Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

Estatística

Fichas de Trabalho

Departamento de Gestão Industrial

Setembro de 2007

Ficha de Trabalho 1

Cálculo Combinatório

1.1 Uma ementa é constituída por 10 entradas, 20 pratos e 15 sobremesas. De quantos modos diferentes se pode escolher uma refeição constituída por 1 entrada, 1 prato e 1 sobremesa?

1.2 Quantas palavras diferentes de 4 letras, se podem formar com as 10 primeiras letras do alfabeto? (pode haver repetição de letras e as palavras podem ou não ter significado)

1.3 No campeonato de futebol da ESTIG entram 8 equipas. Não havendo equipas empatadas, de quantas formas diferentes pode ficar a classificação final?

1.4 Nas olimpíadas de corrida de saco, vão participar 7 atletas. No final, serão atribuídas medalhas de ouro, de prata e de bronze. De quantas formas diferentes poderão ser atribuídos estes três prémios? (admita que não há empates)

1.5 Num curso com 50 alunos vai se escolhida uma comissão de 3 alunos para representar o curso numa reunião com a Direcção da escola. Quantas comissões diferentes se podem formar?

1.6 O sistema de matrículas automóvel actual é constituído por dois grupos de dois algarismos, iguais ou diferentes, seguidos de duas letras, também elas iguais ou diferentes. Qual o número máximo de automóveis que o sistema permite registar?

1.7 Calcule o número total de números com três dígitos que podem ser formados se se admitir que:

a) O dígito zero não faz parte da classe das centenas e que não é permitida a repetição de qualquer dígito.

b) O dígito zero não faz parte da classe das centenas mas é permitida a repetição de dígitos.

c) O dígito zero pode fazer parte da classe das centenas e que não é permitida a repetição de qualquer dígito.

1.8 De quantas maneiras um grupo de 7 pessoas pode se dispor:

a) Numa fila de 7 cadeiras?

b) Ao redor de uma mesa redonda?

1.9 Considere um exame constituído por 10 perguntas no qual um aluno deve responder a apenas 8.

a) Quantas alternativas tem?

b) Quantas alternativas tem, se tiver que responder obrigatoriamente às 3 primeiras perguntas?

c) Quantas alternativas tem, se tiver que responder pelo menos a 4 das 5 primeiras perguntas?

1.10 Para resolver um problema juntaram-se 6 professores e 4 alunos. Pretende-se formar comissões contendo 3 professores e 2 alunos. Quantas são as possibilidades?

1.11 Um cofre tem um sistema de segurança constituído por 3 discos, cada um dos quais podendo parar em 26 posições diferentes, de acordo com as letras do alfabeto.

a) Quantos são os códigos possíveis para o segredo do cofre?

b) Em quantos códigos figura uma e uma só vogal?

c) Uma empresa concorrente lançou um novo cofre, afirmando ser mais seguro que o anterior. O mecanismo de abertura consiste em 2 fechos independentes. Cada um dos fechos está munido de 3 discos numerados de 0 a 9 (10 posições possíveis). Concorda com a afirmação da empresa?

1.12 Dado um conjunto de 10 pontos, qual o número de rectas que eles determinam se:

a) Os pontos pertencerem a uma circunferência.

b) Os pontos pertencerem a duas rectas paralelas estando numa delas 4 pontos e na outra 6 pontos?

1.13 Considere os algarismos 0, 1, 2, 5, 6 e 8.

a) Quantos números ímpares com 4 algarismos distintos se podem formar com aquele conjunto de algarismos?

b) Quantos números diferentes, maiores que 200 e inferiores a 2000, se podem representar com aquele conjunto de algarismos, se não houver repetição de algarismos?

1.14 Numa turma com 10 alunas e 8 alunos, quantas comissões diferentes de 5 elementos é possível formar nas seguintes condições:

a) Sem qualquer condicionante.

b) Se cada comissão tiver 3 alunas e 2 alunos.

c) Se uma das alunas e dois dos alunos se recusarem a pertencer a qualquer comissão.

d) Se houver uma aluna e um aluno que não possam pertencer à mesma comissão.

e) Se as tarefas dos vários elementos da comissão forem diferenciadas.

Soluções:

1.1 3,000.

1.2 10,000.

1.3 40,320.

1.4 210.

1.5 19,600.

1.6 5,290,000.

1.7 a) 648; b) 900; c) 720.

1.8 a) 5040; b) 720.

1.9 a) 45; b) 21; c) 35.

1.10 120.

1.11 a) 17,576; b) 6,615; c) Sim, 1,000,000.

1.12 a) 45; b) 26.

1.13 a) 96; b) 140.

1.14 a) 8,568; b) 3,360; c) 3,003; d) 8,008; e) 1,028,160;

Ficha de Trabalho 2

Teoria da Probabilidade

2.1 Um cartão é retirado aleatoriamente de um conjunto de 50 cartões numerados de 1 a 50. Determine a probabilidade de ser retirado um cartão com um número divisível por 5.

2.2 Considere um baralho de 52 cartas do qual são retiradas duas cartas:

a) Calcule a probabilidade de serem ambas espadas.

b) Calcule a probabilidade de sair uma espada e uma copa.

2.3 Em três sacos idênticos existem bolas azuis e pretas nos números seguintes:

Saco A: 4 bolas azuis e 8 pretas;

Saco B: 6 bolas azuis e 9 pretas;

Saco C: 2 bolas azuis e 7 pretas.

a) Calcule a probabilidade de entre três bolas retiradas ao acaso de um único saco, seleccionado previamente também ao acaso entre os três existentes, haver três bolas azuis.

b) Admitindo que se retira uma bola de cada saco calcule a probabilidade de se obter, no total, duas bolas azuis e uma preta.

2.4 Um negociante tem 15 frigoríficos para vender, dos quais dois são defeituosos. Um potencial comprador está interessado na totalidade dos frigoríficos se, ao proceder a uma inspecção, não encontrar nenhum defeituoso. Se o vendedor enviar os frigoríficos em três contentores (cinco frigoríficos em cada), o comprador selecciona dois contentores ao acaso e inspecciona um frigorifico em cada um dos contentores seleccionados. Diga qual é, do ponto de vista do vendedor, a melhor estratégia para conseguir vender os frigoríficos ao potencial cliente:

Estratégia A: Colocar os frigoríficos em três contentores (5 frigoríficos em cada) e pondo os dois defeituosos cada um em seu contentor;

Estratégia B: Colocar os frigoríficos em três contentores (5 frigoríficos em cada) e pondo os dois defeituosos num só contentor.

2.5 Se $P(A)=0.2$, $P(B)=0.2$ e os acontecimentos A e B forem mutuamente exclusivos, serão A e B independentes? Justifique.

2.6 Se A, B e C forem acontecimentos mutuamente exclusivos, será possível ter $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$ e $P(C)=0.5$? Justifique.

2.7 Considere os acontecimentos A e B com $P(A\mid B)=0.7$, $P(A)=0.4$ e $P(B)=0.2$. Determine $P(B\mid A)$.

2.8 Uma cidade com 50 mil habitantes possui apenas três jornais diários: A, B e C. Estudos efectuados mostraram que 20 mil pessoas lêem A, 16 mil lêem B, 10 mil lêem C, 12 mil lêem A e B, 3 mil lêem B e C, 7 mil lêem A e C e, finalmente, mil lêem A, B e C. Para um qualquer habitante escolhido ao acaso:

a) Calcule a probabilidade de ler pelo menos um jornal.

b) Calcule a probabilidade de ler apenas um jornal.

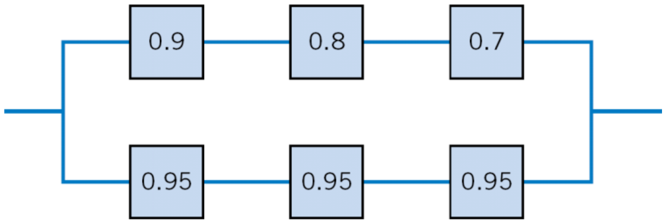
c) Se esse habitante ler o jornal A, qual a probabilidade de ler também o jornal B?

2.9 A tabela abaixo sumaria a informação obtida através de um inquérito de rua efectuado com o objectivo de caracterizar a adesão dos utentes aos transportes públicos disponíveis.

Pergunta	Respostas afirmativas
Utiliza o comboio ou o autocarro?	75%
Utiliza o comboio e o autocarro?	20%
Utiliza o comboio?	50%

Sabendo que um determinado indivíduo utiliza o autocarro, qual a probabilidade de utilizar também o comboio?

2.10 Considere um circuito composto por seis aparelhos, conforme mostrado na figura abaixo. O circuito funciona se, da esquerda para a direita, houver um percurso de aparelhos funcionais. A probabilidade de cada aparelho funcionar é a mostrada na figura e não depende do estado dos outros aparelhos. Qual a probabilidade do circuito funcionar?



2.11 A incidência de uma determinada doença na população de um país do quinto mundo é de 3%. Um teste disponível para detectar a doença indica um resultado positivo em 96% das pessoas que estão efectivamente doentes. Infelizmente, o teste também dá um resultado positivo em algumas pessoas que não têm a doença, mas somente em 8% destas. O Bocage submeteu-se ao teste e o resultado deu negativo. Qual a probabilidade de ele ter, de facto, a doença?

2.12 Numa faculdade existem quatro cursos. O curso A tem 10% dos alunos, o curso B tem 20%, o curso C 30% e o curso D os alunos restantes. A proporção de alunos reprovados em cada um dos 4 cursos é, respectivamente, 30%, 40%, 10% e 70%. Seleccionou-se um aluno aleatoriamente tendo-se verificado a sua condição (reprovado ou aprovado).

a) Se o aluno é reprovado, qual a probabilidade de ter frequentado o curso D?

b) Se o aluno é aprovado, qual a probabilidade de ter frequentado o curso A?

c) Se o aluno é reprovado, qual a probabilidade de não ter frequentado o curso C?

d) Se o aluno é aprovado, qual a probabilidade de não ter frequentado o curso B nem o curso C?

2.13 O Tó e o Zé são dois alunos da ESTIG que vão realizar um exame à disciplina de Estatística. Tendo como base o trabalho realizado ao longo do semestre lectivo, o professor estima que as probabilidades de o Tó e o Zé obterem aprovação são de 80% e 40%, respectivamente. Verificando-se que apenas um dos alunos obteve aprovação, qual a probabilidade de ter sido o Tó?

Soluções:

2.1 0.2.

2.2 a) 0.0588; b) 0.1275.

2.3 a) 0.02071; b) 0.02074;

2.4 Estratégia A (0.7467 contra 0.7333 de probabilidade de passar na inspecção).

2.5 Não.

2.6 Não.

2.7 0.35.

2.8 a) 0.5; b) 0.1; c) 0.6.

2.9 0.[4].

2.10 0.929258.

2.11 1.343×10^{-3}

2.12 a) 0.[6]; b) 0.1207; c) 0.9286; d) 0.3276.

2.13 0.8571.

Ficha de Trabalho 3

Variáveis Aleatórias

3.1 Considere dois sacos, cada um com o seguinte número de bolas:

Saco A: 2 bolas vermelhas, 1 azul e 6 pretas;

Saco B: 3 bolas vermelhas, 3 azuis e 3 pretas.

Considere que se escolhe aleatoriamente um dos sacos e se retira ao acaso uma bola que é identificada. Seguidamente, essa bola é colocada no outro saco não escolhido de onde é retirada outra bola. Considere a variável que representa o número de bolas vermelhas que fazem parte do grupo de duas bolas seleccionadas.

a) Calcule e represente a função de probabilidade dessa variável.

b) Calcule e represente a função distribuição de probabilidade da mesma variável.

c) Calcule a probabilidade de a variável assumir valores iguais ou superiores a 1.

d) Recalcule a probabilidade da alínea anterior se souber que o valor da variável não é igual a 2.

3.2 Admita que o tempo (em minutos) entre chegadas consecutivas a uma repartição pública é uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é a seguinte:

$$f(x) = e^{-x}$$

a) Represente a função apresentada.

b) Calcule e represente a função distribuição de probabilidade da variável apresentada.

c) Calcule a probabilidade de decorrer mais de 45 segundos entre duas chegadas consecutivas.

d) Sabendo que já decorreram 45 segundos desde a última chegada, qual a probabilidade de decorrerem outros 45 segundos antes de chegar outra pessoa à repartição?

3.3 Considere duas estantes cada uma com o seguinte número de livros:

Estante A: 5 livros azuis e 4 vermelhos;

Estante B: 2 livros azuis e 5 vermelhos.

Considere que retira um livro da estante A, identifica-o e coloca-o na estante B. Mais tarde, retira outro livro da estante A, que depois de identificado coloca na estante B. Finalmente retira um livro da estante B que identifica.

a) Determine a função de probabilidade do número de livros vermelhos que fazem parte do grupo dos três livros seleccionados.

b) Determine o número médio de livros vermelhos seleccionados.

3.4 Admita que, para acções de uma determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção depois de impostos, aqui denotado pela variável aleatória X (USD) tem a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}\left(9x - 6x^2 + x^3\right), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

a) Calcule $f(x)$ para vários valores de x (por exemplo, 0.00, 0.25, ..., 2.75, 3.00) e represente graficamente essa função.

b) Calcule a função de distribuição de probabilidade, $F(x)$, e represente-a graficamente.

c) Calcule $P(X \leq 1.5)$, $P(X \geq 2)$ e $P(1 \leq X \leq 2.5)$.

3.5 Considere a função de probabilidade da variável aleatória Y:

$$P(Y = y) = ky\,, \qquad \text{com } y \in \{1,2,3,4,5\}.$$

a) Determine o valor de k.

b) Represente graficamente a função de probabilidade e a função distribuição de probabilidade da variável Y.

c) Determine os parâmetros de localização (média, mediana e moda) e de dispersão (variância) para a variável Y.

d) Calcule $P(Y=4)$ e $P(Y \geq 2)$.

3.6 Considere que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória T é dada por

$$f(t) = a + bt, \qquad \text{com } 1 \leq t \leq 7 \text{ e com } f(7) = 0.$$

a) Determine os parâmetros a e b.

b) Represente graficamente a função densidade de probabilidade e a função distribuição de probabilidade da variável T.

c) Determine os parâmetros de localização (media, mediana e moda) e de dispersão (variância) para a variável T.

d) Calcule $P(T \geq 2)$ e $P(T=5)$.

3.7 Um vendedor de automóveis adquire, no início de cada mês, 4 carros usados por 2500 UM por unidade a um *stand* da sua confiança. Durante um mês, o vendedor em questão contacta potenciais clientes para vender os referidos automóveis a 2750 UM cada. O número de automóveis que consegue vender durante um mês segue a função de probabilidade que se indica na tabela seguinte:

y	0	1	2	3	4
$P(y)$	0.10	0.15	0.40	0.25	0.10

No fim de cada mês o vendedor revende ao *stand* os automóveis que não conseguiu vender a 2200 UM cada.

a) Verifique se a actividade do vendedor, nas condições descritas anteriormente, é rentável.

b) O referido vendedor considera que a sua actividade só será viável se conseguir um lucro médio mensal de 100 UM. Dado que não pretende aumentar o seu preço de venda com receio de uma quebra na procura, o vendedor quer propor um novo preço de revenda a praticar pelo *stand*, de forma a atingir o seu objectivo. Qual deverá ser esse valor?

3.8 O domínio da variável Y é $\{0,1,2,3,x\}$, onde x é desconhecido. Sabendo que cada um dos valores da variável é equiprovável e que a média é 6, determine:

a) O valor de x.

b) A variância de Y.

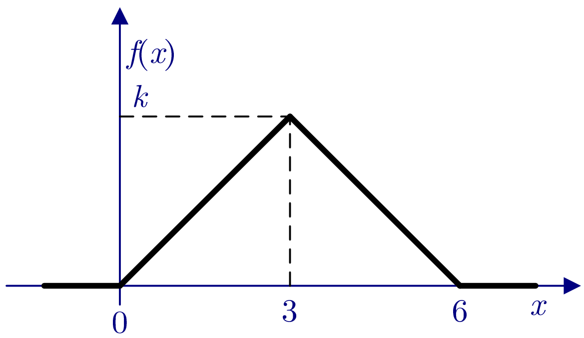
3.9 Imagine que possui um dado em que os números pares saem 2 vezes mais que os números ímpares. Considere uma variável aleatória que represente o número de pontos obtidos no lançamento daquele dado.

a) Defina e esboce graficamente a função de probabilidade e a função distribuição de probabilidade daquela variável aleatória.

b) Para a função apresentada, calcule a média, variância e desvio padrão.

c) Um amigo seu (que ainda não fez Estatística) propôs-lhe o seguinte jogo: você dá-lhe 3.5€ por cada lançamento e ele devolve-lhe 1€ por cada ponto que tirar no dado. Considera vantajoso jogar?

3.10 Considere a seguinte função densidade de probabilidade associada à variável aleatória X:



a) Demonstre que a referida função é uma função densidade de probabilidade válida e determine a sua expressão analítica.

b) Para a função apresentada, calcule a média, a mediana e a moda.

c) Calcule a probabilidade de X ser inferior a 2.

Soluções:

3.1 a) $y=\{0,1,2\}, p(y)=\left\{\frac{97}{180},\frac{66}{180},\frac{17}{180}\right\}$; b) $F(y)=\left\{\frac{97}{180},\frac{163}{180},1\right\}$; c) $\frac{83}{180}$;

d) $\frac{66}{163}$.

3.2 b) $F(x)=1-e^{-x}, x\geq 0$; c) 0.4724; d) 0.4724.

3.3 a) $y=\{0,1,2,3\}, p(y)=\left\{\frac{80}{648},\frac{220}{648},\frac{264}{648},\frac{84}{648}\right\}$; b) 1.5432.

3.4 b) $F(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{27}x^3+\frac{1}{27}x^4$; c) 0.6875, 0.[1], 0.5764.

3.5 a) $\frac{1}{15}$; c) $\mu=3.[6]$, $\eta=4$, $\zeta=5$, $\sigma^2=1.[5]$; d) $\frac{4}{15}$, $\frac{14}{15}$.

3.6 a) $a=\frac{7}{18}$, $b=-\frac{1}{18}$; c) $\mu=3$, $\eta=2.7574$, $\zeta=1$, $\sigma^2=2$; d) 0.69[4], 0.

3.7 a) Não, $E(lucro)=-45$; b) 2276.3.

3.8 a) 24; b) 82.

3.9 a) $y=\{1,2,3,4,5,6\}, p(y)=\left\{\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right\}, F(y)=\left\{\frac{1}{9},\frac{3}{9},\frac{4}{9},\frac{6}{9},\frac{7}{9},1\right\}$;

b) $\mu=\frac{11}{3}$, $\sigma^2=2.[8]$, $\sigma=1.6997$; c) Sim, $E(lucro)=\frac{1}{6}$.

3.10 a) $\frac{1}{3}$; b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x, & 0\leq x\leq 3\\ \frac{2}{3}-\frac{1}{9}x, & 3<x\leq 6\end{cases}$; c) $\mu=\eta=\zeta=3$; d) $\frac{2}{9}$.

Ficha de Trabalho 4

Variáveis Aleatórias

4.1 Determine os momentos na origem e os momentos centrados até à ordem 4, bem como os coeficientes de assimetria e de kurtosis para a variável aleatória definida no problema 3.5.

4.2 Determine os momentos na origem e os momentos centrados até à ordem 4, bem como os coeficientes de assimetria e de kurtosis para a variável aleatória definida no problema 3.6.

4.3 Admita que, num determinado processo de fabrico, a temperatura de água registada no início de cada turno no reservatório R segue uma distribuição com valor esperado igual a 153 °F e desvio padrão igual a 7 °F. Calcule estes mesmos parâmetros para a distribuição de temperatura expressa em °C. (Nota: $\mathrm{F} = 1.8\mathrm{C} + 32$)

4.4 Para preencher a última semana da época de concertos de verão uma empresa especialista no ramo candidata-se à organização de seis concertos semelhantes. A empresa ganha 200 UM por cada contrato conseguido e as despesas com a candidatura à organização dos seis concertos são de 300 UM. As possibilidades de lhe virem a ser atribuídos entre 0 e 6 concertos são, respectivamente, 5, 20, 30, 30, 10, 4 e 1 porcento.

a) Qual o número esperado de contratos e qual o valor esperado do lucro da empresa?

b) Qual a probabilidade da empresa perder dinheiro com a candidatura à organização dos seis concertos?

c) Admita, agora, que quantos mais contratos a empresa conseguir, maior será a despesa com horas extraordinárias do pessoal, sendo neste caso o lucro (L) dado pela seguinte expressão:

$$L = 200Y - 300 - 20Y\,,$$

onde Y representa o número de contratos conseguidos. Qual é, nestas circunstâncias, o valor esperado e o desvio padrão do lucro?

4.5 O número de obstáculos, X, que um determinado cavalo derruba num circuito de saltos é uma variável aleatória que segue a seguinte distribuição de probabilidade:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.05	0.20	0.45	0.30

a) A prova é realizada em duas mãos em que o cavalo repete o mesmo percurso. Admitindo que a função de probabilidade é igual nas duas mãos, escreva a função de probabilidade para o número de obstáculos derrubados na prova. Calcule o valor esperado e o desvio padrão.

b) Suponha que o cavalo recebe 4 torrões de açúcar se durante a prova derrubar menos do que 3 obstáculos, recebe 2 torrões se derrubar 3 ou 4 obstáculos a recebe 1 torrão se derrubar mais do que 4 obstáculos. Qual o valor esperado do número de torrões que o cavalo recebe?

c) Admita que um determinado concurso é constituído por duas provas (realizadas em dois dias distintos e igualmente em duas mãos) no circuito referido. A pontuação final do concurso, P, é obtida do seguinte modo:

$$P = 100 - X_1 - 1.2X_2 ,$$

em que X_1 e X_2 representam o número total de obstáculos derrubados na primeira e segunda prova, respectivamente. Calcule o valor esperado e o desvio padrão de P.

4.6 O dono de um quiosque adquire semanalmente 5 livros a 500 UM por unidade a uma editora. Durante a semana tenta no seu quiosque vender os livros a 750 UM cada um e os que não consegue vender são retomados pela editora a 400 UM cada. O número de livros que consegue vender, Y, segue a função de probabilidade indicada na tabela seguinte:

y	0	1	2	3	4	5
$P(y)$	0.10	0.15	0.20	0.35	0.15	0.05

a) Considera a actividade rentável?

b) O dono do quiosque acha que só deve continuar a vender livros se obtiver um lucro médio semanal de 400 UM. Dado que a editora não altera o valor de aquisição nem o valor da retoma qual deve ser o novo preço de venda ao público para poder continuar a vender os livros?

4.7 A Associação dos Amigos da Boa Vida, na sua festa anual de angariação de fundos, pretende propor o seguinte jogo:

- Cada jogador lança simultaneamente dois dados de seis faces;
- O valor de cada aposta é de 5 Euros;
- Se o jogador obtiver uma soma de pontos igual ou superior a 10 ganha uma garrafa de *whisky* no valor de 12.5 Euros;
- Se o jogador obtiver 12 pontos recebe mais uma garrafa de *whisky* como bónus;
- Se o jogador obtiver uma soma inferior a 8, não ganha nada;
- Se o jogador obtiver uma soma de 8 ou 9 pontos, recebe uma garrafa de Vinho do Porto no valor de 5 Euros.

a) Verifique se o jogo proposto é vantajoso para a Associação dos Amigos da Boa Vida.

b) Qual deverá ser o valor da garrafa de *whisky* a oferecer se a Associação pretender ter um lucro médio de 2.5 Euros por jogada?

4.8 Resolva a questão 3.7b) e a questão 3.9c) utilizando variáveis transformadas.

4.9 Proceda à geração de 10 observações aleatórias da variável aleatória definida no problema 3.5. Utilize números aleatórios com 4 casas decimais.

4.10 Proceda à geração de 10 observações aleatórias da variável aleatória definida no problema 3.6. Utilize números aleatórios com 4 casas decimais.

<u>Soluções:</u>

4.1 $\mu_1' = \dfrac{55}{15}$, $\mu_2' = 15$, $\mu_3' = \dfrac{979}{15}$, $\mu_4' = 295$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1.[5]$, $\mu_3 = -1.1[407]$, $\mu_4 = 5.4963$, $\tau = -0.5880$, $\kappa = -0.7286$.

4.2 $\mu_1' = 3$, $\mu_2' = 11$, $\mu_3' = 46.6$, $\mu_4' = 217.8$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 1.6$, $\mu_4 = 9.6$, $\tau = 0.5657$, $\kappa = -0.6$.

4.3 $\mu = 67.22$, $\sigma = 3.89$.

4.4 a) 2.36, 172; b) 0.25; c) $\mu = 124.8$, $\sigma = 219.75$.

4.5 $y = \{0,1,2,3,4,5,6\}, p(y) = \{0.0025, 0.02, 0.085, 0.21, 0.3225, 0.27, 0.09\}$, $\mu = 4$, $\sigma = 1.1832$; b) 1.855; c) $\mu = 91.2$, $\sigma = 1.8482$.

4.6 a) Sim, $E(lucro) = 357.5$; b) ≥ 767.35.

4.7 a) Sim, $E(lucro) = 1.3194$; b) ≤ 6.42

4.8

4.9 Depende dos números aleatórios.

4.10 Depende dos números aleatórios.

Ficha de Trabalho 5

Distribuições Conjuntas

5.1 Uma caixa contém 3 bolas numeradas de 1 a 3, da qual se retiram 2 bolas ao acaso sem reposição. Considere as seguintes variáveis aleatórias:

X – Número da segunda bola extraída;

Y – Menor dos números das duas bolas extraídas.

Determine:

a) A distribuição conjunta de probabilidade, $p_{X,Y}(x,y)$.

b) As funções de probabilidade marginais.

c) Se as variáveis são independentes.

d) O valor esperado e a variância de X e de Y.

e) $P(X > Y)$ e $P(X + Y \leq 3)$.

5.2 Considere dois sacos, cada um com o seguinte número de bolas:

Saco A: 3 bolas vermelhas e 6 bolas pretas;

Saco B: 2 bolas vermelhas e 5 bolas pretas.

Considere que se retira uma bola do saco A, que se identifica e se coloca no saco B. De seguida, retira se uma bola do saco B que, depois de identificada, é colocada no saco A. Finalmente, retira se uma terceira bola do saco A que se identifica. Sendo:

X – Número de bolas vermelhas obtidas nas duas primeiras extracções;

Y – Número de bolas vermelhas obtidas nas duas últimas extracções.

Determine:

a) A distribuição conjunta de probabilidade.

b) O coeficiente de correlação.

5.3 Admita que a distribuição do número de filhos numa família é a que se define na tabela seguinte:

N.º de filhos	0	1	2	3
Probabilidade	0.15	0.55	0.20	0.10

Supondo que as probabilidades de uma criança ser rapaz ou ser rapariga são iguais (50%) e denominando:

X – Número de filhos numa família;

Y – Número de rapazes numa família.

a) Calcule a distribuição conjunta de probabilidade.

b) Determine o valor esperado e a variância do número de rapazes de uma família.

c) A probabilidade de uma família ter pelo menos dois filhos rapazes.

d) A probabilidade de a família ter duas crianças, sabendo que tem pelo menos um rapaz.

5.4 Considere a seguinte função de probabilidade conjunta:

x	y	$p_{X,Y}(x,y)$
1.0	1	1/4
1.5	2	1/8
1.5	3	1/4
2.5	4	1/4
3.0	5	1/8

a) Mostre que a função apresentada satisfaz as propriedades de uma função de probabilidade conjunta.

b) Calcule $P(X = 1.5)$, $P(X < 2.5)$ e $P(X < 2.5 \cap Y < 3)$.

c) Calcule $E(X)$ e $E(Y)$.

5.5 Suponha que as variáveis X, Y e Z têm a seguinte distribuição de probabilidade conjunta:

x	y	z	$p_{X,Y,Z}(x,y,z)$
1	1	1	0.05
1	1	2	0.10
1	2	1	0.15
1	2	2	0.20
2	1	1	0.20
2	1	2	0.15
2	2	1	0.10
2	2	2	0.05

a) Calcule $P(X=2)$, $P(X=1\cap Y=2)$, $P(Z<1.5)$ e $P(X=1\cup Z=2)$.

b) Calcule o valor esperado de cada uma das variáveis.

5.6 Considere a seguinte função conjunta de densidade de probabilidade:

$$f(x,y)=\begin{cases} k\cdot x\cdot y, & 0\le x\le 2\wedge 0\le y\le 1 \\ 0, & outros\ (x,y) \end{cases}$$

a) Determine k de forma a que $f(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade conjunta válida.

b) Calcule o valor esperado de X e o valor esperado de Y.

c) Determine $P(X\le 1.25\cap Y\le 0.5)$.

5.7 O número de rádios (X) e de televisores (Y) vendidos diariamente numa loja da especialidade apresentam a função de probabilidade conjunta, $p_{X,Y}(x,y)$, representada na tabela seguinte:

x	y		
	0	1	2
0	0.03	0.15	0.12
1	0.04	0.20	0.16
2	0.03	k	0.12

a) Determine o valor de k.

b) Determine a função de probabilidade marginal de X.

c) Determine a probabilidade de, num qualquer dia de funcionamento da loja, o número de rádios vendidos ser superior ao número de televisores vendidos.

d) Sabendo que $\mu_Y = 1.3$ e que $\sigma_Y^2 = 0.41$, calcule o coeficiente de correlação entre X e Y. O que conclui?

5.8 Considere duas variáveis aleatórias, X e Y, cuja função de probabilidade conjunta, $p_{X,Y}(x,y)$, se apresenta no quadro seguinte:

x	y		
	1	2	3
2	$2k$	0.18	0.18
3	0.16	0.12	k

a) Determine o valor de k.

b) Deduza a função de probabilidade de Y.

c) Verifique se as duas variáveis são independentes.

d) Considere uma nova variável $Z = X - Y$. Calcule a sua variância e o seu valor esperado.

5.9 O João, durante um treino de basquetebol, faz três lançamentos sendo a probabilidade de encestar igual a 0.6, podendo considerar-se que os três lançamentos são estatisticamente independentes.

Designando por X o número de cestos nos dois primeiros lançamentos e por Y o número de cestos nos dois últimos lançamentos, determine:

a) A função de probabilidade conjunta de X e Y.

b) A função distribuição marginal de X.

c) A função de probabilidade condicional de Y quando $X = 1$ e o valor de $P(X > Y)$.

d) A função de probabilidade da variável aleatória $Z : Z = X - Y$ e o seu valor médio.

e) A moda de X, de Y e de Z.

5.10 Duas linhas de produção fabricam um certo tipo de motor. Suponha que a capacidade máxima de produção diária é de 3 motores em qualquer uma das linhas. Seja X a variável aleatória que representa o número de peças produzidas na linha I e Y a variável aleatória que representa o número de peças produzidas na linha II. A tabela representa a função de probabilidade conjunta.

y	x			
	0	1	2	3
0	0.00	0.04	0.09	0.12
1	0.01	0.06	0.08	0.11
2	0.01	0.08	0.08	0.08
3	0.01	0.06	0.09	0.08

Determine:

a) A probabilidade de a linha I produzir mais peças do que a linha II.

b) A probabilidade de a linha I produzir tantas peças como a linha II.

c) A probabilidade de a linha I produzir menos peças do que a linha II.

d) A probabilidade de a linha I produzir menos de 2 peças, e a linha II produzir 2 ou 3 peças.

e) Determine as funções de probabilidade marginais de X e de Y .

5.11 Suponha que numa zona da cidade de Bragança se pretende analisar o número de filhos por família e o número de assoalhadas por casa (e por família). Apresenta-se de seguida a respectiva distribuição conjunta, em que X representa o número de filhos por família e Y o número de assoalhadas por casa:

y	x				
	0	1	2	3	4
2	0.03	0.05	0.05	0.00	0.00
3	0.05	0.10	0.15	0.05	0.00
4	0.02	0.10	0.07	0.18	0.05
5	0.00	0.05	0.03	0.02	0.00

a) Existe alguma relação entre o número de filhos e o número de assoalhadas por casa?

b) Determine o número médio de filhos e o número médio de assoalhadas.

c) Qual o número médio de filhos das famílias que habitam casas com 2 assoalhadas?

Soluções:

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

5.7

5.8

5.9

5.10

5.11

Ficha de Trabalho 6

Distribuições Discretas

6.1 Admitindo que a variável aleatória Y segue a distribuição indicada em cada uma das alíneas, calcule as seguintes probabilidades: $P(Y=0)$, $P(Y>1)$, $P(Y \leq 2)$ e $P(1 \leq Y \leq 3)$.

a) Distribuição Binomial com $n=5$ e $p=0.4$.

b) Distribuição Hipergeométrica com $M=10$, $p=0.3$ e $n=5$.

c) Distribuição Binomial Negativa com $r=1$ e $p=0.2$.

d) Distribuição Geométrica com $p=0.2$.

e) Distribuição de Poisson com $\lambda=2.6$.

6.2 Para as distribuições especificadas nas alíneas do exercício 6.1 calcule a média, a mediana, a moda e a variância.

6.3 Para as distribuições especificadas nas alíneas do exercício 6.1 faça a geração de 3 observações aleatórias utilizando os números aleatórios 0.14, 0.73 e 0.48.

6.4 Num centro comercial está instalado um sistema de 12 máquinas para utilização de Multibanco. Considera se que o sistema está em funcionamento se pelo menos metade dessas máquinas funcionar. Suponha que cada máquina funciona independentemente das outras e que a probabilidade de funcionamento de cada uma é de 0.6. Calcule a probabilidade de o sistema funcionar.

6.5 O número de automóveis que utilizam uma determinada ponte por hora segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda=6$. Calcule a probabilidade de a ponte ser utilizada por menos de 5 automóveis num intervalo de 2 horas.

6.6 Uma caixa contém 6 fichas azuis e 4 vermelhas. Uma experiência consiste em extrair uma ficha, anotar a sua cor, não repondo a ficha na caixa. Determine a probabilidade de serem extraídas 3 fichas azuis em 5 extracções.

6.7 De um lote de 200 peças retiram se 5. Admitindo que a percentagem de peças defeituosas no lote é de 1%, calcule a probabilidade de, entre 5 peças retiradas, haver pelo menos uma que é defeituosa. Qual a mesma probabilidade admitindo que se retiram, não 5, mas 30 peças do lote?

6.8 Assuma que cada chamada telefónica para uma determinada emissora de rádio tem uma probabilidade de 2% de obter ligação, isto é, de não encontrar a linha ocupada. Assuma igualmente que todas as chamadas são independentes.

a) Qual a probabilidade da primeira chamada a obter ligação ser a décima chamada efectuada?

b) Qual é a probabilidade que requer mais do que cinco chamadas para obter ligação?

c) Qual o número médio de chamadas necessário para obter ligação?

6.9 Qual o número de vezes que é necessário lançar uma moeda não viciada para que a probabilidade de obter pelo menos uma cara seja pelo menos 87.5%?

6.10 Admita que no final de uma linha de soldadura automática 7% das peças são retocadas manualmente por um operador. Admita ainda que o ritmo de produção é de 1 peça por minuto.

a) Calcule a probabilidade de o operador permanecer dez minutos sem executar nenhum retoque.

b) Calcule a probabilidade de, numa sequência de seis peças, a última ser a segunda peça a necessitar de retoque.

c) Calcule o tempo que, em média, o operador permanece sem executar nenhum retoque.

6.11 Admita que o número de defeitos num rolo de 100 metros de tecido segue uma distribuição de Poisson, sabendo se que a probabilidade do rolo não conter qualquer defeito é de 10%. A Dona Maria das Saias comprou 6.5 metros deste tecido, Qual a probabilidade de não haver defeitos no tecido que a Dona Maria comprou?

6.12 Uma empresa que se dedica à reparação de computadores tem uma capacidade instalada de reparação de 4 unidades/dia. A taxa de chegada de computadores para serem reparados é de 3.5 unidades/dia segundo uma distribuição de Poisson. Admita que os clientes que diariamente excedem a capacidade da empresa vão procurar serviço noutra empresa da vizinhança. O lucro que a empresa tem por cada reparação é de 10 UM.

a) Determine o valor esperado do lucro diário da empresa assim como o valor esperado do lucro perdido diariamente por perda de clientes.

b) Se a empresa estiver aberta diariamente 7.5 horas (das 9:30 às 17 horas) qual a probabilidade de não aparecer qualquer computador para reparar antes de decorridas 4 horas desde a abertura?

c) Que capacidade de reparação deverá ter a empresa se pretender satisfazer todos os clientes que a procuram em 90% dos dias?

6.13 A D. Antonieta é uma excelente cozinheira. Consciente das suas capacidades, participa frequentemente em concursos de culinária. Os apreciadores do seu pudim de castanha estimam que ela vence o concurso com o referido doce em 30% das vezes.

a) No ano passado a D. Antonieta participou em 10 concursos. Qual a probabilidade de ter ganho mais do que 4 vezes?

b) Na realidade a D. Antonieta já participa nos mesmos 10 concursos há 5 anos. Qual a probabilidade de ter ganho mais do que 4 vezes por ano em pelo menos 3 anos?

c) A D. Antonieta pretende alargar a sua colecção de troféus no próximo ano, tendo decidido ganhar pelo menos 6 concursos. Em quantos concursos deve a D. Antonieta participar para que a probabilidade de obter os resultados que pretende seja pelo menos de 90%?

6.14 Uma caixa contém 20 peças, 5 das quais defeituosas. Tiram-se exactamente 6 peças da caixa. Determine a probabilidade de serem encontradas 2 peças defeituosas nas 6 retiradas, supondo que:

a) A tiragem é feita com reposição.

b) A tiragem é feita sem reposição.

c) Calcule novamente as alíneas anteriores, supondo agora que a caixa contém 1,000 peças, $1/4$ das quais defeituosas. Comente os resultados.

Soluções:

6.1 a) 0.0778, 0.6630, 0.6826, 0.8352; b) 0.0833, 0.5, 0.9167, 0.9167; c) 0.2, 0.64, 0.488, 0.3904; d) Igual a c); e) 0.0743, 0.7326, 0.5184, 0.6617.

6.2 a) $\mu = 2$, $\eta = 2$, $\zeta = 2$, $\sigma^2 = 1.2$; b) $\mu = 1.5$, $\eta = 1$, $\zeta = 1.5$, $\sigma^2 = 0.58[3]$; c) $\mu = 4$, $\eta = 3$, $\zeta = 0$, $\sigma^2 = 20$; d) Igual a c); e) $\mu = 2.6$, $\eta = 2$, $\zeta = 2$, $\sigma^2 = 2.6$.

6.3 a) 1, 3, 2; b) 1, 2, 1; c) 0, 5, 2; d) Igual a c); e) 1, 3, 2.

6.4 0.8418.

6.5 0.00760.

6.6 0.4762.

6.7 0.0495 (exacta) ou 0.0490 (aproximada pela Binomial); 0.2781 (exacta).

6.8 a) 0.0167; b) 0.9040; c) 50.

6.9 3 ou mais.

6.10 a) 0.4966; b) 0.0183; c) 14'17''.

6.11 0.8610.

6.12 a) 29.763, 5.237; b) 0.1546; c) 6 ou mais.

6.13 a) 0.1503; b) 0.02676; c) 29 ou mais;

6.14 a) 0.2966; b) 0.3522; c) 0.2966 (com ou sem reposição).

Ficha de Trabalho 7

Distribuições Contínuas

7.1 Admitindo que a variável aleatória X segue a distribuição indicada em cada uma das alíneas, calcule as seguintes probabilidades: $P(X=1)$, $P(X>1)$, $P(X\leq 2)$ e $P(1\leq X\leq 3)$.

a) Distribuição Uniforme com $a=-2$ e $b=6$.

b) Distribuição Exponencial Negativa $\beta=3$.

c) Distribuição Normal com $\mu=1.5$ e $\sigma=0.5$.

d) Distribuição Normal Padronizada.

7.2 Para as distribuições especificadas nas alíneas do exercício 7.1 calcule a média, a mediana, a moda e a variância.

7.3 Para as distribuições especificadas nas alíneas do exercício 7.1 faça a geração de 3 observações aleatórias utilizando os números aleatórios 0.14, 0.73 e 0.48.

7.4 Suponha que o tempo que um operador leva a preencher um formulário electrónico é uniformemente distribuído entre 1.5 e 2.2 minutos.

a) Calcule a média e a variância do tempo que o operador necessita para preencher o formulário.

b) Qual a probabilidade de o operador necessitar de menos de 2 minutos para preencher o formulário?

c) Determine a função distribuição do tempo necessário para preencher o formulário.

7.5 Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme de média igual a 1 e de variância igual a $4/3$. Calcule:

a) A função densidade de probabilidade de X.

b) A probabilidade $P(X<0)$.

7.6 O tempo de funcionamento sem avarias de uma determinada máquina de produção contínua segue uma lei exponencial negativa com valor esperado igual a 4.5 horas. Imagine que a máquina é colocada em funcionamento no instante $t = 0$ horas.

a) Qual a probabilidade de não ocorrer qualquer avaria antes do instante $t = 6$ horas?

b) Admitindo que a máquina se encontrava ainda em funcionamento no instante $t = 6$ horas, qual a probabilidade de não ocorrer qualquer avaria antes de decorridas mais 6 horas?

c) Qual a probabilidade de se verificarem duas avarias durante as primeiras 6 horas de funcionamento da máquina?

7.7 O tempo de atraso de um comboio, cujo horário de partida é às 8 horas, é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, com valor esperado de 15 minutos e desvio padrão de 4 minutos.

a) Determine a probabilidade de, num qualquer dia, o comboio se atrasar menos de 8 minutos.

b) Se um cliente chegar à estação de comboios às 8:10, qual a probabilidade de esse cliente apanhar o comboio?

c) Quantos minutos poderá atrasar-se o cliente, se estiver disposto a correr um risco de 50% de perder o comboio?

7.8 O professor de determinada disciplina depois de efectuar um estudo acerca das classificações obtidas pelos alunos em diversos exames realizados concluiu que estas são caracterizadas por uma distribuição uniforme de parâmetros 0 e 20. Em média, em quantos exames irá reprovar um qualquer aluno até conseguir obter aprovação? (considere que o aluno só aprova à disciplina se tiver uma classificação igual ou superior a 9.5)

7.9 O comprimento das carpas existentes na barragem do Azibo é aproximadamente normal com média igual a 23 cm e desvio padrão igual a 8 cm. A fim de preservar a espécie, decidiu-se que só seria permitida a pesca de carpas com comprimento superior a um determinado valor. As carpas com comprimento inferior aquele valor, quando pescadas, são devolvidas à barragem.

a) Sabendo que um pescador apanhou uma carpa, determine a probabilidade de esta ter um comprimento entre 19 e 27 cm.

b) Determine o comprimento mínimo das carpas que podem ser pescadas, sabendo que se pretende que apenas 30% das carpas existentes na barragem venham a ser pescadas.

c) Com base na informação da alínea anterior e sabendo que um pescador apanhou durante um dia de pesca 25 carpas, calcule a probabilidade de trazer para casa pelo menos l0 carpas.

7.10 Suponha que X representa a receita diária de um posto de venda de combustíveis. Por estudos feitos anteriormente, sabe se que esta variável é normalmente distribuída com média 200 e variância 1,000. Sabe-se ainda que as despesas diárias do posto de venda são dadas por $D = 10 + 20Y$, sendo a variável Y normalmente distribuída com média 8.5 e variância 2.

a) Determine a probabilidade de a receita diária do posto de venda de combustível ser superior a 250.

b) Qual o valor da receita diária que é ultrapassado com uma probabilidade de 90%?

c) Determine a probabilidade de o posto de venda perder dinheiro num qualquer dia de trabalho.

7.11 Uma companhia de telefones tem 1,500 utentes servidos por uma central telefónica comum. No pico de utilização, a probabilidade de um utente estar a utilizar o telefone é de 3%. Quantas chamadas deve suportar simultaneamente a central telefónica de forma a que todos os utentes consigam fazer a sua chamada durante um pico de utilização em, pelo menos, 95% das ocasiões? (assuma que os utilizadores actuam de forma independente).

7.12 O Sr. José Aquário possui um pequeno negócio de reparação de televisores e o seu lema é "não tenhas mais olhos que barriga". Sendo assim, o Sr. Aquário só aceita 5 televisores por dia (8 horas de trabalho), pois é essa a sua capacidade diária de reparação. O número de televisores que chega diariamente para conserto segue uma distribuição de Poisson, sabendo se que a probabilidade de, num dia de trabalho, não chegar qualquer televisor para reparar é de 5%.

a) Qual o tempo que, em média, separa a chegada de 2 clientes consecutivos?

b) Qual a probabilidade do Sr. Aquário ficar 3 horas sem qualquer televisor para reparar?

c) Qual a probabilidade de, durante uma semana de trabalho (5 dias), nunca ser excedida a capacidade de conserto do Sr. Aquário?

<u>**Soluções:**</u>

7.1 a) 0, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; b) 0, 0.7165, 0.4866, 0.3487; c) 0, 0.8413, 0.8413, 0.8400; d) 0, 0.1587, 0.9772, 0.15735.

7.2 a) $\mu = 2\,,\ \eta = 2\,,\ \sigma^2 = \frac{16}{3}$; b) $\mu = 3\,,\ \eta = 2.0794\,,\ \zeta = 0\,,\ \sigma^2 = 9$; c) $\mu = \eta = \zeta = 1.5\,,\ \sigma^2 = 0.25$; d) $\mu = \eta = \zeta = 0\,,\ \sigma^2 = 1$.

7.3 a) -0.88, 3.84, 1.84; b) 0.4525, 3.9280, 1.9618; c) 0.9599, 1.8064, 1.4750; d) -1.0803, 0.6128, -0.0501.

7.4 a) 1.85, 0.0408; b) 0.7143; c) $F(x) = \frac{x-1.5}{0.7}, 1.5 \le x \le 2.2$.

7.5 a) $f(x) = \frac{1}{4}, -1 \le x \le 3$; b) $\frac{1}{4}$.

7.6 a) 0.2636; b) 0.2636; c) 0.2343.

7.7 a) 0.0401; b) 0.8944; c) 15’.

7.8 0.9048.

7.9 a) 0.3830; b) 27.2; c) 0.1894.

7.10 a) 0.0571; b) 159.47; c) 0.3192.

7.11 56.

7.12 a) $\frac{1}{3}$ dias = 2h 40m; b) 0.3247; c) 0.6449.

Ficha de Trabalho 8

Estatística Descritiva

8.1 Os valores que se apresentam a seguir referem-se ao peso de todos os alunos de duas turmas:

Turma 1:	64	81	62	77	76	
Turma 2:	88	75	62	86	65	86

a) Para cada uma das turmas, determine a mediana, a média, a variância, o coeficiente de assimetria e o coeficiente de kurtosis dos valores apresentados.

b) Reveja os cálculos da alínea anterior se admitir que os dados dizem respeito a duas amostras do peso de alunos escolhidos ao acaso.

8.2 Para caracterizar o absentismo de uma empresa do sector automóvel, durante um período de 70 dias, fez-se o registo diário do número de faltas dos trabalhadores da empresa. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados desse registo.

0	0	2	0	0	0	3	3	0	0
1	8	5	0	0	4	3	0	6	2
2	3	1	1	0	1	0	1	1	0
0	2	0	0	0	1	2	1	2	0
0	1	6	4	3	3	1	2	4	0
0	3	1	2	0	0	0	0	0	1
1	0	2	0	2	4	4	0	2	2

a) Construa o histograma de frequência e o histograma de frequências acumuladas.

b) Para o número de faltas por dia, determine a moda, a mediana, a média, a variância e os coeficientes de assimetria e de kurtosis.

8.3 Na tabela seguinte estão contidos os dados referentes a uma amostra de 100 embalagens de detergente para lavagem manual. O peso líquido indicado nas referidas embalagens é de 750g.

752	755	725	753	764	738	757	744	747	754
741	750	757	745	754	750	729	742	754	747
755	736	744	753	721	738	732	752	745	758
740	751	746	736	741	748	735	747	727	750
743	750	732	749	745	736	733	741	749	743
748	749	737	737	749	740	724	753	738	752
747	735	743	751	726	749	741	751	745	754
753	745	749	731	746	737	741	728	750	747
747	740	741	730	739	754	739	744	755	748
759	750	756	740	745	742	730	736	750	754

a) Considere os dados apresentados na tabela e agrupe-os em classes, calculando as respectivas frequências absolutas e relativas. Justifique as suas decisões relativamente às classes escolhidas.

b) Com base nas células anteriormente definidas, represente graficamente a informação fornecida.

c) Calcule as medidas amostrais de localização, dispersão, assimetria e kurtosis.

8.4 Na tabela seguinte estão indicadas as distâncias (em km) a percorrer por um atleta de maratona durante os treinos, nas 60 semanas que precedem uma prova importante:

93	76	68	84	75	82	68	90	62	88	75	85
73	79	88	73	60	93	71	59	72	63	61	65
75	87	74	62	95	78	60	68	66	78	82	75
94	77	69	74	71	74	53	65	80	73	57	89
74	65	63	72	81	83	57	64	59	76	72	60

a) Defina os intervalos para as classes e determine: moda, mediana, média, variância, coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis.

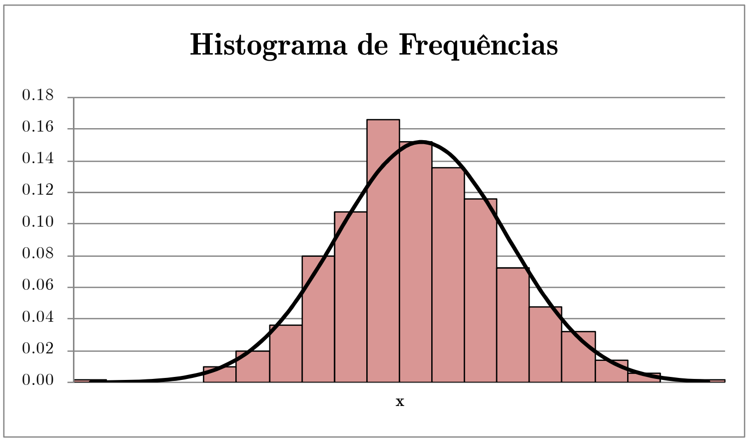
b) Esboce histogramas de frequências e de frequências relativas acumuladas.

8.5 Considere duas turmas para as quais se indicam as idades dos seus alunos.

Idade	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Frequência (turma 1)	0	4	4	6	12	10	8	0	0	0	0
Frequência (turma 2)	4	6	6	8	10	3	3	2	1	0	1

Para cada turma, determine: média, moda, mediana e variância.

8.6 Numa folha de cálculo, recorrendo à geração de números aleatórios, faça a geração de uma amostra de 500 valores de uma distribuição normal de média igual a 20 e variância igual a 4. Com os valores gerados construa um histograma com 20 classes iguais. Acrescente ao gráfico a função densidade de probabilidade da distribuição utilizada para gerar os valores. Por fim calcule estatísticas amostrais da mediana, moda, média, variância, coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. O resultado final deverá ser semelhante ao que se apresenta abaixo:



Soluções:

8.1 a) Turma 1: $\eta = 76$, $\mu = 72$, $\sigma^2 = 57.2$, $\tau = -0.2746$, $\kappa = -1.6834$;

Turma 2: $\eta = 80.5$, $\mu = 77$, $\sigma^2 = 109.33$, $\tau = -0.3385$, $\kappa = -1.6177$;

b) Turma 1: $Med = 76$, $\overline{x} = 72$, $s^2 = 71.5$, $CA'' = -0.4094$,

$CK'' = -2.7337$

Turma 2: $Med = 80.5$, $\overline{x} = 77$, $s^2 = 131.2$, $CA'' = -0.4635$, $CK'' = -2.2184$

8.2 b) $Med = 1$, $Moda = 0$, $\overline{x} = 1.4714$, $s^2 = 3.0934$, $CA'' = 1.4309$,

$CK'' = 2.1404$.

8.3 a) 10 classes com amplitude igual a 4.3; c) $Med = 745.9$, $Moda = 749.2$,

$\overline{x} = 744.2$, $s^2 = 75.41$, $CA'' = -0.5226$, $CK'' = -0.3062$.

8.4 a) Utilizando 8 classes de amplitude igual a 5.25: $\eta = 72.4\,,\ \zeta = 72.0\,,$
$\mu = 73.125\,,\ \sigma^2 = 104.4\,,\ \tau = 0.2586\,,\ \kappa = -0.7975\,.$

8.5 Turma 1: $\eta = 21\,,\ \zeta = 21\,,\ \mu = 21\,,\ \sigma^2 = 2.273$; Turma 2: $\eta = 20\,,\ \zeta = 21\,,$
$\mu = 20.3409\,,\ \sigma^2 = 4.9065$

Ficha de Trabalho 9

Amostragem Aleatória

9.1 Uma instalação portuária possui uma frota de barcos para o transporte de contentores. A capacidade de carga de cada barco é de 10 toneladas. Estima se que os contentores transportados por aquele tipo de barcos têm pesos que seguem uma distribuição Normal com valor esperado de 920 kg e desvio padrão de 250 kg.

a) Num determinado dia, um barco vai transportar 11 contentores. Qual a probabilidade do carregamento exceder a capacidade de carga do barco?

b) Qual deverá ser o número máximo de contentores a transportar se se pretender que a probabilidade de ser excedida a capacidade de carga do barco não ultrapasse 1%?

9.2 Um grupo de 78 macacos aranha a viver em liberdade na selva tem por hábito baloiçar-se numa liana. No território destes macacos as lianas não são muito resistentes e esta em particular apenas suporta um peso de 120 kg. Sabendo que o valor esperado do peso dos referidos macacos segue uma distribuição Normal com valor esperado igual a 7 kg e desvio padrão de 2.5 kg, determine:

a) A probabilidade da liana ceder se estiverem a baloiçar-se simultaneamente na mesma 15 macacos.

b) Um orangotango brincalhão fugiu de uma reserva próxima do território dos macacos. Ao reparar na brincadeira dos macacos na liana, achou por bem participar. Alguns macacos fugiram assustados, havendo no entanto 4 que decidiram ficar e brincar com o orangotango. Uma mãe macaca não achou piada nenhuma e referiu inclusivamente que a probabilidade de todos caírem era superior a 10%. Concorda? (Nota: segundo os responsáveis pela reserva, o orangotango em fuga pertence a uma família de 23 indivíduos com um peso médio de 70 kg e variância de 400 kg^2, distribuído normalmente.)

9.3 O avião ministerial de um país com fome tem uma capacidade, medida em peso nominal, de 1100 kg. Os ministros e respectivos colaboradores que utilizam regularmente o avião referido são 60 e têm pesos que seguem uma distribuição com valor esperado 60 kg (estão muito magros devido à crise) e desvio padrão de 9 kg.

a) Calcule a probabilidade de ser excedida a capacidade nominal do avião quando nele se encontram 18 pessoas entre ministros e colaboradores. Admita que não é permitido aos passageiros transportar qualquer tipo de bagagem.

b) Refaça os cálculos anteriores se o avião estiver à disposição da população chinesa que, por coincidência, têm pesos (em termos de média e desvio padrão) iguais aos dos ministros acima referidos.

9.4 A Dona Xepa, conhecida vendedora de fruta, possui um caixote com 75 maçãs que pretende vender. Infelizmente, a sua balança acaba de se avariar. Ela sabe, no entanto, que o peso das suas maçãs segue uma distribuição com valor esperado de 150 g e desvio padrão de 30 g. Acaba de chegar um cliente que pretende 3 kg de maçãs.

a) A Dona Xepa resolveu dar-lhe 19 maçãs. Qual a probabilidade de ter saído prejudicada?

b) Quantas maçãs deverá dar, se pretender que a probabilidade da Dona Xepa sair prejudicada não exceda 1%?

9.5 A empresa Válvulas & Irmãos Lda. vende dois modelos de válvulas: as Long a as Gigalong. A duração das válvulas de ambos os modelos segue uma distribuição exponencial negativa, sendo a duração média de 4500 horas para as Long e de 5000 horas para as Gigalong.

a) Determine a probabilidade da duração de uma válvula Long exceder a duração média de uma válvula Gigalong.

b) Determine a probabilidade da duração média de 200 válvulas Gigalong exceder em mais de 250 horas a duração média de 100 válvulas Long.

9.6 Num determinado centro comercial vão-se instalar 240 lojas. Sabe-se que em média cada loja emprega 4 funcionários, com um desvio padrão de 2 funcionários. Determine a probabilidade aproximada de virem a trabalhar neste centro comercial mais do que 1,000 funcionários. Justifique a sua resposta.

9.7 Admita que, na segunda volta eleições presidenciais, 53.9% dos eleitores votam no candidato A. Se, previamente às eleições, se seleccionarem 1000 pessoas aleatoriamente da população de votantes, qual a probabilidade da sondagem atribuir, erradamente, a derrota àquele candidato?

9.8 A casa *Domusburger* apresenta aos seus clientes uma ementa constituída por quatro tipos de hambúrgueres. O número de pickles necessários na confecção de cada tipo de hambúrguer é o que se apresenta na tabela seguinte.

Hamburguer	**N.º pickles**
A	0
B	1
C	2
D	3

Cada cliente escolhe um hambúrguer do tipo A, B, C ou D, com uma probabilidade de 0.3, 0.4, 0.2 e 0.1, respectivamente.

a) Calcule o valor médio e a variância da variável aleatória que representa o número de pickles por hambúrguer servido.

b) Sabendo que a casa vende 525 hambúrgueres durante a hora de almoço, calcule a probabilidade de 600 pickles serem suficientes para a confecção desses hambúrgueres.

c) Quantos pickles deve a casa encomendar se pretender que, durante a hora de almoço, a probabilidade de não satisfazer todos os clientes seja inferior a 5%?

9.9 Utilizando uma folha de cálculo gere um conjunto de amostras aleatórias com uma dimensão n, à sua escolha, e distribuição com μ e σ^2 conhecidos, igualmente à sua escolha. Para cada uma das amostras, calcule a média amostral, $\overline{x}$, e a variância amostral, s^2. Se o conjunto de amostras gerado for suficientemente grande, verifique que $\overline{\overline{x}} \approx \mu$ e que $\overline{s^2} \approx \sigma^2/n$.

<u>Soluções:</u>

9.1 a) 0.5575; b) 8.

9.2 a) 0.0434; b) Sim (0.1430).

9.3 a) 0.2674; b) 0.3002.

9.4 a) 0.0937; b) 18 ou menos.

9.5 a) 0.3292; b) 0.6689.

9.6 0.0956.

9.7 0.0061.

9.8 a) $\mu = 1.1$, $\sigma^2 = 0.89$; b) 0.8563; c) 613 ou mais.

Ficha de Trabalho 10

Estimação Pontual

10.1 Para uma amostra aleatória composta por três observações, são propostas três estatísticas, S, T e U:

$$S = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

$$T = \frac{1}{9}X_1 + \frac{1}{9}X_2 + \frac{7}{9}X_3$$

$$U = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{9}X_2 + \frac{1}{8}X_3$$

a) Determine e justifique qual das três é o melhor estimador da média da população.

b) Proponha, justificando, um estimador mais eficiente do que qualquer um dos anteriores.

10.2 Com base numa amostra de duas observações, considere os dois estimadores seguintes para a média:

$$U = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \qquad\qquad V = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

a) Serão U e V estimadores enviesados?

b) Qual o estimador mais eficiente?

10.3 Suponha que Y é o número de "sucessos" numa amostral com n observações, sendo p a probabilidade de sucesso de uma qualquer observação.

a) Mostre que $\hat{P} = Y/n$ é um estimador não enviesado de p.

b) Mostre que a variância de $\hat{P}$ é igual a $p(1-p)/n$ e mostre como se poderia calcular uma estimativa dessa variância.

10.4 Admita que os tempos entre avarias de uma certa máquina seguem uma distribuição exponencial negativa com parâmetro λ. Considere uma amostra aleatória constituída pelos seguintes tempos (expressos em horas):

24.3 13.5 53.0 17.2 7.6 14.9 8.1 34.3

Calcule a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro λ.

10.5 Os valores que se apresentam seguidamente representam os atrasos de comboios, expressos em minutos, verificados numa determinada estação:

2.3 5.8 1.6 8.0 5.2 12.5 4.7 3.1

a) Admitindo que a amostra é aleatória e que os atrasos seguem uma distribuição $U(0,b)$, calcule a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro b.

b) Utilizando os mesmos pressupostos, calcule também a estimativa do parâmetro b pelo método dos momentos. Considera esta estimativa razoável?

10.6 Numa certa população, existe uma probabilidade, p, de um casal ter um filho de olhos azuis. Se se pretender estudar na população a variável aleatória Y que representa o número de filhos com olhos azuis numa família de 4 filhos, identifique o modelo estatístico adequado para caracterizar a variável Y e indique:

a) Um estimador para o parâmetro desse modelo e estude-o quanto ao enviesamento e consistência.

b) Uma estimativa para esse parâmetro, supondo que numa amostra aleatória de 200 famílias com 4 filhos foram observadas as seguintes frequências:

N.º de filhos, em 4, com olhos azuis	0	1	2	3	4
Frequência	150	45	4	1	0

10.7 Admita que o número de clientes que visita em cada dia útil um determinado stand de automóveis segue uma lei de Poisson com média λ desconhecida. Nos dois últimos dias visitaram o stand 1 e 4 clientes. Com base nesta informação, estime o parâmetro λ.

10.8 Seja X_1, X_2, ..., X_n uma amostra retirada de uma distribuição uniforme no intervalo $[0,b]$. Como sabe, o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro b é $\hat{B} = \max(X_i)$.

a) Intuitivamente, mostre porque motivo $\hat{B}$ não pode ser um estimador não enviesado do parâmetro b.

b) Suponha que $E(\hat{B}) = n \cdot b/(n+1)$. Acha razoável dizer que o parâmetro b é consistentemente subestimado? Mostre que o enviesamento de $\hat{B}$ tende para 0 à medida que n aumenta.

c) Proponha um estimador não enviesado para o parâmetro b.

Soluções:

10.1 a) S ou T; b) A média amostral.

10.2 a) Não; b) U.

10.3

10.4 0.0463;

10.5 a) 12.5; b) 10.8.

10.6 b) 0.28.

10.7 2.5.

10.8 c) $\max(X_i)\dfrac{n+1}{n}$

Ficha de Trabalho 11

Intervalos de Confiança / Testes de Hipóteses

11.1 Considere as seguintes amostras aleatórias obtidas de populações que podem ser consideradas Normais:

Amostra 1: 8.1 10.3 11.7 11.6 15.1 9.8 9.2 11.0 9.1 8.4

Amostra 2: 12.2 9.1 11.6 14.1 11.5 8.1 10.6 8.0 12.4 11.1

Calcule intervalos de confiança a 95% para:

a) O valor esperado da população 1.

b) O valor esperado da população 1, admitindo $\sigma = 2$.

c) A variância da população 2.

d) A razão de variâncias.

e) A diferença de valores esperados admitindo que $\sigma_1 \approx \sigma_2$.

f) A proporção global de observações com valor igual ou superior a 11.

11.2 Numa fábrica do ramo alimentar, ao examinar 12 pacotes de cereais (cada um contendo 100 gramas), encontraram-se as seguintes quantidades de lípidos (em gramas) em cada um deles:

1.4 1.8 2.1 2.8 1.9 2.3 1.9 2.3 2.0 3.6 3.2 2.1

Assumindo que estas quantidades são normalmente distribuídas, construa os intervalos de confiança a 90%, a 95% e a 99% para a quantidade média de lípidos em cada pacote desta marca de cereais e comente os resultados obtidos.

11.3 Um conjunto de 140 condutores de camião, escolhidos aleatoriamente nas estradas nacionais, dispôs-se a participar numa experiência que tinha por objectivo medir os seus tempos de reacção depois do almoço. A média amostral e o erro padrão dos tempos observados foram, respectivamente, 0.85 e 0.20 segundos. Calcule o intervalo de confiança a 95% do valor esperado do tempo de reacção dos condutores em causa, após o almoço.

11.4 A DECO, no intuito de testar a fiabilidade de um certo tipo de cintos de segurança, recolheu uma amostra aleatória de 10 cintos que testou, tendo um dos cintos, falhado (não aguentou o esforço de tracção).

a) Calcule os limites de confiança a 90% para a probabilidade de falha do tipo de cinto em causa.

b) No teste descrito na alínea anterior, qual seria o limite superior a 95%. para a mesma probabilidade se nenhum dos cintos testados tivesse falhado?

c) Quais seriam os limites a 95% de confiança se tivéssemos obtido 20 falhas numa amostra de 400 cintos?

11.5 Foram recolhidas 100 amostras de água de um lago para medir as concentrações de cálcio (miligramas por litro) existentes nas mesmas. O intervalo de confiança a 95% calculado para o valor esperado é [0.49, 0.82].

a) Um intervalo de confiança a 99% calculado para o mesmo parâmetro a partir da mesma amostra teria uma amplitude menor ou maior? Justifique.

b) Considere a seguinte afirmação: *Existe uma probabilidade de 95% de o verdadeiro valor de* μ *estar entre 0.49 e 0.82*. A afirmação é verdadeira? Justifique.

c) Considere a seguinte afirmação: *Se se recolherem 100 amostras de água de um lago para se calcular o intervalo de confiança a 95% para* μ *e se o procedimento for repetido 1,000 vezes, 950 dos intervalos de confiança construídos irão conter o verdadeiro valor de* μ. A afirmação é verdadeira? Justifique.

11.6 Presume-se que certo projecto governamental tem aceitação muito diferente consoante se trate de meios urbanos ou de meios rurais. Informação recolhida a propósito forneceu os seguintes resultados: nos meios urbanos, das 200 pessoas interrogadas, 78 afirmaram concordar com o projecto; nos meios rurais, em 300 pessoas 153 mostraram-se favoráveis.

a) Apresente uma estimativa para a diferença entre a proporção de pessoas que nos dois meios favorecem os projectos.

b) Construa um intervalo de confiança a 99% para aquela estimativa.

11.7 Admita que de uma amostra aleatória de 10 elementos extraídos de uma população normal se obteve:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100$$

Determine:

a) Estimativas da média e do desvio padrão da população.

b) Um intervalo de confiança para a média da população, a um nível de confiança de 90%.

c) Um intervalo de confiança a 90% para a variância da população.

11.8 Determine o intervalo de confiança a 95% para a proporção de economistas do sexo feminino que trabalham no sector bancário, se numa amostra de 25 economistas seleccionados aleatoriamente a partir de uma população de 300 economistas que trabalham em bancos, houver 7 mulheres.

11.9 Pretende se caracterizar a eficiência de uma dieta existente no mercado. Para o efeito, contabilizou se o peso perdido (em kg) por 8 voluntários sujeitos à dieta em questão no último mês. Os resultados obtidos foram os seguintes:

3.6 3.2 4.1 5.2 4.3 3.2 3.5 5.3

a) Construa o intervalo de confiança a 95% para o valor esperado do peso perdido.

b) Construa o intervalo de confiança a 99% para a variância do peso perdido.

Soluções:

11.1 a) [8.9531,11.9069]; b) [9.1904,11.6696]; c) [1.8210,12.8281]; d) [0.2751,4.4580]; e) [-2.3321,1.4521]; f) [0.272,0.728].

11.2 [1.9593,2.6073], [1.8862,2.6804], [1.7229,2.8437].

11.3 [0.8169,0.8831] (estatística z).

11.4 a) [0.005,0.394]; b) 0.259; c) [0.0286,0.0714]

11.5 a) Maior; b) Verdadeira; c) Falsa.

11.6 a) -0.12; b) [-0.236; -0.004].

11.7 a) 1 e 3.1623; b) [-0.8331,2.8331]; c) [5.3195,27.0669].

11.8 [0.111,0.449] (Normal) ou [0.121,0.494] (binomial).

11.9 a) [3.3505,4.7495]; b) [0.2416,4.9530].

Ficha de Trabalho 12

Intervalos de Confiança / Testes de Hipóteses

> Muitos dos exercícios apresentados nesta ficha de trabalho podem ser resolvidos utilizando a metodologia do teste de hipóteses ou a metodologia dos intervalos de confiança. Aconselha-se a utilização de ambos os métodos e a conferência das conclusões.

12.1 A empresa de lacticínios Pastora faz um anúncio de televisão em que garante que os seus iogurtes têm, em média, mais do que 80 g de produtos lácteos em cada 100 g. Dentro das normas de conduta na publicidade, a Pastora pôs à disposição de uma associação de consumidores os resultados dos testes que diariamente executa, referentes a uma semana. Os valores da tabela seguinte referem se aos resultados das análises efectuadas a uma amostra de 7 iogurtes, seleccionados aleatoriamente, um por dia.

Dia	1	2	3	4	5	6	7
Produtos lácteos/100g	82.0	81.5	82.9	80.5	79.5	80.5	80.7

a) Recorrendo a metodologia de teste de hipóteses, verifique, com nível de significância de 5%, se é verdadeira a informação contida no anúncio da Pastora.

b) Recorrendo a um intervalo de confiança faça a mesma verificação da alínea anterior.

12.2 Duas empresas a trabalhar no ramo da indústria química são fornecedoras da mesma matéria-prima. A concentração média de um constituinte desta matéria-prima é a mesma para as duas empresas fornecedoras, mas suspeita-se que a variabilidade da sua concentração pode diferir de empresa para empresa. O erro padrão de uma amostra de 10 lotes produzidos pela primeira empresa é 4.7 gramas. Para a segunda empresa foi recolhida uma amostra com 16 lotes e o erro padrão calculado foi 5.8 gramas. Existem indícios suficientes para que se possa concluir que as variâncias das duas populações diferem? Considere $\alpha = 5\%$.

12.3 Uma empresa imobiliária colocou à venda uma série de andares de luxo. O gerente, Dr. A. Brás Portas, deseja confirmar se o facto de os seus potenciais clientes verem um andar modelo melhora a sua predisposição para a compra. A 15 clientes potenciais que apenas tiveram acesso a um folheto que descreve o andar, perguntou quanto estariam dispostos a pagar por ele. As respostas, expressas em milhares de contos, foram as seguintes:

63 33 44 47 55 39 60 45 24 31 53 30 36 69 54

A mesma pergunta foi feita a outros 12 potenciais clientes que, para além de terem visto o folheto, puderam inspeccionar o andar modelo. As respostas, expressas em milhares de contos, foram as seguintes:

65 45 43 71 52 51 64 35 59 75 67 48

a) Teste, a um nível de significância de 5%, se a inspecção ao andar modelo conduziu a uma maior valorização do andar por parte dos potenciais clientes.

b) Admita que as 15 pessoas inicialmente inquiridas voltaram a avaliar os mesmos andares depois de inspeccionarem o andar modelo, tendo sido as respostas, em milhares de contos, as seguintes (a ordem das respostas é a mesma que a inicial):

63 35 48 56 59 39 60 45 34 39 58 38 53 68 53

Verifique a um nível de significância de 5% se, nestas circunstâncias, a inspecção do andar conduziu a uma maior valorização do mesmo.

12.4 O último teste de Estatística não correu lá muito bem. O professor, admirado e desanimado, resolveu questionar alguns alunos no sentido de saber se consideraram o teste difícil. Dos 10 alunos interrogados, 8 consideraram que o teste tinha sido efectivamente muito puxado.

a) Poder-se-á afirmar, perante estes dados, que a maioria dos alunos achou o teste muito puxado? (Utilize um nível de significância de 5%.)

b) Os alunos, desconfiados do questionário do desanimado professor, resolveram recolher uma informação mais numerosa sobre o assunto. Questionando 50 alunos, concluíram que 32 deles tinham achado o teste muito difícil. Será que, perante estes novos dados, se pode concluir que a maioria dos alunos achou o teste muito difícil?

c) Resolva de novo as alíneas anteriores recorrendo à metodologia dos intervalos de confiança.

12.5 Para verificar se a experiência melhora o desempenho em análises clínicas, um laboratório submeteu um recém-licenciado a um teste que consistiu em identificar a percentagem de um determinado elemento químico em 14 amostras de um certo produto. Algum tempo depois, quando o licenciado já se julgava um ás, foi convidado a analisar 10 amostras do produto anteriormente analisado (conservado em condições que evitassem qualquer alteração química). Os resultados foram os seguintes:

1ª série de resultados:

4.40 4.56 4.42 4.59 4.61 4.45 4.58 4.39 4.77 4.72 4.69 4.53 4.90 4.50

2ª série de resultados:

4.42 4.47 4.70 4.72 4.53 4.55 4.60 4.64 4.71 4.52

Determine se há alguma evidência que permita concluir que a experiência melhora a precisão da análise.

12.6 A Petrogolpe está interessada em testar dois tipos de combustíveis (Pesado e Leve) que desenvolveu, em função do número de quilómetros percorridos por vinte automóveis de competição numa prova de estrada. O teste foi efectuado, atribuindo 10 litros de combustível a cada veículo tendo-se obtido os seguintes resultados:

Pesado	105	62	141	150	45	51	57	63	105	120
Leve	80	79	113	115	116	119	78	76	80	116

a) Teste, ao nível de significância de 5% se existe uma diferença significativa entre os dois combustíveis no que diz respeito ao consumo (medido através dos quilómetros percorridos).

b) Teste, a um nível de significância de 5% se a variância do combustível Leve é igual a 340 Km^2.

12.7 O chefe da contabilidade de certa firma está preocupado com a grande quantidade de facturas que detectou com erros. Ele estima que mais de 20% são enviadas com algum tipo de erro. Numa amostra de 500 facturas analisadas foram encontradas 130 naquelas condições. Para $\alpha = 0.01$ diga se é de concordar com a suposição feita.

12.8 Um analista político presume que o candidato A possa ter 20% dos votos. Feita uma sondagem, 14 dos 100 inquiridos revelaram tencionar votar em A. Que se pode concluir para $\alpha = 5\%$? E no caso de, em 1000 inquiridos, 140 se declararem eleitores de A?

12.9 Um conceituado oftalmologista brigantino afirma que existem mais 10% de mulheres com problemas de visão do que homens. Para verificar tal afirmação, recolheu-se uma amostra de 40 mulheres e 60 homens, da qual se obtiveram os seguintes resultados: no grupo feminino, 18 usavam óculos; do grupo masculino verificou-se que somente 24 usavam óculos. Teste a afirmação do oftalmologista, recorrendo à metodologia do teste de hipóteses. Use um nível de significância de 5% e considere que estudos mais antigos sobre a população brigantina, revelam que a percentagem das mulheres que usam óculos é de 40% e a mesma percentagem situa-se em 50% para os homens.

Soluções:

12.1 a) Verdadeira, $v.p. = 0.0216$; b) $[80.26, +\infty[$.

12.2 Não, $v.p. = 0.5312$.

12.3 a) Sim, $v.p. = 0.0213$; b) Sim, $v.p. = 0.0031$.

12.4 a) Não, $v.p. = 0.0547$; b) Sim, $v.p. = 0.0239$; c) [0.493,1], [0.520,1].

12.5 Não, $v.p. = 0.1441$;

12.6 a) Não, $v.p = 0.6038$; b) É plausível, $v.p. = 0.6592$.

12.7 Sim, $v.p. = 0.0004$.

12.8 $n = 100$: [0.0616,0.2184], $n = 1000$: [0.1152,0.1648].

12.9 É plausível, $v.p. = 0.62$;

Ficha de Trabalho 13

Intervalos de Confiança / Testes de Hipóteses

13.1 A Direcção de uma Faculdade dispôs se a oferecer aos seus 3,800 alunos a possibilidade de estes frequentarem aulas ao Sábado de manhã, se a procura para este horário for suficientemente alta. Qual a dimensão apropriada da amostra de alunos inquirir, n , para que a amplitude do intervalo de confiança a 95% para a proporção de alunos com interesse por aquele horário não exceda 0.1? Admita que não existe qualquer estimativa desta proporção e que não há tempo para recolher uma amostra piloto.

13.2 O gabinete de projecto da empresa *Sótubos* pretende estimar a tensão de ruptura do material utilizado num determinado tipo de tubos. Com base num vasto conjunto de ensaios realizados no passado, estima-se que o desvio padrão da tensão de ruptura do material é de 70 psi. Deseja-se definir um intervalo de confiança a 99% para o valor esperado da tensão de ruptura, pretendendo-se que a sua amplitude não exceda 60 psi. Qual a dimensão da amostra (de ensaios) necessária para definir este intervalo?

13.3 Explique o que representa a potência de um teste de hipóteses. Num teste à diferença de valores esperados envolvendo duas populações, pode-se assumir que uma delas tem um desvio padrão conhecido e igual a 1.5 unidades e a outra um desvio padrão também conhecido de 2.5 unidades. Trace a curva da potência deste teste para valores da verdadeira diferença de médias de 0, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, e 4.5, admitindo que as amostras têm uma dimensão de 5 e o nível de significância é de 5%.

13.4 Num relatório publicado, afirma-se que as PME nacionais que consomem propano pagam as suas contas de gás num prazo médio de 14 dias úteis após a recepção da factura correspondente. Uma das empresas que distribui propano para fins industriais recolheu uma amostra aleatória do número de dias que os seus clientes demoravam a pagar as contas. Os resultados foram os seguintes:

34	3	4	44	29	17	32	14	28	16

a) Teste, ao nível de significância de 5%, se a afirmação produzida no relatório é válida.

b) Supondo que o verdadeiro valor para o prazo de pagamento médio é, de facto, 18.5 dias úteis, qual a probabilidade de, nestas circunstâncias, se rejeitar acertadamente a hipótese nula?

13.5 Numa fábrica de computadores, o chefe de produção afirma que 40% dos computadores vendidos na região onde a fábrica está inserida, são produzidos na sua fábrica. O chefe de produção decide considerar a sua afirmação como aceitável, a não ser que, de entre uma amostra de 19 computadores, se verifique que o número de computadores vendidos pela sua fábrica é menor ou igual que 3 ou maior ou igual que 12.

a) Tendo por base a afirmação do chefe de produção, formule a hipótese nula e a hipótese alternativa do teste e indique a região de rejeição.

b) Determine o nível de significância do teste.

c) Determine a potência do teste se a proporção de computadores vendidos pela fábrica for, na verdade, igual a 0.3.

13.6 Notícias recentes dão conta que o teor de alcatrão em cigarros de algumas marcas está acima do valor legal permitido (10 miligramas). Você pretende testar os cigarros de uma dessas marcas para confirmar a veracidade da notícia. Depois de alguma pesquisa, descobriu que, devido ao processo de fabrico utilizado, a quantidade de alcatrão em cada cigarro tem um desvio padrão de 1 miligrama. No estudo a efectuar, caso a quantidade de alcatrão esteja dentro da lei, a probabilidade de tirar uma conclusão errada deve ser, no máximo, 2.5%. Por outro lado, desde que a quantidade de alcatrão exceda o limite legal em apenas 0.5 mg, tal facto deve ser detectado com uma probabilidade de 99%. Qual o tamanho da amostra de cigarros a analisar?

13.7 Devido a problemas anormais ocorridos recentemente na sua linha de produção, uma empresa de empacotamento de açúcar acredita que os pacotes destinados a uso corrente têm agora uma quantidade de açúcar inferior a 12 g. Para testar se a linha de produção está a produzir pacotes de açúcar com peso inferior ao garantido pela empresa (12 g), decidiu se recolher aleatoriamente uma amostra de 100 unidades, onde foi avaliado o peso de açúcar por pacote. Os resultados obtidos foram: média amostral de 11.9 g e erro padrão de 0.32 g.

a) Teste, a um nível de significância de 5%, se a empresa está a produzir pacotes de açúcar com peso inferior ao garantido.

b) Se o valor verdadeiro do peso médio de açúcar por pacote for de 11.85 g, qual a probabilidade de, nestas circunstâncias, se estar a cometer um erro do tipo II?

c) Nas condições da alínea anterior, qual a dimensão mínima da amostra a recolher de modo que a probabilidade de se cometer um erro do tipo II não exceda a 1%?

13.8 Os gerentes de duas lojas de vestuário da mesma cadeia (lojas A e B), estão ambos empenhados em vender mais que o outro durante esta estação. A meio da época, o gerente da loja B garante estar a vender mais que o seu colega, apresentando vendas médias diárias de 2,500 € com um erro padrão de 350 €. O gerente da loja A apenas apresenta vendas médias diárias de 2,300 € com erro padrão de 200 €, mas garante que não está a vender significativamente menos. Admita que ambos os gerentes utilizaram como amostra 10 dias de trabalho escolhidos aleatoriamente.

a) Teste, a um nível de significância de 5%, as afirmações dos dois gerentes.

b) Qual deverá ser o tamanho das amostras a recolher (necessariamente iguais) se se pretender detectar uma diferença de €180 nas vendas diárias médias com, pelo menos, 80% de probabilidade.

13.9 Segundo alguns entendidos na matéria, dos 10 milhões de habitantes do país, 6 milhões são benfiquistas. Um jornal desportivo, resolveu encomendar uma sondagem para confirmar tal facto pois, segundo eles, aquela percentagem é menor. Em 10 pessoas entrevistadas, 4 afirmaram ser benfiquistas.

a) Perante os dados, pode afirmar-se que o jornal tem razão? Recorra à metodologia do teste de hipóteses.

b) Refaça a sua opinião se, em 100 entrevistados, houver 40 benfiquistas.

c) Se a verdadeira percentagem de benfiquistas for, de facto, 50%, qual a probabilidade de, no teste efectuado na alínea anterior, a hipótese nula não ser rejeitada.

d) Nas condições da alínea anterior, qual a amostra necessária para limitar aquela probabilidade a 5%?

Soluções:

13.1 349.

13.2 37.

13.3 $1-\beta=[0.0500, 0.0670, 0.2100, 0.4831, 0.7656, 0.9321]$.

13.4 a) É plausível, v.p. = 0.0888; b) 0.1344.

13.5 b) 0.0582; c) 0.1360.

13.6 74.

13.7 a) Sim, v.p. = 0.0009 (z) ou v.p. = 0.0012 (t); b) 0.0012 (z) ou 0.0016 (t); c) 72 (z).

13.8 a) Gerente A é mais plausível, v.p. = 0.0670; b) 32 de cada.

13.9 a) Não, v.p. = 0.1663; b) Sim, $v.p. \approx 0$; c) 0.3489; d) 266.

<u>Notas</u>

10/2007: As soluções dos exercícios 3.7 e 6.3 foram alteradas.

11/2007: A solução do exercício 10.8 foi alterada.

12/2007: As soluções das alíneas 11.4 a) e 11.4 b) foram alteradas.

Ficha de Trabalho 9 – Amostragem Aleatória

9.1

$X \to$ Peso dos contentores

$X \sim N(\mu = 920, \sigma = 250)$

a) 11 contentores

$S \to$ Peso dos 11 contentores

$S \sim$ Normal (soma de distribuições normais)

$\mu_S = n\mu_X = (11)(920) = 10\,120$ kg

$\sigma_S^2 = n\sigma_X^2 = (11)(250)^2 = 687\,500$ kg^2

$$P(S > 10 \text{ ton}) = P(S > 10\,000 \text{ kg})$$

$$= P\left(Z > \frac{10\,000 - 10\,120}{\sqrt{687\,500}}\right) = P(Z > -0.1447)$$

$$= 1 - P(Z > 0.1447) = 1 - 0.4425 = \underline{0.5575}$$

b) $P(S > 10\,000) < 1\%$

Tem que se resolver por tentativas (ou por eq. de 2.º grau)

$\mu_S = 920\,n$ $\qquad\qquad$ $n \to$ n.º de contentores

$\sigma_S = 250\sqrt{n}$

$$P(S > 10000) < 1\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{10\,000 - 920n}{250\sqrt{n}}\right) < 1\%$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\frac{10\,000 - 920n}{250\sqrt{n}}}^{z^*} > 2.3263$$

Por tentativas:

n	z^*
10	1.0119
9	2.2933
8	3.7335

Resposta: 8 contentores

9.2 População: $M = 78$ Resistência $= 120$ kg

$X \to$ Peso dos macacos

$X \sim N(\mu = 7, \sigma = 2.5)$ (kg)

a) $S \to$ Soma dos pesos dos 15 macacos

$S \sim$ Normal (soma de v.a. normais)

$$\mu_S = n\,\mu_X = (15)(7) = 105 \text{ kg}$$

$$\sigma_S^2 = n\,\sigma_X^2\,\frac{M-n}{M-1} = (15)(2.5)^2\,\frac{78-15}{78-1} = 76.70$$

$$P(S > 120) = P\left(Z > \frac{120-105}{\sqrt{76.70}}\right) = P(Z > 1.7127) = 0.0434$$

b) $X' \to$ Peso dos orangotangos População $M = 23$

$X' \sim N(\mu = 70, \sigma^2 = 400)$

$S' \to$ Peso de 4 macacos + orangotango

$S' \sim$ Normal (soma de v.a. normais)

$$\mu_{S'} = 4\mu_X + \mu_{X'} = (4)(7) + 70 = 98 \text{ kg}$$

$$\sigma_{S'}^2 = 4\,\sigma_X^2\,\frac{M-n}{M-1} + \sigma_{X'}^2 = (4)(2.5)^2\left(\frac{78-4}{78-1}\right) + 400$$

$\to$ desprezável

$$= 425 \text{ kg}^2$$

$$P(S' > 120) = P\left(Z > \frac{120-98}{\sqrt{425}}\right) = P(Z > 1.0671)$$

$$= 0.1430$$

$\therefore$ A afirmação é correcta.

9.3 Capacidade = 1100 kg

Populaçp : $M = 60$

$X \to$ Peso dos ministros

$$\mu_X = 60 \text{ kg}$$
$$\sigma_X = 9 \text{ kg}$$

a) $S \to$ Peso de 18 ministros

$$\mu_S = n\mu_X = (18)(60) = 1080 \text{ kg}$$
$$\sigma_S^2 = n\sigma_X^2 \frac{M-n}{M-1} = (18)(9)^2 \frac{60-18}{60-1} = 1037.90 \text{ kg}^2$$

Pelo T.L.C $S \approx N(\mu_S, \sigma_S^2)$

$$P(S > 1100) = P\left(Z > \frac{1100-1080}{\sqrt{1037.90}}\right) = P(Z > 0.6208)$$
$$= 0.2674$$

b) Neste caso $M \approx +\infty$

$$\Rightarrow \sigma_S^2 = n\sigma_X^2 = (18)(9^2) = 1458 \text{ kg}^2$$

$$P(S > 1100) = P\left(Z > \frac{1100-1080}{\sqrt{1458}}\right) = P(Z > 0.5238)$$
$$= 0.3002$$

(9.4) População: $M = 75$

$X \to$ Peso das maçãs

$\mu_X = 150$ gr.

$\sigma_X = 30$ gr.

a) 19 maçãs 3 kg

$S \to$ Soma dos pesos das 19 maçãs

$$\mu_S = n\,\mu_X = (19)(150) = 2850 \text{ gr.}$$

$$\sigma_S^2 = n\,\sigma_X^2 \frac{M-n}{M-1} = (19)(30)^2 \frac{75-19}{75-1} = 12\,940 \text{ gr}^2$$

Pelo T.L.C $S \approx$ Normal

$$P(\text{Ser prejudicada}) = P(S > 3000 \text{ gr.})$$

$$= P\left(Z > \frac{3000 - 2850}{\sqrt{12\,940}}\right) = P(Z > 1.3186) = 0.0937$$

b) $P(S > 3000) < 1\%$ $n = ?$

$$\mu_S = 150n \qquad \sigma_S^2 = (30^2)(n)\frac{75-n}{74}$$

$$P\left(Z > \frac{3000 - 150n}{30\sqrt{n\,\frac{75-n}{74}}}\right) < 1\% \iff \overbrace{\frac{3000 - 150n}{30\sqrt{n\,\frac{75-n}{74}}}}^{z^*} > 2.3263$$

Por tentativas:

n	z^*
19	1.3186
18	2.6856

Resposta: deve dar 18 maçãs

9.5 $L \rightarrow$ duração das válvulas Long

$L \sim EN(\beta = 4500)$

$G \rightarrow$ duração das válvulas Gigalong

$G \sim EN(\beta = 5000)$

a) $P(L > 5000) = 1 - P(L \leq 5000) = 1 - \left(1 - e^{-5000/4500}\right)$

$= e^{-50/45} = 0.3292$

b) Seja $\bar{G} = \dfrac{\sum_{i=1}^{200} G_i}{200}$ e $\bar{L} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} L_i}{100}$

Pelo T.L.C $\bar{G}$ e $\bar{L}$ seguem distribuições aproximadamente normais

$\mu_{\bar{G}} = \mu_G = 5000$ h

$\sigma^2_{\bar{G}} = \dfrac{\sigma^2_G}{n} = \dfrac{(5000)^2}{200} = 125\,000$ h^2

$\mu_{\bar{L}} = \mu_L = 4500$ h

$\sigma^2_{\bar{L}} = \dfrac{\sigma^2_L}{n} = \dfrac{(4500)^2}{100} = 202\,500$ h^2

Seja $\bar{D}$ a diferença média

$\bar{D} = \bar{G} - \bar{L}$

$\bar{D} \sim$ Normal (diferença de v.a. normais)

$\mu_{\bar{D}} = \mu_{\bar{G}} - \mu_{\bar{L}} = 5000 - 4500 = 500$ h

$\sigma^2_{\bar{D}} = \sigma^2_{\bar{G}} + \sigma^2_{\bar{L}} = 125\,000 + 202\,500 = 327\,500$ h^2

$P(\bar{D} > 250) = P\left(Z > \dfrac{250 - 500}{\sqrt{327\,500}}\right) = P(Z > -0.4369)$

$= 1 - P(Z > 0.4369) = 1 - 0.3311 = 0.6689$

9.6 240 lojas

$Y \to$ nº de funcionários

$\mu_Y = 4 \qquad \sigma_Y = 2$

$S \to$ Nº de funcionários das 240 lojas

Pelo T.L.C $\quad S \approx$ Normal

$$\mu_S = n\mu_Y = (240)(4) = 960$$

$$\sigma_S^2 = n\sigma_Y^2 = (240)(2)^2 = 960$$

$P(S > 1000) = P(S \geq 1000.5)$ (correcção de continuidade)

$$= P\left(Z > \frac{1000.5 - 960}{\sqrt{960}}\right) = P(Z > 1.3071) = \underline{0.0956}$$

9.7 $p = 0.539 \qquad n = 1000$

$Y \to$ nº de pessoas que votam em A

$Y \sim B(n = 1000, p = 0.539)$

$P(\text{Atribuir derrota}) = P(Y \leq 499)$

Pelo T.L.C. $\quad Y \approx$ Normal $(\mu = np, \sigma^2 = npq)$

$P(Y \leq 499) = P(Y \leq 499.5)$ (correcção de continuidade)

$$= P\left(Z \leq \frac{499.5 - (1000)(0.539)}{\sqrt{(1000)(0.539)(0.461)}}\right) = P(Z \leq -2.5058)$$

$$= P(Z \geq 2.5058) = 0.0061$$

9.8 $P(A) = 0.3$ $P(B) = 0.4$ $P(C) = 0.2$ $P(D) = 0.1$

a) $Y \to$ nº de pickles por hamburguer

y	$p(y)$
0	0.3
1	0.4
2	0.2
3	0.1

$$\mu_Y = 0.4 + 0.4 + 0.3 = 1.1$$
$$\sigma^2_Y = 0.4 + 0.8 + 0.9 - (1.1)^2 = 0.89$$

b) 525 hamburguers

$S \to$ Nº de pickles em 525 hamburguers

Pelo T.L.C $S \approx$ Normal

$$\mu_S = n\mu_Y = (525)(1.1) = 577.5$$
$$\sigma^2_S = n\sigma^2_Y = (525)(0.89) = 467.25$$

$$P(S \leq 600) = P(S \leq 600.5) \quad \text{(correcção de continuidade)}$$

$$= P\left(Z \leq \frac{600.5 - 577.5}{\sqrt{467.25}}\right) = P(Z \leq 1.0640)$$

$$= 1 - P(Z > 1.0640) = 1 - 0.1437 = 0.8563$$

c) $P(S > s^*) < 5\% \iff P(S \geq s^* + 0.5) < 5\%$

$$\iff P\left(Z \geq \frac{s^* + 0.5 - 577.5}{\sqrt{467.25}}\right) < 5\% \iff \frac{s^* - 577}{\sqrt{467.25}} > 1.6449$$

$$\iff s^* > 1.6449\sqrt{467.25} + 577$$

$$\iff s^* > 612.6$$

$\Rightarrow$ Encomendar 613 ou mais pickles

Ficha de Trabalho 11 – I.C. / T.H.

11.1 Amostra 1 $\begin{cases} \bar{x} = 10.43 \\ s^2 = 4.2623 \\ s = 2.0645 \end{cases}$ Amostra 2 $\begin{cases} \bar{x} = 10.87 \\ s^2 = 3.8490 \\ s = 1.9619 \end{cases}$

$\alpha = 5\%$

a) $\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha/2) \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ $t_9(0.025) = 2.2622$

$10.43 \pm 2.2622 \dfrac{2.0645}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 10.43 \pm 1.4769$

$[8.9531 , 11.9069]$

b) $\sigma = 2$ $z(0.025) = 1.96$

$\bar{x} \pm z(\alpha/2) \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$10.43 \pm 1.96 \dfrac{2}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 10.43 \pm 1.2396$

$[9.1904 , 11.6696]$

c) $\left[\dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} , \dfrac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)} \right]$ $\chi^2_9(0.025) = 19.0228$, $\chi^2_9(0.975) = 2.7004$

$\left[\dfrac{(9)(3.8490)}{19.0228} , \dfrac{(9)(3.8490)}{2.7004} \right]$

$[1.8210 , 12.8281]$

d) $\left[\dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{GL_1,GL_2}(\alpha/2)} , \dfrac{s_1^2/s_2^2}{F_{GL_1,GL_2}(1-\alpha/2)} \right]$ $F_{9,9}(0.025) = 4.0260$, $F_{9,9}(0.975) = 0.2484$

$\left[\dfrac{4.2623/3.8490}{4.0260} , \dfrac{4.2623/3.8490}{0.2484} \right]$

$[0.2751 , 4.4580]$

e) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{GL}(\alpha/2)\, s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

$GL = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{GL} = \frac{(9)(4.2623) + (9)(3.8490)}{18}$$

$s^2 = 4.0557$ $\qquad t_{18}(0.025) = 2.1009$

logo: $(10.43 - 10.87) \pm (2.1009)\sqrt{(4.0557)}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$

-0.44 ± 1.8921

$[-2.3321 \,,\, 1.4521]$

f) Em 20 observações há 10 obs. superiores ou iguais a 11

I.C. para a proporção binomial (amostras pequenas)

$n = 20 \qquad \hat{Y} = 10$

Pela tabela A6 : $[0.272, 0.728]$

11.2 $\begin{cases} \bar{x} = 2.2833 \\ s = 0.6250 \end{cases}$

90% $\Rightarrow t_{11}(0.05) = 1.7959$

95% $\Rightarrow t_{11}(0.025) = 2.2010$

99% $\Rightarrow t_{11}(0.005) = 3.1058$

$\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}}$

90% : $2.2833 \pm 1.7959 \frac{0.6250}{\sqrt{12}} \Rightarrow 2.2833 \pm 0.3240 \Rightarrow [1.9593, 2.6073]$

95% $2.2833 \pm 2.2010 \frac{0.6250}{\sqrt{12}} \Rightarrow 2.2833 \pm 0.3971 \Rightarrow [1.8862, 2.6804]$

99% $2.2833 \pm 3.1058 \frac{0.6250}{\sqrt{12}} \Rightarrow 2.2833 \pm 0.5604 \Rightarrow [1.7229, 2.8437]$

$\therefore$ maior confiança $\Rightarrow$ intervalos mais amplos

(11.3) $n = 140$ $\bar{x} = 0.85$ $s = 0.20$ 95% (3)

Amostra grande, a aproximação Normal é boa

$$\bar{x} \pm z(\alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 0.85 \pm 1.96 \frac{0.20}{\sqrt{140}}$$ $z(0.025) = 1.96$

0.85 ± 0.0331 $[0.8169 , 0.8831]$

Note-se que $t_{139}(0.025) = 1.9772$, logo a aproximação é excelente.

(11.4) $n = 10$ $\hat{Y} \to$ nº de falhas
$\hat{Y} = 1$

a) 90% Pela tabela A6:

$[0.005 , 0.394]$

b) Limite superior a 95%:
Pela tabela A6: $LS = 0.394$

c) 95% $\hat{Y} = 20$ e $n = 400$

Neste caso utiliza-se a distribuição Normal como aproximação

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$ $\hat{p} = \frac{20}{400} = 0.05$

$z(0.025) = 1.96$

$$0.05 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{400}}$$

$0.05 \pm 0.0214 \Rightarrow [0.0286 , 0.0714]$

11.5 I.C. a 95% $[0.49\ ,\ 0.82]$

a) Maior. Ver exercício 11.2, por exemplo

b) Verdadeira. Para qualquer parâmetro, o intervalo de confiança $[\theta_i\ ,\ \theta_s]$ significa:

$$P(\theta_i \leq \theta \leq \theta_s) = 1-\alpha$$

c) Falsa. Em média, o raciocínio está correcto. No entanto, numa prova específica, nada garante o resultado.

11.6 Urbanos $\begin{cases} n = 200 \\ \hat{Y} = 78 \end{cases}$ Rurais $\begin{cases} n = 300 \\ \hat{Y} = 153 \end{cases}$

a) $\hat{p}_U = \dfrac{\hat{Y}_U}{n_U} = \dfrac{78}{200} = 0.39 \qquad \hat{p}_R = \dfrac{\hat{Y}_R}{n_R} = \dfrac{153}{300} = 0.51$

$$\hat{p}_U - \hat{p}_R = \frac{78}{200} - \frac{153}{300} = -0.12$$

Há uma diferença de 12% na proporção de pessoas que favorece o projecto nos dois meios

b) 99%

$$(\hat{p}_U - \hat{p}_R) \pm z(\alpha/2)\sqrt{\frac{\hat{p}_U\hat{q}_U}{n_U} + \frac{\hat{p}_R\hat{q}_R}{n_R}} \qquad z(0.005) = 2.5758$$

$$-0.12 \pm 2.5758\sqrt{\frac{(0.39)(0.61)}{200} + \frac{(0.51)(0.49)}{300}}$$

$$-0.12 \pm 0.116$$

$$[-0.236\ ,\ -0.004]$$

11.7 $\quad n = 10 \qquad \sum x_i = 10 \qquad \sum x_i^2 = 100$

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{10}{10} = 1$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2\right) = \frac{10}{9}\left(\frac{100}{10} - 1^2\right) = 10$$

$s = \sqrt{10} = 3.1623$

b)

90%

$$\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad t_9(0.05) = 1.8331$$

$$1 \pm 1.8331 \frac{\cancel{3.1623}}{\cancel{\sqrt{10}}}$$

$$[-0.8331 \;,\; 2.8331]$$

c) 90%

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \;,\; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right] \qquad \chi^2_9(0.05) = 16.919$$

$$\chi^2_9(0.95) = 3.3251$$

$$\left[\frac{(9)(10)}{16.919} \;,\; \frac{(9)(10)}{3.3251}\right]$$

$$[5.3195 \;,\; 27.0669]$$

11.8 95% $n = 25$ $M = 300$ $\hat{Y} = 7$

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2) \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} \frac{M-n}{M-1}}$$

$z(0.025) = 1.96$

$\hat{p} = \frac{7}{25} = 0.28$

$$0.28 \pm 1.96 \sqrt{\frac{(0.28)(0.72)}{25} \frac{300-25}{300-1}}$$

$$0.28 \pm 0.169$$

$$[0.111 \ , \ 0.449]$$

Utilizando a aproximação à Binomial e a tabela A6:

$$[0.121 \ , \ 0.494]$$

Em ambos os casos temos aproximações.

11.9 $n = 8$ $\bar{x} = 4.05$

$s^2 = 0.7$ $s = 0.8367$

95%

a) $$\bar{x} \pm t_{n-1}(\alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$t_7(0.025) = 2.3646$

$$4.05 \pm 2.3646 \frac{0.8367}{\sqrt{8}}$$

$$4.05 \pm 0.6995$$

$$[3.3505 \ , \ 4.7495]$$

b) 99%

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \ , \ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$$

$\chi^2_7(0.005) = 20.278$

$\chi^2_7(0.995) = 0.9893$

$$\left[\frac{(7)(0.7)}{20.278} \ , \ \frac{(7)(0.7)}{0.9893}\right]$$

$$[0.2416 \ , \ 4.9530]$$

FICHA DE TRABALHO 12 - I.C. / T.H.

12.1

$\bar{x} = 81.09 \qquad n = 7$

$s^2 = 1.2748 \qquad s = 1.1291$

a) $\alpha = 5\%$

$H_0 : \mu = 80$

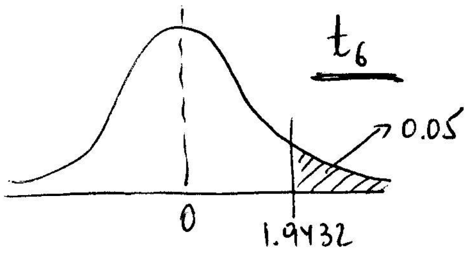
$H_1 : \mu > 80$ (hipótese a validar)

$ET = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ Se H_0 verdadeira $ET \sim t_6$

Deve rejeitar-se H_0 se

$ET > t_6(\alpha)$

$t_6(0.05) = 1.9432$



$ET = \dfrac{81.09 - 80}{1.1291/\sqrt{7}} = 2.5541$

Como $ET > t_6(\alpha)$ $\Rightarrow$ Rejeitar H_0 : pode concluir-se que a afirmação da empresa é correcta.

$v.p = P(t_6 > 2.5541) = 0.0216$

b) O intervalo correspondente é aberto à direita e a 95%

$\left[\bar{x} - t_{n-1}(\alpha)\dfrac{s}{\sqrt{n}} , +\infty\right[$

$\left[81.09 - 1.9432\,\dfrac{1.1291}{\sqrt{7}} , +\infty\right[$

$[80.26 , +\infty[$ Como $H_0 : \mu = 80$ não está contido no intervalo, pode concluir-se pela rejeição da hipótese.

12.2

$E1 \begin{cases} n = 10 \\ s = 4.7 \end{cases}$ $\quad E2 \begin{cases} n = 16 \\ s = 5.8 \end{cases}$ $\quad \alpha = 5\%$

$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

$H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Por conveniência, e uma vez que as tabelas da distribuição F são à direita, é aconselhável colocar a população cujo erro amostral seja maior no numerador.

Então:

$H_0 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$ $\qquad ET = \dfrac{s_2^2/\sigma_2^2}{s_1^2/\sigma_1^2}$

$H_1 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$ $\qquad$ Se H_0 verdadeira, $ET \sim F_{n_2-1,\, n_1-1}$

ou seja $ET \sim F_{15,9}$

Deve rejeitar-se H_0 se : $\begin{cases} ET > F_{15,9}(\alpha/2) = 3.7694 \\ \text{ou} \\ ET < F_{15,9}(1-\alpha/2) = 0.3202 \end{cases}$

$$ET = \frac{(5.8)^2}{(4.7)^2} = 1.5229$$

$\therefore$ Não rejeitar H_0. As variâncias não são significativamente diferentes.

$$v.p. = 2P(F_{15,9} \geq 1.5229) = (2)(0.2656) = 0.5312$$

(nas tabelas, mostrar aos alunos que $v.p. > 20\%$)

12.3 Amostra A (folheto) $\left| \begin{array}{l} n = 15 \\ \bar{x} = 45.5333 \\ s^2 = 178.12 \\ s = 13.3463 \end{array} \right.$ Amostra B (folheto + visita) $\left| \begin{array}{l} n = 12 \\ \bar{x} = 56.25 \\ s^2 = 154.2045 \\ s = 12.4179 \end{array} \right.$

$\alpha = 5\%$

a) 2 amostras independentes

$H_0: \mu_B = \mu_A \Leftrightarrow \mu_B - \mu_A = 0$

$H_1: \mu_B > \mu_A \Leftrightarrow \mu_B - \mu_A > 0$ (Pretende-se testar se houve valorização)

Para determinar a estatística do teste, é necessário testar a igualdade de variâncias:

$H_0: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$

$H_1: \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$

Utilizando o intervalo de confiança a 95%:

$$\left[\frac{s_A^2 / s_B^2}{F_{14,11}(\alpha/2)} , \frac{s_A^2 / s_B^2}{F_{14,11}(1-\alpha/2)} \right]$$

$$\left[\frac{178.12 / 154.2045}{3.3588} , \frac{178.12 / 154.2045}{0.3231} \right]$$

$[0.344 , 3.575]$ $\therefore \sigma_A^2 \simeq \sigma_B^2$

Considerando as variâncias iguais

$$ET = \frac{(\bar{x}_B - \bar{x}_A) - (\mu_B - \mu_A)}{s \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim t_{n_B + n_A - 2}$

$ET \sim t_{25}$

$$s^2 = \frac{(n_A - 1) s_A^2 + (n_B - 1) s_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(14)(178.12) + (11)(154.2045)}{25} = 167.60$$

$s = 12.9460$

$$ET = \frac{(56.25 - 45.5333) - 0}{12.9460 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{12}}} = 2.1374$$

Deve rejeitar-se H_0 se $ET > t_{25}(\alpha) = 1.7081$

$\therefore$ Rejeitar H_0. A visita conduziu a uma maior valorização do imóvel

$v.p. = P(t_{25} > 2.1374) = 0.0213$

12.3 (cont.)

b) Neste caso, as amostras devem considerar-se emparelhadas e o teste deve ser efectuado sobre as diferenças.

$$\Delta = X_B - X_A \qquad \begin{cases} \bar{\Delta} = 4.3333 \\ s^2_\Delta = 27.0952 \\ s_\Delta = 5.2053 \end{cases} \qquad \alpha = 5\%$$

$H_0: \mu_\Delta = 0$

$H_1: \mu_\Delta > 0$

$$ET = \frac{\bar{\Delta} - \mu_\Delta}{s_\Delta / \sqrt{n}}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim t_{14}$

Rejeitar H_0 se $ET > t_{14}(\alpha) = 1.7613$

$$ET = \frac{4.3333 - 0}{5.2053/\sqrt{15}} = 3.2242$$

∴ Rejeitar H_0. Conclui-se que a visita ao andar modelo conduziu a uma valorização significativa dos imóveis

$$v.p. = P(t_{14} > 3.2242) = 0.0031$$

12.4 $n = 10 \qquad \hat{Y} = 8 \qquad \alpha = 5\%$

a) $H_0: p = 0.5$

$H_1: p > 0.5$

$ET = \hat{Y}$ Se H_0 verdadeira $ET \sim B(n=10, p=0.5)$

$$v.p. = P(ET \geq 8) = 0.439 + 0.0098 + 0.0010 = 0.0547$$

A um nível de significância de 5% não se pode rejeitar H_0, não havendo evidência de que a maioria dos alunos tenha achado o teste muito puxado.

b) $n = 50 \qquad \hat{Y} = 32$

Neste caso, como a amostra é grande, pode fazer-se

$$ET = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \qquad \text{Se } H_0 \text{ verdadeira} \quad ET \sim N(0,1)$$

Deve rejeitar-se H_0 se $ET > z(\alpha) = 1.6449$

$$ET = \frac{0.64 - 0.50}{\sqrt{(0.50)(0.50)/50}} = 1.9799 \qquad \hat{p} = \frac{32}{50} = 0.64$$

$\therefore$ Rejeitar H_0. Há evidência de que a maioria dos alunos achou o teste muito puxado.

$$v.p. = P(z \geq 1.9799) = 0.0239$$

(Pela Binomial $v.p. = 0.0325$)

c) a) Tabela A6 : $[0.493, 1]$

$\therefore$ 0.5 está incluído, logo, não rejeitar H_0

b) $\left[\hat{p} - z(0.05)\sqrt{\frac{pq}{n}}, 1\right]$

$$\left[0.64 - 1.6449\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{50}}, 1\right]$$

$$[0.520, 1]$$

$\therefore$ 0.5 não está incluído, logo rejeitar H_0.

12.5

A (antes)
$$\begin{cases} n = 14 \\ \bar{x} = 4.5793 \\ s^2 = 0.0224 \\ s = 0.1497 \end{cases}$$

B (depois)
$$\begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = 4.586 \\ s^2 = 0.0110 \\ s = 0.1050 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Considerando } \alpha = 5\%}$

A precisão das análises pode ser medida através da variância, ou seja, menos variância ⇒ mais precisão
Pretende-se verificar se a experiência melhora a precisão
logo:

$$H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$$

$$H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 1 \qquad \text{(melhor desempenho em B)}$$

$$ET = \frac{s_A^2/\sigma_A^2}{s_B^2/\sigma_B^2}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim f_{n_A-1,\, n_B-1}$

$ET \sim f_{13,9}$

Deve rejeitar-se H_0 se $ET > f_{13,9}(\alpha) = 3.0475$

$$ET = \frac{0.0224}{0.0110} = 2.0364$$

∴ Não rejeitar H_0. Não há evidência de que a precisão da análise tenha aumentado com a experiência.

$$v.p. = P(f_{13,9} \geq 2.0364) = 0.1441$$

12.6 Pesado $\begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = 89.9 \\ s^2 = 1522.1 \\ s = 39.0141 \end{cases}$ Leve $\begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = 97.2 \\ s^2 = 387.733 \\ s = 19.6910 \end{cases}$

a) Como estão envolvidos 20 automóveis diferentes, as amostras devem considerar-se independentes.

Logo,

$H_0: \mu_P = \mu_L \Leftrightarrow \mu_P - \mu_L = 0$

$H_1: \mu_P \neq \mu_L \Leftrightarrow \mu_P - \mu_L \neq 0$

Para determinar ET a utilizar é necessário testar a igualdade de variâncias:

$H_0: \sigma_P^2 / \sigma_L^2 = 1$

$H_1: \sigma_P^2 / \sigma_L^2 \neq 1$

O intervalo de confiança a 95% para σ_P^2/σ_L^2 é:

$$\left[\frac{\sigma_P^2 / \sigma_L^2}{f_{9,9}(\alpha/2)} , \frac{\sigma_P^2 / \sigma_L^2}{f_{9,9}(1-\alpha/2)} \right]$$

$$\left[\frac{1522.1 / 387.733}{4.0260} , \frac{1522.1 / 387.733}{0.2484} \right]$$

$[0.975 , 15.804]$ ∴ Considerar $\sigma_P^2 \simeq \sigma_L^2$

Para o teste aos valores esperados, fica:

$$ET = \frac{(\bar{x}_P - \bar{x}_L) - (\mu_P - \mu_L)}{s \sqrt{\frac{1}{n_P} + \frac{1}{n_L}}}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim t_{n_P + n_L - 2}$

$ET \sim t_{18}$

com $s^2 = \dfrac{(n_P - 1) s_P^2 + (n_L - 1) s_L^2}{n_P + n_L - 2} = \dfrac{(9)(1522.1) + (9)(387.733)}{18}$

$s^2 = 954.92$ $s = 30.902$

12.6 (cont.)

Ho deve ser rejeitada se:

$ET < -t_{18}(\alpha/2)$ ou se $ET > t_{18}(\alpha/2)$

Com $t_{18}(\alpha/2) = 2.1009$

$$ET = \frac{(89.9-97.2)-0}{30.902\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = -0.5282$$

∴ Não rejeitar Ho. Não há evidência de diferenças significativas nos quilómetros percorridos

$$v.p. = 2P(t_{18} \geq 0.5282) = (2)(0.3019) = 0.6038$$

b) $\alpha = 5\%$ $\sigma_L^2 = 340 \text{ Km}^2$?

$H_0: \sigma_L^2 = 340$

$H_1: \sigma_L^2 \neq 340$

$ET = \frac{(n-1)s_L^2}{\sigma_L^2}$ Se Ho verdadeira $ET \sim \chi^2_{n_L-1}$

$ET \sim \chi^2_9$

Rejeitar Ho se $\begin{cases} ET > \chi^2_9(\alpha/2) = 19.0228 \\ \text{ou} \\ ET < \chi^2_9(1-\alpha/2) = 2.7004 \end{cases}$

$$ET = \frac{(9)(387.733)}{340} = 10.2635$$

∴ Não rejeitar Ho. Não há evidência de que a variância seja significativamente diferente de 340.

$$v.p. = 2P(\chi^2_9 \geq 10.2635) = (2)(0.3296) = 0.6592$$

12.7 $n = 500$ $\alpha = 0.01$
$\hat{Y} = 130$

$p > 20\%$?

É necessário testar a proporção de facturas com erros.

$H_0: p = 0.20$

$H_1: p > 0.20$ (afirmação a comprovar)

$\hat{Y} \rightarrow$ nº de facturas (em 500) com erros

$\hat{Y} \sim B(n=500, p=0.20)$ se Ho verdadeira

Como a amostra é grande

$$ET = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \qquad \text{Se Ho verdadeira} \quad ET \approx N(0,1)$$

Deve rejeitar-se Ho se $ET > z(\alpha) = 2.3263$

$$ET = \frac{0.26 - 0.20}{\sqrt{(0.20)(0.80)/500}} = 3.3541 \qquad \hat{p} = \frac{\hat{Y}}{n} = \frac{130}{500} = 0.26$$

$\therefore$ A um nível de significância de 1%, rejeitar Ho, havendo evidência de que a afirmação do contabilista esteja correcta.

$$v.p. = P(z \geq 3.3541) = 0.0004$$

12.8 $n = 100$ $\alpha = 5\%$
$\hat{Y} = 14$

$H_0: p = 0.20$

$H_1: p \neq 0.20$

O intervalo de confiança para p é dado por:

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{pq/n} \qquad \text{com} \quad z(\alpha/2) = 1.96$$

Para $n = 100$: $0.14 \pm 1.96\sqrt{(0.20)(0.80)/100} \Rightarrow [0.0616, 0.2184]$

$\therefore$ Não rejeitar Ho

(12.8) (cont.)

Para $n = 1000$: $0.14 \pm 1.96 \sqrt{(0.20)(0.80)/1000}$

$$[0.1152 \, , \, 0.1648]$$

$\therefore$ Neste caso é possível concluir pela rejeição de Ho.

(12.9) Mulheres (A) $\left\{ \begin{array}{l} n = 40 \\ \hat{Y} = 18 \end{array} \right.$ Homens (B) $\left\{ \begin{array}{l} n = 60 \\ \hat{Y} = 24 \end{array} \right.$

$\alpha = 5\%$ $p_A = 0.40$ $p_B = 0.50$

$H_0: \; p_A - p_B = 0.10$

$H_1: \; p_A - p_B \neq 0.10$

$$ET = \frac{(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - (p_A - p_B)}{\sqrt{\frac{p_A q_A}{n_A} + \frac{p_B q_B}{n_B}}}$$

Se Ho verdadeira $ET \sim N(0,1)$

Ho deve ser rejeitada se $ET > z(\alpha/2)$ ou se $ET < -z(\alpha/2)$

com $z(\alpha/2) = 1.96$

$$ET = \frac{(0.45 - 0.40) - (0.10)}{\sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{40} + \frac{(0.50)(0.50)}{60}}}$$

$\hat{p}_A = \frac{18}{40} = 0.45$

$\hat{p}_B = \frac{24}{60} = 0.40$

$ET = -0.4959$

$\therefore$ Não rejeitar Ho. Não há evidencia de que a diferença de proporções seja significativamente diferente de 10%

$$v.p. = 2P(Z \geq 0.4959) = (2)(0.31) = 0.62$$

NOTA: no denominador da ET utilizaram-se as proporções históricas porque, em princípio, têm um maior grau de credibilidade que as estimativas amostrais. No entanto, isto é discutível.

Aplicação da lei de Laplace: $\frac{\#\, Casos\ favoráveis}{\#\, Casos\ possíveis}$ $\quad P(A) = \frac{N_A}{N}$

2.1 Neste caso:

Casos favoráveis: $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\} \quad \# = 10$

Casos possíveis: $Todos\ os\ cartões \quad \# = 50$

$\boldsymbol{p} = {}^{10}/_{50} = {}^{1}/_{5} = \mathbf{0,20}$

2.2 **a)** $\boldsymbol{p} = {}^{\#\, favoráveis}/_{\#\, possíveis} = {}^{C_2^{13}}/_{C_2^{52}} = {}^{78}/_{1326} = \mathbf{0,0588}$

b) $\boldsymbol{p} = {}^{\#\, favoráveis}/_{\#\, possíveis} = {}^{C_1^{13} \times C_1^{13}}/_{C_2^{52}} = {}^{(13)(13)}/_{1326} = \mathbf{0,1275}$

2.3

Saco A - # 12	Saco B - # 15	Saco C - # 9
4 azuis	**6** azuis	**2** azuis
8 pretas	**9 p**retas	**7 p**retas

a) $\boldsymbol{P(3az)} = P(3az \cap A) + P(3az \cap B) + P(3az \cap C) = P(3az|A).P(A) + P(3az|B).P(B)$; $[P(3az \cap C) = 0$ pois não há 3 azuis no C]

$P(A) = P(B) = P(C) = {}^{1}/_{3}$; $\quad P(3az|A) = {}^{C_3^4}/_{C_3^{12}} = {}^{4}/_{220}$; $\quad P(3az|B) = {}^{C_3^6}/_{C_3^{15}} = {}^{20}/_{455}$

$\boldsymbol{P(3az)} = {}^{4}/_{220} \times {}^{1}/_{3} + {}^{20}/_{455} \times {}^{1}/_{3} = \mathbf{0,02071}$

b) Retirando uma bola de cada saco, há 3 possibilidades de resultados: azul azul **p**reta , azul **p**reta azul , **p**reta azul azul

$$\boldsymbol{p} = \frac{4}{12} \times \frac{6}{15} \times \frac{7}{9} + \frac{4}{12} \times \frac{9}{15} \times \frac{2}{9} + \frac{8}{12} \times \frac{6}{15} \times \frac{2}{9} = \mathbf{0,2074}$$

2.4

$1\ D$	$1\ D$	$\emptyset\ D$	$2\ D$	$\emptyset\ D$	$\emptyset\ D$
C1	**C2**	**C3**	**C1**	**C2**	**C3**
Estratégia A			Estratégia B		

Há 3 hipóteses equiprováveis para a escolha de contentores: C1,C2 ou C1,C3 ou C2,C3

Estratégia A: $P(\emptyset D) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{56}{75} = 0{,}7467$

Estratégia B: $P(\emptyset D) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{5} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{55}{75} = 0{,}7333$ Logo a estratégia **A é a melhor**.

2.5 $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}2$; $\text{A e B mutuamente exlusivo}$

Dois acontecimentos são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Logo, $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

Como A e B são mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = 0$, assim, os dois acontecimentos não são independentes.

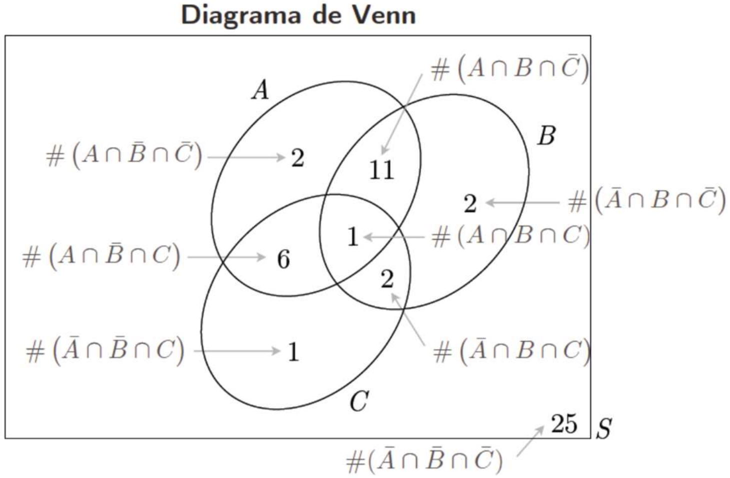
2.6 $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}5$

Para acontecimentos mutuamente exclusivos, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$. Logo, $P(A \cup B \cup C) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1{,}2$,

o que não faz sentido pois $0 \leq P \leq 1$. Então, aquelas probabilidades são impossíveis para acontecimentos mutuamente exclusivos.

2.7 $P(A \mid B) = 0{,}7$; $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}2$ $\boldsymbol{P(B|A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B) \times P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}2}{0{,}4} = \mathbf{0{,}35}$

2.8



Dados: (Valores em milhares) $\#S = 50$ $(n^{\text{º}}\ de\ potenciais\ leitores)$

$\boldsymbol{A} \rightarrow Leitores\ do\ jornal\ A$ $\quad \#A = 20$

$\boldsymbol{B} \rightarrow Leitores\ do\ jornal\ B$ $\quad \#B = 16$

$\boldsymbol{C} \rightarrow Leitores\ do\ jornal\ C$ $\quad \#C = 10$

$\#(A \cap B) = 12$

$\#(B \cap C) = 3$

$\#(A \cap C) = 7$

$\#(A \cap B \cap C) = 1$

Acontecimentos não são mutuamente exclusivos

$\#(A \cap B \cap \bar{C}) = \#(A \cap B) - \#(A \cap B \cap C) = 12 - 1 = 11$

$\#(A \cap \bar{B} \cap C) = \#(A \cap C) - \#(A \cap B \cap C) = 7 - 1 = 6$

$\#(\bar{A} \cap B \cap C) = \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C) = 3 - 1 = 2$

$\#(apenas\ A) = \#(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 20 - 11 - 1 - 6 = 2$

$\#(apenas\ B) = \#(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = 16 - 11 - 1 - 2 = 2$

$\#(apenas\ C) = \#(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = 10 - 6 - 1 - 2 = 1$

$\#(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \#(S) - \#(A \cup B \cup C) = 50 - (2 + 2 + 1 + 11 + 6 + 2 + 1) = 25$

a) $\#(A \cup B \cup C) = 2 + 2 + 1 + 11 + 6 + 2 + 1 = 25 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cup B \cup C)} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = \mathbf{0,50}$

b) $\#(A \dot{\cup} B \dot{\cup} C) = 2 + 2 + 1 = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \dot{\cup} B \dot{\cup} C)} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = \mathbf{0,10}$

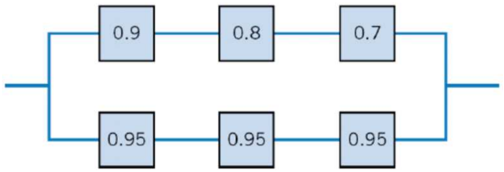
c) $\boldsymbol{P(B \mid A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{12/50}{20/50} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \mathbf{0,60}$

2.9 $P(C \cup A) = 0{,}75$; $(C \cap A) = 0{,}20$; $P(C) = 0{,}5$; $P(C \mid A) = ? = \frac{P(C\cap A)}{P(A)}$

Sabemos que: $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) \Leftrightarrow P(A) = P(C \cup A) + P(C \cap A) - P(C) \Leftrightarrow P(A) = 0{,}75 + 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}45$

Então: $\boldsymbol{P(C \mid A)} = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}45} = \mathbf{0,[4]}$

2.10



O circuito funcionará se um dos circuitos (de cima ou de baixo) funcionar. Sejam:

$\boldsymbol{C} \rightarrow O\ circuito\ de\ Cima\ funciona$

$\boldsymbol{B} \rightarrow O\ circuito\ de\ Baixo\ funciona$

$P(funcionar) = P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B)$

$P(C) = (0{,}9)(0{,}8)(0{,}7) = 0{,}504$ (aparelhos independentes)

$P(B) = (0{,}95)(0{,}95)(0{,}95) = 0{,}857375$ (aparelhos independentes)

$P(C \cap B) = P(C) \times P(B) = (0{,}504)(0{,}857375) = 0{,}432117$

$$\boldsymbol{P(funcionar)} = 0{,}504 + 0{,}857375 - 0{,}432117 = \mathbf{0,929258}$$

2.11 $P(D) = 0{,}03$; $P(P \mid D) = 0{,}96$; $P(P \mid \bar{D}) = 0{,}08$ $D \rightarrow Estar\ doente$; $P \rightarrow Teste\ positivo$

$P(D \mid \bar{P}) = \frac{P(D\cap\bar{P})}{P(\bar{P})}$ Pelo teorema de Bayes

$$\boldsymbol{P(D \mid \bar{P})} = \frac{P(\bar{P} \mid D) \times P(D)}{P(\bar{P} \mid D) \times P(D) + P(\bar{P} \mid \bar{D}) \times P(\bar{D})} = \frac{0{,}04 \times 0{,}03}{0{,}04 \times 0{,}03 + 0{,}92 \times 0{,}97} = \mathbf{1,343 \times 10^{-3}}$$

2.12 $P(A) = 0{,}10$; $P(B) = 0{,}20$; $P(C) = 0{,}30$; $\rightarrow$ $P(D) = 1 - (0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}30) = 0{,}40$

$P(R \mid A) = 0{,}30$; $P(R \mid B) = 0{,}40$; $P(R \mid C) = 0{,}10$; $P(R \mid D) = 0{,}70$

a) $\boldsymbol{P(D \mid R)} = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R \mid D) \times P(D)}{P(R)} = \frac{(0{,}70) \times (0{,}40)}{0{,}42} = \mathbf{0,[6]}$ onde,

$P(R) = P(R \mid A) \times P(A) + P(R \mid B) \times P(B) + P(R \mid C) \times P(C) + P(R \mid D) \times P(D) = 0{,}42$

b) $\boldsymbol{P(A \mid \bar{R})} = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(\bar{R} \mid A) \times P(A)}{P(\bar{R})} = \frac{(0{,}70) \times (0{,}10)}{0{,}58} = \mathbf{0,1207}$ onde, $P(\bar{R} \mid A) = 1 - P(R \mid A)$ e $P(\bar{R}) = 1 - P(R)$

c) $\boldsymbol{P(\bar{C} \mid R)} = 1 - (C \mid R) = 1 - \frac{P(R \mid C) \times P(C)}{P(R)} = 1 - \frac{(0{,}10) \times (0{,}30)}{0{,}42} = \mathbf{0,9286}$

Ou, $\boldsymbol{P(\bar{C} \mid R)} = \frac{P(\bar{C} \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{(0{,}30) \times (0{,}10) + (0{,}40) \times (0{,}20) + (0{,}70) \times (0{,}40)}{0{,}42} = \mathbf{0,9286}$

d) $\boldsymbol{P(\bar{B} \cap \bar{C} \mid \bar{R})} = P(A \cup D \mid \bar{R}) = \frac{P(A \cup D \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(A \cap \bar{R}) + P(D \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{(0{,}7) \times (0{,}10) + (0{,}3) \times (0{,}40)}{0{,}58} = \mathbf{0,3276}$

Ou, $\boldsymbol{P(\bar{B} \cap \bar{C} \mid \bar{R})} = P(A \mid \bar{R}) + P(D \mid \bar{R}) = \mathbf{0,3276}$

2.13 $P(T) = 0{,}80$; $P(Z) = 0{,}40$; $T \rightarrow O\ Tó\ tem\ aprovação$; $Z \rightarrow O\ Zé\ tem\ aprovação$

$$\boldsymbol{P(T \mid Apenas\ 1\ aprovado)} = P(T \mid 1a) = \frac{P(T \cap 1a)}{P(1a)} = \frac{(0{,}80) \times (0{,}60)}{(0{,}80) \times (0{,}60) + (0{,}40) \times (0{,}20)} = \mathbf{0,8571}$$

3.1

Saco A - #9	Saco B - #9
2 Vermelhas	**3** Vermelhas
1 **A**zul	**3 A**zuis
6 Pretas	**3** Pretas

Y → Número de bolas Vermelhas selecionadas

a) Há duas sequências possíveis para a escolha dos sacos: **A-B** / **B-A**. Em cada sequência há 4 resultados possíveis:

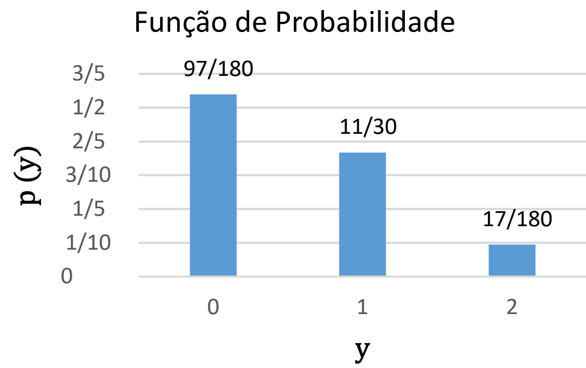
Vermelha + Vermelha
Vermelha + Outra
Outra + Vermelha
Outra + Outra

Para a sequência de sacos A-B:	x ½	Y	p(y)
P(VV) = 2/9 x 4/10 = 8/90	→	2	8/180
P(VO) = 2/9 x 6/10 = 12/90	→	1	12/180
P(OV) = 7/9 x 3/10 = 21/90	→	1	21/180
P(OO) = 7/9 x 7/10 = 49/90	→	0	49/180

Para a sequência de sacos B-A:	x ½	Y	p(y)
P(VV) = 3/9 x 3/10 = 9/90	→	2	9/180
P(VO) = 3/9 x 7/10 = 21/90	→	1	21/180
P(OV) = 6/9 x 2/10 = 12/90	→	1	12/180
P(OO) = 6/9 x 8/10 = 48/90	→	0	48/180

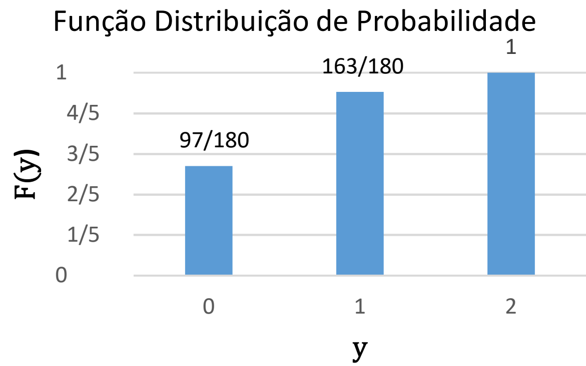
A **função de probabilidade** será:

Y	$p(y)$
0	$\mathbf{97/180}$
1	$\mathbf{66/180}$
2	$\mathbf{17/180}$
$\Sigma =$	1



b) A **Função distribuição de probabilidade será**:

Y	$p(y)$	$F(y)$
0	$97/180$	$\mathbf{97/180}$
1	$66/180$	$\mathbf{163/180}$
2	$17/180$	**1**



c) $\boldsymbol{P(Y \geq 1)} = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{97}{180} = \mathbf{\frac{83}{180}}$

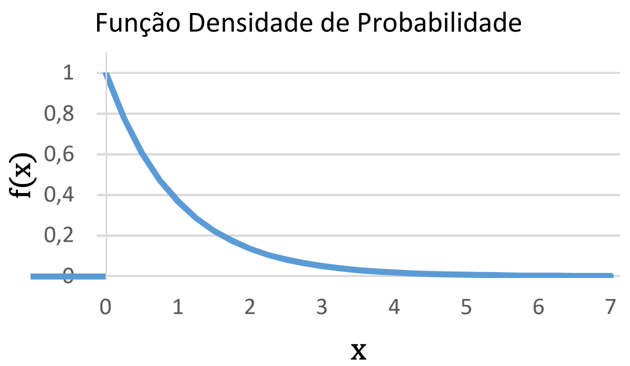
d) $\boldsymbol{P(Y \geq 1\,|Y \neq 2)} = P(Y \geq 1\,|\,Y \leq 1) = \frac{P(Y\geq1 \cap Y\leq1)}{P(Y\leq1)} = \frac{P(Y=1)}{F(1)} = \frac{66/180}{163/180} = \mathbf{\frac{66}{163}}$

3.2 $f(x) = e^{-x}$

a) O tempo entre chegadas tem que ser positivo, logo

$$\text{se } x < 0\,,\ \boldsymbol{f(x) = 0}$$

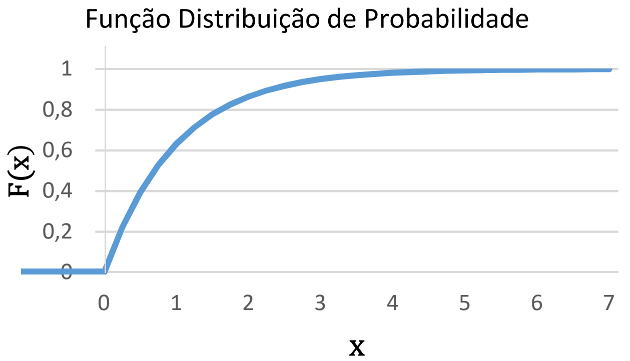
$$\text{se } x \geq 0\,,\ \boldsymbol{f(x) = e^{-x}}$$



b) Se $x < 0\,,\ \boldsymbol{F(x) = 0}$;

$$\text{se } x \geq 0\,,\ \boldsymbol{F(x)} = \int_0^x f(u)du = \int_0^x e^{-u}du = -\int_0^x -e^{-u}du =$$

$$= -\left[e^{-u}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 = \boldsymbol{1 - e^{-x}}$$



c) 45 s = 0,75 min

$$\boldsymbol{P(X > 0{,}75)} = 1 - P(X \leq 0{,}75) = 1 - F(0{,}75) =$$

$$= 1 - (1 - e^{-0{,}75}) = e^{-0{,}75} = \boldsymbol{0{,}4724}$$

d) $\boldsymbol{P(X > 1{,}5 \mid X > 0{,}75)} = \frac{P(X>1{,}5 \cap X>0{,}75)}{P(X>0{,}75)} = \frac{P(X>1{,}5)}{P(X>0{,}75)} = \frac{e^{-1{,}5}}{e^{-0{,}75}} = e^{(-1{,}5-(-0{,}75))} = e^{-0{,}75} = \boldsymbol{0{,}4724}$ (Resultado igual ao anterior…!)

3.3

5 Azuis
4 Vermelhos

Estante A - #9

2 Azuis
5 Vermelhos

Estante B - #7

Y → Número de livros Vermelhos selecionadas

a) A experiência tem 2^3 resultados possíveis:

A-A-A	A-A-V	A-V-A	V-A-A	A-V-V	V-A-V	V-V-A	V-V-V

Com as seguintes probabilidades:

		Y	p(y)
$P(AAA) = 5/9 \times 4/8 \times 4/9 = 80/648$	→	0	80/648
$P(AAV) = 5/9 \times 4/8 \times 5/9 = 100/648$	→	1	100/648
$P(AVA) = 5/9 \times 4/8 \times 3/9 = 60/648$	→	1	60/648
$P(VAA) = 4/9 \times 5/8 \times 3/9 = 60/648$	→	1	60/648
$P(AVV) = 5/9 \times 4/8 \times 6/9 = 120/648$	→	2	120/648
$P(VAV) = 4/9 \times 5/8 \times 6/9 = 120/648$	→	2	120/648
$P(VVA) = 4/9 \times 3/8 \times 2/9 = 24/648$	→	2	24/648
$P(VVV) = 4/9 \times 3/8 \times 7/9 = 84/648$	→	3	84/648

E a função de probabilidade:

Y	$p(y)$
0	**80/648**
1	**220/648**
2	**264/648**
3	**84/648**
$\Sigma =$	1

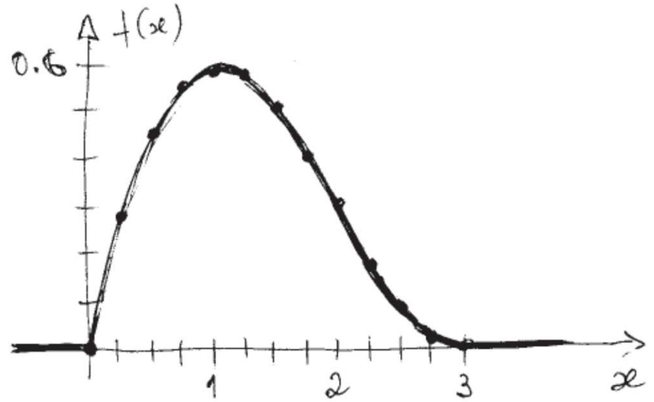
b) O número médio de livros vermelhos será; $\boldsymbol{\mu_Y} = \sum_y y\, p(y) = (0)\frac{80}{648} + (1)\frac{220}{648} + (2)\frac{264}{648} + (3)\frac{84}{648} = \frac{1000}{648} = \mathbf{1{,}5432}$

3.4 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} {}^{\mathbf{4}}\!/_{\mathbf{27}}\,(\mathbf{9x - 6x^2 + x^3})\,; & para\ 0 \le x \le 3 \\ \mathbf{0}\,; & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$

a) Para os valores de x propostos entre 0 e 3 temos: →

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	0
0,25	0,28
0,50	0,46
0,75	0,56
1	0,59
1,25	0,57
1,50	0,50
1,75	0,41
2	0,30
2,25	0,19
2,50	0,09
2,75	0,03
3	0

E desenhando os gráficos respetivos;



b) Para $x < 0$, $\boldsymbol{F(x) = 0}$; Para $x > 3$, $\boldsymbol{F(x) = 1}$

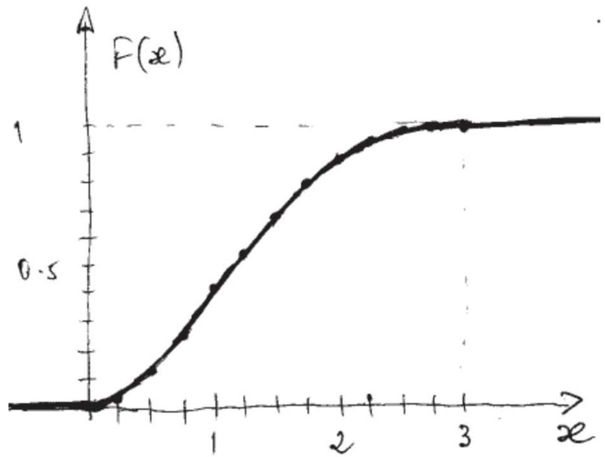
Para $0 \le x \le 3$, $\boldsymbol{F(x)} = \int_0^x f(u)du =$

$$= \int_0^x \frac{4}{27}(9u - 6u^2 + u^3)du =$$

$$= \frac{4}{27}\left[\frac{9}{2}u^2 - \frac{6}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4\right]_0^x = \frac{4}{27}\left(\frac{9}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) =$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{1}{27}x^4}$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{F(x)}$
0	0
0,25	0,04
0,50	0,13
0,75	0,26
1	0,41
1,25	0,55
1,50	0,69
1,75	0,80
2	0,89
2,25	0,95
2,50	0,98
2,75	0,998
3	1



c) $\boldsymbol{P(X \le 1,5)} = F(1{,}5) = \mathbf{0,6875}$

$\boldsymbol{P(X \ge 2)} = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,[8] = \mathbf{0,[1]}$

$\boldsymbol{P(1 \le X \le 2,5)} = P(X \le 2{,}5) - P(X < 1) = F(2{,}5) - F(1) = 0{,}9838 - 0{,}4074 = \mathbf{0,5764}$

3.5 $\boldsymbol{P(Y=y)=ky\,;y\in\{1,2,3,4,5\}}$

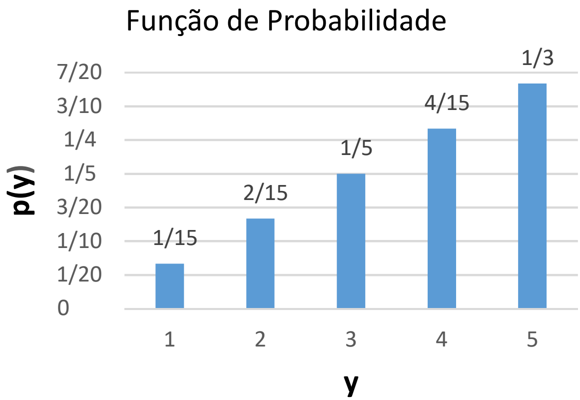
a) Uma função de probabilidade válida obriga a que; $\begin{cases} p(y)\geq 0\,, & \forall y \\ \sum_y p(y)=1 \end{cases}$

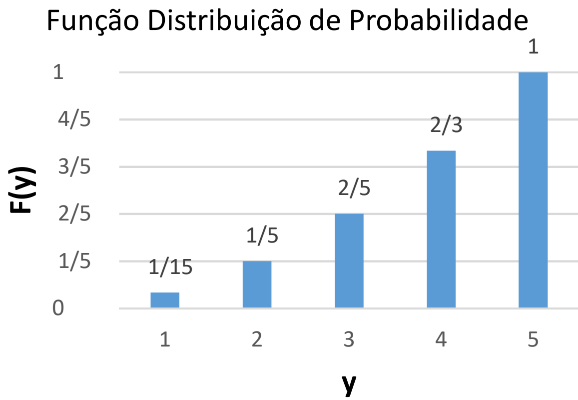
Então, $\sum_y p(y)=1 \Leftrightarrow k+2k+3k+4k+5k=1 \Leftrightarrow 15k=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k={}^{1}\!/_{15}}$

Com ambas as condições respeitadas.

b)

y	$p(y)$	$F(y)$
1	${}^{1}\!/_{15}$	${}^{1}\!/_{15}$
2	${}^{2}\!/_{15}$	${}^{3}\!/_{15}$
3	${}^{3}\!/_{15}$	${}^{6}\!/_{15}$
4	${}^{4}\!/_{15}$	${}^{10}\!/_{15}$
5	${}^{5}\!/_{15}$	1
$\Sigma=$	1	





c) Moda; $\boldsymbol{\xi_Y=5}$; Mediana; $\boldsymbol{\eta_Y=4}$

Média; $\boldsymbol{\mu_Y}=\sum_y y\,p(y)=(1)\frac{1}{15}+(2)\frac{2}{15}+(3)\frac{3}{15}+(4)\frac{4}{15}+(5)\frac{5}{15}=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}=\boldsymbol{3,[6]}$

Variância; $\boldsymbol{\sigma_Y^2}=\sum_y y^2\,p(y)-\mu_Y^2=(1)^2\frac{1}{15}+(2)^2\frac{2}{15}+(3)^2\frac{3}{15}+(4)^2\frac{4}{15}+(5)^2\frac{5}{15}-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{225}{15}-\frac{121}{9}=\boldsymbol{1,[5]}$

d) $\boldsymbol{P(Y=4)}=p(4)=\boldsymbol{{}^{4}\!/_{15}}$

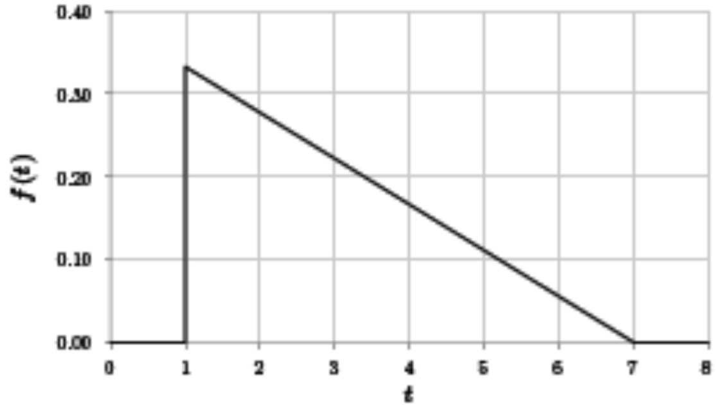
$\boldsymbol{P(Y\geq 2)}=1-P(Y\leq 1)=1-F(1)=1-{}^{1}\!/_{15}=\boldsymbol{{}^{14}\!/_{15}}$

3.6 $\boldsymbol{f(t) = a + bt}\,;\ 1 \le t \le 7$ e $\boldsymbol{f(7) = 0}$

a) Se $f(t)$ for ma função de probabilidade válida então; $\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \\ f(t) \ge 0\,,\ \ \forall t \end{cases}$

$$\int_1^7 f(t)dt = \int_1^7 (a+bt)dt = \left[at + \frac{b}{2}t^2\right]_1^7 = 7a + \frac{49}{2}b - a - \frac{1}{2}b = 6a + \frac{48}{2}b = 6a + 24b$$

então; $\begin{cases} 6a + 24b = 1 \\ a + 7b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 24b = 1 \\ a = -7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18b = 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = -{}^{1}/_{18}} \\ \boldsymbol{a = {}^{7}/_{18}} \end{cases}$

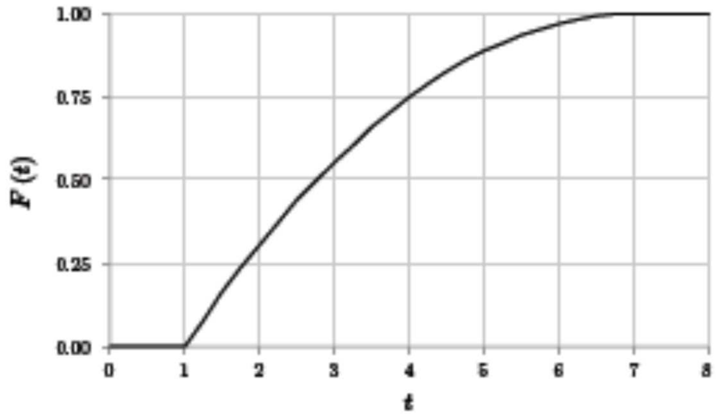


Logo a função densidade de probabilidade será:

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\,,\ \ t < 1 \\ \boldsymbol{\frac{7}{18} - \frac{1}{18}t}\,, 1 \le t \le 7 \\ \boldsymbol{0}\,,\ \ t > 7 \end{cases}$$

b) Para $1 \le x \le 7$, $\boldsymbol{F(t)} = \int_1^t f(u)du = \int_1^t \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{18}u\right) du = \frac{1}{18}\int_1^t (7-u)du =$

$$= \frac{1}{18}\left[7u - \frac{1}{2}u^2\right]_1^t = \frac{1}{18}\left(7t - \frac{1}{2}t^2 - 7 + \frac{1}{2}\right)$$



Logo a função distribuição de probabilidade será:

$$\boldsymbol{F(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\,,\ \ t < 1 \\ \boldsymbol{\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 7t - \frac{13}{2}\right)}\,, 1 \le t \le 7 \\ \boldsymbol{1}\,,\ \ t > 7 \end{cases}$$

c) Moda; $\boldsymbol{\xi_T} = 1$

Mediana; $\mathrm{F}(\eta)=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\eta^2 + 7\eta - \frac{13}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\eta = 11{,}2426} \\ \eta = 2{,}7574 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\eta_T = 2{,}7574}$

Média; $\boldsymbol{\mu_T}$

$$\boldsymbol{\mu_T} = \int_1^7 t\, f(t)dt = \frac{1}{18}\int_1^7 (7t - t^2)dt = \frac{1}{18}\left[\frac{7}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^7 = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{343}{2} - \frac{343}{3} - \frac{7}{2} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{324}{6}\right) = \mathbf{3}$$

Variância; $\boldsymbol{\sigma_T^2} = \int_1^7 t^2\, f(t)dt - \mu_T^2$

$$\int_1^7 t^2\, f(t)dt = \frac{1}{18}\int_1^7 (7t^2 - t^3)dt = \frac{1}{18}\left[\frac{7}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_1^7 = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{2401}{3} - \frac{2401}{4} - \frac{7}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{2376}{12}\right) = 11$$

$$\boldsymbol{\sigma_T^2} = 11 - 3^2 = \mathbf{2}$$

d) $\boldsymbol{P(T \geq 2)} = 1 - P(\mathrm{T} < 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}(4) + 14 - \frac{13}{2}\right) = \mathbf{0{,}69[4]}$

$\boldsymbol{P(T = 5) = 0}$

3.7 Compra; C = 2 500 U.M. ; Venda; V = 2 750 U.M. ; Revenda; R = 2 200 U.M.

a) Y → **Número de automóveis vendidos mensalmente**, sendo $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$

$\text{Lucro } (L) = \text{Receitas} - \text{Despesas} = \text{Vendas } (V) + \text{Revenda } (R) - \text{Compra } (C)$

$\mathbf{L = 2\,750Y + R(4 - Y) - 10\,000}$

y	p(y)	l	
0	0,10	-1200	← (2750x0+2200x4-10000)
1	0,15	-650	← (2750x1+2200x3-10000)
2	0,40	-100	← (2750x2+2200x2-10000)
3	0,25	450	← (2750x3+2200x1-10000)
4	0,10	1000	← (2750x4+2200x0-10000)

É necessário verificar se a média do Lucro (variável L) é positiva.

$$\boldsymbol{\mu_L} = \sum_l l\, p(l) = \sum_l l\, p(y) = 0{,}10(-1200) + 0{,}15(-650) + 0{,}40(-100) + 0{,}25(450) + 0{,}10(1000) = \mathbf{-45\ U.M.}$$

Logo a atividade não é rentável.

b) O lucro (l) em função do preço de Revenda virá;

y	p(y)	l	l x p(y)
0	0,10	4R-10000	0,4R-1000
1	0,15	3R-7250	0,45R-1087,5
2	0,40	2R-4500	0,8R-1800
3	0,25	R-1750	0,25R-437,5
4	0,10	1000	100
Σ =	1		1,9R - 4225

O preço de revenda R a praticar pelo stand viria: $\mu_L = 1{,}9\boldsymbol{R} - 4225 = 100 \Leftrightarrow 1{,}9\boldsymbol{R} = 4325 \Leftrightarrow \boldsymbol{R} = \mathbf{2276{,}3}$

3.8 $y \in \{0,1,2,3,x\}\ ;\ \mu_Y = 6$

a) $\mu_Y = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(2) + \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}x = 6 \Leftrightarrow \frac{6}{5} + \frac{1}{5}x = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{24}{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 24}$

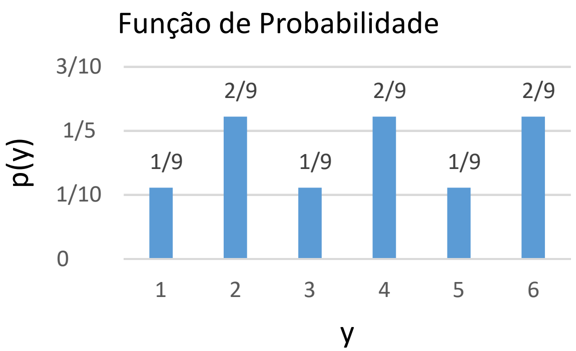
b) $\boldsymbol{\sigma_y^2} = \sum_y y^2\, p(y) - \mu_y^2 = \frac{1}{5}(0)^2 + \frac{1}{5}(1)^2 + \frac{1}{5}(2)^2 + \frac{1}{5}(3)^2 + \frac{1}{5}(24)^2 - 6^2 = \frac{590}{5} - 36 = 118 - 36 = \boldsymbol{82}$

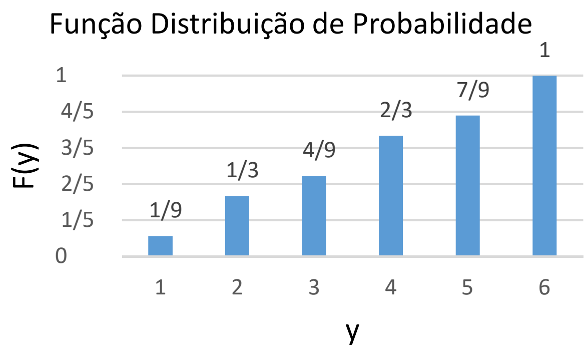
3.9 Y → **Pontos obtidos no dado**, e sabendo ainda que $\boldsymbol{P(par) = 2P(ímpar)}$

a) Fazendo; $p(1) = p(3) = p(5) = k$ e $p(2) = p(4) = p(6) = 2k$ e ainda como $\sum_y p(y) = 1$ então $3k + 6k = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = {}^{1}/_{9}}$

Logo as funções de probabilidade e distribuição de probabilidade serão;

y	$p(y)$	$F(y)$
1	$^1/_9$	$^1/_9$
2	$^2/_9$	$^3/_9$
3	$^1/_9$	$^4/_9$
4	$^2/_9$	$^6/_9$
5	$^1/_9$	$^7/_9$
6	$^2/_9$	1
$\Sigma =$	1	





b) $\mu_Y = \sum_y y\, p(y) = (1+3+5)\frac{1}{9} + (2+4+6)\frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{3}}$

$\sigma_y^2 = \sum_y y^2\, p(y) - \mu_y^2 = (1+9+25)\frac{1}{9} + (4+16+36)\frac{2}{9} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{26}{9} = 2,[8] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma_y} = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \boldsymbol{1,6997}$

c) L → Lucro obtido com o lançamento do dado, $L = Y - 3{,}5$. É necessário verificar se o valor esperado do ganho (variável L) é positivo.

$\mu_L = (-2{,}5 - 0{,}5 + 1{,}5)\frac{1}{9} + (-1{,}5 + 0{,}5 + 2{,}5)\frac{2}{9} = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{3}{18} = \boldsymbol{\frac{1}{6} > 0} \quad \rightarrow \quad$ Logo o jogo é vantajoso.

3.10

a) Como é uma função de probabilidade válida:

$f(x) \geq 0\,,\ \ \forall x$ e sendo ainda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ou seja, a área do triângulo abaixo da função $A_\Delta = 1$, obtém-se assim k:

$$\frac{(6-0)k}{2} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Para $x < 0 \ \ e \ \ x > 6\,,\ \boldsymbol{f(x) = 0}$

Para $0 \leq x \leq 3\,,$ trata-se de uma função do tipo $f(x) = bx$ com $\mathrm{b} = \frac{\frac{1}{3}-0}{3-0} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$

Para $3 \leq x \leq 6\,,$ como a função é simétrica fica $f(x) = a - \frac{1}{9}x$ a passar no ponto (6,0). Logo, $0 = a - \frac{1}{9}(6) \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

Resumindo;

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & x < 0 \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{x}, & 0 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{x}, & 3 < x \leq 6 \\ \mathbf{0}, & x > 6 \end{cases}$$

b) Como a função é simétrica, $\boldsymbol{\mu_X = \eta_X = \xi_X = 3}$

c)

$$\boldsymbol{P(X < 2)} = \int_0^2 \frac{1}{9}x dx = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{9}(2) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

4.1

y	$p(y)$	$yp(y)$	$y^2p(y)$	$y^3p(y)$	$y^4p(y)$
1	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15
2	2/15	4/15	8/15	16/15	32/15
3	3/15	9/15	27/15	81/15	243/15
4	4/15	16/15	64/15	256/15	1024/15
5	5/15	25/15	125/15	625/15	3125/15

Momentos na origem:

Ordem 1 : $\mu_1' = \sum_y yp(y) = \mathbf{{}^{55}/_{15}}$ (Média)

Ordem 2 : $\mu_2' = \sum_y y^2p(y) = {}^{225}/_{15} = \mathbf{15}$

Ordem 3 : $\mu_3' = \sum_y y^3p(y) = \mathbf{{}^{979}/_{15}}$

Ordem 4 : $\mu_4' = \sum_y y^4p(y) = {}^{4425}/_{15} = \mathbf{295}$

Momentos centrados:

Ordem 1 : $\mu_1 = \mathbf{0}$ (Para qualquer distribuição)

Ordem 2 : $\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = {}^{225}/_{15} - \left({}^{55}/_{15}\right)^2 = \mathbf{1,[5]}$ (Variância - σ^2)

Ordem 3 : $\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 2(\mu_1')^3 = {}^{979}/_{15} - (3)(15)\,{}^{55}/_{15} + 2\left({}^{55}/_{15}\right)^3 = \mathbf{-1,1[407]}$

Ordem 4 : $\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'\,\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4 = 295 - (4)\,{}^{979}/_{15}\,.\,{}^{55}/_{15} + (6)(15)\left({}^{55}/_{15}\right)^2 - (3)\left({}^{55}/_{15}\right)^4 = \mathbf{5,4963}$

Coeficiente de assimetria: $\boldsymbol{\tau} = {}^{\mu_3}/_{\sigma^3} = {}^{-1,1407}\Big/_{(1,[5])^{3/2}} = \mathbf{-0,5880}$

Coeficiente de Kurtose: $\boldsymbol{\kappa} = {}^{\mu_4}/_{\sigma^4} - 3 = {}^{5,4963}/_{(1,[5])^2} - 3 = \mathbf{-0,7286}$

4.2 $f(t) = {}^{1}/_{18}\,(7-t)$

Momentos na origem:

$\mu_1' = \int_1^7 t f(t)dt = \mathbf{3}$ (Média calculada em 3.6).

$$\mu_2' = \int_1^7 t^2 f(t)dt = {}^{1}/_{18}\int_1^7 (7t^2 - t^3)dt = {}^{1}/_{18}\left[{}^{7}/_{3}\,t^3 - {}^{1}/_{4}\,t^4\right]_1^7 = {}^{1}/_{18}\,({}^{7^4}/_{3} - {}^{7^4}/_{4} - {}^{7}/_{3} + {}^{1}/_{4} = \mathbf{11}$$

$$\mu_3' = \int_1^7 t^3 f(t)dt = {}^{1}/_{18}\int_1^7 (7t^3 - t^4)dt = {}^{1}/_{18}\left[{}^{7}/_{4}\,t^4 - {}^{1}/_{5}\,t^5\right]_1^7 = {}^{1}/_{18}\,({}^{7^5}/_{4} - {}^{7^5}/_{5} - {}^{7}/_{4} + {}^{1}/_{5} = \mathbf{46,6}$$

$$\mu_4' = \int_1^7 t^4 f(t)dt = {}^{1}/_{18}\int_1^7 (7t^4 - t^5)dt = {}^{1}/_{18}\left[{}^{7}/_{5}\,t^5 - {}^{1}/_{6}\,t^6\right]_1^7 = {}^{1}/_{18}\,({}^{7^6}/_{5} - {}^{7^6}/_{6} - {}^{7}/_{5} + {}^{1}/_{6} = \mathbf{217,8}$$

Momentos centrados:

$\mu_1 = \mathbf{0}$ (Para qualquer distribuição)

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 11 - 3^2 = \mathbf{2}$ (Variância - σ^2)

$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 2(\mu_1')^3 = 46{,}6 - (3)(11)(3) + (2)(3)^3 = \mathbf{1,6}$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'\,\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4 = 217{,}8 - (4)(466)(3) + (6)(11)(3)^2 - (3)(3)^4 = \mathbf{9,6}$

Coeficiente de assimetria: $\boldsymbol{\tau} = {}^{\mu_3}/_{\sigma^3} = {}^{1,6}/_{2^{(3/2)}} = \mathbf{0,5657}$

Coeficiente de Kurtose: $\boldsymbol{\kappa} = {}^{\mu_4}/_{\sigma^4} - 3 = {}^{9,6}/_{2^2} - 3 = \mathbf{-0,6}$

4.3 $F \rightarrow Temperatura\ em\ °F$; $\mu_F = 153$; $\sigma_F = 7$

$C \rightarrow Temperatura\ em\ °C$

$F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow 1{,}8C = F - 32 \Leftrightarrow C = {}^{1}/_{1,8}\,F - {}^{32}/_{1,8}$

$$\boldsymbol{\mu_C} = {}^{1}/_{1,8}\,\mu_F - {}^{32}/_{1,8} = {}^{1}/_{1,8}(153) - {}^{32}/_{1,8} = \mathbf{67{,}22}$$

$$\sigma_C^2 = ({}^{1}/_{1,8})^2\sigma_F^2 = \left({}^{1}/_{1,8}\right)^2(7)^2 = 15{,}1234 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sigma_C^2} = \mathbf{3{,}89}$$

Transformação linear:

$W = a + bZ$
$\mu_W = a + b\mu_Z$ $\sigma_W^2 = b^2\sigma_Z^2$

4.4 $G = 200$; $D = 300$; $Y \rightarrow Nº\ de\ concertos\ atribuídos$; Com a função de probabilidade:

y	$p(y)$
0	0,05
1	0,20
2	0,30
3	0,30
4	0,10
5	0,04
6	0,01

a) O número médio de concertos atribuídos será;

$\mu_Y = \sum_y y\,p(y) = 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}06 = 2{,}36$

E o lucro será a variável $L \rightarrow Lucro = Receitas + Despesas$, ou seja; $L = 200Y - 300$, e o lucro médio:

$$\boldsymbol{\mu_L} = 200\mu_Y - 300 = (200)(2{,}36) - 300 = \mathbf{172}$$

b) Perde dinheiro se organizar 0 ou 1 concerto. Logo,

$$\mathbf{P(Y \leq 1)} = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0{,}20 + 0{,}05 = \mathbf{0{,}25}$$

c) Agora o lucro será a variável $L' = 200Y - 300 - 20Y = 180Y - 300$, vindo:

$$\boldsymbol{\mu_{L'}} = 180\mu_Y - 300 = (180)(2{,}36) - 300 = \mathbf{124{,}8}$$

$\sigma_Y^2 = \sum_y y^2 p(y) - {\mu_y}^2 = 0{,}2 + 1{,}2 + 2{,}7 + 1{,}6 + 1 + 0{,}36 - (2{,}36)^2 = 1{,}4904 \rightarrow \sigma_{L'}^2 = (180)^2\sigma_Y^2 = (180)^2(1{,}4904) = 48288{,}96$

$$\boldsymbol{\sigma_{L'}} = \sqrt{\sigma_{L'}^2} = \mathbf{219{,}75}$$

4.5 $X \rightarrow$ *Número de obstáculos derrubados.* Que segue a função de probabilidade:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,05	0,20	0,45	0,30

a) $Y \rightarrow$ *Nº de obstáculos derrubados na prova*, $Y \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

A combinação de obstáculos derrubados e respetivas probabilidades serão: →

1ª mão	2ª mão	P
0	0	(0,05)x(0,05) = 0,0025
0	1	(0,05)x(0,20) = 0,0100
0	2	(0,05)x(0,45) = 0,0225
0	3	(0,05)x(0,30) = 0,0150
1	0	(0,20)x(0,05) = 0,0100
1	1	(0,20)x(0,20) = 0,0400
1	2	(0,20)x(0,45) = 0,0900
1	3	(0,20)x(0,30) = 0,0600
2	0	(0,45)x(0,05) = 0,0225
2	1	(0,45)x(0,20) = 0,0900
2	2	(0,45)x(0,45) = 0,2025
2	3	(0,45)x(0,30) = 0,1350
3	0	(0,30)x(0,05) = 0,0150
3	1	(0,30)x(0,20) = 0,0600
3	2	(0,30)x(0,45) = 0,1350
3	3	(0,30)x(0,30) = 0,0900

Resultando a função de probabilidade: →

y	$\boldsymbol{p(y)}$
0	0,0025
1	0,0200
2	0,0850
3	0,2100
4	0,3225
5	0,2700
6	0,0900
$\Sigma =$	1

$$\boldsymbol{\mu_Y} = \sum_y y\,p(y) = 0{,}02 + 0{,}17 + 0{,}63 + 1{,}29 + 1{,}35 + 0{,}54 = \mathbf{4}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_y y^2 p(y) - \mu_y{}^2 = 0{,}02 + 0{,}34 + 1{,}89 + 5{,}16 + 6{,}75 + 3{,}24 - 16 = 1{,}4$$

$$\boldsymbol{\sigma_Y} = \sqrt{\sigma_Y^2} = \mathbf{1{,}1832}$$

b) $T \rightarrow$ *Nº de torrões que o cavalo recebe*, $T \in \{1,2,4\}$, e a f. p.: ↓

t	$\boldsymbol{p(t)}$
1	0,36
2	0,5325
4	0,1075

$$\boldsymbol{\mu_T} = \sum_t t\,p(t) = 0{,}36 + 1{,}065 + 0{,}43 = \mathbf{1{,}855}$$

c) $P = 100 - X_1 - 1{,}2X_2$

$$\boldsymbol{\mu_P} = 100 - \mu_{X_1} - 1{,}2\mu_{X_2} = 100 - 4 - (1{,}2)(4) = \mathbf{91{,}2}$$

$$\sigma_P^2 = (1)^2\sigma_{X_1}^2 + (1{,}2)^2\sigma_{X_2}^2 = 1{,}4 + (1{,}2)^2 1{,}4 = 3{,}416 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sigma_P^2} = \mathbf{1{,}8482}$$

Note-se que neste caso as variáveis X_1 e X_1 são independentes, logo $Cov(X_1, X_1) = 0$

Transformação linear:

$V = a + bW + cZ$
$\mu_V = a + b\mu_W + c\mu_Z$ $\sigma_V^2 = b^2\sigma_W^2 + c^2\sigma_Z^2 + 2bc.Cov(Z,W)$

4.6 $Compra \rightarrow 500$; $Venda \rightarrow 750$; $Retoma \rightarrow 400$

$Y \rightarrow Número\ de\ livros\ vendidos.$ Com a função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,10	0,15	0,20	0,35	0,15	0,05

a) É necessário verificar se o valor esperado do lucro é positivo.

Sendo a variável $L \rightarrow Lucro = Vendas + Retoma + Compra$, vem;

$L = 750Y + 400(5 - Y) - (5)(500) = 750Y + 2000 - 400Y - 2500 = 350Y - 500$

Sendo o nº médio de livros vendidos; $\mu_Y = \sum_y y\, p(y) = 0{,}15 + 0{,}40 + 1{,}05 + 0{,}6 + 0{,}25 = 2{,}45.$ Vem o lucro médio:

$\boldsymbol{\mu_L} = 350\mu_Y - 500 = (350)(2{,}45) - 500 = \mathbf{357{,}5}$ $\rightarrow$ Logo, **a atividade é rentável**

b) Determinar o preço de venda (P)

$L = PY + 400(5 - Y) - 2500 = PY + 2000 - 400Y - 2500 = (P - 400)Y - 500$

$\mu_L = 400 \quad \Longrightarrow \quad (P - 400)\mu_Y - 500 = 400$

$(P - 400)2{,}45 - 500 = 400$

$(P - 400)2{,}45 = 400 + 500$

$P - 400 = {}^{900}/_{2{,}45}$

$\boldsymbol{P} = {}^{900}/_{2{,}45} + 400 = \mathbf{767{,}35}$ **ou mais**

4.7 $Aposta \rightarrow 5\ €$

< 8	→	Nada	
8, 9	→	1 Vinho Porto	(5 €)
10, 11	→	1 Whisky	(12,5 €)
12	→	2 Whisky	(25 €)

a) Determinar a função de probabilidade dos pontos nos dados, sendo; $Y \rightarrow Nº\ de\ pontos\ nos\ dois\ dados,\quad Y \in \{2, \dots, 12\}$

Dado 2 (colunas); Dado 1 (linhas)

Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

← Cada combinação tem a probabilidade de

$$^1/_6 * {}^1/_6 = {}^1/_{36}$$

(dados independentes)

Função de probabilidade:

$\mathbf{y}$	$\boldsymbol{p(y)}$	$\boldsymbol{Lucro}$
< 8	$^{21}/_{36}$	5
8, 9	$^{9}/_{36}$	0
10, 11	$^{5}/_{36}$	$-7{,}5$
12	$^{1}/_{36}$	-20
$\Sigma =$	1	

$\boldsymbol{\mu_L} = (5)\,^{21}/_{36} + (0)\,^{9}/_{36} + (-7{,}5)\,^{5}/_{36} + (-20)\,^{1}/_{36} = {}^{105}/_{36} - {}^{37{,}5}/_{36} - {}^{20}/_{36} = {}^{47{,}5}/_{36} = \mathbf{1{,}3194}$. Logo **é vantajoso.**

b) Seja, $W \rightarrow Preço\ da\ garrafa\ de\ whisky$

$$\mu_L = 2{,}5 \quad \Longrightarrow \quad {}^{105}/_{36} + {}^{5}/_{36}(5 - W) + {}^{1}/_{36}(5 - 2W) = 2{,}5 \Longrightarrow$$

$$^{105}/_{36} + {}^{25}/_{36} + {}^{5}/_{36} - {}^{5}/_{36}W - {}^{2}/_{36}W = 2{,}5 \Longrightarrow$$

$$^{135}/_{36} - {}^{7}/_{36}W = 2{,}5 \Longrightarrow {}^{7}/_{36}W = {}^{135}/_{36} - 2{,}5 \Longrightarrow$$

$$W = {}^{(1{,}25)(36)}/_{7} = \mathbf{6{,}42}\ \textbf{ou menos}$$

4.8 - Questão 3.7 b)

Determinar o novo preço de revenda (R)

Sejam; $L \rightarrow Lucro$ $Y \rightarrow Número\ de\ veículos\ vendidos$

$L = 2750Y + (4 - Y)R - 10000$

$\mu_{\boldsymbol{L}} = 2750\mu_Y + (4 - \mu_Y)R - 10000,$ onde $\mu_Y = 0{,}15 + 0{,}80 + 0{,}75 + 0{,}40 = 2{,}1$

Pretende-se que $\mu_{\boldsymbol{L}} = 100$, então

$$(2750)(2{,}1) + (4 - 2{,}1)R - 10000 = 100 \implies$$

$$1{,}9R = 10000 + 100 - 5775 \implies$$

$$\boldsymbol{R} = {}^{4325}/_{1{,}9} = \mathbf{2276{,}3}$$

- Questão 3.9 c)

Verificar se o lucro do jogo é positivo.

Sejam; $L \rightarrow Lucro$ $Y \rightarrow Número\ de\ pontos\ no\ dado$

$L = Y - 3{,}5$

$\boldsymbol{\mu_L} = \mu_Y - 3{,}5 = {}^{11}/_{3} - 3{,}5 = {}^{22}/_{6} - {}^{21}/_{6} = \mathbf{{}^{1}/_{6}}$

Logo, tal como anteriormente, conclui-se que o jogo é vantajoso.

6.1 **a)** $Y \sim B(n = 5;\ p = 0{,}4)$

Dos valores tabelados de Distribuições Binomiais →

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,0778	0,0778
1	0,2592	0,3370
2	0,3456	0,6826
3	0,2304	0,9130
4	0,0768	0,9898
5	0,0102	1

$\boldsymbol{P(Y=0) = 0{,}0778}$

$\boldsymbol{P(Y>1)} = 1 - P(Y \le 1) = 1 - F(1) = 1 - 0{,}3370 = \boldsymbol{0{,}6630}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \boldsymbol{0{,}6826}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = P(Y \le 3) - P(Y \le 0) = F(3) - F(0) =$

$= 0{,}9130 - 0{,}0778 = \boldsymbol{0{,}8352}$

b) $Y \sim H(M = 10;\ p = 0{,}3)$

$Mp = 3;\ Mq = 7$

$p(y) = \frac{C_y^3 \times C_{5-y}^7}{C_5^{10}}$. Por exemplo,

$p(1) = \frac{C_1^3 \times C_4^7}{C_5^{10}} = 0{,}4167$

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,0833	0,0833
1	0,4167	0,5000
2	0,4167	0,9167
3	0,0833	1

$\boldsymbol{P(Y=0) = 0{,}0833}$

$\boldsymbol{P(Y>1)} = 1 - F(1) = 1 - 0{,}5000 = \boldsymbol{0{,}5000}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \boldsymbol{0{,}9167}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = F(3) - F(0) = 1 - 0{,}0833 = \boldsymbol{0{,}9167}$

c) $Y \sim BN(r = 1,\ p = 0{,}2) =$

d) $= G(p = 0{,}2)$

$p(y) = (0{,}2)(0{,}8)^y$

Por exemplo,

$p(1) = (0{,}2)(0{,}8)^1 = 0{,}16$

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,2	0,2
1	0,16	0,36
2	0,128	0,488
3	0,1024	0,5904
4	0,0819	0,6723
⋮	⋮	⋮

$\boldsymbol{P(Y=0) = 0{,}2}$

$\boldsymbol{P(Y>1)} = 1 - F(1) = 1 - 0{,}36 = \boldsymbol{0{,}64}$

$\boldsymbol{P(Y \le 2)} = F(2) = \boldsymbol{0{,}488}$

$\boldsymbol{P(1 \le Y \le 3)} = F(3) - F(0) = 0{,}5904 - 0{,}2 = \boldsymbol{0{,}3904}$

e) $Y \sim Poison(\lambda = 2{,}6)$

Dos valores tabelados de Distribuições de Poisson →

y	$p(y)$	$F(y)$
0	0,0743	0,0743
1	0,1931	0,2674
2	0,2510	0,5184
3	0,2176	0,7360
4	0,1414	0,8774
⋮	⋮	⋮

$\boldsymbol{P(Y = 0) = 0,0743}$

$\boldsymbol{P(Y > 1)} = 1 - F(1) = 1 - 0{,}2674 = \mathbf{0,7326}$

$\boldsymbol{P(Y \leq 2)} = F(2) = \mathbf{0,5184}$

$\boldsymbol{P(1 \leq Y \leq 3)} = F(3) - F(0) = 0{,}7360 - 0{,}0743 = \mathbf{0,6617}$

6.2 **a)** $\boldsymbol{\mu} = n \times p = (5)(0{,}4) = \mathbf{2}$; $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{2} \leftarrow (F(2) = 0{,}6826\ com\ F(1) = 0{,}3370)$; $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{2} \leftarrow (p(2)\text{é}\ o\ máximo)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = n \times p \times q = (5)(0{,}4)(0{,}6) = \mathbf{1,2}$

b) $\boldsymbol{\mu} = n \times p = (5)(0{,}3) = \mathbf{1,5}$; $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{1} \leftarrow (F(1) = 0{,}5\ com\ F(0) = 0{,}0833)$; $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{1,5} \leftarrow (média\ entre\ 1\ e\ 2)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = n \times p \times q \times {}^{M - n}/_{M - 1} = (5)(0{,}3)(0{,}7) \times {}^{10 - 5}/_{10 - 1} = \mathbf{0,58[3]}$

c) d) $\boldsymbol{\mu} = {}^{q}/_{p} = {}^{0,8}/_{0,2} = \mathbf{4}$; $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{3} \leftarrow (F(3) = 0{,}5964\ com\ F(2) = 0{,}488)$; $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \leftarrow (p(0)\text{é}\ o\ máximo)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = {}^{q}/_{p^2} = {}^{0,8}/_{(0,2)^2} = \mathbf{20}$

e) $\boldsymbol{\mu} = \lambda = \mathbf{2,6}$; $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{2} \leftarrow (F(2) = 0{,}5184\ com\ F(1) = 0{,}2674)$; $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{2} \leftarrow (p(2)\text{é}\ o\ máximo)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = \lambda = \mathbf{2,6}$

6.4 $12\ máquinas\ ;\qquad P(máquina\ funcionar) = 0{,}6\ ;\qquad P(sistema\ funcionar) = ?$

$Y\ \rightarrow\ Número\ de\ máquinas\ que\ funcionam\ (em\ 12)\ ;\qquad Y \sim B(n = 12;\ p = 0{,}6)$

$P(sistema\ funcionar) = P(Y \geq 6) = P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) + P(Y = 11) + P(Y = 12)$

Da tabela de Dist. Binomiais vem; $\boldsymbol{P(sist.func.)} = 0{,}1766 + 0{,}2270 + 0{,}2128 + 0{,}1419 + 0{,}0639 + 0{,}0174 + 0{,}0022 = \mathbf{0{,}8418}$

6.5 $Y\ \rightarrow\ Número\ de\ automóveis\ por\ hora\ ;\qquad Y \sim Poisson(\lambda = 6)$

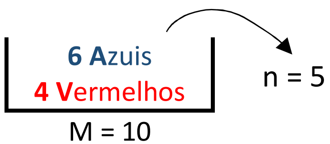
$Y'\ \rightarrow\ Número\ de\ automóveis\ em\ duas\ horas\ ;\quad Y' \sim Poisson(\lambda' = 6 \times 2 = 12)$

$P(Y' < 5) = P(Y' \leq 4) = P(Y' = 4) + P(Y' = 3) + P(Y' = 2) + P(Y' = 1) + P(Y' = 0)\ ;$ sendo,

$$p(y') = \frac{e^{-12} \times 12^{y'}}{y'!}$$

$\boldsymbol{P(Y' < 5)} = 0{,}00531 + 0{,}00177 + 0{,}00044 + 0{,}00007 + 0{,}00001 = \mathbf{0{,}00760}$

6.6



$Y\ \rightarrow\ Número\ de\ fichas\ azuis\ em\ 5\ extrações$, (sem reposição); $\quad Y \sim H(Mp = 6; Mq = 4; n = 5)$

$$\boldsymbol{P(Y = 3)} = \frac{C_3^6 \times C_2^4}{C_5^{10}} = \mathbf{0{,}4762}$$

6.7 $M = 200 \,; \quad n = 5 \,; \qquad p = 1\%$

$Y \rightarrow \textit{Número de peças defeituosas retiradas}$, (sem reposição); $\quad Y \sim H(M = 200; p = 0{,}01; n = 5)$; $Mp = 2$ e $Mq = 198$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 1)} = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{C_0^2 \times C_5^{198}}{C_5^{200}} = \mathbf{0,0495}$$

Ou aproximando à distribuição Binomial $(M \geq 10n)$, $\quad Y \approx B(n = 5;\, p = 0{,}01)$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 1)} = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_0^5 (0{,}01)^0 (0{,}99)^5 = \mathbf{0,0490}$$

$Y' \rightarrow \textit{Número de peças defeituosas retiradas em } 30 \textit{ extrações}$; $\quad Y' \sim H(M = 200; p = 0{,}01; n = 30)$;

$$\boldsymbol{P(Y' \geq 1)} = 1 - P(Y' = 0) = 1 - \frac{C_0^2 \times C_{30}^{198}}{C_{30}^{200}} = \mathbf{0,2781}$$

Neste caso a aproximação à Binomial já não é correta $(M < 10n)$. De facto, o resultado da aproximação seria 0,2603.

6.8 $p = 2\%$

a) $Y \rightarrow \textit{Nº de chamadas falhadas até obter ligação}$; $\quad Y \sim G(p = 0{,}02)$

$$\boldsymbol{P(Y = 9)} = (0{,}02)(0{,}98)^9 = \mathbf{0,0167} \qquad \leftarrow \; p(y) = pq^y$$

b)

$$\boldsymbol{P(Y \geq 5)} = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - [P(Y = 4) + P(Y = 3) + P(Y = 2) + P(Y = 1) + P(Y = 0)] =$$

$$= 1 - (0{,}0184 + 0{,}0188 + 0{,}0192 + 0{,}0196 + 0{,}02) = \mathbf{0,9040}$$

c) $Y' \rightarrow \textit{Nº de chamadas necessárias}$; $\quad Y' = Y + 1$; $\qquad \mu_y = {}^{q}/_{p} = {}^{0{,}98}/_{0{,}02} = 49$

$$\boldsymbol{\mu_{y'}} = E(Y') = E(Y + 1) = E(Y) + 1 = 49 + 1 = \mathbf{50}$$

6.9 $Y \rightarrow \textit{Número de caras em n lançamentos}$; $Y \sim B(n;\ p = 0{,}5)$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}875 \ \Leftrightarrow\ 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}875 \ \Leftrightarrow\ P(Y = 0) \leq 0{,}125 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ C_0^n (0{,}5)^0 (0{,}5)^n \leq 0{,}125 \ \Leftrightarrow\ 0{,}5^n \leq 0{,}125 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{n \geq 3}$$ ← (por tentativas)

6.10 $7\%\ \textit{retocadas}$; ${}^{1\ peça}/_{minuto}$

a) $Y \rightarrow \textit{Número de peças retocadas em } 10\ min$; $Y \sim Poisson(\lambda = (0{,}07)(10) = 0{,}7\ {}^{peças}/_{10\ min})$

$\boldsymbol{P(Y = 0) = 0{,}4966}$; ← (valor tabelado)

b) $Y' \rightarrow \textit{Número de peças boas até ao segundo retoque}$; $Y' \sim BN(r = 2; p = 0{,}07)$;

$\boldsymbol{P(Y' = 4)} = C_4^5 (0{,}07)^2 (0{,}93)^4 = \boldsymbol{0{,}0183}$ ← $p(y) = C_y^{y+r-1} p^r q^y$

c) Se em média são retocadas 0,07 peças por minuto, o tempo entre retoques é igual a ${}^{1}/_{0{,}07} = 14{,}286\ min$, ou seja **14 min 17 s**.

6.11 $Y \rightarrow \textit{Número de defeitos em } 100\ m$; $Y \sim Poisson(\lambda)$; $P(Y = 0) = 0{,}10$

$Y' \rightarrow \textit{Número de defeitos em } 6{,}5\ m$; $Y' \sim Poisson(\lambda' = \lambda \times {}^{6{,}5}/_{100})$

$P(Y = 0) = 0{,}10 \ \Leftrightarrow\ \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^0}{0!} = 0{,}10 \ \Leftrightarrow\ e^{-\lambda} = 0{,}10 \ \Leftrightarrow\ \lambda = -\ln(0{,}10) \ \Leftrightarrow\ \lambda = 2{,}3026$; vindo assim

$\lambda' = (2{,}3026) \times {}^{6{,}5}/_{100} = 0{,}1497$

$$\boldsymbol{P(Y' = 0)} = e^{-\lambda'} = e^{-0{,}1497} = \boldsymbol{0{,}8610}$$

6.12 $Capacidade\ de\ reparação;\ {}^{4\ comp.}/_{dia}$; $Lucro$: ${}^{10\ U.M.}/_{comp.}$

$Y \rightarrow Número\ de\ computadores\ que\ chegam\ para\ reparar$; $Y \sim Poisson(\lambda = 3{,}5)$

a) $Y' \rightarrow Número\ de\ computadores\ reparados\ por\ dia$; Com as funções de probabilidade:

y	y'	$p(y')$
0	0	0,0302
1	1	0,1057
2	2	0,1850
3	3	0,2158
4 ou mais	4	0,4633 ↑

$1 - \mathrm{P}(Y \leq 3)$

$$\mu_{Y'} = \sum_{y'} y'\, p(y') = (0)(0{,}0302) + (1)(0{,}1057) + (2)(0{,}1850) + (3)(0{,}2158) + (4)(0{,}4633) = 2{,}9763$$

Sendo o $Lucro\ efetivo, L = 10Y'$. Então o lucro esperado é

$$\boldsymbol{\mu_L} = 10\mu_{Y'} = (10)(2{,}9763) = \mathbf{29{,}763}\ {}^{U.M.}/_{dia}$$

$$\boldsymbol{Lucro\ perdido} = Lucro\ potencial - Lucro\ efetivo = 10Y - 29{,}783 = \mathbf{5{,}237}\ {}^{U.M.}/_{dia}$$

b) $Y \sim Poisson(\lambda = {}^{3{,}5\ comp.}/_{7{,}5\ horas})$

$Y'' \rightarrow Número\ de\ computadores\ em\ 4\ horas$; $Y'' \sim Poisson\left(\lambda'' = {}^{(3{,}5)(4)}/_{(7{,}5)} = 1{,}8667\right)$

$$\boldsymbol{P(Y'' = 0)} = e^{-1{,}8667} = \mathbf{0{,}1546}$$

c) Seja $R\ a\ capacidade\ de\ reparação$. A percentagem de dias em que todos são atendidos é dada por $P(Y \leq R)$

Por tentativas tem-se:

R	$P(Y \leq R)$
4	0,7254
5	0,8576
6	0,9347

Logo, a capacidade de reparação deve ser **maior ou igual a 6**, $(R \geq 6)$.

6.13 $p = 30\%$

a) $Y \rightarrow \textit{Número de vitórias em } 10 \textit{ concursos};\qquad Y \sim B(n = 10;\ p = 0{,}30)$

$$\boldsymbol{P(Y > 4)} = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)] =$$

$$= 1 - (0{,}0282 + 0{,}1211 + 0{,}2335 + 0{,}2668 + 0{,}2005) = \mathbf{0{,}1503}$$

b) $Y' \rightarrow \textit{Número de anos (em 5) em que ganha mais que 4 vezes};\qquad Y' \sim B(n = 5;\ p = 0{,}1503)$

$P(Y' \geq 3) = P(Y' = 3) + P(Y' = 4) + P(Y' = 5)$ sabendo que; $p(y) = C_y^n p^y q^{n-y}$, então

$$\boldsymbol{P(Y' \geq 3)} = C_3^5(0{,}1503)^3(0{,}8497)^2 + C_4^5(0{,}1503)^4(0{,}8497)^1 + C_5^5(0{,}1503)^5(0{,}8497)^0 =$$

$$= 0{,}02451 + 0{,}0217 + 0{,}00008 = \mathbf{0{,}02676}$$

c) $P(\textit{ganhar } 6 \textit{ ou mais}) \geq 0{,}9;\qquad Y \sim B(n;\ p = 0{,}30)$

$$P(Y \geq 6) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(Y \leq 5) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \sum_{y=0}^{5} C_y^n (0{,}3)^y (0{,}7)^{n-y} \geq 0{,}9$$

Por tentativas obtêm-se:

n	$P(Y \geq 6)$
10	0,0473
20	0,5836
30	0,9234
29	**0,9068**
28	0,8872

Logo, deve participar em **29 ou mais** concursos.

6.14 $20\ peças\ na\ caixa;$ $5\ defeituosas;$ $n = 6\ ;$ $Proporção\ de\ peças\ defeituosas,\ p = {}^{5}/_{20} = 0{,}25$

a) $Y \rightarrow Número\ de\ peças\ defeituosas\ nas\ 6\ retiradas$, (com reposição); $Y \sim B(n = 6; p = 0{,}25)$

$$\boldsymbol{P(Y = 2) = 0,2966}$$

b) $Y \rightarrow Número\ de\ peças\ defeituosas\ retiradas$, (sem reposição); $Y \sim H(Mp = 5; Mq = 15; n = 6)$

$$\boldsymbol{P(Y = 2)} = \frac{C_2^5 \times C_4^{15}}{C_6^{20}} = \boldsymbol{0,3522}$$

c) $M = 1000\ ;$ $p = 0{,}25$

Neste caso, como $M \geq 10n$, ambas as probabilidades podem ser calculadas pela Binomial, $Y \approx B(n = 6;\ p = 0{,}25)$

$$\boldsymbol{P(Y = 2) = 0,2966}$$

7.1 **a)** $X \sim U(a=-2;\ b=6)$ $\boldsymbol{P(X=1)=0}$ (Para qualquer distribuição contínua)

$\boldsymbol{P(X>1)} = 1-P(X\le 1) = 1-F(1) = 1-{}^{1-(-2)}\!/_{6-(-2)} = 1-{}^{3}\!/_{8} = \boldsymbol{{}^{5}\!/_{8}}$

$\boldsymbol{P(X\le 2)} = F(2) = {}^{2-(-2)}\!/_{6-(-2)} = {}^{4}\!/_{8} = \boldsymbol{{}^{1}\!/_{2}}$

$\boldsymbol{P(1\le X\le 3)} = P(X\le 3)-P(X\le 0) = F(3)-F(1) = {}^{3-(-2)}\!/_{6-(-2)} - {}^{1-(-2)}\!/_{6-(-2)} = {}^{5}\!/_{8} - {}^{3}\!/_{8} = \boldsymbol{{}^{1}\!/_{4}}$

b) $X \sim EN(\beta=3)$ $\boldsymbol{P(X=1)=0}$

$\boldsymbol{P(X>1)} = 1-F(1) = 1-(1-e^{-1/3}) = \boldsymbol{0,7165}$

$\boldsymbol{P(X\le 2)} = F(2) = 1-e^{-2/3} = \boldsymbol{0,4866}$

$\boldsymbol{P(1\le X\le 3)} = F(3)-F(1) = \left(1-e^{-3/3}\right)-(1-e^{-1/3}) = \boldsymbol{0,3487}$

c) $X \sim N(\mu=1{,}5;\ \sigma=0{,}5)$ $\boldsymbol{P(X=1)=0}$

$\boldsymbol{P(X>1)} = P\left(Z>{}^{1-1{,}5}\!/_{0{,}5}\right) = P(Z>-1) = 1-P(Z>1) = 1-0{,}1587 = \boldsymbol{0,8413}$

$\boldsymbol{P(X\le 2)} = P\left(Z\le{}^{2-1{,}5}\!/_{0{,}5}\right) = P(Z\le 1) = 1-P(Z>1) = 1-0{,}1587 = \boldsymbol{0,8413}$

$\boldsymbol{P(1\le X\le 3)} = P(X\le 3)-P(X<1) = P\left(Z\le{}^{3-1{,}5}\!/_{0{,}5}\right)-P\left(Z<{}^{1-1{,}5}\!/_{0{,}5}\right) = P(Z\le 3)-P(Z<-1) =$
$= 1-P(Z>3)-P(Z>1) = 1-0{,}0013-0{,}1587 = \boldsymbol{0,8400}$

d) $X \sim N(\mu = 0;\ \sigma = 1)$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{P(X = 1) = 0}$

$\boldsymbol{P(X > 1) = 0,1587}$

$\boldsymbol{P(X \leq 2)} = 1 - P(X > 2) = 1 - 0{,}0228 = \boldsymbol{0,9772}$

$\boldsymbol{P(1 \leq X \leq 3)} = P(X \geq 1) - P(X > 3) = 0{,}1587 - 0{,}00135 = \boldsymbol{0,15735}$

7.2 **a)** $\boldsymbol{\mu} = {a+b}/_{2} = {-2+6}/_{2} = \boldsymbol{2}\ ;$ $\quad$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{2}\ (simétrica);$ $\quad$ $\boldsymbol{\xi} \rightarrow (não\ existe)$

$\boldsymbol{\sigma^2} = {(b-a)^2}/_{12} = {(6-(-2))^2}/_{12} = {64}/_{12} = \boldsymbol{{16}/_{3}}$

b) $\boldsymbol{\mu} = \beta = \boldsymbol{3}\ ;$

$F(\boldsymbol{\eta}) = {1}/_{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\eta/3} = {1}/_{2} \Leftrightarrow e^{-\eta/3} = {1}/_{2} \Leftrightarrow -{\boldsymbol{\eta}}/_{3} = \ln({1}/_{2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = -3\ln({1}/_{2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{2,0794};$

$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}\ \ (máximo)\boldsymbol{;}$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma^2} = \beta^2 = 3^2 = \boldsymbol{9}$

c) $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{1,5}\ ;$ $\quad$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{1,5}\ (simétrica);$ $\quad$ $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{1,5}\ \ (máximo);$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma^2} = (0{,}5)^2 = \boldsymbol{0,25}$

d) $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}\ ;$ $\quad$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}\ (simétrica);$ $\quad$ $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}\ \ (máximo);$ $\quad$ $\boldsymbol{\sigma^2} = \boldsymbol{1}$

7.4 $X \rightarrow Tempo\ a\ preencher\ o\ formulário\ ;$ $\qquad X \sim U(a = 1{,}5;\ b = 2{,}2)$

a) $\boldsymbol{\mu} = {}^{a+b}/_{2} = {}^{1{,}5+2{,}2}/_{2} = \mathbf{1{,}85}\ min;$ $\qquad \boldsymbol{\sigma^2} = {}^{(b-a)^2}/_{12} = {}^{(2{,}2-1{,}5)^2}/_{12} = {}^{(0{,}7)^2}/_{12} = \mathbf{0{,}0408}\ min^2$

b) $\boldsymbol{P(X < 2)} = F(2) = {}^{2-1{,}5}/_{2{,}2-1{,}5} = \mathbf{0{,}7143}$

c) $\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}\ ; & x < 1{,}5 \\ {}^{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1{,}5})}/_{\mathbf{0{,}7}}\ ; & 1{,}5 \le x \le 2{,}2 \\ \mathbf{1}\ ; & x > 2{,}2 \end{cases}$

7.5 $X \sim U(a;\ b)\ ;$ $\qquad \mu = 1\ ;$ $\qquad \sigma^2 = {}^{4}/_{3};$ $\qquad$ Será uma f.d.p. do tipo: $\quad f(x) = \begin{cases} 0\ ; & x < a \\ {}^{1}/_{b-a}\ ; & a \le x \le b \\ 0\ ; & x > b \end{cases}$

a) Determinar a e b $\quad \begin{cases} {}^{a+b}/_{2} = 1 \\ {}^{(b-a)^2}/_{12} = {}^{4}/_{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ {}^{(b-(2-b))^2}/_{4} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ (2b-2)^2 = 16 \end{cases} \rightarrow$

$4b^2 - 8b + 4 = 16 \Leftrightarrow 4b^2 - 8b - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \vee b = -1;$ Se $b = 3 \Rightarrow a = 2 - 3 = -1;$ Se $b = -1 \Rightarrow a = 2 - (-1) = 3$

Como $\ a < b \ \Rightarrow \ \boldsymbol{a} = \mathbf{-1}\ \ e\ \ \boldsymbol{b} = \mathbf{3}$ $\qquad$ Logo; $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}}\ ; & para\ -1 \le x \le 3 \\ \mathbf{0}\ ; & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$

b) $\boldsymbol{P(X < 0)} = F(0) = {}^{0-(-1)}/_{3-(-1)} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{4}}$

7.6 $X \rightarrow Tempo\ de\ funcionamento\ sem\ avarias\ ;$ $\quad X \sim EN(\beta = 4{,}5)$ (horas)

a) $\boldsymbol{P(X \geq 6)} = 1 - P(X < 6) = 1 - F(6) = 1 - \left(1 - e^{-6/4{,}5}\right) = e^{-6/4{,}5} = \mathbf{0{,}2636}$

b) $\boldsymbol{P(X \geq 12\ |X > 6)} = \frac{P(X \geq 12\ \cap\ X > 6)}{P(X > 6)} = \frac{P(X \geq 12)}{P(X > 6)} = \frac{e^{-12/4{,}5}}{e^{-6/4{,}5}} = e^{-6/4{,}5} = \mathbf{0{,}2636}$

Nesta distribuição $P(X > \mathrm{b}\ |X > \mathrm{a}) = P(X > b - a)$. Diz-se que esta distribuição *não tem memória*.

c) $Y \rightarrow Número\ de\ avarias\ em\ 6\ horas\ ;$ $\quad Y \sim Poison\left(\lambda = {}^{6}/_{4{,}5}\right);$ $\quad p(y) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{y}}{y!}$

$\boldsymbol{P(Y = 2)} = \frac{e^{-6/4{,}5} \times (6/4{,}5)^2}{2!} = \mathbf{0{,}2343}$

7.7 $X \rightarrow Tempo\ de\ atraso\ do\ comboio\ ;$ $\quad X \sim N(\mu = 15;\ \sigma = 4)$ (minutos)

a) $\boldsymbol{P(X < 8)} = P\left(Z < {}^{8-15}/_{4}\right) = P(Z < -1{,}75) = P(Z > 1{,}75) = \mathbf{0{,}0401}$

b) O cliente apanha o comboio se este chegar com 10 ou mais minutos de atraso. Logo,

$\boldsymbol{P(X \geq 10)} = P\left(Z \geq {}^{10-15}/_{4}\right) = P(Z \geq -1{,}25) = 1 - P(Z \geq 1{,}25) = 1 - 0{,}1056 = \mathbf{0{,}8944}$

c) Obviamente 15, pois a probabilidade de o comboio chegar antes disso é de 50%, uma vez que é a média da distribuição normal.

$\boldsymbol{P(X < x^*)} = {}^{1}/_{2} \Leftrightarrow P\left(Z < \underbrace{{}^{x^* - 15}/_{4}}\right) = {}^{1}/_{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {}^{x^* - 15}/_{4} = 0 \Leftrightarrow x^* = \mathbf{15}$

Pelos valores críticos da distribuição Normal Padronizada,

$\alpha = 0{,}5 \Rightarrow z(\alpha) = 0$

7.8 $X \rightarrow Classificação\ dos\ alunos\ ;$ $X \sim U(a = 0\ ; b = 20)$

$Y \rightarrow Nº\ de\ reprovações\ até\ obter\ aprovação\ ;$ $Y \sim G(p)$

$$p = P(X \geq 9{,}5 = 1 - P(X < 9{,}5) = 1 - {}^{(9{,}5 - 0)}\!/_{(20 - 0)} = 1 - 0{,}475 = 0{,}525$$

$$\boldsymbol{\mu_Y} = {}^{q}\!/_{p} = {}^{0{,}475}\!/_{0{,}525} = \mathbf{0{,}9048}$$

7.9 $X \rightarrow Comprimento\ das\ carpas\ do\ Azibo\ ;$ $X \sim N(\mu = 23\ ;\ \sigma = 8)$ (centímetros)

a) $\boldsymbol{P(19 \leq X \leq 27)} = P(X \leq 27) - P(X \leq 19) = P\left(Z \leq {}^{27 - 23}\!/_{8}\right) - P\left(Z \leq {}^{19 - 23}\!/_{8}\right) = P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -0{,}5) =$
$= 1 - P(Z \geq 0{,}5) - P(Z \geq 0{,}5) = 1 - 2 \times P(Z \geq 0{,}5) = 1 - (2)(0{,}3085) = \mathbf{0{,}3830}$

b) Seja, $\boldsymbol{x^*} \rightarrow o\ comprimento\ mínimo\ das\ carpas\ a\ pescar$

$$P(X \geq x^*) = 0{,}30 \Leftrightarrow P\left(Z \geq {}^{x^* - 23}\!/_{8}\right) = 0{,}30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}^{x^* - 23}\!/_{8} = 0{,}5244 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^*} = 23 + (8)(0{,}5244) = \mathbf{27{,}2\ cm}$$

c) $Y \rightarrow Número\ de\ carpas\ maiores\ que\ o\ mínimo\ (em\ 25)\ ;$ $Y \sim B(n = 25\ ;\ p = 0{,}3)$

$$\boldsymbol{P(Y \geq 10)} = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - \sum_{y=0}^{9} C_y^{25} (0{,}30)^y (0{,}70)^{25-y} =$$

$$= 1 - 0{,}8106 = \mathbf{0{,}1894}$$

7.10 $X \rightarrow Receita\ diária\ ;\ \ X \sim N(\mu = 200\ ;\ \ \sigma^2 = 1000)\ \ /\ \ D \rightarrow Despesas\ diárias\ ;\ \ D = 10 + 20Y\ ;\ \ Y \sim N(\mu = 8{,}5\ ;\ \ \sigma^2 = 2)$

a) $\boldsymbol{P(X > 250)} = P\left(Z > {250 - 200}/{\sqrt{1000}}\right) = P(Z > 1{,}58) = \mathbf{0{,}0571}$

b) $P(X > x^*) = 0{,}90 \Leftrightarrow P\left(Z > {x^* - 200}/{\sqrt{1000}}\right) = 0{,}90 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow {x^* - 200}/{\sqrt{1000}} = -1{,}2816 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^*} = 200 - (1{,}2816)\left(\sqrt{1000}\right) = \mathbf{159{,}47}$$

c) $L \rightarrow Lucro\ diário\ ;\qquad L = X - D = X - (10 + 20Y) = X - 10 - 20Y$

Como o lucro é uma combinação linear de variáveis normais independentes, é ainda uma variável normal com parâmetros:

$\mu_{\boldsymbol{L}} = E(X - 10 - 20Y) = E(X) - 10 - 20E(Y) = 200 - 10 - (20)(85) = 20$

$\sigma_L^2 = VAR(X - 10 - 20Y) = VAR(X) + 20^2 VAR(Y) = 1000 + (20^2)(2) = 1800$

Então, $\qquad L \sim N(\mu = 20\ ;\ \ \sigma^2 = 1800)\qquad$ e pretende-se determinar;

$\boldsymbol{P(L < 0)} = P\left(Z < {0 - 20}/{\sqrt{1800}}\right) = P(Z < -0{,}47) = P(Z > 0{,}47) = \mathbf{0{,}3192}$

7.11 $Y \rightarrow Número\ de\ utentes\ simultâneos\ num\ pico\ ;\qquad Y \sim B(n = 1500\ ; p = 0{,}03)$

$y^* \rightarrow Capacidade\ da\ Central$ a determinar, fazendo; $P(Y > y^*) = 0{,}05$ mas pela Binomial o cálculo é complexo! Então admite-se,

$Y \approx N(\mu = np = (1500)(0{,}03) = 45\ ; \sigma^2 = npq = (45)(0{,}97) = 43{,}65)\qquad$ vindo,

$$\underbrace{P\left(Y > y^* + {1}/{2}\right)}_{\text{Correção de continuidade}} = 0{,}05 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{y^* + {1}/{2} - 45}{\sqrt{43{,}65}}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{y^* - 44{,}5}{\sqrt{43{,}65}} = 1{,}6449 \Leftrightarrow y^* = 1{,}6449\sqrt{43{,}65} + 44{,}5 = 55{,}4 \rightarrow \mathbf{56}$$

7.12 $Capacidade = 5\ {}^{TV}/_{dia}\quad (8\ horas)\ ;\quad Y \rightarrow N^{\underline{o}}\ de\ televisões\ para\ reparar\ por\ dia\ ;\ Y \sim Poisson(\lambda)\ ;\ P(Y=0)=0{,}05$

a) $P(Y=0)=0{,}05 \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}\times\lambda^{0}}{0!}=0{,}05 \Leftrightarrow e^{-\lambda}=0{,}05 \Leftrightarrow \lambda=-\ln(0{,}05) \Leftrightarrow \lambda=3\ \ por\ dia$

O tempo médio entre chegadas é dado por: $\boldsymbol{\beta} = {}^{1}/_{\lambda} = {}^{1}/_{3}\ dias\ ;\quad = \boldsymbol{{}^{8}/_{3}\ horas}\ ;$ ou $\boldsymbol{2\ h\ 40min}$

b) $X \rightarrow Tempo\ entre\ chegadas\ ;\qquad X \sim EN(\beta = {}^{8}/_{3}\ horas)$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3)} = 1 - P(X<3) = 1 - F(3) = 1 - \left(1 - e^{-3/\left(8/3\right)}\right) = e^{-9/8} = \boldsymbol{0{,}3247}$$

c) $Y' \rightarrow Número\ de\ dias\ (em\ 5)\ em\ que\ a\ capacidade\ é\ excedida\ ;\qquad Y' \sim B(n=5;\ p)$

$$p = P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - (0{,}1008 + 0{,}1680 + 0{,}2240 + 0{,}2240 + 0{,}1494 + 0{,}0498)$$
$$= 1 - 0{,}916 = 0{,}084$$

Seria 5% se não fosse o arredondamento de λ

$$\boldsymbol{P(Y'=0)} = q^{n} = (0{,}916)^{5} = \boldsymbol{0{,}6449}$$