6.1 **a)** $Y \sim B(n = 5;\ p = 0{,}4)$

Dos valores tabelados de Distribuições Binomiais →

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,0778	0,0778
1	0,2592	0,3370
2	0,3456	0,6826
3	0,2304	0,9130
4	0,0768	0,9898
5	0,0102	1

$\boldsymbol{P(Y=0)=0,0778}$

$\boldsymbol{P(Y>1)} = 1 - P(Y \le 1) = 1 - F(1) = 1 - 0{,}3370 = \mathbf{0,6630}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \mathbf{0,6826}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = P(Y \le 3) - P(Y \le 0) = F(3) - F(0) =$

$= 0{,}9130 - 0{,}0778 = \mathbf{0,8352}$

b) $Y \sim H(M = 10;\ p = 0{,}3)$

$Mp = 3;\ Mq = 7$

$p(y) = \frac{C_y^3 \times C_{5-y}^7}{C_5^{10}}$. Por exemplo,

$p(1) = \frac{C_1^3 \times C_4^7}{C_5^{10}} = 0{,}4167$

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,0833	0,0833
1	0,4167	0,5000
2	0,4167	0,9167
3	0,0833	1

$\boldsymbol{P(Y=0)=0,0833}$

$\boldsymbol{P(Y>1)} = 1 - F(1) = 1 - 0{,}5000 = \mathbf{0,5000}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \mathbf{0,9167}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = F(3) - F(0) = 1 - 0{,}0833 = \mathbf{0,9167}$

c) $Y \sim BN(r = 1,\ p = 0{,}2) =$

d) $= G(p = 0{,}2)$

$p(y) = (0{,}2)(0{,}8)^y$

Por exemplo,

$p(1) = (0{,}2)(0{,}8)^1 = 0{,}16$

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,2	0,2
1	0,16	0,36
2	0,128	0,488
3	0,1024	0,5904
4	0,0819	0,6723
⋮	⋮	⋮

$\boldsymbol{P(Y=0)=0,2}$

$\boldsymbol{P(Y>1)} = 1 - F(1) = 1 - 0{,}36 = \mathbf{0,64}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \mathbf{0,488}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = F(3) - F(0) = 0{,}5904 - 0{,}2 = \mathbf{0,3904}$

e) $Y \sim Poison(\lambda = 2{,}6)$

Dos valores tabelados de Distribuições de Poisson →

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,0743	0,0743
1	0,1931	0,2674
2	0,2510	0,5184
3	0,2176	0,7360
4	0,1414	0,8774
⋮	⋮	⋮

$\boldsymbol{P(Y = 0) = 0{,}0743}$

$\boldsymbol{P(Y > 1)} = 1 - F(1) = 1 - 0{,}2674 = \boldsymbol{0{,}7326}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \boldsymbol{0{,}5184}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = F(3) - F(0) = 0{,}7360 - 0{,}0743 = \boldsymbol{0{,}6617}$

6.2 **a)** $\boldsymbol{\mu} = n \times p = (5)(0{,}4) = \boldsymbol{2}$; $\boldsymbol{\eta = 2} \leftarrow (F(2) = 0{,}6826 \; com \; F(1) = 0{,}3370)$; $\boldsymbol{\xi = 2} \leftarrow (p(2) é \; o \; máximo)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = n \times p \times q = (5)(0{,}4)(0{,}6) = \boldsymbol{1{,}2}$

b) $\boldsymbol{\mu} = n \times p = (5)(0{,}3) = \boldsymbol{1{,}5}$; $\boldsymbol{\eta = 1} \leftarrow (F(1) = 0{,}5 \; com \; F(0) = 0{,}0833)$; $\boldsymbol{\xi = 1{,}5} \leftarrow (média \; entre \; 1 \; e \; 2)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = n \times p \times q \times {}^{M-n}/_{M-1} = (5)(0{,}3)(0{,}7) \times {}^{10-5}/_{10-1} = \boldsymbol{0{,}58[3]}$

c) d) $\boldsymbol{\mu} = {}^{q}/_{p} = {}^{0{,}8}/_{0{,}2} = \boldsymbol{4}$; $\boldsymbol{\eta = 3} \leftarrow (F(3) = 0{,}5964 \; com \; F(2) = 0{,}488)$; $\boldsymbol{\xi = 0} \leftarrow (p(0) é \; o \; máximo)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = {}^{q}/_{p^2} = {}^{0{,}8}/_{(0{,}2)^2} = \boldsymbol{20}$

e) $\boldsymbol{\mu} = \lambda = \boldsymbol{2{,}6}$; $\boldsymbol{\eta = 2} \leftarrow (F(2) = 0{,}5184 \; com \; F(1) = 0{,}2674)$; $\boldsymbol{\xi = 2} \leftarrow (p(2) é \; o \; máximo)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = \lambda = \boldsymbol{2{,}6}$

6.4 $12\ máquinas\ ;$ $\quad P(máquina\ funcionar) = 0{,}6\ ;$ $\quad P(sistema\ funcionar) = ?$

$Y\ \rightarrow\ Número\ de\ máquinas\ que\ funcionam\ (em\ 12)\ ;$ $\quad Y \sim B(n = 12;\ p = 0{,}6)$

$P(sistema\ funcionar) = P(Y \geq 6) = P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) + P(Y = 11) + P(Y = 12)$

Da tabela de Dist. Binomiais vem; $\boldsymbol{P(sist. func.)} = 0{,}1766 + 0{,}2270 + 0{,}2128 + 0{,}1419 + 0{,}0639 + 0{,}0174 + 0{,}0022 = \mathbf{0{,}8418}$

6.5 $Y\ \rightarrow\ Número\ de\ automóveis\ por\ hora\ ;$ $\quad Y \sim Poisson(\lambda = 6)$

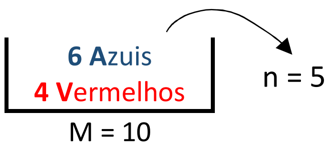
$Y'\ \rightarrow\ Número\ de\ automóveis\ em\ duas\ horas\ ;$ $\quad Y' \sim Poisson(\lambda' = 6 \times 2 = 12)$

$P(Y' < 5) = P(Y' \leq 4) = P(Y' = 4) + P(Y' = 3) + P(Y' = 2) + P(Y' = 1) + P(Y' = 0)\ ;$ sendo,

$$p(y') = \frac{e^{-12} \times 12^{y'}}{y'!}$$

$\boldsymbol{P(Y' < 5)} = 0{,}00531 + 0{,}00177 + 0{,}00044 + 0{,}00007 + 0{,}00001 = \mathbf{0{,}00760}$

6.6



$Y\ \rightarrow\ Número\ de\ fichas\ azuis\ em\ 5\ extrações$, (sem reposição); $\quad Y \sim H(Mp = 6; Mq = 4; n = 5)$

$$\boldsymbol{P(Y = 3)} = \frac{C_3^6 \times C_2^4}{C_5^{10}} = \mathbf{0{,}4762}$$

6.7 $M = 200$; $n = 5$; $p = 1\%$

$Y \rightarrow \textit{Número de peças defeituosas retiradas}$, (sem reposição); $Y \sim H(M = 200; p = 0{,}01; n = 5)$; $Mp = 2$ e $Mq = 198$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 1)} = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{C_0^2 \times C_5^{198}}{C_5^{200}} = \mathbf{0{,}0495}$$

Ou aproximando à distribuição Binomial $(M \geq 10n)$, $Y \approx B(n = 5;\ p = 0{,}01)$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 1)} = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_0^5 (0{,}01)^0 (0{,}99)^5 = \mathbf{0{,}0490}$$

$Y' \rightarrow \textit{Número de peças defeituosas retiradas em 30 extrações}$; $Y' \sim H(M = 200; p = 0{,}01; n = 30)$;

$$\boldsymbol{P(Y' \geq 1)} = 1 - P(Y' = 0) = 1 - \frac{C_0^2 \times C_{30}^{198}}{C_{30}^{200}} = \mathbf{0{,}2781}$$

Neste caso a aproximação à Binomial já não é correta $(M < 10n)$. De facto, o resultado da aproximação seria 0,2603.

6.8 $p = 2\%$

a) $Y \rightarrow \textit{Nº de chamadas falhadas até obter ligação}$; $Y \sim G(p = 0{,}02)$

$$\boldsymbol{P(Y = 9)} = (0{,}02)(0{,}98)^9 = \mathbf{0{,}0167} \qquad \leftarrow \ p(y) = pq^y$$

b) $$\boldsymbol{P(Y \geq 5)} = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - [P(Y = 4) + P(Y = 3) + P(Y = 2) + P(Y = 1) + P(Y = 0)] =$$

$$= 1 - (0{,}0184 + 0{,}0188 + 0{,}0192 + 0{,}0196 + 0{,}02) = \mathbf{0{,}9040}$$

c) $Y' \rightarrow \textit{Nº de chamadas necessárias}$; $Y' = Y + 1$; $\mu_y = {}^{q}/_{p} = {}^{0{,}98}/_{0{,}02} = 49$

$$\boldsymbol{\mu_{y'}} = E(Y') = E(Y + 1) = E(Y) + 1 = 49 + 1 = \mathbf{50}$$

6.9 $Y \rightarrow Número\ de\ caras\ em\ n\ lançamentos$; $Y \sim B(n;\ p = 0{,}5)$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}875 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}875 \Leftrightarrow P(Y = 0) \leq 0{,}125 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_0^n (0{,}5)^0 (0{,}5)^n \leq 0{,}125 \Leftrightarrow 0{,}5^n \leq 0{,}125 \Leftrightarrow \boldsymbol{n \geq 3}$$ ← (por tentativas)

6.10 $7\%\ retocadas$; ${}^{1\ peça}/_{minuto}$

a) $Y \rightarrow Número\ de\ peças\ retocadas\ em\ 10\ min$; $Y \sim Poisson(\lambda = (0{,}07)(10) = 0{,}7\ {}^{peças}/_{10\ min})$

$$\boldsymbol{P(Y = 0) = 0{,}4966}\ ;$$ ← (valor tabelado)

b) $Y' \rightarrow Número\ de\ peças\ boas\ até\ ao\ segundo\ retoque$; $Y' \sim BN(r = 2; p = 0{,}07)$;

$$\boldsymbol{P(Y' = 4)} = C_4^5 (0{,}07)^2 (0{,}93)^4 = \boldsymbol{0{,}0183}$$ ← $p(y) = C_y^{y+r-1} p^r q^y$

c) Se em média são retocadas 0,07 peças por minuto, o tempo entre retoques é igual a ${}^{1}/_{0{,}07} = 14{,}286\ min$, ou seja **14 min 17 s**.

6.11 $Y \rightarrow Número\ de\ defeitos\ em\ 100\ m$; $Y \sim Poisson(\lambda)$; $P(Y = 0) = 0{,}10$

$Y' \rightarrow Número\ de\ defeitos\ em\ 6{,}5\ m$; $Y' \sim Poisson(\lambda' = \lambda \times {}^{6{,}5}/_{100})$

$P(Y = 0) = 0{,}10 \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^0}{0!} = 0{,}10 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0{,}10 \Leftrightarrow \lambda = -\ln(0{,}10) \Leftrightarrow \lambda = 2{,}3026$; vindo assim
$\lambda' = (2{,}3026) \times {}^{6{,}5}/_{100} = 0{,}1497$

$$\boldsymbol{P(Y' = 0)} = e^{-\lambda'} = e^{-0{,}1497} = \boldsymbol{0{,}8610}$$

6.12 $Capacidade\ de\ reparação;\ {}^{4\ comp.}/_{dia}\ ;$ $\qquad Lucro:\ {}^{10\ U.M.}/_{comp.}$

$Y\ \rightarrow\ Número\ de\ computadores\ que\ chegam\ para\ reparar\ ;\qquad Y \sim Poisson(\lambda = 3{,}5)$

a) $Y'\ \rightarrow\ Número\ de\ computadores\ reparados\ por\ dia\ ;$ Com as funções de probabilidade:

y	y'	$p(y')$
0	0	0,0302
1	1	0,1057
2	2	0,1850
3	3	0,2158
4 ou mais	4	0,4633 ↑ $1 - P(Y \leq 3)$

$$\mu_{Y'} = \sum_{y'} y'\,p(y') = (0)(0{,}0302) + (1)(0{,}1057) + (2)(0{,}1850) + (3)(0{,}2158) + (4)(0{,}4633) = 2{,}9763$$

Sendo o $Lucro\ efetivo, L = 10Y'$. Então o lucro esperado é

$$\boldsymbol{\mu_L} = 10\mu_{Y'} = (10)(2{,}9763) = \mathbf{29{,}763}\ {}^{U.M.}/_{dia}$$

$$\boldsymbol{Lucro\ perdido} = Lucro\ potencial - Lucro\ efetivo = 10Y - 29{,}783 = \mathbf{5{,}237}\ {}^{U.M.}/_{dia}$$

b) $Y \sim Poisson(\lambda = {}^{3{,}5\ comp.}/_{7{,}5\ horas})$

$Y''\ \rightarrow\ Número\ de\ computadores\ em\ 4\ horas\ ;\qquad Y'' \sim Poisson\left(\lambda'' = {}^{(3{,}5)(4)}/_{(7{,}5)} = 1{,}8667\right)$

$$\boldsymbol{P(Y'' = 0)} = e^{-1{,}8667} = \mathbf{0{,}1546}$$

c) Seja $R\ a\ capacidade\ de\ reparação$. A percentagem de dias em que todos são atendidos é dada por $P(Y \leq R)$

Por tentativas tem-se:

R	$P(Y \leq R)$
4	0,7254
5	0,8576
6	0,9347

Logo, a capacidade de reparação deve ser **maior ou igual a 6**, $(R \geq 6)$.

6.13 $p = 30\%$

a) $Y \rightarrow \textit{Número de vitórias em } 10 \textit{ concursos};\qquad Y \sim B(n=10;\ p=0{,}30)$

$$\boldsymbol{P(Y>4)} = 1 - P(Y \le 4) = 1 - [P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)] =$$

$$= 1-(0{,}0282+0{,}1211+0{,}2335+0{,}2668+0{,}2005) = \mathbf{0{,}1503}$$

b) $Y' \rightarrow \textit{Número de anos (em 5) em que ganha mais que 4 vezes};\qquad Y' \sim B(n=5;\ p=0{,}1503)$

$P(Y' \ge 3) = P(Y'=3)+P(Y'=4)+P(Y'=5)$ sabendo que; $p(y) = C_y^n p^y q^{n-y}$, então

$$\boldsymbol{P(Y' \ge 3)} = C_3^5(0{,}1503)^3(0{,}8497)^2 + C_4^5(0{,}1503)^4(0{,}8497)^1 + C_5^5(0{,}1503)^5(0{,}8497)^0 =$$

$$= 0{,}02451+0{,}0217+0{,}00008 = \mathbf{0{,}02676}$$

c) $P(\textit{ganhar } 6 \textit{ ou mais}) \ge 0{,}9;\qquad Y \sim B(n;\ p=0{,}30)$

$$P(Y \ge 6) \ge 0{,}9 \Leftrightarrow 1-P(Y\le 5) \ge 0{,}9 \Leftrightarrow 1-\sum_{y=0}^{5} C_y^n (0{,}3)^y (0{,}7)^{n-y} \ge 0{,}9$$

Por tentativas obtêm-se:

n	$P(Y \ge 6)$
10	0,0473
20	0,5836
30	0,9234
29	**0,9068**
28	0,8872

Logo, deve participar em **29 ou mais** concursos.

6.14 $20\ peças\ na\ caixa;$ $5\ defeituosas;$ $n = 6\ ;$ $Proporção\ de\ peças\ defeituosas,\ p = {}^{5}/_{20} = 0{,}25$

a) $Y \rightarrow Número\ de\ peças\ defeituosas\ nas\ 6\ retiradas$, (com reposição); $Y \sim B(n = 6; p = 0{,}25)$

$$\boldsymbol{P(Y = 2) = 0,2966}$$

b) $Y \rightarrow Número\ de\ peças\ defeituosas\ retiradas$, (sem reposição); $Y \sim H(Mp = 5; Mq = 15; n = 6)$

$$\boldsymbol{P(Y = 2)} = \frac{C_2^5 \times C_4^{15}}{C_6^{20}} = \boldsymbol{0,3522}$$

c) $M = 1000\ ;$ $p = 0{,}25$

Neste caso, como $M \geq 10n$, ambas as probabilidades podem ser calculadas pela Binomial, $Y \approx B(n = 6;\ p = 0{,}25)$

$$\boldsymbol{P(Y = 2) = 0,2966}$$