7.1 **a)** $X \sim U(a=-2;\ b=6)$ $\qquad$ $\boldsymbol{P(X=1)=0}$ $\qquad$ (Para qualquer distribuição contínua)

$$\boldsymbol{P(X>1)} = 1-P(X\le 1) = 1-F(1) = 1-{}^{1-(-2)}\!\big/_{6-(-2)} = 1-{}^{3}\!/_{8} = \boldsymbol{{}^{5}\!/_{8}}$$

$$\boldsymbol{P(X\le 2)} = F(2) = {}^{2-(-2)}\!\big/_{6-(-2)} = {}^{4}\!/_{8} = \boldsymbol{{}^{1}\!/_{2}}$$

$$\boldsymbol{P(1\le X\le 3)} = P(X\le 3)-P(X\le 0) = F(3)-F(1) = {}^{3-(-2)}\!\big/_{6-(-2)} - {}^{1-(-2)}\!\big/_{6-(-2)} = {}^{5}\!/_{8}-{}^{3}\!/_{8} = \boldsymbol{{}^{1}\!/_{4}}$$

b) $X \sim EN(\beta=3)$ $\qquad$ $\boldsymbol{P(X=1)=0}$

$$\boldsymbol{P(X>1)} = 1-F(1) = 1-\left(1-e^{-1/3}\right) = \boldsymbol{0,7165}$$

$$\boldsymbol{P(X\le 2)} = F(2) = 1-e^{-2/3} = \boldsymbol{0,4866}$$

$$\boldsymbol{P(1\le X\le 3)} = F(3)-F(1) = \left(1-e^{-3/3}\right)-\left(1-e^{-1/3}\right) = \boldsymbol{0,3487}$$

c) $X \sim N(\mu=1{,}5;\ \sigma=0{,}5)$ $\qquad$ $\boldsymbol{P(X=1)=0}$

$$\boldsymbol{P(X>1)} = P\left(Z>{}^{1-1,5}\!\big/_{0,5}\right) = P(Z>-1) = 1-P(Z>1) = 1-0{,}1587 = \boldsymbol{0,8413}$$

$$\boldsymbol{P(X\le 2)} = P\left(Z\le{}^{2-1,5}\!\big/_{0,5}\right) = P(Z\le 1) = 1-P(Z>1) = 1-0{,}1587 = \boldsymbol{0,8413}$$

$$\boldsymbol{P(1\le X\le 3)} = P(X\le 3)-P(X<1) = P\left(Z\le{}^{3-1,5}\!\big/_{0,5}\right)-P\left(Z<{}^{1-1,5}\!\big/_{0,5}\right) = P(Z\le 3)-P(Z<-1) =$$
$$= 1-P(Z>3)-P(Z>1) = 1-0{,}0013-0{,}1587 = \boldsymbol{0,8400}$$

d) $X \sim N(\mu = 0;\ \sigma = 1)$ $\qquad \boldsymbol{P(X = 1) = 0}$

$\boldsymbol{P(X > 1) = 0,1587}$

$\boldsymbol{P(X \leq 2)} = 1 - P(X > 2) = 1 - 0{,}0228 = \boldsymbol{0,9772}$

$\boldsymbol{P(1 \leq X \leq 3)} = P(X \geq 1) - P(X > 3) = 0{,}1587 - 0{,}00135 = \boldsymbol{0,15735}$

7.2 **a)** $\boldsymbol{\mu} = {a+b}/{2} = {-2+6}/{2} = \boldsymbol{2}$; $\qquad \boldsymbol{\eta = 2}\ (simétrica);$ $\qquad \boldsymbol{\xi} \rightarrow (não\ existe)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = {(b-a)^2}/{12} = {(6-(-2))^2}/{12} = {64}/{12} = \boldsymbol{16/3}$

b) $\boldsymbol{\mu} = \beta = \boldsymbol{3}$;

$F(\boldsymbol{\eta}) = {1}/{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\eta/3} = {1}/{2} \Leftrightarrow e^{-\eta/3} = {1}/{2} \Leftrightarrow -{\eta}/{3} = \ln({1}/{2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = -3\ln({1}/{2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta = 2,0794}$;

$\boldsymbol{\xi = 0}\ (máximo)$**;** $\qquad \boldsymbol{\sigma^2} = \beta^2 = 3^2 = \boldsymbol{9}$

c) $\boldsymbol{\mu = 1,5}$; $\qquad \boldsymbol{\eta = 1,5}\ (simétrica);$ $\qquad \boldsymbol{\xi = 1,5}\ (máximo);$ $\qquad \boldsymbol{\sigma^2} = (0{,}5)^2 = \boldsymbol{0,25}$

d) $\boldsymbol{\mu = 0}$; $\qquad \boldsymbol{\eta = 0}\ (simétrica);$ $\qquad \boldsymbol{\xi = 0}\ (máximo);$ $\qquad \boldsymbol{\sigma^2 = 1}$

7.4 $X \rightarrow Tempo\ a\ preencher\ o\ formulário\ ;$ $\quad X \sim U(a = 1{,}5;\ b = 2{,}2)$

a) $\boldsymbol{\mu} = {}^{a+b}/_{2} = {}^{1{,}5+2{,}2}/_{2} = \mathbf{1{,}85}\ min;$ $\quad \boldsymbol{\sigma^2} = {}^{(b-a)^2}/_{12} = {}^{(2{,}2-1{,}5)^2}/_{12} = {}^{(0{,}7)^2}/_{12} = \mathbf{0{,}0408}\ min^2$

b) $\boldsymbol{P(X < 2)} = F(2) = {}^{2-1{,}5}/_{2{,}2-1{,}5} = \mathbf{0{,}7143}$

c) $$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}\ ; & x < 1{,}5 \\ {}^{(\boldsymbol{x} - \mathbf{1{,}5})}/_{\mathbf{0{,}7}}\ ; & 1{,}5 \le x \le 2{,}2 \\ \mathbf{1}\ ; & x > 2{,}2 \end{cases}$$

7.5 $X \sim U(a;\ b)\ ;$ $\quad \mu = 1\ ;$ $\quad \sigma^2 = {}^{4}/_{3};$ Será uma f.d.p. do tipo: $f(x) = \begin{cases} 0\ ; & x < a \\ {}^{1}/_{b-a}\ ; & a \le x \le b \\ 0\ ; & x > b \end{cases}$

a) Determinar a e b $\begin{cases} {}^{a+b}/_{2} = 1 \\ {}^{(b-a)^2}/_{12} = {}^{4}/_{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ {}^{(b-(2-b))^2}/_{4} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ (2b-2)^2 = 16 \end{cases} \rightarrow$

$4b^2 - 8b + 4 = 16 \Leftrightarrow 4b^2 - 8b - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \vee b = -1;$ Se $b = 3 \Rightarrow a = 2 - 3 = -1$; Se $b = -1 \Rightarrow a = 2 - (-1) = 3$

Como $a < b \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{-1}\ e\ \boldsymbol{b} = \mathbf{3}$ $\quad$ Logo; $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}}\ ; & para -1 \le x \le 3 \\ \mathbf{0}\ ; & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$

b) $\boldsymbol{P(X < 0)} = F(0) = {}^{0-(-1)}/_{3-(-1)} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}}$

7.6 $X \rightarrow Tempo\ de\ funcionamento\ sem\ avarias\ ;$ $\quad X \sim EN(\beta = 4{,}5)$ (horas)

a) $\boldsymbol{P(X \geq 6)} = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - e^{-6/4{,}5}\right) = e^{-6/4{,}5} = \mathbf{0{,}2636}$

b) $\boldsymbol{P(X \geq 12\ |X > 6)} = \frac{P(X \geq 12\ \cap\ X > 6)}{P(X > 6)} = \frac{P(X \geq 12)}{P(X > 6)} = \frac{e^{-12/4{,}5}}{e^{-6/4{,}5}} = e^{-6/4{,}5} = \mathbf{0{,}2636}$

Nesta distribuição $P(X > \mathrm{b}\ |X > \mathrm{a}) = P(X > b - a)$. Diz-se que esta distribuição *não tem memória*.

c) $Y \rightarrow Número\ de\ avarias\ em\ 6\ horas\ ;$ $\quad Y \sim Poison\left(\lambda = {}^{6}/_{4{,}5}\right);$ $\quad p(y) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{y}}{y!}$

$\boldsymbol{P(Y = 2)} = \frac{e^{-6/4{,}5} \times (6/4{,}5)^{2}}{2!} = \mathbf{0{,}2343}$

7.7 $X \rightarrow Tempo\ de\ atraso\ do\ comboio\ ;$ $\quad X \sim N(\mu = 15;\ \sigma = 4)$ (minutos)

a) $\boldsymbol{P(X < 8)} = P\left(Z < {}^{8-15}/_{4}\right) = P(Z < -1{,}75) = P(Z > 1{,}75) = \mathbf{0{,}0401}$

b) O cliente apanha o comboio se este chegar com 10 ou mais minutos de atraso. Logo,

$\boldsymbol{P(X \geq 10)} = P\left(Z \geq {}^{10-15}/_{4}\right) = P(Z \geq -1{,}25) = 1 - P(Z \geq 1{,}25) = 1 - 0{,}1056 = \mathbf{0{,}8944}$

c) Obviamente 15, pois a probabilidade de o comboio chegar antes disso é de 50%, uma vez que é a média da distribuição normal.

$\boldsymbol{P(X < x^{*})} = {}^{1}/_{2} \Leftrightarrow P\left(Z < \underbrace{{}^{x^{*}-15}/_{4}}\right) = {}^{1}/_{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {}^{x^{*}-15}/_{4} = 0 \Leftrightarrow x^{*} = \mathbf{15}$

Pelos valores críticos da distribuição Normal Padronizada,

$\alpha = 0{,}5 \Rightarrow z(\alpha) = 0$

7.8 $X \rightarrow Classificação\ dos\ alunos\ ;\qquad X \sim U(a=0\,;b=20)$

$Y \rightarrow Nº\ de\ reprovações\ até\ obter\ aprovação\ ;\qquad Y \sim G(p)$

$$p = P(X \geq 9{,}5 = 1 - P(X < 9{,}5) = 1 - {}^{(9{,}5-0)}\!/_{(20-0)} = 1 - 0{,}475 = 0{,}525$$

$$\boldsymbol{\mu_Y} = {}^{q}\!/_{p} = {}^{0{,}475}\!/_{0{,}525} = \mathbf{0{,}9048}$$

7.9 $X \rightarrow Comprimento\ das\ carpas\ do\ Azibo\ ;\qquad X \sim N(\mu = 23\,;\ \sigma = 8)$ (centímetros)

a) $\boldsymbol{P(19 \leq X \leq 27)} = P(X \leq 27) - P(X \leq 19) = P\left(Z \leq {}^{27-23}\!/_{8}\right) - P\left(Z \leq {}^{19-23}\!/_{8}\right) = P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -0{,}5) =$

$= 1 - P(Z \geq 0{,}5) - P(Z \geq 0{,}5) = 1 - 2 \times P(Z \geq 0{,}5) = 1 - (2)(0{,}3085) = \mathbf{0{,}3830}$

b) Seja, $\boldsymbol{x^*} \rightarrow o\ comprimento\ mínimo\ das\ carpas\ a\ pescar$

$$P(X \geq x^*) = 0{,}30 \Leftrightarrow P\left(Z \geq {}^{x^*-23}\!/_{8}\right) = 0{,}30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{x^*-23}\!/_{8} = 0{,}5244 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^*} = 23 + (8)(0{,}5244) = \mathbf{27{,}2\ cm}$$

c) $Y \rightarrow Número\ de\ carpas\ maiores\ que\ o\ mínimo\ (em\ 25)\ ;\qquad Y \sim B(n = 25\,;\ p = 0{,}3)$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 10)} = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - \sum_{y=0}^{9} C_y^{25}(0{,}30)^y(0{,}70)^{25-y} =$$

$$= 1 - 0{,}8106 = \mathbf{0{,}1894}$$

7.10 $X \rightarrow Receita\ diária\ ;\ \ X \sim N(\mu = 200\ ;\ \ \sigma^2 = 1000)\ \ /\ \ D \rightarrow Despesas\ diárias\ ;\ \ D = 10 + 20Y\ ;\ \ Y \sim N(\mu = 8{,}5\ ;\ \ \sigma^2 = 2)$

a) $\boldsymbol{P(X > 250)} = P\left(Z > {250 - 200}/{\sqrt{1000}}\right) = P(Z > 1{,}58) = \mathbf{0,0571}$

b) $P(X > x^*) = 0{,}90 \Leftrightarrow P\left(Z > {x^* - 200}/{\sqrt{1000}}\right) = 0{,}90 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow {x^* - 200}/{\sqrt{1000}} = -1{,}2816 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^*} = 200 - (1{,}2816)\left(\sqrt{1000}\right) = \mathbf{159,47}$$

c) $L \rightarrow Lucro\ diário\ ;\qquad L = X - D = X - (10 + 20Y) = X - 10 - 20Y$

Como o lucro é uma combinação linear de variáveis normais independentes, é ainda uma variável normal com parâmetros:

$\mu_{\boldsymbol{L}} = E(X - 10 - 20Y) = E(X) - 10 - 20E(Y) = 200 - 10 - (20)(85) = 20$

$\sigma_L^2 = VAR(X - 10 - 20Y) = VAR(X) + 20^2 VAR(Y) = 1000 + (20^2)(2) = 1800$

Então, $\qquad L \sim N(\mu = 20\ ;\ \ \sigma^2 = 1800)\qquad$ e pretende-se determinar;

$\boldsymbol{P(L < 0)} = P\left(Z < {0 - 20}/{\sqrt{1800}}\right) = P(Z < -0{,}47) = P(Z > 0{,}47) = \mathbf{0,3192}$

7.11 $Y \rightarrow Número\ de\ utentes\ simultâneos\ num\ pico\ ;\qquad Y \sim B(n = 1500\ ; p = 0{,}03)$

$y^* \rightarrow Capacidade\ da\ Central$ a determinar, fazendo; $P(Y > y^*) = 0{,}05$ mas pela Binomial o cálculo é complexo! Então admite-se,

$Y \approx N(\mu = np = (1500)(0{,}03) = 45\ ; \sigma^2 = npq = (45)(0{,}97) = 43{,}65)$ vindo,

$$P\left(Y > y^* + {}^1\!/_2\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{y^* + {}^1\!/_2 - 45}{\sqrt{43{,}65}}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{y^* - 44{,}5}{\sqrt{43{,}65}} = 1{,}6449 \Leftrightarrow y^* = 1{,}6449\sqrt{43{,}65} + 44{,}5 = 55{,}4 \rightarrow \mathbf{56}$$

Correção de continuidade

7.12 $Capacidade = 5\ {}^{TV}/_{dia}\quad (8\ horas)\ ;\quad Y\ \rightarrow\ N^{\underline{o}}\ de\ televisões\ para\ reparar\ por\ dia\ ;\ \ Y \sim Poisson(\lambda)\ ;\ \ P(Y=0)=0{,}05$

a) $P(Y=0)=0{,}05\ \Leftrightarrow\ \frac{e^{-\lambda}\times\lambda^0}{0!}=0{,}05\ \Leftrightarrow\ e^{-\lambda}=0{,}05\ \Leftrightarrow\ \lambda=-\ln(0{,}05)\Leftrightarrow\ \lambda=3\ \ por\ dia$

O tempo médio entre chegadas é dado por: $\boldsymbol{\beta}={}^{1}/_{\lambda}={}^{1}/_{3}\ dias\ ;\qquad =\boldsymbol{{}^{8}/_{3}\ horas}\ ;$ ou $\boldsymbol{2\ h\ 40min}$

b) $X\ \rightarrow\ Tempo\ entre\ chegadas\ ;\qquad X \sim EN(\beta={}^{8}/_{3}\ horas)$

$$\boldsymbol{P(X\geq 3)}=\ 1-P(X<3)=1-F(3)=\ 1-\left(1-e^{-3/\left(8/3\right)}\right)=e^{-9/8}=\boldsymbol{0{,}3247}$$

c) $Y'\ \rightarrow\ Número\ de\ dias\ (em\ 5)\ em\ que\ a\ capacidade\ é\ excedida\ ;\qquad Y' \sim B(n=5;\ p)$

$$p=P(Y\geq 6)=\ 1-P(Y\leq 5)=1-(0{,}1008+0{,}1680+0{,}2240+0{,}2240+0{,}1494+0{,}0498)$$

$$=1-0{,}916=0{,}084$$

Seria 5% se não fosse o arredondamento de λ

$$\boldsymbol{P(Y'=0)}=q^n=(0{,}916)^5=\boldsymbol{0{,}6449}$$