Ficha de Trabalho 9 – Amostragem Aleatória

9.1 $X \to$ Peso dos contentores

$X \sim N(\mu = 920,\ \sigma = 250)$

a) 11 contentores

$S \to$ Peso dos 11 contentores

$S \sim$ Normal (soma de distribuições normais)

$\mu_S = n\mu_X = (11)(920) = 10\,120$ kg

$\sigma_S^2 = n\sigma_X^2 = (11)(250)^2 = 687\,500$ kg^2

$$P(S > 10 \text{ ton}) = P(S > 10\,000 \text{ kg})$$
$$= P\left(Z > \frac{10\,000 - 10\,120}{\sqrt{687\,500}}\right) = P(Z > -0.1447)$$
$$= 1 - P(Z > 0.1447) = 1 - 0.4425 = \underline{0.5575}$$

b) $P(S > 10\,000) < 1\%$

Tem que se resolver por tentativas (ou por eq. de 2º grau)

$\mu_S = 920n$ $\qquad$ $n \to$ nº de contentores

$\sigma_S = 250\sqrt{n}$

$$P(S > 10000) < 1\% \iff P\left(Z > \frac{10\,000 - 920n}{250\sqrt{n}}\right) < 1\%$$

$$\iff \underbrace{\frac{10\,000 - 920n}{250\sqrt{n}}}_{z^*} > 2.3263$$

Por tentativas:

n	z^*
10	1.0119
9	2.2933
8	3.7335

Resposta: 8 contentores

9.2 População : $M = 78$ Resistência $= 120$ kg

$X \to$ Peso dos macacos

$X \sim N(\mu = 7 , \sigma = 2.5)$ (kg)

a) $S \to$ Soma dos pesos dos 15 macacos

$S \sim$ Normal (soma de v.a. normais)

$$\mu_S = n\,\mu_X = (15)(7) = 105 \text{ kg}$$

$$\sigma_S^2 = n\,\sigma_X^2 \, \frac{M-n}{M-1} = (15)(2.5)^2 \, \frac{78-15}{78-1} = 76.70$$

$$P(S > 120) = P\left(Z > \frac{120-105}{\sqrt{76.70}}\right) = P(Z > 1.7127) = 0.0434$$

b) $X' \to$ Peso dos orangotangos População $M = 23$

$X' \sim N(\mu = 70, \sigma^2 = 400)$

$S' \to$ Peso de 4 macacos + orangotango

$S' \sim$ Normal (soma de v.a. normais)

$$\mu_{S'} = 4\,\mu_X + \mu_{X'} = (4)(7) + 70 = 98 \text{ kg}$$

$$\sigma_{S'}^2 = 4\,\sigma_X^2 \, \frac{M-n}{M-1} + \sigma_{X'}^2 = (4)(2.5)^2 \underbrace{\left(\frac{78-4}{78-1}\right)}_{\text{desprezável}} + 400$$

$$= 425 \text{ kg}^2$$

$$P(S' > 120) = P\left(Z > \frac{120-98}{\sqrt{425}}\right) = P(Z > 1.0671)$$

$$= 0.1430$$

$\therefore$ A afirmação é correcta.

9.3 Capacidade $= 1100$ kg

Populaçfactor: $M = 60$

$X \to$ Peso dos ministros

$$\mu_X = 60 \text{ kg}$$
$$\sigma_X = 9 \text{ kg}$$

a) $S \to$ Peso de 18 ministros

$$\mu_S = n\,\mu_X = (18)(60) = 1080 \quad \text{kg}$$
$$\sigma_S^2 = n\,\sigma_X^2 \,\frac{M-n}{M-1} = (18)(9)^2\,\frac{60-18}{60-1} = 1037.90 \quad \text{kg}^2$$

Pelo T.L.C $\quad S \approx N(\mu_S, \sigma_S^2)$

$$P(S > 1100) = P\left(Z > \frac{1100-1080}{\sqrt{1037.90}}\right) = P(Z > 0.6208)$$
$$= 0.2674$$

b) Neste caso $\quad M \approx +\infty$

$$\Rightarrow \sigma_S^2 = n\,\sigma_X^2 = (18)(9^2) = 1458 \quad \text{kg}^2$$

$$P(S > 1100) = P\left(Z > \frac{1100-1080}{\sqrt{1458}}\right) = P(Z > 0.5238)$$
$$= 0.3002$$

9.4 População : $M = 75$

$X \rightarrow$ Peso das maçãs

$\mu_X = 150$ gr.

$\sigma_X = 30$ gr.

a) 19 maçãs 3 kg

$S \rightarrow$ Soma dos pesos das 19 maçãs

$$\mu_S = n\mu_X = (19)(150) = 2850 \text{ gr.}$$

$$\sigma_S^2 = n\,\sigma_X^2\,\frac{M-n}{M-1} = (19)(30)^2\,\frac{75-19}{75-1} = 12\,940 \text{ gr}^2$$

Pelo T.L.C $S \approx$ Normal

$$P(\text{Ser prejudicada}) = P(S > 3000 \text{ gr.})$$

$$= P\left(z > \frac{3000-2850}{\sqrt{12\,940}}\right) = P(z > 1.3186) = 0.0937$$

b) $P(S > 3000) < 1\%$ $n = ?$

$$\mu_S = 150n \qquad \sigma_S^2 = (30^2)(n)\,\frac{75-n}{74}$$

$$P\left(z > \frac{3000-150n}{30\sqrt{n\,\frac{75-n}{74}}}\right) < 1\% \quad (=) \quad \overbrace{\frac{3000-150n}{30\sqrt{n\,\frac{75-n}{74}}}}^{z^*} > 2.3263$$

Por tentativas:

n	z^*
19	1.3186
18	2.6856

Resposta: deve dar 18 maçãs

9.5 $L \to$ duração das válvulas Long

$L \sim EN(\beta = 4500)$

$G \to$ duração das válvulas Gigalong

$G \sim EN(\beta = 5000)$

a) $P(L > 5000) = 1 - P(L \leq 5000) = 1 - \left(1 - e^{-5000/4500}\right)$

$= e^{-50/45} = 0.3292$

b) Seja $\bar{G} = \dfrac{\sum_{i=1}^{200} G_i}{200}$ e $\bar{L} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} L_i}{100}$

Pelo T.L.C $\bar{G}$ e $\bar{L}$ seguem distribuições aproximadamente normais

$\mu_{\bar{G}} = \mu_G = 5000 \quad h$

$\sigma^2_{\bar{G}} = \dfrac{\sigma^2_G}{n} = \dfrac{(5000)^2}{200} = 125\,000 \quad h^2$

$\mu_{\bar{L}} = \mu_L = 4500 \quad h$

$\sigma^2_{\bar{L}} = \dfrac{\sigma^2_L}{n} = \dfrac{(4500)^2}{100} = 202\,500 \quad h^2$

Seja $\bar{D}$ a diferença média

$\bar{D} = \bar{G} - \bar{L}$

$\bar{D} \sim$ Normal (diferença de v.a. normais)

$\mu_{\bar{D}} = \mu_{\bar{G}} - \mu_{\bar{L}} = 5000 - 4500 = 500 \quad h$

$\sigma^2_{\bar{D}} = \sigma^2_{\bar{G}} + \sigma^2_{\bar{L}} = 125\,000 + 202\,500 = 327\,500 \quad h^2$

$P(\bar{D} > 250) = P\left(z > \dfrac{250 - 500}{\sqrt{327\,500}}\right) = P(z > -0.4369)$

$= 1 - P(z > 0.4369) = 1 - 0.3311 = 0.6689$

9.6 240 lojas

$Y \to$ nº de funcionários

$\mu_Y = 4 \qquad \sigma_Y = 2$

$S \to$ Nº de funcionários das 240 lojas

Pelo T.L.C $\quad S \approx$ Normal

$$\mu_S = n\mu_Y = (240)(4) = 960$$

$$\sigma_S^2 = n\sigma_Y^2 = (240)(2)^2 = 960$$

$P(S > 1000) = P(S \geq 1000.5)$ (correcção de continuidade)

$$= P\left(Z > \frac{1000.5 - 960}{\sqrt{960}}\right) = P(Z > 1.3071) = \underline{0.0956}$$

9.7 $p = 0.539 \qquad n = 1000$

$Y \to$ nº de pessoas que votam em A

$Y \sim B(n = 1000,\ p = 0.539)$

$P(\text{Atribuir derrota}) = P(Y \leq 499)$

Pelo T.L.C. $\quad Y \approx$ Normal $(\mu = np,\ \sigma^2 = npq)$

$P(Y \leq 499) = P(Y \leq 499.5)$ (correcção de continuidade)

$$= P\left(Z \leq \frac{499.5 - (1000)(0.539)}{\sqrt{(1000)(0.539)(0.461)}}\right) = P(Z \leq -2.5058)$$

$$= P(Z \geq 2.5058) = 0.0061$$

9.8 $P(A) = 0.3$ $P(B) = 0.4$ $P(C) = 0.2$ $P(D) = 0.1$

a) $Y \to$ nº de pickles por hamburguer

y	$p(y)$
0	0.3
1	0.4
2	0.2
3	0.1

$$\mu_Y = 0.4 + 0.4 + 0.3 = 1.1$$
$$\sigma^2_Y = 0.4 + 0.8 + 0.9 - (1.1)^2 = 0.89$$

b) 525 hamburguer

$S \to$ Nº de pickles em 525 hamburguer

Pelo T.L.C $S \approx$ Normal

$$\mu_S = n\,\mu_Y = (525)(1.1) = 577.5$$
$$\sigma^2_S = n\,\sigma^2_Y = (525)(0.89) = 467.25$$

$$P(S \leq 600) = P(S \leq 600.5) \quad \text{(correcção de continuidade)}$$
$$= P\left(Z \leq \frac{600.5 - 577.5}{\sqrt{467.25}}\right) = P(Z \leq 1.0640)$$
$$= 1 - P(Z > 1.0640) = 1 - 0.1437 = 0.8563$$

c) $P(S > s^*) < 5\% \iff P(S \geq s^* + 0.5) < 5\%$

$$\iff P\left(Z \geq \frac{s^* + 0.5 - 577.5}{\sqrt{467.25}}\right) < 5\% \iff \frac{s^* - 577}{\sqrt{467.25}} > 1.6449$$

$$\iff s^* > 1.6449\sqrt{467.25} + 577$$

$$\iff s^* > 612.6$$

$\Rightarrow$ Encomendar 613 ou mais pickles