

6.1. Distribuição Uniforme [$U(a, b)$]

6.1.1. Introdução

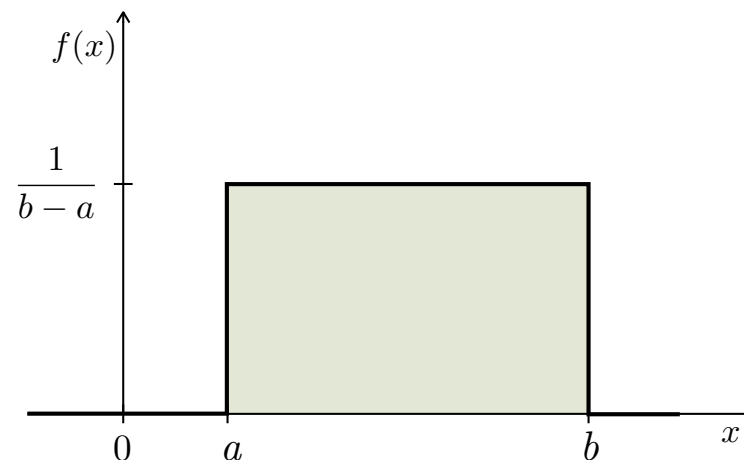
- ▶ A *distribuição Uniforme* é a mais simples das distribuições contínuas e uma das mais importantes.
- ▶ Utiliza-se para representar uma quantidade que varia aleatoriamente num intervalo $[a, b]$ e cuja probabilidade de tomar valores num qualquer sub intervalo de $[a, b]$ é proporcional ao seu comprimento.

Uma variável aleatória contínua X segue uma distribuição Uniforme quando a sua **função densidade de probabilidade é constante (positiva) dentro de um intervalo finito $[a, b]$ e nula fora desse intervalo.**

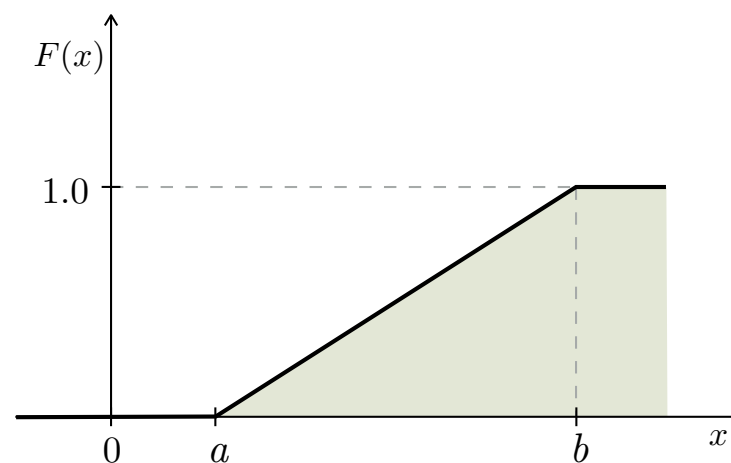
$$X \rightsquigarrow U(a, b) \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ k, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

6.1.2. Função Densidade e Distribuição de Probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



6.1.3. Parâmetros

Valor esperado	$\mu = \frac{a + b}{2}$
Variância	$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$

Exemplo

Suponha que selecciona um número no pertencente ao intervalo $[5, 7]$. Determine a probabilidade de esse número se encontrar compreendido entre:

- (a) 6.3 e 6.95
- (b) 6.5 e 7.5

6.2. Distribuição Exponencial Negativa [EN(β)]

6.2.1. Introdução

Existe uma relação estreita entre a distribuição Exponencial Negativa e a distribuição de Poisson

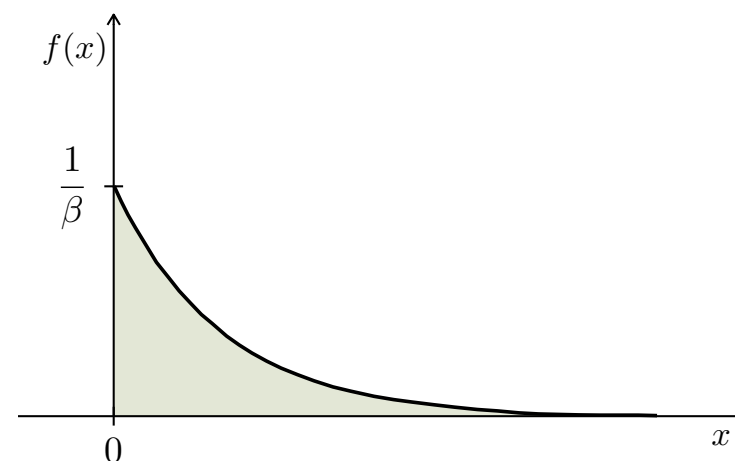
- ▶ Admitindo que λ é o parâmetro da distribuição de Poisson que **descreve o número de ocorrências por unidade de tempo (ou de espaço)**, a variável tempo (ou distância) entre ocorrências sucessivas segue uma distribuição Exponencial Negativa de parâmetro $\beta = 1/\lambda$.

$$X \rightsquigarrow \text{EN}(\beta)$$

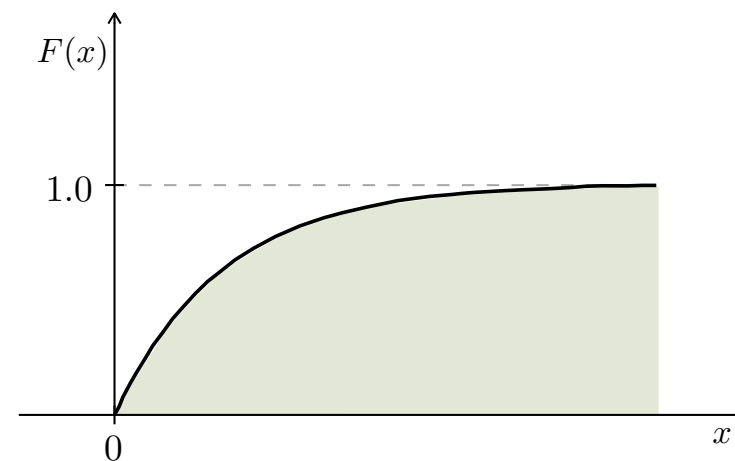
- ▶ Trata-se de uma das distribuições contínuas mais importantes e é muito utilizada no estudo de filas de espera e de fiabilidade de sistemas complexos

6.2.2. Função Densidade e Distribuição de Probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \times e^{-\frac{x}{\beta}}$$



$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$



6.2.3. Parâmetros

Valor esperado	$\mu = \beta = \frac{1}{\lambda}$
Variância	$\sigma^2 = \beta^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$

Exemplo

O tempo entre duas chamadas consecutivas que chegam a uma central telefónica segue uma distribuição exponencial cuja média é de 2 segundos.

- (a) Qual a probabilidade de a central não receber chamadas nos próximos 5 segundos?
- (b) Qual a probabilidade de a central receber pelo menos 2 chamadas nos próximos 5 segundos?

6.3. Distribuição Normal $[N(\mu, \sigma^2)]$

6.3.1. Introdução

A distribuição Normal é, pela sua forma e pelas suas propriedades, aquela que mais frequentemente é utilizada para *descrever fenómenos físicos contínuos* sendo muito utilizada, como veremos em *Inferência estatística*.

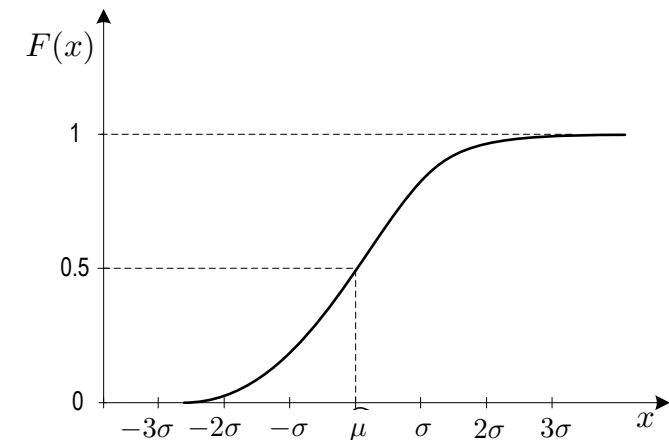
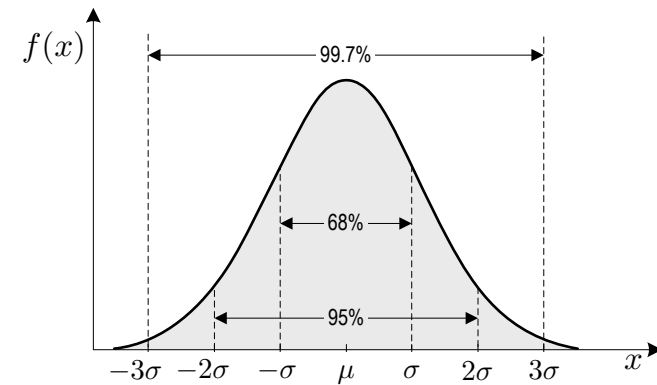
A distribuição Normal fica completamente especificada através:

- ▶ Do seu valor esperado, μ
- ▶ Da sua variância, σ^2
- ▶ Da sua função densidade de probabilidade, $f(x)$

6.3.2. Função Densidade e Distribuição de Probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \sigma^2}} \times e^{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



A função distribuição de probabilidade não é integrável analiticamente, só podendo ser definida pela via da integração numérica.

6.3.3. Distribuição Normal Reduzida [$Z(0, 1)$]

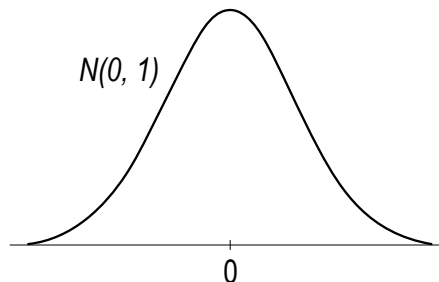
Se uma variável X segue uma distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ então a variável

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Segue uma distribuição Normal com valor esperado nulo e variância unitária

$$Z \rightsquigarrow N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$$

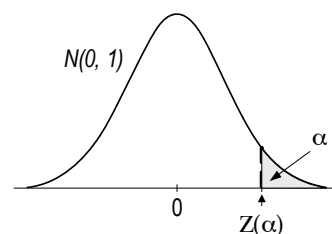
A passagem de uma variável normal para uma variável normal reduzida pode ser entendida como uma **dupla transformação**, correspondendo à translação da origem de μ para 0 e à mudança de escala executada através do divisor σ .



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \sigma^2}} \times e^{-\frac{z^2}{2}}$$

6.3.4. Valores Tabelados

Os valores tabelados correspondem à área assinalada na Figura:



$$P[Z \geq z(\alpha)] = \alpha$$

$Z(\alpha) = a + b$											
$a \downarrow$	$b \rightarrow$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1		0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2		0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3		0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4		0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5		0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6		0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7		0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8		0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9		0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0		0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1		0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2		0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3		0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4		0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5		0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559

Exemplo

Considere a variável aleatória $X \rightsquigarrow N(\mu = 100, \sigma^2 = 100)$

Determine:

(a) $P(X > 95)$

(b) $P(95 < X < 110)$

6.3.5. Relação entre a Distribuição Normal e a Distribuição Binomial

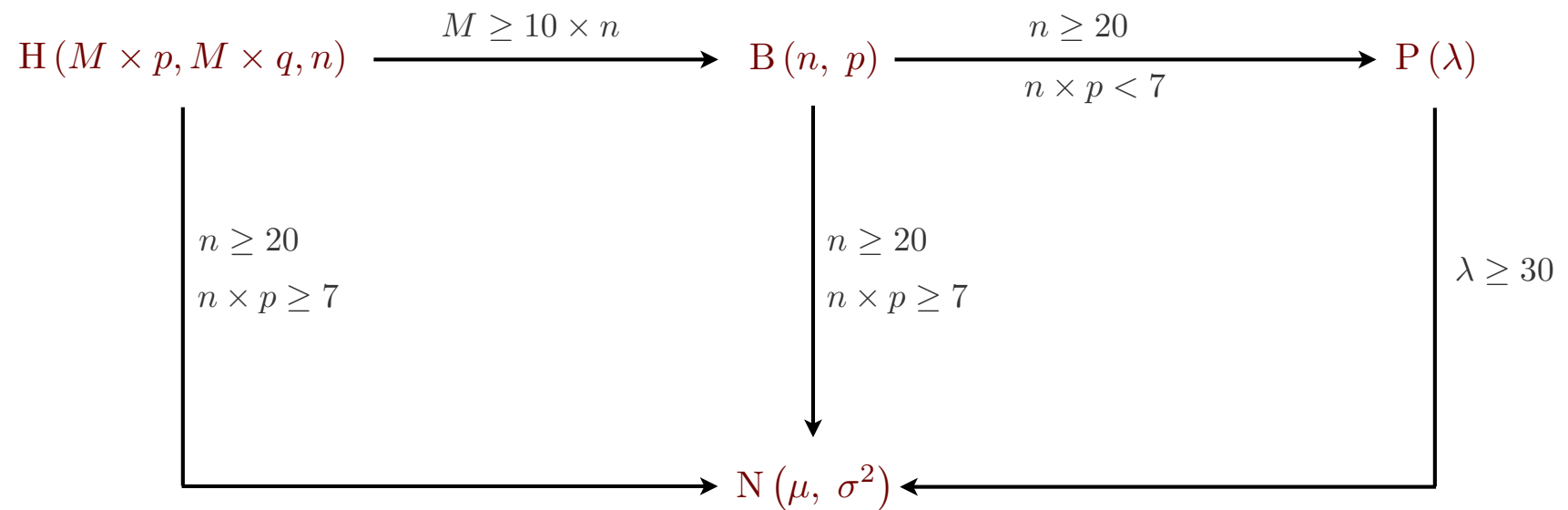
Uma distribuição Binomial $B(n, p)$ na qual:

- ▶ A *dimensão* da amostra (n) é elevada ($n \geq 20$)
- ▶ p tome um valor suficientemente grande para que a *distribuição seja simétrica* ($n \times p \geq 7$)

Pode ser aproximada por uma distribuição Normal com:

$$B(n, p) \approx N(\mu = n \times p, \sigma^2 = n \times p \times q)$$

6.3.6. Aproximação entre as Diferentes Distribuições



Hipergeométrica

$$\mu = n \times p$$

$$\sigma^2 = n \times p \times q \times \frac{M - n}{M - 1}$$

Binomial

$$\mu = n \times p$$

$$\sigma^2 = n \times p \times q$$

Poisson

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

6.4. Distribuição Qui-Quadrado $[\chi^2(GL)]$

6.4.1. Definição

Considerem-se GL variáveis aleatórias, Z_i , mutuamente independentes, seguindo todas elas a distribuição normal padronizada:

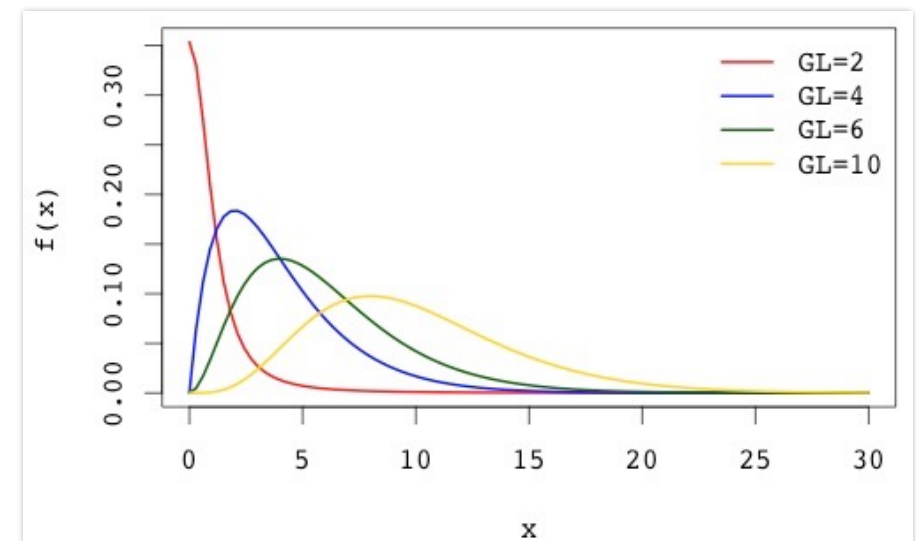
$$Z_i \rightsquigarrow \text{IN}(0, 1), \quad i = 1, \dots, GL$$

A variável aleatória

$$X = \sum_{i=1}^{GL} Z_i^2 \rightsquigarrow \chi_{GL}^2$$

com: $\mu = GL$

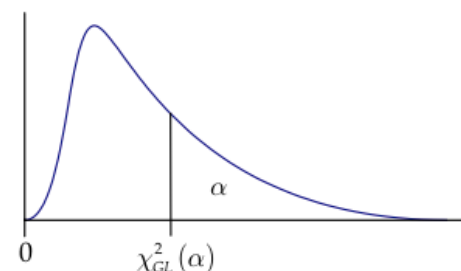
$$\sigma^2 = 2 \times GL$$



6.4.2. Valores Tabelados da Distribuição Qui-Quadrado

Valores Críticos de Distribuições χ_{GL}^2

Os valores tabelados correspondem a $\chi_{GL}^2(\alpha)$, tais que, $P(\chi_{GL}^2 \geq \chi_{GL}^2(\alpha)) = \alpha$.



GL	α												
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Extrato da Tabela de Valores Críticos da Distribuição Qui-Quadrado (Tabelas: pág. 16)

6.5. Distribuição *t*-Student $[t(GL)]$

6.5.1. Definição

Sejam Z e V , duas variáveis aleatórias independentes e:

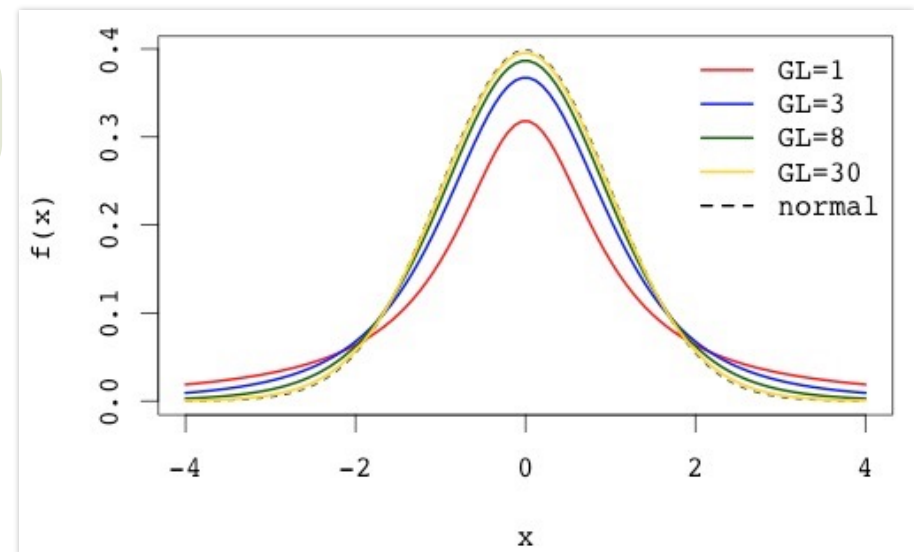
$$Z \rightsquigarrow N(0, 1) \quad \text{e} \quad V \rightsquigarrow \chi_{GL}^2$$

A variável aleatória

$$X = \frac{Z}{\sqrt{V/GL}} \rightsquigarrow t_{GL}$$

com: $\mu = 0$

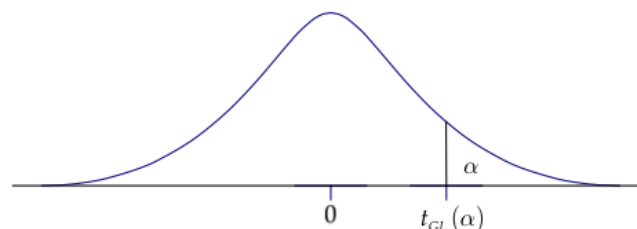
$$\sigma^2 = \frac{GL}{GL - 2}$$



6.5.2. Valores Tabelados da Distribuição *t*-Student

Valores Críticos de Distribuições t_{GL}

Os valores tabelados correspondem a $t_{GL}(\alpha)$, tais que, $P(t_{GL} \geq t_{GL}(\alpha)) = \alpha$.



GL	α	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001	0.0005
1		1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2		0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.327	31.599
3		0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.215	12.924
4		0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5		0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6		0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7		0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8		0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9		0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10		0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11		0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
60		0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
120		0.6765	0.8446	1.0409	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174	3.1595	3.3735
∞		0.6745	0.8416	1.0364	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

Extrato da Tabela de Valores Críticos da Distribuição t_{GL} (Tabelas: pág. 16)

6.6. Distribuição F-Fisher [$F(GL_1, GL_2)$]

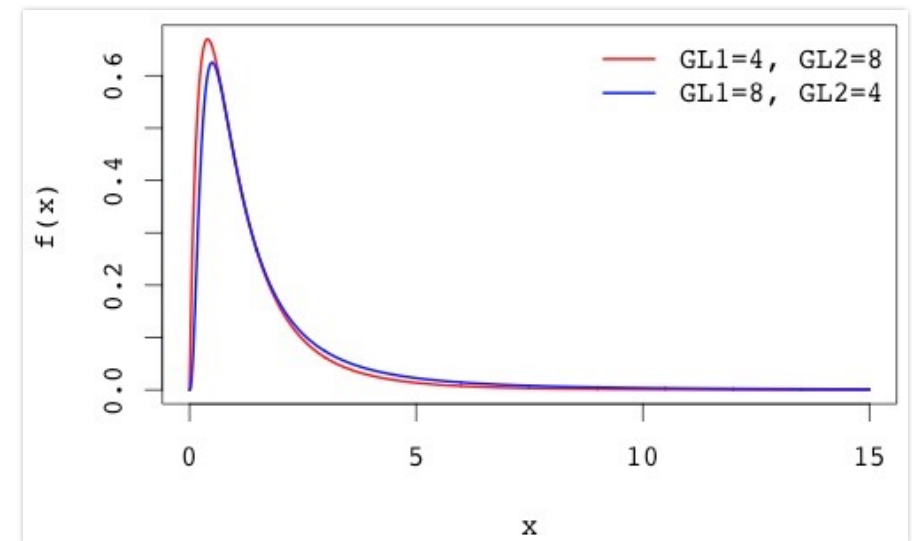
6.6.1. Definição

Sejam X_1 e X_2 , duas variáveis aleatórias independentes, caracterizadas por distribuições do Qui-Quadrado:

$$X_1 \rightsquigarrow \chi_{GL_1}^2 \quad \text{e} \quad X_2 \rightsquigarrow \chi_{GL_2}^2$$

A variável aleatória

$$X = \frac{X_1/GL_1}{X_2/GL_2} \rightsquigarrow F_{GL_1, GL_2}$$



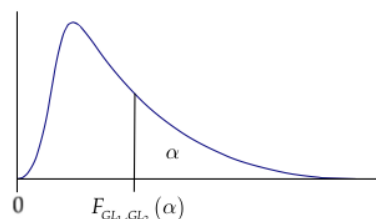
$$\text{com: } \mu = GL_2 GL_1 - 2, \quad GL_2 > 2$$

$$\sigma^2 = \frac{2 \times GL_2 \times (GL_1 + GL_2 - 2)}{GL_1 \times (GL_2 - 2)^2 \times (GL_2 - 4)}, \quad GL_2 > 4$$

6.6.2. Valores Tableados da Distribuição F-Fisher

Valores Críticos de Distribuições F_{GL_1, GL_2}

Os valores tabelados correspondem a $F_{GL_1, GL_2}(\alpha)$, tais que, $P(F_{GL_1, GL_2} \geq F_{GL_1, GL_2}(\alpha)) = \alpha$.



A seguinte equivalência poderá ser útil:

$$F_{GL_1, GL_2}(\alpha) = \frac{1}{F_{GL_2, GL_1}(1 - \alpha)}$$

$\alpha = 10\%$																							
GL ₂	GL ₁																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	20	25	30	40	50	100	150	200
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.47	60.71	61.07	61.35	61.57	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	63.01	63.11	63.17
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.401	9.408	9.420	9.429	9.436	9.441	9.451	9.458	9.466	9.471	9.481	9.485	9.486
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230	5.222	5.216	5.205	5.196	5.190	5.184	5.175	5.168	5.160	5.155	5.144	5.141	5.139
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.907	3.896	3.878	3.864	3.853	3.844	3.828	3.817	3.804	3.795	3.778	3.772	3.769
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.282	3.268	3.247	3.230	3.217	3.207	3.187	3.174	3.157	3.147	3.126	3.119	3.116
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937	2.920	2.905	2.881	2.863	2.848	2.836	2.815	2.800	2.781	2.770	2.746	2.738	2.734
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.684	2.668	2.643	2.623	2.607	2.595	2.571	2.555	2.535	2.523	2.497	2.488	2.484
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	2.519	2.502	2.475	2.455	2.438	2.425	2.400	2.383	2.361	2.348	2.321	2.312	2.307
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416	2.396	2.379	2.351	2.329	2.312	2.298	2.272	2.255	2.232	2.218	2.189	2.179	2.174
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323	2.302	2.284	2.255	2.233	2.215	2.201	2.174	2.155	2.132	2.117	2.087	2.077	2.071
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	2.227	2.209	2.179	2.156	2.138	2.123	2.095	2.076	2.052	2.036	2.005	1.994	1.989
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866	1.841	1.820	1.785	1.758	1.736	1.718	1.683	1.659	1.627	1.607	1.565	1.549	1.542
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855	1.830	1.809	1.774	1.747	1.724	1.706	1.671	1.647	1.615	1.594	1.551	1.536	1.528
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845	1.820	1.799	1.764	1.736	1.714	1.695	1.660	1.636	1.603	1.583	1.539	1.523	1.515
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836	1.811	1.790	1.754	1.726	1.704	1.685	1.650	1.625	1.592	1.572	1.528	1.512	1.504
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827	1.802	1.781	1.745	1.717	1.695	1.676	1.640	1.616	1.583	1.562	1.517	1.501	1.493
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819	1.794	1.773	1.737	1.709	1.686	1.667	1.632	1.606	1.573	1.552	1.507	1.491	1.482

Extrato da Tabela de Valores Críticos da Distribuição F-Fisher (Tabelas: págs. 19 e 20)