DGI
2019

10.1. Introdução

Os procedimentos apresentados nos dois ***capítulos anteriores permitem definir estimativas (pontuais ou por intervalo) de parâmetros populacionais***.

Será agora apresentado um outro procedimento de inferência estatística – ***O Teste de Hipóteses – cujo objectivo fundamental é o de verificar se os dados amostrais são ou não compatíveis com determinadas populações ou com valores previamente fixados dos correspondentes parâmetros populacionais***.

O resultado do Teste corresponde inevitavelmente a uma de ***duas respostas possíveis para aquela questão - afirmativa ou negativa. Em ambos os casos corre-se o risco de errar. Uma das características do Teste de Hipóteses é, justamente, a de permitir controlar ou minimizar tal risco***.

10.2. Metodologia do Teste de Hipóteses

(1) *Definição das Hipóteses;*

(2) *Identificação da Estatística de Teste (ET) e caracterização da sua distribuição amostral;*

(3) *Definição da Regra de Decisão, com especificação do Nível de Significância do Teste (α);*

(4) *Cálculo do valor da ET e Tomada de Decisão.*

DGI

2019

10.2.1. Definição da Hipóteses

Uma Hipótese é uma conjectura acerca de uma ou mais populações.

O Teste de Hipóteses é ***utilizado para refutar hipóteses*** e não para provar a veracidade de uma hipótese.

- O objectivo é o de mostrar que uma ***hipótese é insustentável porque ocorrerá com uma probabilidade demasiadamente baixa***.

O Teste de Hipóteses é constituído por ***duas hipóteses***:

- *a hipótese nula* (H_0) *e a hipótese alternativa* (H_1).

A *estratégia* básica seguida na metodologia do Teste de Hipóteses consiste em ***tentar suportar a validade de H_1, uma vez provada a inverosimilhança de H_0***. Por outras palavras, conseguindo-se mostrar que, com elevada probabilidade, a hipótese nula é falsa, fica assim corroborada a validade da hipótese alternativa.

Se, pelo contrário, não se puder rejeitar H_0, a hipótese H_1 não será reforçada pelo Teste.

DGI
2019

Notas Importantes

(1) ***A hipótese alternativa contem sempre uma desigualdade*** *($>$ ou $<$)* ***ou uma não igualdade*** *($\neq$)*, ***mas nunca uma igualdade*** *($=$).*

(2) ***A hipótese nula é considerada verdadeira ao longo do procedimento de teste até ao momento em que haja evidência estatística clara apontando em sentido contrário***. Neste caso (isto é, quando se rejeitar H_0), aceita-se como válida a hipótese alternativa (visto que se admite que esta é a hipótese complementar de H_0).

Notas Importantes *(cont.)*

(3) ***A hipótese nula contem sempre uma igualdade***. Mesmo quando na hipótese nula faz sentido figurar o sinal ≥ ou ≤, o Teste é efectuado considerando apenas a situação em que H_0 mais se aproxima de H_1, ou seja, supondo que é verdadeira a afirmação de H_0 que corresponde à igualdade (se se provar que H_0 é falsa, então também serão falsas todas as outras que se afastam mais de H_1).

(4) *Quando* H_1 ***contiver uma desigualdade*** ($>$ ou $<$), o ***Teste diz-se unilateral*** (à direita para o sinal $>$ e à esquerda para o sinal $<$). *Quando* H_1 ***contiver uma não igualdade*** ($\neq$), o ***Teste diz-se bilateral***.

10.2.2. Identificação da Estatística de Teste e Caracterização da sua Distribuição Amostral

A Estatística de Teste é utilizada para verificar a plausibilidade da hipótese nula.

- Para que tal estatística possa cumprir a sua função ***é necessário conhecer a sua distribuição amostral quando se admitir que é verdadeira a hipótese nula***.

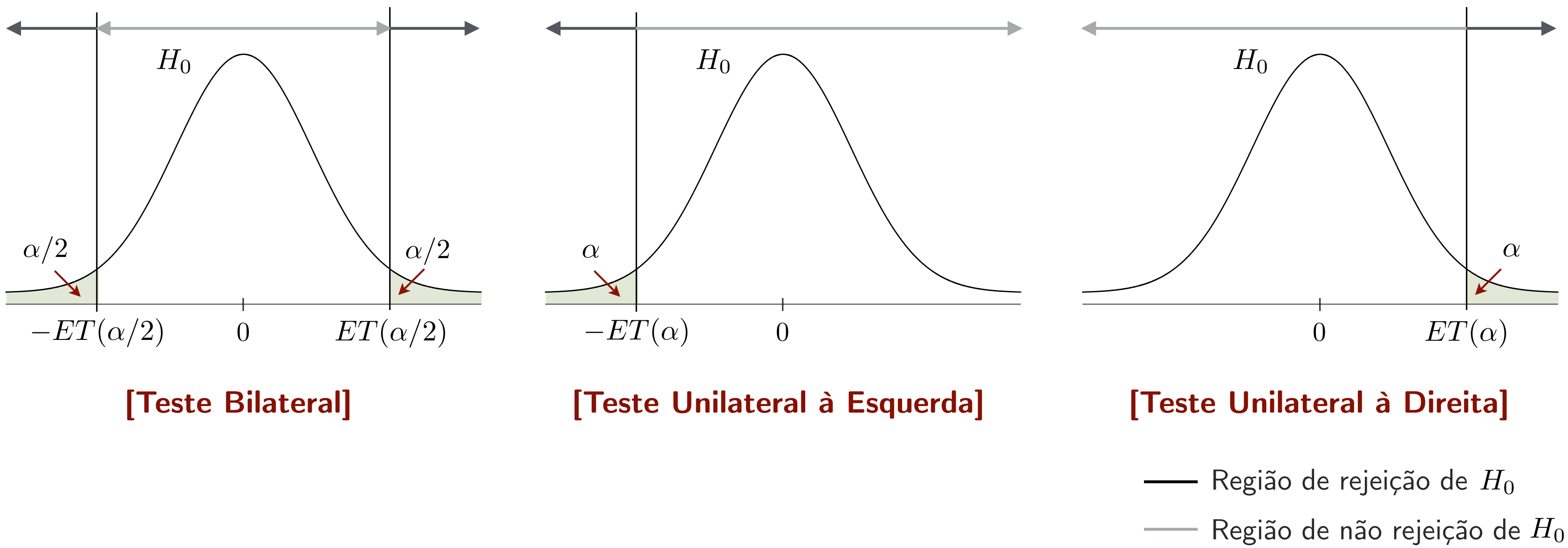
10.2.3. Definição da Regra de Decisão com Especificação do Nível de Significância do Teste

A decisão de rejeitar ou não a hipótese nula fundamenta-se no valor que a Estatística de Teste toma.

- ***A distribuição da Estatística de Teste é especificada na suposição de que H_0 é verdadeira***. Assim, se o valor da ET for muito improvável e, pelo contrário, este valor for razoavelmente provável quando se verificar a hipótese alternativa, então H_0 deverá ser rejeitada em favor de H_1.

Para que esta decisão possa ser tomada de uma forma controlada, é conveniente que, à partida se ***fixe o valor a partir do qual se considera improvável a validade da hipótese nula***. Tal fixação corresponde à definição da Regra de Decisão do teste. A formalização desta regra passa pela *especificação de uma região de rejeição*.

Distribuição da Estatística de Teste quando H_0 é Verdadeira



Nível de Significância do Teste ou Erro de Tipo I

A probabilidade de, no caso de H_0 ser verdadeira, o valor da ET pertencer à região de rejeição, designa-se por Nível de significância do Teste (α).

O ***Nível de Significância*** representa, então, a probabilidade (ou o risco) de se ***incorrer no erro de rejeitar H_0 quando esta é, de facto, verdadeira – Erro Tipo I***

Cálculo do Valor da Estatística de Teste e Tomada de Decisão

A última fase do Teste de Hipóteses corresponde ao cálculo do valor da Estatística de Teste e, face ao valor obtido, à aplicação da Regra de Decisão

- Se a Estatística de Teste pertencer à região de rejeição, $ET > ET(\alpha)$, *então* H_0 ***é rejeitada***;
- Se a Estatística de Teste não se localizar na região de rejeição, $ET < ET(\alpha)$, *então* H_0 ***não é rejeitada e o resultado do teste diz-se inconclusivo***.

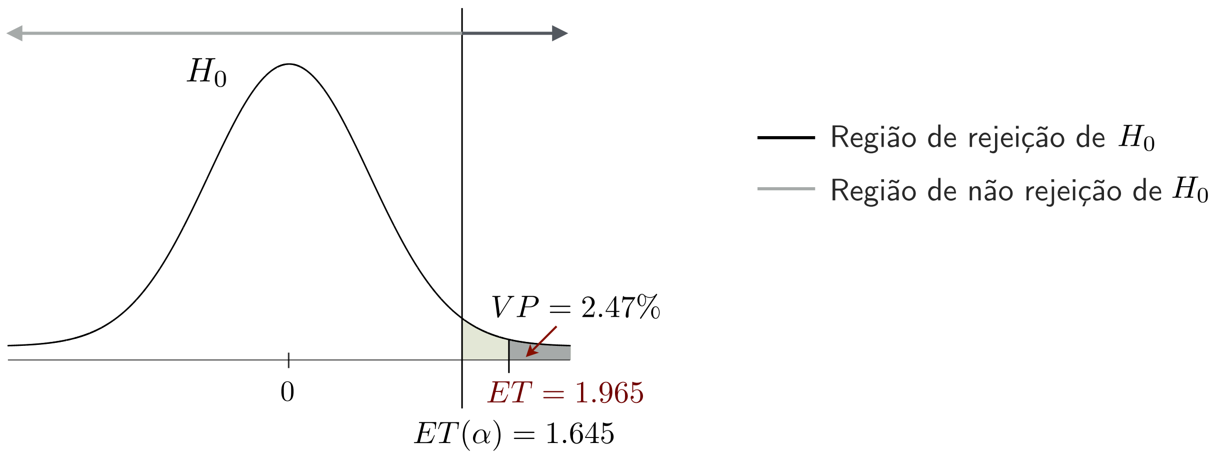
DGI
2019

Valor de Prova

De acordo com o procedimento anteriormente descrito para o teste de hipóteses, no final toma-se a decisão de rejeitar ou de não rejeitar da hipótese nula. Esta dicotomia é, na realidade artificial, na medida em que:

- A fixação de um nível de significância é francamente arbitrária;
- Os dados amostrais podem contradizer a hipótese nula em maior ou menor grau.

O Valor de Prova (VP ***), definido como correspondendo à probabilidade da*** ET ***tomar um valor igual ou mais extremo do que aquele que de facto é observado, constitui uma medida do grau com que os dados amostrais contradizem a hipótese nula.***

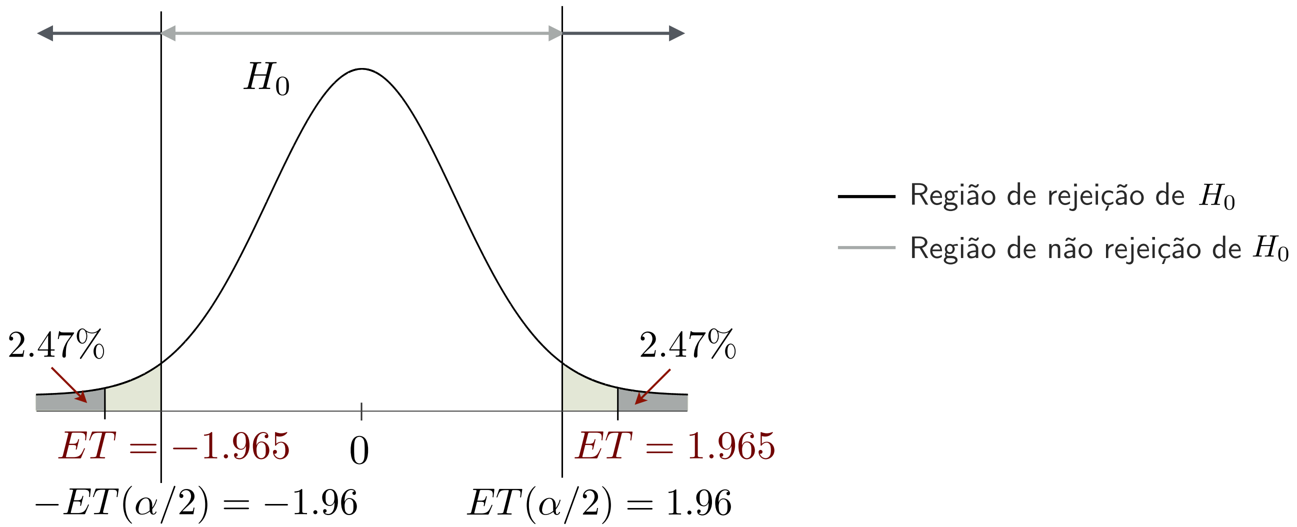


Note-se que, tal como a ET, o ***Valor de Prova é calculado admitindo que H_0 é verdadeira***.

Como é evidente, ***quanto menor for o Valor de Prova, maior será o grau com que a hipótese nula é contradita***.

- ***Dada a relevância da informação contida no Valor de Prova, é recomendável a sua inclusão explícita nos resultados de qualquer Teste de Hipóteses.*** Por exemplo, muito mais esclarecedor do que dizer que uma hipótese nula foi rejeitada ao nível de significância de 5% é afirmar que isso sucedeu e que o Valor de Prova foi, suponha-se, de 0.3%.

Quando o ***Teste é Bilateral***, no cálculo do Valor de Prova devem ***tomar-se em consideração ambas as caudas da distribuição da Estatística de Teste***.



$$VP = 2 \times 2.47\% = 4.94\%$$

Erro Tipo II e Potência do Teste

Foi dito anteriormente que existe o risco de se ***rejeitar*** H_0 quando a hipótese é, de facto ***verdadeira* – *Nível de Significância* (α) *ou Erro Tipo I***.

Existe ainda a possibilidade de se cometer um outro tipo de erro no teste de hipóteses: o que corresponde a *n**ão se rejeitar** H_0 **quando a hipótese alternativa,** H_1**, é** **verdadeira***. Este erro é designado por *Erro de Tipo II* e a probabilidade de nele se incorrer é denotada por β.

DGI
2019

	H_0 *Verdadeira*	H_0 *Falsa*
H_0 *rejeitada*	Erro do Tipo I *(probabilidade* α*)*	Potência do Teste *(probabilidade 1-*β*)*
H_0 *não rejeitada*	Decisão acertada *(probabilidade 1-*α*)*	Erro do Tipo II *(probabilidade* β*)*

A diferença ***1* - *β*** traduz a probabilidade de se *rejeitar* H_0 quando ela é, de facto, falsa.

Atendendo ao seu significado – ***a probabilidade de, correctamente, rejeitar uma hipótese nula falsa – tal diferença designa-se por Potência do Teste***.

DGI 2019

Resumindo:

$$P(\text{erro Tipo I}) = P\,(\text{rejeitar } H_0|H_0 \text{ verdadeira}) = P\,(ET \in \text{ZR}|H_0 \text{ verdadeira}) = \alpha$$

$$P(\text{erro Tipo II}) = P\,(\text{não rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = P\,(ET \notin \text{ZR}|H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

$$\text{Potência do Teste} = P\,(\text{rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = P\,(ET \in \text{ZR}|H_0 \text{ falsa}) = 1-\beta$$

Dessa forma, a determinação da probabilidade de se cometer um Erro de Tipo II passa por:

(1) Determinar em que condições amostrais H_0 não é rejeitada, considerando o teste que estamos a efectuar (*unilateral ou bilateral*);

(2) Determinar β (probabilidade de não rejeitarmos H_0 quando H_0 é falsa), considerando o valor verdadeiro e as condições amostrais de não rejeição obtidas no ponto anterior.

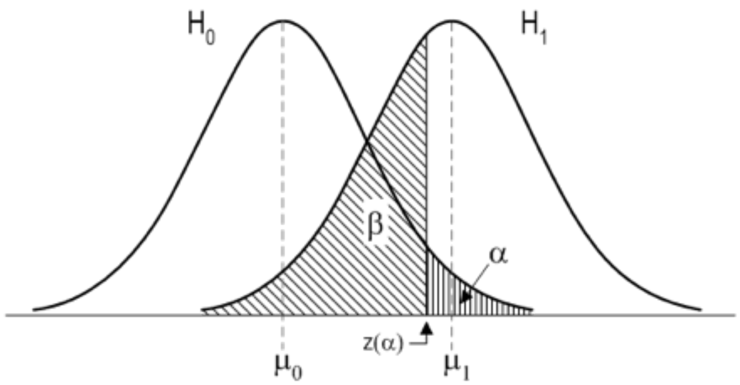
DGI
2019

Exemplo

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$
$$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$$

$X \to \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ *com variância conhecida*

$$ET = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$



(1) H_0 não rejeitada se: $ET < z(\alpha) \quad \to \quad \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z(\alpha) \Leftrightarrow \bar{X} < \mu_0 + z(\alpha) \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) $$\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P\left(\bar{X} < \mu_0 + z(\alpha) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | \mu = \mu_1\right) =$$

$$= P\left(z < \frac{\mu_0 + z(\alpha) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(z < z(\alpha) - \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

DGI
2019

Erro de Tipo I versus Erro do Tipo II

Seria desejável que tanto α como β fossem o mais pequenos possível. No entanto, se se mantiverem constantes os dados amostrais com base nos quais se calcula a estatística de teste:

- *ao diminuir α, aumenta β e, inversamente, ao diminuir β, aumenta α.*

É importante notar que ***só existe uma forma de diminuir um dos riscos α ou β sem aumentar o outro: para o conseguir, há que aumentar o número de dados amostrais com base nos quais é calculada a Estatística de Teste***.

Registe-se, no entanto, que as *a**mostras exageradamente grandes podem, no extremo, conduzir à rejeição, por excesso de potência, de uma hipótese nula que, embora não sendo exactamente verdadeira, seja aproximadamente verdadeira***.

Por outras palavras, com amostras de dimensões exageradas, o erro padrão da estatística de teste é tão reduzido que qualquer diferença insignificante entre H_0 e H_1 será detectada, implicando a rejeição de H_0.

10.3. Dimensionamento de Amostras

Como vimos, existem dois tipos de erros que se podem cometer num teste de hipóteses:

- o erro de rejeitar H_0 quando esta é verdadeira (Erro do tipo I; probabilidade α) e
- o erro de não rejeitar H_0 quando esta é falsa (Erro do Tipo II; probabilidade β).

É possível (por exemplo, para o caso de amostras de grande dimensão) determinar qual a dimensão da amostra a recolher se pretendemos controlar simultaneamente as probabilidades de incorreremos nos Erros de Tipo I e II.

DGI
2019

10.4. Relação entre Teste de Hipóteses e Intervalos de Confiança

A relação fundamental que existe entre os testes de hipóteses e os intervalos de confiança pode ser enunciada nos termos seguintes:

> *Uma hipótese nula,* H_0: $\theta = \theta_0$, *pode ser rejeitada a um nível de significância* α *se, e só se, o intervalo de confiança de* θ *a* $(1\text{-}\alpha)\cdot 100\%$ *não incluir o valor de* θ_0.

Note-se que a condição, impõe que o *intervalo de confiança seja compatível com a natureza de* H_1, ou seja, que para testes bilaterais se construam intervalos de confiança bilaterais e, para testes unilaterais (num sentido), se construam intervalos de confiança unilaterais (no mesmo sentido).

A implicação essencial desta relação é a de que se pode proceder ao Teste de Hipóteses recorrendo a Intervalos de Confiança.