Primitivas imediatas

Seja f uma função real e k, n, m, a, C constantes reais.

1. $\int k \, \mathrm{dx} = kx + C$
2. $\int f' f^n \, \mathrm{dx} = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \frac{f'}{f} \, \mathrm{dx} = \ln|f| + C$
4. $\int f' a^f \, \mathrm{dx} = \frac{a^f}{\ln(a)} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
5. $\int f' \operatorname{sen}(f) \, \mathrm{dx} = -\cos(f) + C$
6. $\int f' \cos(f) \, \mathrm{dx} = \operatorname{sen}(f) + C$
7. $\int f' \operatorname{tg}(f) \, \mathrm{dx} = \ln|\sec(f)| + C = -\ln|\cos(f)| + C,$ $\cos(f) \neq 0$
8. $\int f' \operatorname{cotg}(f) \, \mathrm{dx} = \ln|\operatorname{sen}(f)| + C, \quad \operatorname{sen}(f) \neq 0$
9. $\int f' \sec^2(f) \, \mathrm{dx} = \operatorname{tg}(f) + C$
10. $\int f' \operatorname{cosec}^2(f) \, \mathrm{dx} = -\operatorname{cotg}(f) + C$
11. $\int f' \sec(f) \, \mathrm{dx} = \ln|\sec(f) + \operatorname{tg}(f)| + C,$ $\cos(f) \neq 0, \sec(f) + \operatorname{tg}(f) \neq 0$
12. $\int f' \operatorname{cosec}(f) \, \mathrm{dx} = \ln|\operatorname{cosec}(f) - \operatorname{cotg}(f)| + C,$ $\operatorname{sen}(f) \neq 0, \operatorname{cosec}(f) - \operatorname{cotg}(f) \neq 0$
13. $\int f' \sec(f) \operatorname{tg}(f) \, \mathrm{dx} = \sec(f) + C$
14. $\int f' \operatorname{cosec}(f) \operatorname{cotg}(f) \, \mathrm{dx} = -\operatorname{cosec}(f) + C$
15. $\int \frac{f'}{a^2 + f^2} \, \mathrm{dx} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{f}{a}\right) + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg}\left(\frac{f}{a}\right) + C$
16. $\int \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}} \, \mathrm{dx} = \operatorname{arcsen}(f) + C = -\arccos(f) + C,$ $|f| < 1$
17. $\int \frac{f'}{|f|\sqrt{f^2 - 1}} \, \mathrm{dx} = \operatorname{arcsec}(f) + C = -\operatorname{arccosec}(f) + C,$ $|f| > 1$

Primitivação por partes

$\int f(x) g(x) \, \mathrm{dx} = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) \, \mathrm{dx}, \qquad$ sabendo que $F(x) = \int f(x) \, \mathrm{dx}$

Primitivação por substituição

	Tipo de função	Substituição
S1.	$R(\cos(f), \operatorname{sen}(f))$	$t = \operatorname{tg}\left(\frac{f}{2}\right)$
S2.	$R\left(x, \sqrt{1 - f^2}\right)$	$f = \operatorname{sen}(t)$ ou $f = \cos(t)$
S3.	$R\left(x, \sqrt{f^2 - 1}\right)$	$f = \sec(t)$
S4.	$R\left(x, \sqrt{1 + f^2}\right)$	$f = \operatorname{tg}(t)$

Fórmulas Trigonométricas

$\operatorname{sen}^2(f) + \cos^2(f) = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2(f) = \sec^2(f)$

$1 + \operatorname{cotg}^2(f) = \operatorname{cosec}^2(f)$

$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

$\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$

Primitivas Úteis

P1. $$\int \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{dx} = x \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C,\ a > 0$$

P2. $$\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{dx} = x \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C,\ a > 0$$

P3. $$\int \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{dx} = x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2} \ln\left(a^2 + x^2\right) + C,\ a > 0$$

P4. $$\int \operatorname{sen}^2(mx)\, \mathrm{dx} = \frac{1}{2m}\left(mx - \operatorname{sen}(mx)\cos(mx)\right) + C$$

P5. $$\int \cos^2(mx)\, \mathrm{dx} = \frac{1}{2m}\left(mx + \operatorname{sen}(mx)\cos(mx)\right) + C$$

P6. $$\int \operatorname{sen}^n(x)\, \mathrm{dx} = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}$$

P7. $$\int \cos^n(x)\, \mathrm{dx} = \frac{\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}$$

P8. $$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\, \mathrm{dx} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1}(x)\cos^{n-1}(x)}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}, \quad \text{para } m \neq 1 \text{ ou } n \neq 1$$

P9. $$\int \operatorname{tg}^n(x)\, \mathrm{dx} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}, \quad n \neq 1$$

P10. $$\int \operatorname{cotg}^n(x)\, \mathrm{dx} = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}, \quad n \neq 1$$

P11. $$\int \sec^n(x)\, \mathrm{dx} = \frac{\operatorname{tg}(x)\sec^{n-2}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}, \quad n \neq 1$$

P12. $$\int \operatorname{cosec}^n(x)\, \mathrm{dx} = -\frac{\operatorname{cotg}(x)\operatorname{cosec}^{n-2}(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2}(x)\, \mathrm{dx}, \quad n \neq 1$$

P13. $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, \mathrm{dx} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

P14. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{dx} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$$

P15. $$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, \mathrm{dx} = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C,\ a > 0$$

P16. $$\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}\, \mathrm{dx} = \sqrt{a^2 + x^2} + a \ln\left|\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right| + C,\ a > 0$$

P17. $$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{dx} = \frac{x}{8}\left(2x^2 - a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ a > 0$$

P18. $$\int \frac{1}{(1 + x^2)^n}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1 + x^2)^{n-1}}\, \mathrm{dx}, \quad n \neq 1 \text{ (fórmula de recorrência)}$$

P19. $\displaystyle\int \sinh(x)\,\mathrm{dx} = \cosh(x) + C$

P20. $\displaystyle\int \cosh(x)\,\mathrm{dx} = \sinh(x) + C$

P21. $\displaystyle\int \tanh(x)\,\mathrm{dx} = \ln|\cosh(x)| + C$

P22. $\displaystyle\int \coth(x)\,\mathrm{dx} = \ln|\sinh(x)| + C$

P23. $\displaystyle\int \mathrm{sech}(x)\,\mathrm{dx} = \mathrm{arctg}(\sinh(x)) + C$

P24. $\displaystyle\int \mathrm{cosech}(x)\,\mathrm{dx} = \ln\left|\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

Funções Hiperbólicas

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Primitivação de fracções racionais

Para primitivar funções do tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$$

1. Se $m \geq n$, por divisão reduz-se ao caso em que $m < n$ (recordar que: $\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$).

2. Se $m < n$ deve factorizar-se o polinómio $Q(x)$:

   $Q(x) = b_0(x-\alpha)^p(x-\beta)^q \cdot \cdots \cdot ((x-a)^2+b^2)^r$, com $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$ e $p, q, \cdots, r \in \mathbb{N}$ tais que $p+q+\cdots+r = n$.
   Escreve-se $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ em frações simples de acordo com a factorização de $Q(x)$ encontrada:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_p}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-\alpha)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \\ + {} & \frac{B_q}{(x-\beta)^q} + \frac{B_{q-1}}{(x-\beta)^{q-1}} + \cdots + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{B_1}{x-\beta} + \cdots + \\ + {} & \frac{C_r + D_r x}{((x-a)^2+b^2)^r} + \frac{C_{r-1} + D_{r-1} x}{((x-a)^2+b^2)^{r-1}} + \cdots + \frac{C_2 + D_2 x}{((x-a)^2+b^2)^2} + \frac{C_1 + D_1 x}{(x-a)^2+b^2}\end{aligned}$$

   As constantes presentes na decomposição anterior podem ser determinadas usando, quando possível:

   a) **Regra do "tapa"**

      i. (raízes reais) Se $Q(x) = (x-\alpha)^p Q_1(x)$ então

      $$A_p = \left[\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right]_{x=\alpha}$$

      ii. (raízes complexas) Se $Q(x) = ((x-a)^2+b^2)^r Q_1(x)$ e $x = a + bi \in \mathbb{C}$

      $$\left[C_r + D_r x = \frac{P(x)}{Q_1(x)}\right]_{x=a+bi}$$

   b) **Regra dos "Agás"**

      (raíz real) Se $Q(x) = (x-\alpha)^p Q_1(x)$,

      $$\left[\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right]_{x=\alpha+h} = A_p + A_{p-1}h + \cdots + A_2h^{p-2} + A_1h^{p-1} + \frac{R(\alpha+h)}{Q_1(\alpha+h)}h^p$$

   c) **Regra da derivação**

      (raíz real) Se $Q(x) = (x-\alpha)^p Q_1(x)$ (raíz real)

      $$\left[\frac{1}{r!} \cdot \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)\right]_{x=\alpha} = A_{p-r}, \quad 0 \leq r \leq p-1$$

Exemplos de séries numéricas	Série	Convergência ou Divergência	Comentários
Série geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ a constante	Converge se $\lvert r \rvert < 1$ com $S = a\dfrac{r}{1-r}$ Diverge se $\lvert r \rvert \geq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é análogo a ar^n.
Série p ou série de Riemann	$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	Converge se $p > 1$ Diverge se $p \leq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é análogo a $\dfrac{1}{n^p}$.
Série de Mengoli	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+p}$	Converge se a sucessão associada convergir.	

Critérios de convergência para séries numéricas de termos não negativos

Critério	Série	Convergência ou Divergência	Comentários
	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Diverge se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.	Inconclusivo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Integral	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Converge se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge Diverge se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge	A função f obtida de $f(x) = a_x$ deve ser contínua, não negativa, decrescente e facilmente integrável.
Comparação	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $a_n > 0$, $b_n > 0$	**1ºCC** i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n$ para todo o n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge e $a_n \geq b_n$ para todo o n, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. **2ºCC** i) Se $\lim_{n\to\infty}\left(a_n/b_n\right) = c > 0$, ambas as séries convergem ou ambas divergem. ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left(a_n/b_n\right) = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. iii) Se $\lim_{n\to\infty}\left(a_n/b_n\right) = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.	A série de comparação $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é em geral uma série geométrica ou uma série p. Para determinar b_n considere apenas os termos de a_n que têm maior efeito sobre a magnitude.
Razão	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (ou ∞) a série: ▪ converge se $L < 1$ ▪ diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$. Útil se a_n envolve factoriais ou potências de grau n.
Raiz	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ (ou ∞) a série: ▪ converge se $L < 1$ ▪ diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$. Útil se a_n envolve potências de grau n.

Critério de convergência para séries numéricas de termos alternados

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$	▪ Analisar a convergência da série dos módulos associada, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ ——— ▪ Critério de Leibniz: Converge se: i) $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	Distinguir entre <u>convergência absoluta</u> e <u>convergência condicional</u>