representam matrizes cujas colunas são os vetores de A e B, respetivamente.
16. Sejam $A=\{(1,0),(1,1)\}$ e $B=\{(2,-1),(3,2)\}$ e C três bases de $\mathbb{R}^2$ e seja a matriz mudança de base
    $$[P]_C^B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
    Determine $[P]_C^A$ e indique C.

5.2 Espaços Vetoriais - Soluções

1. Subespaços vetoriais:
    (a) A é subespaço vetorial;
    (b) B não é subespaço vetorial;
    (c) C é subespaço vetorial.
2. Vetores que geram $\mathbb{R}^3$:
    (a) $\{u,v,w\}$ não gera $\mathbb{R}^3$, gera o subespaço $\{x+y, x, 2x+y) : x,y\in\mathbb{R}\}$ de dimensão 2;

(b) $\{u, v, w\}$ gera $\mathbb{R}^3$;

(c) $\{u, v, w, t\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

3. Dois vetores de $\mathbb{R}^3$ geram uma reta se um for combinação linear do outro. Dois vetores geram um plano se formarem um conjunto linearmente independente.

4. O conjunto $\{(1,1,1),(0,1,2),(0,0,1)\}$ é linearmente independente.

5. $k = 2$.

6. Conjuntos do espaço vetorial $\mathcal{P}_3$ dos polinómios de grau não superior a 3.

   (a) $\{1, x, x^2, x^3\}$ é linearmente independente;

   (b) $\{1+x+x^3, 1-x-x^3, x^2, 3+2x^2\}$ é linearmente independente.

7. O espaço vetorial M_{22} tem dimensão 4.

   (a) O conjunto não é base de M_{22}, apenas gera o subespaço$\left\{\begin{bmatrix} x & -y \\ 2y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

   (b) O conjunto é base de M_{22}.

8. Dimensão dos espaços:

   (a) $dim(V+F) = 3$;

   (b) $dim(V \cap F) = dim(v) + dim(E) - dim(V+E) = 1$.

9. Valor lógico das afirmações:

   (a) Verdadeira;

   (b) Verdadeira;

   (c) Verdadeira;

   (d) Falsa;

   (e) Verdadeira

10. Componentes de elementos em relação a bases dadas:

    (a) $(1, 1, -1)$;

    (b) $-1/2 + 5/2i$;

    (c) $(1/3, 7/3, 2/3, 2/3)$;

11. .

    (a) $[P]_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

    (b) $\{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$.

12. $\{(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14}), (1/\sqrt{35}, -5/\sqrt{35}, -3/\sqrt{35}), (2/\sqrt{10}, 0, 1/\sqrt{10})\}$.

13. .

(a) $(5,-4) = (5,-14/3)_A$;

(b) $2 - x = (1/2 - 3/2x)_A$;

(c) $(1,2,3,4) = (-2/3, 1/3, 7/3, 4/3)_A$.

14. .

(a) $B = \{(1,0,1,0),(2,-3,2,0)\}$ é base de S e a sua dimensão é 2; $C = \{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ é base de G e a sua dimensão é 2.

(b) $S \cap G = \{(0,y,0,0) : y \in \mathbb{R}\}$ e $dim(S+G) = 3$;

(c) $A = \{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$.

15. .

16. $[P]_C^A = [P]_B^A[P]_C^B = [A]^{-1}[B][P]_C^B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$.

6 Transformações lineares

6.1 Transformações lineares - Exercícios propostos

1. Verifique se as aplicações a seguir são lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (y^2, x + z)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $T(x, y, z) = x - 2y + z$;

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (y - x, 2x)$;

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x + 2y, z + 1, 2y)$.

2. Calcule o núcleo e a imagem das aplicações lineares a seguir:

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x - y + 3z, 3x - z)$;

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (x + y, 2x, 3y)$;

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (y + 2x, y/3)$.

3. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, cujo núcleo é gerado pelo vetor $v = (1, 1, 0)$.

4. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + y + 2z, 2y + z)$. Determine.

   (a) A matriz $[T]$ (da aplicação linear considerando as bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$);

   (b) A matriz $[T]_B^A$, sendo $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

5. Determine o operador inverso, T^{-1}, para os seguintes operadores lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - 2y, -x)$;

   (b) $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, definida por $T(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}) = (t, z, y, x)$.

6. Considere o operador linear de $\mathbb{R}^3$ definido por $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $T(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ e $T(0, 1, 2) = (0, 0, 3)$. Verifique de T é um isomorfismo e, caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso.

7. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 2y - x)$ e determine:

   (a) A matriz $[T]$;

   (b) A matriz $[T]_B^A$, sendo $A = \{(1, 2), (-3, 1)\}$ e $B = \{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$;

   (c) $[T(v)]_B$, para $v = (1, 1)$.

8. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa a projeção sobre a reta $y = x/2$.

9. Determine a dimensão do núcleo da transformação linear T, $dim(N(T))$, sabendo que:

   (a) $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^8$ é tal que $dim(Im(T)) = 3$;

   (b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ é sobrejetiva;

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é invertível.

10. Seja a transformação linear f definida pela matriz

$$[f] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique a expressão analítica que define f;

(b) Calcule $f(2, -1)$;

(c) Determine o $Nuc(f)$.

11. Seja $A = \{(1, 0, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e seja

$$T_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a matriz associada a um operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, relativamente à base A. Determine a expressão analítica que define T.

12. Verifique se os operadores lineares a seguir são operadores invertíveis e/ ou ortogonais:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (3x + 2y, -2x + 3y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y, x + 2z, x + y - 2z)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (z, \sqrt{3}/2x - 1/2y, 1/2x + \sqrt{3}/2y)$.

13. Indique um exemplo de um operador linear simétrico, justificando a sua escolha.

14. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (3x, y, -y)$ e as bases $A = \{(1, 2), (-2, 3)\}$ e $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, respetivamente.

(a) Indique, justificando, uma base de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vetor $(2, -1)$;

(b) Determine as componentes de $f(1, 2)$ em relação à base B e indique a matriz $[f]^A_B$;

(c) Calcule $Nuc(f)$ e conclua se f é injetiva.

6.2 Transformações Lineares - Soluções

1. .

(a) A aplicação T não é linear;

(b) A aplicação T é linear;

(c) A aplicação T é linear;

(d) A aplicação T não é linear;

2. Núcleo e imagem de T:

(a) $Nuc(T) = \{(x, 10x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$, $Im(T) = \mathbb{R}^2$;

(b) $Nuc(T) = \{(0,0)\}$; $Im(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 6x - 3y - 2z = 0\}$

(c) $Nuc(T) = \{(0,0)\}$, $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

3. Por exemplo, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x,y,z) = (z, y-x)$.

4. Matrizes da transformação

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. T^{-1}:

(a) $T^{-1}(x,y) = (-y, -1/2x - 1/2y)$;

(b) $T^{-1}(x,y,z,t) = (t,z,y,x)$.

6. T é um isomorfismo e $T^{-1}(x,y,z) = (y, -1/3x + 1/3z, 1/3x - y + 2/3z)$.

7. $T(x,y) = (x+y, x-y, 2y-x)$:

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) A matriz $[T]_B^A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \\ 3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$;

(c) $[T(v)]_B = [T]_A^B \cdot [v]_A = (-10/7, 4/7, 4/7)$.

8. $T(x,y) = (4/5x + 2/5y, 2/5x + 1/5y)$.

9. $dim(N(T))$:

(a) $dim(N(T)) = 3$;

(b) $dim(N(T)) = 2$;

(c) $dim(N(T)) = 0$, isto é, $N(T) = \{(0,0,0,0)\}$;

10. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(a) $f(x,y) = (3x, x, -5y)$;

(b) $f(2,-1) = (6,2,5)$;

(c) $Nuc(f) = \{(0,0)\}$.

11. $T(x,y,z) = (3x, y, -6x - 4y - 3z)$.

12. Operadores lineares invertíveis e/ou ortogonais?

(a) T é invertível, mas não é ortogonal;

(b) T é invertível, mas não é ortogonal;

(c) T não é invertível, logo não é ortogonal.

(d) T é invertível e ortogonal.

13. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$.

14. .

(a) .

(b) $(f(1,2))_B = (3, -5, -7)$ e $[f]^A_B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 9 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$;

(c) $Nuc(f) = \{(0,0)\}$, logo f é injetiva.

7 Valores e Vetores próprios de Operadores Lineares

7.1 Valores e Vetores próprios - Exercícios propostos

1. Determine os vetores e valores próprios do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (x - 2y, -2x + 4y)$.

2. Prove que o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ por

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

não é diagonalizável.

3. Prove que $\lambda = 3$ é valor próprio da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine o subespaço próprio de $\mathbb{R}^3$ associado a $\lambda = 3$.

4. Determine quais das seguintes matrizes são diagonalizáveis. Em caso afirmativo, determine a respetiva matriz diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

5. Verifique se $v = (5, 5)$ é um vetor próprio da matriz de reflexão em relação à reta $y = -x$,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

associado ao valor próprio $\lambda = -1$.

6. Calcule os valores próprios, os subespaços dos vetores próprios e indique um conjunto de três vetores próprios linearmente independentes da matriz $A + 2I$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que B não é diagonalizável.

(b) Determine os subespaços vetoriais associados aos valores próprios de B e indique a sua dimensão.

8. Considere a matriz
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que C é diagonalizável.

   (b) Determine uma matriz invertível S e uma matriz diagonal D, tais que $D = S^{-1}CS$.

7.2 Valores e Vetores próprios - Soluções

1. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $E_0 = \{(2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $E_5 = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

2. T não é diagonalizável porque não tem dois valores próprios distintos e consequentemente não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ definida por vetores próprios de T.

3. Provar que $|A - 3I| = 0$ e determinar $E_3 = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

4. Matrizes diagonalizáveis e respetiva matriz diagonal.

   (a) A é diagonalizável, porque é de ordem 2 e tem dois valores próprios distintos.

   (b) B é diagonalizável, porque existem bases de $\mathbb{R}^3$ constituídas por vetores próprios de B.

   (c) C é diagonalizável por
$$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$
   porque tem valores próprios $-3, 2$.

   (d) D é diagonalizável por
$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$
   porque tem valores próprios $-2, -1, 3$.

5. Provar que $R \cdot v = \lambda v$.

6. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, $E_1 = \{(x, y, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}$.

7. .

   (a) B não é diagonalizável porque $\lambda = 2$ é raiz tripla da equação caraterística.

   (b) $E_2 = \{(x, x, -3x) : x \in \mathbb{R}\}$ tem dimensão 1.

8. .

   (a) .

   (b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.