Instituto Politécnico de Bragança

Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Texto de Revisões
de
Funções Reais de Variável Real

João Nunes
Departamento de Matemática

Outubro de 2009

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Conjuntos

A uma colecção de objectos de qualquer tipo chama-se **conjunto**, e aos objectos desse conjunto chamam-se **elementos** do conjunto. Em matemática estes elementos são, geralmente, números ou símbolos. Os conjuntos são habitualmente representados por letras maiúsculas e os seus elementos por minúsculas. Se x é um elemento do conjunto A, podemos escrever $x \in A$, onde o símbolo $\in$ traduz que x *pertence* a A.

Se todo o elemento de A for também elemento de B, escrevemos $A \subset B$, que diz que A é um *subconjunto* de B.

Uma forma de representar um conjunto é escrever os seus elementos dentro de *chavetas*. O conjunto $\{a, b, c\}$ é constituído pelos elementos a, b, c. Alterar a ordem dos elementos **não** altera o conjunto. Por exemplo, o conjunto $\{b, c, a\}$ é o mesmo que o conjunto $\{a, b, c\}$. Da mesma forma, a repetição de um elemento não altera o conjunto; por exemplo, o conjunto $\{a, a, b, c, c\}$ é o mesmo que $\{a, b, c\}$. Pode-se, também, representar um conjunto fornecendo-lhe propriedades que determinem os seus elementos; por exemplo, o conjunto $\left\{x : x = x^2\right\}$ é o conjunto de todos os números x que são iguais aos seus quadrados.

1.1.1 União de conjuntos

O conjunto de todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B chama-se **união** de A com B. Por outras palavras, a união de A com B é constituída por todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B ou, possivelmente, aos dois. Representa-se a união de A com B na forma $A \cup B$. Se A for o conjunto $\{a, b, c\}$ e B for o conjunto $\{c, d, e\}$, então $A \cup B$ é o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$.

1.1.2 Intercepção de conjuntos

O conjunto de todos os elementos que pertencem ao mesmo tempo a dois conjuntos A e B chama-se **intercepção** de A com B. Isto é, a intercepção de A e B é constituída apenas pelos elementos de A e B que estão contidos nos dois conjuntos; elementos que pertencem somente a A ou a B não fazem parte da intercepção. Representa-se a intercepção de A e B na forma $A \cap B$. Por exemplo, se A for o conjunto $\{a, b, c, d\}$ e B for o conjunto $\{b, d, e, f, g\}$, então $A \cap B$ é o conjunto $\{b, d\}$.

1.1.3 Conjuntos vazios

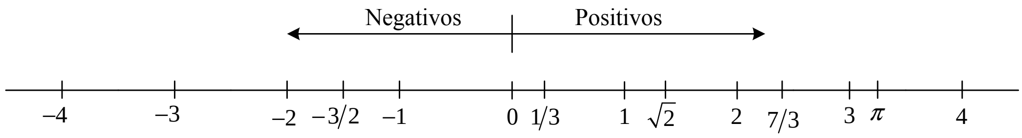
Um conjunto que não contém qualquer elemento chama-se **conjunto vazio** e representa-se pelo símbolo $\varnothing$. Por convenção matemática, um conjunto vazio é considerado um subconjunto de qualquer outro conjunto.

1.1.4 Igualdade de conjuntos

Diz-se que dois conjuntos A e B são iguais, e escreve-se $A = B$, se A e B forem constituídos pelos mesmos elementos. Se A for vazio, escreve-se $A = \varnothing$. Por exemplo, $\left\{x : x = x^2\right\} = \{0, 1\}$, enquanto que $\{x : x \neq x\} = \varnothing$ já que nenhum número x pode deixar de ser igual a si próprio.

1.2 Números reais

Estes números podem ser identificados com os pontos da recta real:



Temos os seguintes conjuntos:

$\mathbb{N}$ – Conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}$ – Conjunto dos números inteiros; $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

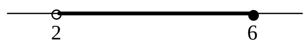
$\mathbb{Q}$ – Conjunto dos números racionais; $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (também chamados fraccionários).

A relação entre estes conjuntos é a seguinte:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.3 Intervalos

Considere-se o conjunto $A = \{x : 2 < x \leq 6\}$ é o conjunto dos números reais que são maiores que 2 (excluindo, neste caso, o 2) e menores ou iguais a 6 (neste caso o 6 está incluído). A notação usada neste caso é $]2, 6]$. Graficamente temos:



Geralmente se $a < b$ temos (estes são exemplos de intervalos **limitados**):

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ **Intervalo Fechado**

$[a, b[= \{x : a \leq x < b\}$ **Intervalo Semi-fechado**

$]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ **Intervalo Semi-fechado**

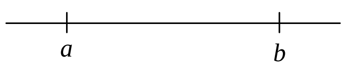
$]a, b[= \{x : a < x < b\}$ **Intervalo Aberto**

Exemplos de intervalos **não-limitados**:

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x : a \leq x\} \\ ]a, +\infty[&= \{x : a < x\} \\ ]-\infty, a] &= \{x : x \leq a\} \\ ]-\infty, a[&= \{x : x < a\} \end{aligned}$$

1.4 Desigualdades

Sejam a, b e $c \in R$. $a < b$ significa que a está à esquerda de b na recta real, ou seja, a *é menor que* b.



$a \leq b$ significa que a *é menor ou igual a* b.

1.4.1 Propriedades das desigualdades

1. Se $a < b$ então $a + c < b + c$. Pode-se somar o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade que a desigualdade mantém-se.

2. Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$. Podemos multiplicar ambos os membros de uma desigualdade por um número **positivo**.

3. Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$. Podemos multiplicar os membros de uma desigualdade por um **número negativo** desde que **troquemos** o sinal da desigualdade. Em particular, se $a < b$ então $-a > -b$.

4. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$, ou seja, $a < b < c$.

Estas desigualdades são ainda válidas para desigualdades do tipo $\leq$.

Exemplo 1.1 *Resolver a desigualdade* $2x - 6 < 8$.

$$\begin{aligned} 2x - 6 &< 8 \\ 2x < 8 + 6 \Leftrightarrow 2x &< 14 \\ x &< \frac{14}{2} \\ x &< 7 \end{aligned}$$

A solução é $\{x : x < 7\} =]-\infty, 7[$.

1.5 Valor absoluto

Seja x um número real.Então x é a coordenada de algum ponto P da recta real; usa-se o símbolo $|x|$ o número de unidades (ou a distância) entre P e a origem, independentemente do sentido (ver figura).

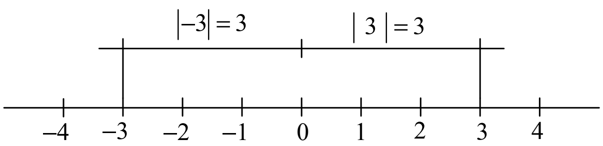


Figura 1.1: Distância à origem de coordenadas simétricas.

Para o ponto com a coordenada -3, temos $|-3| = 3$. Da mesma forma $|3| = 3$. De uma forma geral, se x é negativo, trocamos o sinal para obter $|x|$, e se x é não-negativo, então $|x| = x$. Obtemos, assim, a seguinte definição:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Ao número não-negativo $|x|$ chama-se **valor absoluto** ou **módulo** de x. Pode-se demonstrar que, para quaisquer $x, y \in R$,

$$\begin{array}{rcl} |x| & = & |-x| \\ |xy| & = & |x|\,|y| \\ |-x| & \leq x \leq & |x| \end{array}$$

Para um número real positivo qualquer y vamos ter[1]

$$\begin{array}{lll} |x| < y & \text{sse} & -y < x < y \\ |x| > y & \text{sse} & x > y \vee x < -y \\ |x| = y & \text{sse} & x = y \vee x = -y \end{array} \tag{1.2}$$

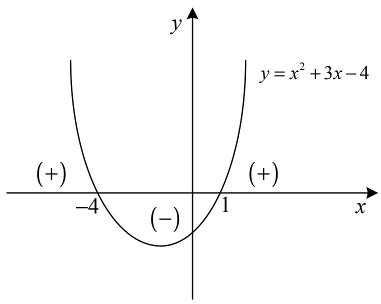
De (1.2), se y é positivo, então $|x| \leq y$ significa $-y \leq x \leq y$.

Exemplo 1.2 *Seja* $f(x) = \left|x^2 + 3x - 4\right|$. *Por (1.1) temos que*

$$f(x) = \left|x^2 + 3x - 4\right| = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & se \quad x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ -x^2 - 3x + 4 & se \quad x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases}.$$

Como

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1\,,$$



vamos ter

$$f(x) = \left|x^2 + 3x - 4\right| = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & se \quad x \leq -4 \wedge x \leq 1 \\ -x^2 - 3x + 4 & se \quad -4 < x < 1 \end{cases}.$$

1.5.1 Propriedades do valor absoluto

Sejam x e y dois números reais.

1. $|x| \geq 0\,; |x| = 0$ sse $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $|xy| = |x|\,|y|$.
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$.
5. $|x| > |y| \Leftrightarrow x^2 > y^2$.
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

[1] sse = se e somente se...

1.5.2 Inequações com módulos

Temos dois tipos de inequações gerais com módulos.

$$\begin{aligned} |f(x)| < g(x) &\Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge -f(x) < g(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) < g(x) \wedge f(x) > -g(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Exemplo 1.3

$$\begin{aligned} |4x+2| \leq 2 &\Leftrightarrow 4x+2 \leq 2 \ \wedge \ -4x-2 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 4x+2 \leq 2 \ \wedge \ 4x+2 \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \ \wedge \ x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right] \ \cup \ \left[0, +\infty\right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| > g(x) &\Leftrightarrow f(x) > g(x) \vee -f(x) > g(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

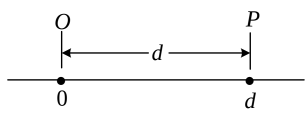
Exemplo 1.4

$$\begin{aligned} |4x+2| \geq 2 &\Leftrightarrow 4x+2 \geq 2 \ \vee \ -4x-2 \geq 2 \\ &\Leftrightarrow 4x+2 \geq 2 \ \vee \ 4x+2 \leq -2 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \ \vee \ x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 0] \end{aligned}$$

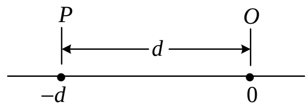
1.5.3 Coordenadas de um ponto na recta real

Existe apenas um e um só ponto da recta real que corresponde a um determinado número real e, da mesma forma, existe apenas um e um só número real que corresponde a um determinado ponto da recta real. Então, para especificar um ponto P na recta, necessitamos apenas de especificar o número real que corresponde a P. Este número chama-se a **coordenada** de P.

Seja d a distância entre a origem O, ou seja o ponto de coordenada zero, e o ponto P. Então P tem a coordenada d se estiver à direita de O

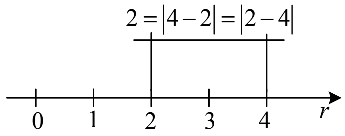


e coordenada $-d$ se estiver à esquerda de O



1.5.4 Distância entre dois pontos na recta real

Pode-se utilizar o conceito de valor absoluto para definir a distância entre dois pontos quaisquer de uma recta coordenada. Os pontos de coordenada 2 e 4 distam entre si em duas unidades na recta r,



e que 2 é a diferença $4-2$, obtida por subtracção da menor coordenada do valor da maior. Se utilizarmos valores absolutos (módulos), então, e como $|4-2| = |2-4|$, não nos precisamos de preocupar coma ordem da subtracção.

Definição 1.1 *Sejam x_1 e x_2 as coordenadas de dois pontos P_1 e P_2, respectivamente, na recta real. A* ***distância*** *entre P_1 e P_2, que se representa por $d(P_1, P_2)$ é dada por*

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| \, . \tag{1.5}$$

Ao número não-negativo $d(P_1, P_2)$ também se chama comprimento do segmento P_1P_2. Como

$$d(P_2, P_1) = |x_1 - x_2|$$

e

$$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

temos

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1) \, .$$

Notar que a distância entre a origem e P_1 é

$$d(0, P_1) = |x_1 - 0| = |x_1| \, .$$

1.6 Coordenadas rectangulares

Como referido em 1.5.3, um dado ponto pode ser univocamente determinado por um único número real a que se chama coordenada. Vamos ver como determinar um ponto no plano. Isto é conseguido através de dois números reais a que se chamam, também, **coordenadas** de um ponto. A recta horizontal é o eixo dos xx, e a recta vertical o eixo dos yy que se indicam por x e y respectivamente. O plano chama-se, então, **plano coordenado** ou **plano** xy. Os eixos coordenados dividem o plano em quatro partes chamadas **primeiro**, **segundo**, **terceiro** e **quarto quadrantes**, indicados por **I**, **II**, **III** e **IV**, respectivamente como indicado na figura 1.2. A cada ponto P de um plano xy é associado um único par ordenado. Se as rectas horizontal e vertical que passam em P interceptam os eixos dos xx e dos yy em pontos com coordenadas a e b, respectivamente (ver figura 1.2), então a P fica associado o par ordenado (a, b).

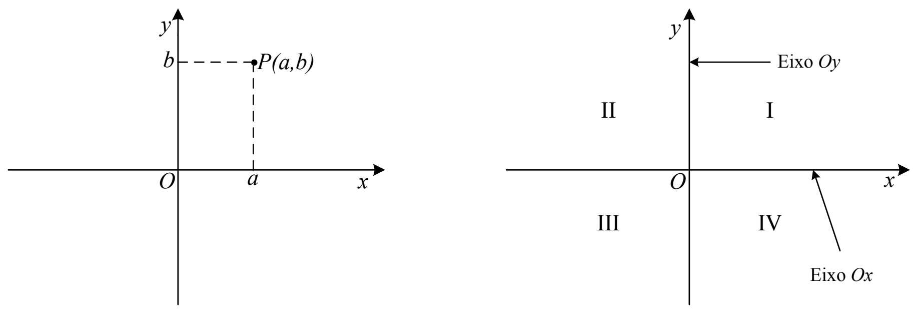


Figura 1.2: Referênciais cartesianos.

O número a é a **coordenada** x (ou **abcissa**), e o número b é a **coordenada** y (ou **ordenada**) de P. Costuma-se então dizer que P tem coordenadas (a, b). Da mesma forma, todo o par ordenado (a, b) determina um ponto do plano xy com coordenadas a e b. P é o ponto de intersecção das duas rectas perpendiculares aos eixos dos xx e dos yy pelos pontos de coordenadas a e b, respectivamente. Isto estabelece uma correspondência biunívoca entre os conjunto de todos os pontos do plano xy e o conjunto de todos os pares ordenados de números reais. Costuma-se referir o *ponto* (a, b) para indicar o ponto de abcissa a e ordenada b. O símbolo $P(a, b)$ representa o ponto P com coordenadas (a, b).

1.6.1 Fórmula da distância

Teorema 1.1 *A distância entre dois pontos quaisquer* $P_1(x_1, x_2)$ *e* $P_2(x_1, x_2)$ *de um plano coordenado é dada por*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.6}$$

Demonstração 1.1 *Se* $x_1 \neq x_2$ *e* $y_1 \neq y_2$*, então, conforme ilustrado na figura 1.3, os pontos* P_1*,* P_2*,* $P_3(x_2, y_1)$ *são vértices de um triângulo rectângulo. Pelo Teorema de Pitágoras*

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2 .$$

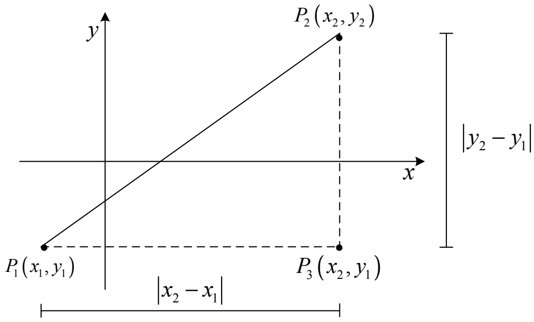


Figura 1.3: Diferença de coordenadas numa recta.

Como

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1|$$

e

$$d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|$$

obtemos a fórmula desejada.

Se $y_1 = y_2$*, os pontos* P_1 *e* P_2 *estão na mesma recta horizontal, e*

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}\,.$$

Da mesma forma, se $x_1 = x_2$*, os pontos estão na mesma recta vertical e*

$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}\,.$$

1.6.2 Ponto médio

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos num plano coordenado e seja M o ponto médio do segmento P_1P_2. As rectas verticais paralelas ao eixo dos yy que passam em P_1 e P_2 interceptam o eixo dos xx em $A_1(x_1, 0)$ e $A_2(x_2, 0)$ e, da geometria do plano, sabe-se que a recta M paralela ao eixo dos yy corta ao meio o segmento A_1A_2 (ver figura 1.4).

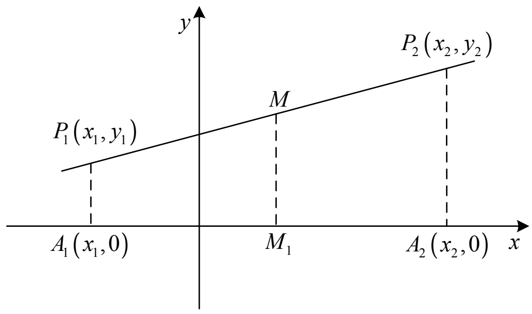


Figura 1.4: Ponto médio e um segmento de recta.

Se $x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$, e, daí $d(A_1, A_2) = x_2 - x_1$. Como M_1 está a meio caminho entre A_1 e A_2, a abcissa de M_1 é

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2}. \end{aligned}$$

Segue-se que a abcissa de M é também $(x_1 + x_2)/2$. Pode-se demonstrar, de maneira análoga, que a ordenada de M é $(y_1 + y_2)/2$. Além disso, estas fórmulas são válidas para todas as posições de P_1 e P_2.

Definição 1.2 *O ponto médio do segmento de recta $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ é*

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{1.7}$$

1.6.3 O círculo

A expressão $f(x, y) = x^2 + y^2$ tem uma interpretação geométrica simples. Pelo Teorema de Pitágoras, é o quadrado da distância do ponto (x, y) à origem $(0, 0)$. Então, os pontos (x, y) que satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 = 1^2 = 1$$

são aqueles pontos cuja distância à origem é 1. Eles formam o círculo de raio 1 com centro na origem.

Da mesma forma, os pontos (x, y) que satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

são todos os pontos cuja distância à origem é 2 e que vão constituir o círculo de raio 2 e de centro na origem. De uma forma geral, se r é um número qualquer maior que zero, então o gráfico da equação

$$x^2 + y^2 = r^2$$

é um círculo de raio r e centro na origem.

Se $C(a, b)$ é um ponto de um plano coordenado, pode-se definir um círculo de centro C e raio r como o conjunto de todos os pontos do plano que se situam a r unidades de distância de C. Como se vê na figura 1.5(i), um ponto $P(x, y)$ pertence ao círculo se e somente se $d(C, P) = r$ ou, pela fórmula da distância, se e somente se

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r.$$

A equação equivalente

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\,,\quad r>0 \tag{1.8}$$

é a chamada **equação padrão de um círculo** de raio r e centro $C\,(a,b)$. Se $a=0$ e $b=0$, a equação reduz-se, como já vimos, a

$$x^2+y^2=r^2\,,$$

que é a equação de um círculo de raio r e centro na origem (ver figura 1.5(ii)).

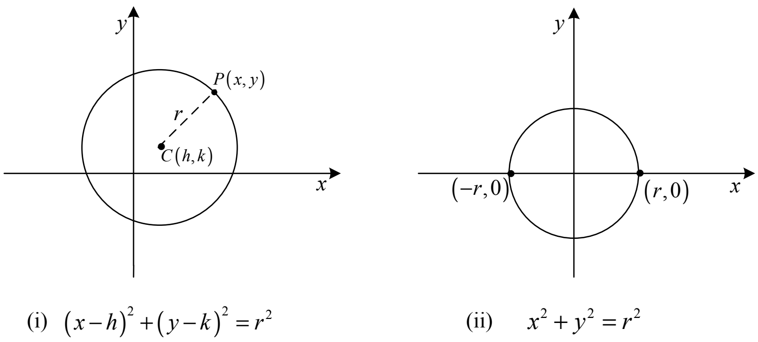


Figura 1.5:

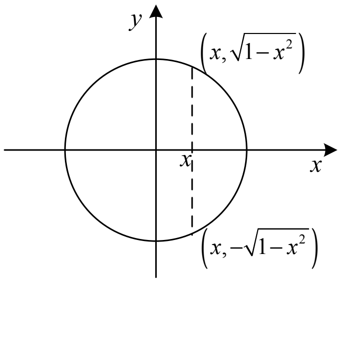
A equação $x^2+y^2=1$ ou $x^2+y^2-1=0$ não é do tipo $y-f\,(x)=0$. Contudo, podemos escrever a equação na forma

$$y^2=1-x^2\,,$$

e para qualquer valor de x entre -1 e $+1$ obtemos

$$y=\sqrt{1-x^2}\qquad \text{ou}\qquad y=-\sqrt{1-x^2}\,.$$

Se $x\neq 1$ e $x\neq -1$, obtemos dois valores para y por cada valor para x. Geometricamente, estes dois valores para y correspondem aos pontos indicados no seguinte diagrama:



Existe uma função, definida para $-1 \leq x \leq 1$, tal que

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,,$$

e o gráfico desta função corresponde à parte superior do círculo unitário, $r = 1$, (ao semí-circulo superior). da mesma forma, existe uma outra função

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}\,,$$

também ela definida para $-1 \leq x \leq 1$ cujo gráfico é a parte inferior do círculo unitário. Nenhuma destas funções está definida para outros valores de x.

1.6.4 Elipse

Seja a um número positivo. Se (x, y) for um ponto do plano então chama-se ao ponto (ax, ay) a *dilatação* de (x, y) por a.

Sejam a, b números positivos. A cada ponto (x, y) vamos associar um ponto (ax, by). A associação

$$(x, y) \longmapsto (ax, by)$$

será representada por $F_{a,b}$.

Considere-se um conjunto de pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 = 1\,. \tag{1.9}$$

A equação (1.9) representa o círculo unitário com centro na origem. Seja

$$u = ax \qquad \text{e} \qquad v = bx\,.$$

Então u, v satisfazem a equação

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1\,. \tag{1.10}$$

Se (u, v) é um ponto que satisfaz a equação (1.10) em que

$$x = \frac{u}{a} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{v}{b},$$

então (u, v) é a imagem de (x, y) por $F_{a,b}$. A imagem do círculo definido pela equação (1.9) é o conjunto de pontos (u, v) que satisfazem a equação (1.10). A esta imagem chama-se **elipse**. De uma forma geral, uma elipse é uma curva no plano que representa o gráfico de uma equação do tipo (1.10) em algum sistema de coordenadas.

Exemplo 1.5 *O conjunto de pontos (u, v) que satisfazem a equação*

$$\frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1$$

é uma elipse. Para desenhar o gráfico desta elipse vamos considerar o eixo horizontal o eixo-u e ao vertical o eixo-v. Quando $u = 0$ temos $v^2 = 2^2$ tal que $v = \pm 2$. Quando $v = 0$ obtemos $u^2 = 3^2$ tal que $u = \pm 3$. Se visualizarmos o círculo de raio 1 sob a acção de $F_{3,2}$ vemos que o gráfico da elipse será o representado na figura 1.6

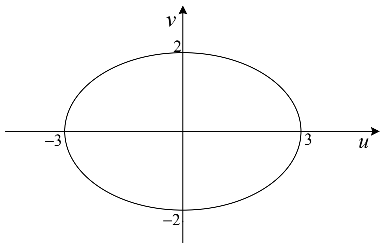


Figura 1.6: Gráfico da elipse $\frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1$.

Exemplo 1.6 *Pretende-se desenhar o gráfico da elipse definida pela equação*

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1\,.$$

Seja $x' = x - 1$ e $y' = y - 4$. Então (x', y') satisfaz a equação

$$\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{4^2} = 1\,.$$

Neste caso temos a equação de uma elipse de centro $(1, 4)$ como está representado na figura 1.7

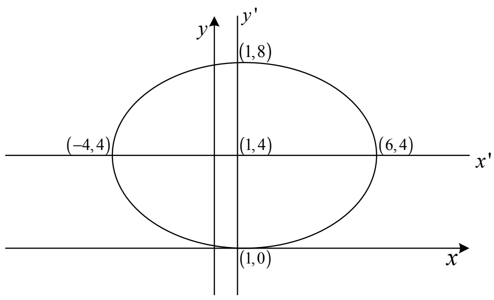


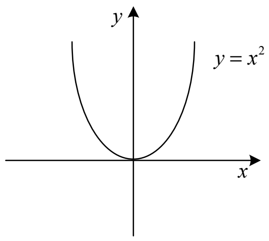
Figura 1.7: Gráfico da elipse $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$.

1.6.5 Parábola

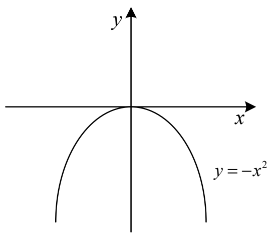
Uma parábola é uma curva que representa o gráfico de uma função do tipo

$$y = ax^2$$

em algum sistema de coordenadas e em que $a \neq 0$. A função deste tipo mais simples é $y = x^2$:



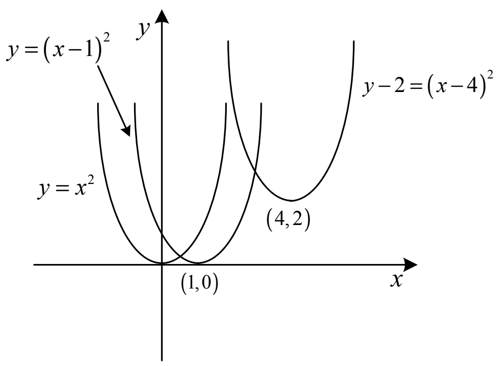
Exemplo 1.7 *Considere-se a função $y = -x^2$. Neste caso $a = -1$. Facilmente se conclui que o gráfico desta função é*



Exemplo 1.8 *Considere-se a equação $y = (x-1)^2$. O seu gráfico é também uma parábola, mas a origem da mesma está deslocada para o ponto $(1, 0)$. Da mesma forma a curva*

$$y = (x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow y - 2 = (x-1)^2$$

tem a forma de $y = x^2$ com a excepção que a origem da curva passou a ser o ponto $(4, 2)$. Estas curvas estão representadas no diagrama seguinte:



No caso de termos a equação

$$x - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y^2$$

a parábola obtida será horizontal. Notar que $y^2 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$ (ver figura 1.8).

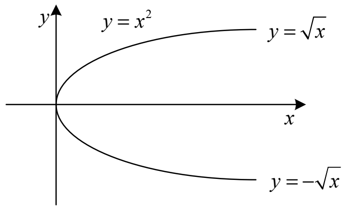


Figura 1.8: Parábola da curva $y = x^2$.

Capítulo 2

Funções Reais de Variável Real

2.1 Definição de função

Iremos definir, informalmente, uma função f como sendo uma *regra* que a cada elemento de um conjunto X dado associa **um e um só** elemento de um outro conjunto Y também dado. Usam-se as notações

$$f : X \longrightarrow Y$$

para indicar que f faz corresponder a cada elemento de X um e um só elemento de Y, e

$$x \longmapsto f(x)$$

para indicar que f faz corresponder x o valor $f(x)$, ou que f transforma x em $f(x)$. saliente-se que **todos** os elementos de X têm que ser considerados, ou seja, a todos f associa um (e um só) elemento de Y. Dito de outra forma: para todo o a pertencente a X podemos encontrar um e um só b pertencente a Y tal que $f(a) = b$. Simbolicamente, isto traduz-se por

$$\forall\, a \in X\,, \exists\, b \in Y : f(a) = b$$

Ao conjunto X chama-se **domínio** da função (ou conjunto de partida), e ao conjunto Y chama-se **conjunto de chegada** ou **conjunto das imagens**. Todos os elementos do domínio X têm que ter imagem mas, nem todos os elementos de Y têm que ser imagem de algum elemento de X. Consideremos, então, o conjunto $D_f^{'} = f(X)$ definido como sendo o subconjunto de Y constituído pelos elementos que são transformados (imagem) de algum elemento de X,

$$D_f^{'} = f(X) = \{f(x) : x \in\ X\} \subset Y$$

a que se chama **contradomínio** de f.

Não se deve confundir f com $f(x)$ pois enquanto f é a função, $f(x)$ é apenas o valor que a função f assume no ponto x.

f é uma função real se o contradomínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ (conjunto de chegada) e diz-se que f é uma função de variável real se o domínio for um subconjunto de $\mathbb{R}$. Neste capítulo apenas iremos de falar de funções reais de variável real.

Exemplo 2.1 *Considere-se a função f definida por $f(x) = x^2 + 1$. Temos então*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

De notar que o contradomínio da função é $\mathbb{R}^+$ já que $x^2 + 1 > 0\,, \forall\, x$.

Para descrever uma função f, é necessário especificar a imagem $f(x)$ de cada elemento x do domínio. Um processo comum para se fazer isto é utilizar uma equação, como no exemplo 2.1. É, então, indiferente o símbolo para a variável. Expressões como $f(x) = x^2$, $f(s) = s^2$, $f(t) = t^2$, etc., definem, todas, a mesma função f. Isto é verdade porque, se a é um número qualquer do domínio de f, então obtém-se sempre a imagem a^2, qualquer que seja a expressão utilizada.

Muitas fórmulas utilizadas em matemática e outras ciências determinam funções. Por exemplo, a fórmula $A = \pi r^2$ da área A de um círculo de raio r associa a cada real positivo r um único valor de A, determinado, assim, uma função f, tal que

$$f(r) = \pi r^2.$$

À letra r, que representa um número arbitrário do domínio de f, costuma-se chamar-se **variável independente**. A letra A, que é um número do contradomínio de f, é, então, a **variável dependente**, pois o seu valor *depende* do número atribuído a r. Quando duas variáveis r e A estão relacionadas desta forma, diz-se que A é função de r.

2.1.1 Gráfico

Seja f uma função de domínio X e conjunto de chegada Y. Chama-se **gráfico** de f ao subconjunto do produto cartesiano de X por Y, $X \times Y$, definido como o conjunto dos pares ordenados em que a primeira componente é um ponto de X e a segunda componente é o elemento de Y transformado da primeira componente,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{graf} f & = & \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\} \\ & = & \{(x, f(x)) : x \in X\} \end{array}$$

O gráfico de uma função será o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f. O gráfico de f pode ser visto como como o conjunto de todos os os pontos (x, y), tais que $y = f(x)$, e se $P(x, y)$ pertence ao gráfico de f, então y é o valor funcional de $f(x)$ (ver figura 2.1).

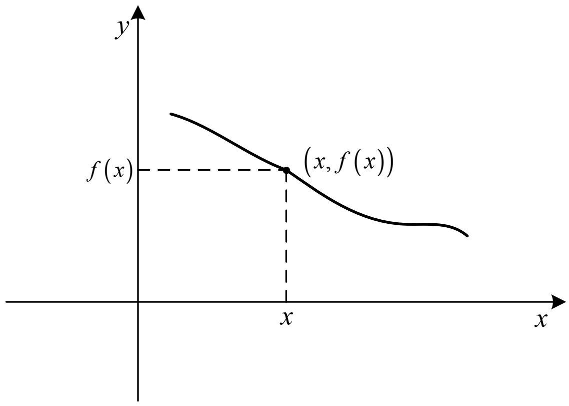
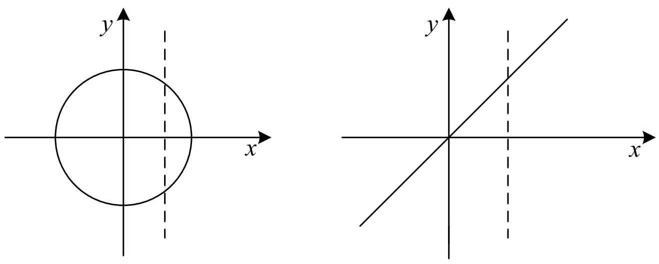


Figura 2.1: Exemplo de gráfico de uma função.

A definição de função implica necessariamente que exista apenas um único $f(x)$ para cada x do domínio, ou seja, a cada elemento do domínio de uma função corresponde apenas um elemento do conjunto de chegada (uma recta vertical, perpendicular ao eixo dos yy, só pode interceptar o gráfico no máximo uma vez).



Não representa uma função Representa uma função

Os pontos do domínio de f são representados no eixo dos xx e os pontos do conjunto de chegada são representados no eixo dos yy. Os pontos (x, y) do gráfico correspondem então aos pontos do plano xy. Pode-se a partir da representação qual é o domínio de f e qual é o contradomínio de f mas já não é possível ver qual é o conjunto de chegada de f pois o gráfico não depende do conjunto de chegada.

2.1.2 Funções injectivas

Uma função f de domínio X diz-se **injectiva** se a pontos diferentes do domínio X correspondem imagens diferentes do conjunto de chegada; para todos os pontos a e b pertencentes a X, se a for diferente de b então $f(a)$ é diferente de $f(b)$;

$$\forall\, a, b \in X \quad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Esta definição também pode tomar a forma

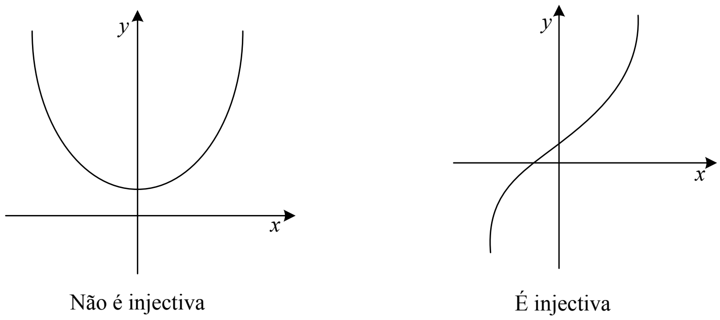
$$\forall\, a, b \in X \quad a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

Exemplo 2.2 *Considere-se a função $f\,(x) = x^2$.*

$$\begin{aligned} f\,(a) = f\,(b) &\Leftrightarrow a^2 = b^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b)\,(a-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \quad \vee \quad a = -b \end{aligned}$$

Logo, a função não é injectiva.

Em termos gráficos, diferentes abcissas de pontos do gráfico não podem corresponder a uma mesma ordenada (qualquer recta horizontal – paralela ao eixo dos xx – só pode intersectar o gráfico de f uma vez).



2.1.3 Funções sobrejectivas

Uma função f de domínio X diz-se **sobrejectiva** se qualquer ponto do conjunto de chegada Y pertencer ao contradomínio, ou seja se o conjunto de chegada Y coincidir com o contradomínio $f(X)$, ou ainda, se para qualquer ponto do conjunto de chegada Y for possível encontrar um ponto do domínio X tal que $f\,(a) = b$;

$$\forall\, b \in Y \quad \exists\, a \in X : f\,(a) = b$$

2.1.4 Funções monótonas

Seja f uma função de domínio $]a, b[$. Esta função é **monótona crescente**, ou simplesmente **crescente**, se f mantiver a ordenação dos elementos (podendo igualá-los) do domínio, ou seja

$$\forall\, x, y \in\ ]a, b[\quad x < y \Rightarrow f\,(x) \leq f\,(y)$$

Diz-se que f é **monótona decrescente**, ou simplesmente **decrescente**, se f mantiver a ordenação dos elementos (podendo igualá-los) do domínio, ou seja

$$\forall\, x, y \in\ ]a, b[\quad x > y \Rightarrow f\,(x) \geq f\,(y)$$

Diz-se que **estritamente crescente** se f mantiver a ordenação dos elementos, ou seja

$$\forall\, x, y \in\ ]a, b[\quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

É **estritamente decrescente** se f mantiver a ordenação dos elementos, ou seja

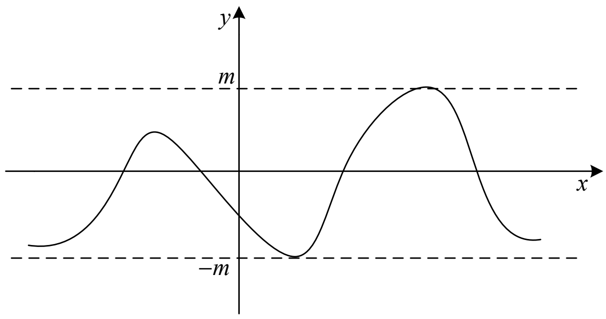
$$\forall\, x, y \in\ ]a, b[\quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

2.1.5 Funções limitadas

Seja f uma função real de variável real de domínio D. Diz-se que f é **limitada** sse o conjunto dos valores que a função assume for um conjunto limitado, isto é, se existir um número real m tal que para todo o x do domínio de f se tiver

$$|f(x)| \leq m \quad \forall\, x \in D\,.$$

Graficamente, isto significa que o gráfico da função se encontra compreendido entre as rectas de equação $y = -m$ e $y = m$, ou seja, as ordenadas dos pontos do gráfico estão compreendidas entre $-m$ e m.



2.1.6 Funções pares e ímpares

Seja f uma função de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Diz-se que f é par se e só se para todos os números reais x se tem

$$f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ou seja, se f tomar o mesmo valor em pontos simétricos do domínio. Um exemplo é a função $f(x) = x^2$ (ver figura 2.2). Elementos simétricos têm a mesma imagem (por exemplo, $(-2)^2 = (2)^2 = 4$).

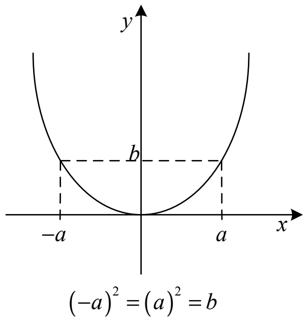


Figura 2.2: Exemplo de uma função par.

Diz-se que f é ímpar se e só se para todos os números reais x se tem

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ou seja, se f tomar valores simétricos em pontos simétricos do domínio. Um exemplo será a função $f(x) = x^3$ (ver figura 2.3).

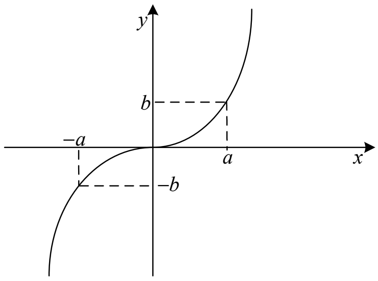


Figura 2.3: Exemplo de uma função ímpar.

A partir da definição, uma função par tem um gráfico simétrico em relação ao eixo dos yy. De facto, se $y_1 = f(-x_1) = f(x_1)$, então os pontos (x_1, y_1) e $(-x_1, y_1)$ estão ambos no gráfico de f; mas estes pontos estão colocados simétricamente em relação ao eixos dos yy e não há outro tipo de pontos visto que a relação acima se verifica para todos os pontos x de $\mathbb{R}$.

Do mesmo modo se conclui que uma função ímpar tem o gráfico simétrico em relação à origem dos eixos coordenados.

Se o domínio da função não for $\mathbb{R}$ mas apenas um subconjunto X de $\mathbb{R}$, tudo se mantém mas as igualdades verificam-se para todos os pontos x do domínio X e só para esses. Claro que este domínio A não pode ser qualquer, pois, para a definição ter sentido, para todo o $x \in X$ também tem de ser $-x \in X$.

2.1.7 Funções periódicas

Seja f uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}$. Diz-se que f é **periódica** se existir algum real α (não nulo) tal que para todo o x real se tenha $f(x+\alpha) = f(x)$;

$$\exists\, \alpha \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+\alpha) = f(x)$$

A função f é periódica se o seu comportamento se repetir rigorosamente em intervalos de amplitude α, ou seja, o que se passa no intervalo $]0, \alpha[$ repete-se no intervalo $]0, 2\alpha[$, no intervalo $]2\alpha, 3\alpha[$, no intervalo $]-\alpha, 0[$, no intervalo $]-2\alpha, -\alpha[$, e assim sucessivamente. Este raciocínio pode ser repetido noutros intervalos de amplitude α; por exemplo, o que se passa no intervalo $]-\alpha/2, \alpha/2[$ repete-se no intervalo $]\alpha/2, 3\alpha/2[$, no intervalo $]3\alpha/2, 5\alpha/2[$, no intervalo $]-3\alpha/2, -\alpha/2[$, e assim sucessivamente.

Ao real α nessas condições chama-se período da função.

Se o domínio da função não for $\mathbb{R}$ mas apenas um subconjunto X de $\mathbb{R}$, tudo se mantém mas a definição fica

$$\exists\, \alpha \neq 0 \quad \forall\, x \in X : f(x+\alpha) = f(x)$$

Exemplo 2.3 $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *é uma função periódica de período* 2π*:*

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x)$$

2.2 Funções

Neste capítulo iremos estudar alguns tipos de funções elementares. Estas funções são constituídas por polinómios.

2.2.1 Funções Polinomiais

Se $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ forem números reais, $a_n \neq 0$ e n é um inteiro não negativo de $\mathbb{N}_0$, uma **função polinomial** de grau n tem a forma

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \end{array}$$

Pode-se tomar como domínio de X qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$.

Como exemplos de funções deste tipo temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x+1 \quad \text{polinómio de } 1^{\text{o}} \text{ grau} \quad (n=1)\\
f(x) &= 3x^2+2x+1 \quad \text{polinómio de } 2^{\text{o}} \text{ grau} \quad (n=2)\\
f(x) &= 6x^7-3x \quad \text{polinómio de } 7^{\text{o}} \text{ grau} \quad (n=7)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Nota 2.1 *Funções do tipo $a_n x^{-n}$, como por exemplo $x^{-1} = 1/x$, não são polinomiais. Notar que neste caso seria $n = -1$ e, pela definição, $n \in \mathbb{N}_0$.*

2.2.2 Função constante

A função constante é um caso particular da função polinomial. Estas funções são do tipo

$$\begin{aligned}
f : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto f(x) = a_n
\end{aligned}$$

Funções deste tipo são, por exemplo, $f(x) = 2$, $f(x) = -4$, $f(x) = 0$, etc., e são representadas, graficamente, por rectas horizontais paralelas ao eixo dos xx. Na função, por exemplo, $f(x) = 2$, a função f faz corresponder a todo o $x \in \mathbb{R}$ (ou outro subconjunto de $\mathbb{R}$) o número 2.

2.2.3 Funções lineares (função afim)

São também um caso particular das polinomiais e os gráficos destas funções são rectas. Estas funções são do tipo

$$\begin{aligned}
f : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longmapsto f(x) = a_{n-1}x + a_n
\end{aligned}$$

Estas funções são conhecidas por rectas podendo-se traduzir por

$$f(x) = y = mx + b \tag{2.1}$$

que é a conhecida **equação reduzida da recta**. b representa a ordenada na origem ($f(0) = b$) que é o ponto onde a recta intersecta o eixo dos yy. Se $b = 0$, a equação toma a forma $y = mx$, e a recta passa na origem. m representa o declive da recta; se o declive for positivo a inclinação da recta é para a direita, se for negativo é para a esquerda e se for nulo a recta é horizontal (paralela oa eixo dos xx). Se este declive for *infinito*, a recta é vertical.

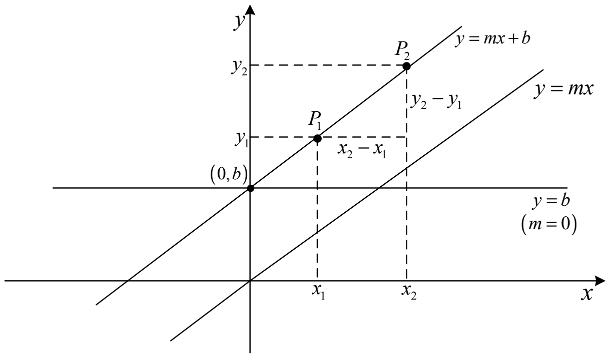


Figura 2.4: Exemplos de rectas.

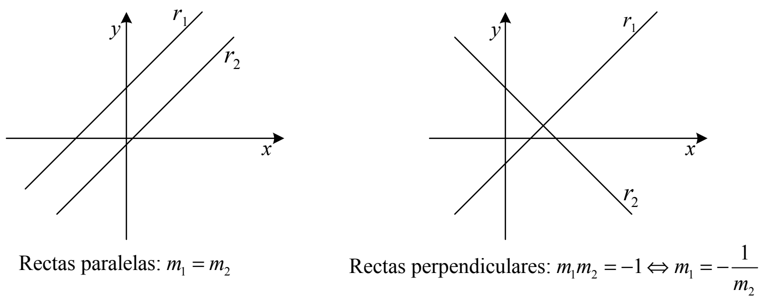
Sejam dois pontos $P_1\,(x_1, y_1)$ e $P_2\,(x_2, y_2)$, o declive da recta que os contém é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \tag{2.2}$$

A partir da equação 2.2, deduz-se $y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$, que para um ponto genérico (x_0, y_0), dá origem à equação da recta que passa nesse ponto,

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)\ . \tag{2.3}$$

Se duas rectas são paralelas, então $m_1 = m_2$. Se duas rectas são perpendiculares, então $m_1 m_2 = -1$.



Exemplo 2.4 *Determinar a equação da recta de declive* $m = 3$ *que passa no ponto* $(2, 4)$.
Como o declive é 3 *temos*

$$y = mx + b = 3x + b\,.$$

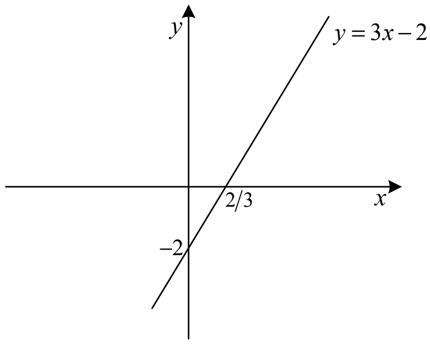
Como o ponto considerado é $(2, 4)$, *ficamos com*

$$4 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -2\,.$$

A equação da recta será, então,

$$y = 3x - 2$$

que graficamente é representada por



$b = -2$

$y = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

2.2.4 Função quadrática

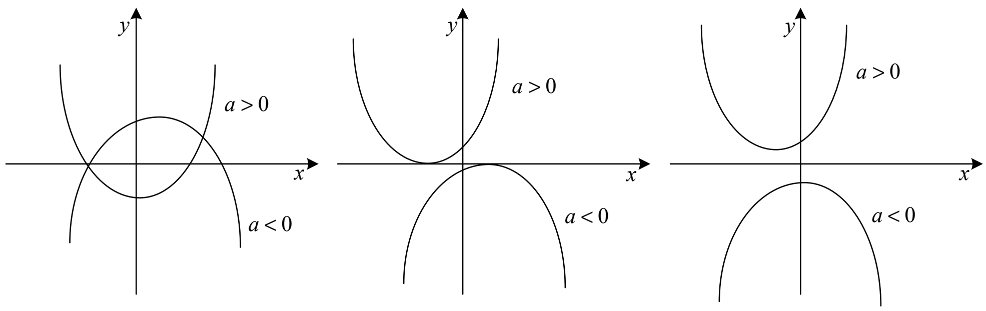
A função quadrática é uma função polinomial de grau $n = 2$ (polinómio do 2º grau) e é definida por

$$f\,(x) = ax^2 + bx + c$$

Os gráficos destas funções são **parábolas** e consoante o sinal de a a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo:

$$\begin{array}{lcll} a & > & 0 & \text{concavidade voltada para cima} \\ a & < & 0 & \text{concavidade voltada para baixo} \end{array}$$

O número de zeros da função, ou seja as suas raízes, é dado pelo **discriminante** Δ, em que $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos então,



$\Delta > 0$ dois zeros $\quad$ $\Delta = 0$ um zero duplo $\quad$ $\Delta < 0$ não tem zeros

Os zeros da parábola são determinados pela equação

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que á a chamada *fórmula resolvente*. O vértice da parábola é a imagem do ponto médio entre as duas raízes (no caso de haver duas raízes)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{vértice} = f(\bar{x})$$

No caso de não haver raízes, $\Delta < 0$, o vértice é dado por

$$-\frac{b}{2a}.$$

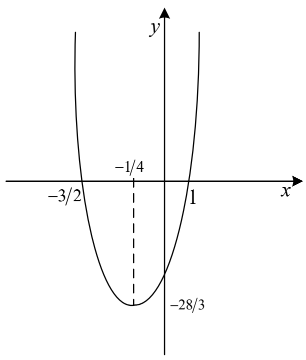
Exemplo 2.5 *Represente graficamente a função* $f(x) = 2x^2 + x - 3$.
Utilizando a fórmula resolvente

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

O vértice será dado por

$$\begin{aligned} &\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - 3/2}{2} = -\frac{1}{4} \\ &\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

O gráfico obtido será



2.2.5 Funções racionais

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinómios. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

são chamadas de **funções racionais**. O domínio de f é o conjunto em que para todo o x do domínio de f se tem $q(x) \neq 0$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

São exemplos de funções racionais:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+1}{2x-1} \\ f(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ f(x) &= x^2 \quad \text{neste caso} \quad q(x) = 1 \end{aligned}$$

No primeiro caso, o domínio será

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

No segundo caso vai-se ter

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\right\}.$$

Como $x^2 + 1 > 0$, $\forall x$, o domínio é $\mathbb{R}$.

Zeros

Seja $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional. Então

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \ \wedge \ q(x) \neq 0.$$

2.2.6 Funções irracionais

Seja $p(x)$ um polinómio. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt[n]{p(x)} \end{aligned}$$

são chamadas de **funções irracionais** em que $n \in \mathbb{N}$.

O cálculo do domínio de funções irracionais depende de n, ou seja, do facto de n ser par ou ímpar. Para o caso de n ser um número par temos

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\};$$

no caos de n ser ímpar não temos que impor esta restrição.

Casos particulares nas funções racionais

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinómios. Se f é definida por

$$f(x) = \sqrt[n]{\frac{p(x)}{q(x)}}$$

temos:

1. n par:
$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \quad \wedge \quad q(x) \neq 0\right\}$$

2. n ímpar:
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

Exemplo 2.6 *Determine o domínio da funçãof definida por*

$$f(x) = \sqrt{\frac{5x+1}{3x-2}}$$

Resolução:
$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{5x+1}{3x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad 3x-2 \neq 0\right\}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{5x+1}{3x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad 3x-2 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{5x+1}{3x-2} \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq \frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

Temos agora que ver qual o conjunto de valores para x que fazem com que a função racional seja sempre maior ou igual a zero:

		$-1/5$		$2/3$	
$5x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{5x+1}{3x-2}$	$+$	0	$-$	s/s	$+$

O domínio será, então,
$$D_f = \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

2.2.7 Função exponencial

Seja f uma função definida por

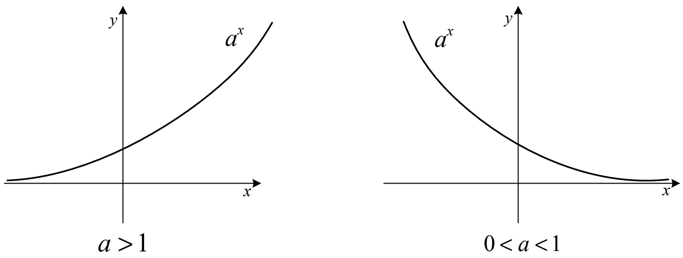
$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Esta função chama-se **função exponencial**. Como exemplos temos:

$$f(x) = 3^x; \quad f(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad f(x) = e^x$$

onde e é a **constante de Euler**.

O domínio desta função é $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}^+$. Graficamente temos duas situações; uma para $a > 1$ e outra para $0 < a < 1$:



Esta função não tem zeros, é injectiva e passa no ponto $(0,1)$. Um exemplo possível para $0 < a < 1$, seria, por exemplo

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Notar que ao contrário do numerador que se mantém constante, já que $1^x = 1$, o denominador cresce exponencialmente, isto é, tende para o infinito, o que faz com que a função vá tender para zero.

Propriedades

1. Se $a > 0$, $a^0 = 1$.
2. Se $a > 0$, $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. Se $a > 1 \Rightarrow 1 < a^x < \infty$ para $x > 0$.
4. Se $a > 1$ e $x < 0 \Rightarrow 0 < a^x < \infty$.
5. Se $a < 1 \Rightarrow 0 < a^x < \infty$ para $x > 0$ e $1 < a^x < \infty$ para $x < 0$.

Nota 2.2 *Há casos em que temos, como no caso da função exponencial, funções constituídas por constantes elevadas a funções que não x. Como exemplo podemos ter:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^{\frac{2}{3x+1}} \\ f(x) &= 2^{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Nestes casos o domínio da função não é $\mathbb{R}$*. No primeiro caso o domínio será*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 \neq 0\}$$

e no segundo caso será

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\}$$

Sempre que

$$f(x) = a^{h(x)} \quad h(x) \text{ é uma função real de variável real}$$

o domínio da função f ***será o domínio da função*** h*.*

2.2.8 Outras potências

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
x^n &= x \times x \times \ldots \times x \quad n \text{ vezes} \\
x^{-n} &= \frac{1}{x^n} \quad (\text{se } x \neq 0) \\
x^{1/n} &= \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x \quad (x \geq 0 \, \text{se } n \text{ é par}) \\
x^{m/n} &= \left(x^{1/n}\right)^m = \left[\sqrt[n]{x}\right]^m \quad (\text{se } x \geq 0) \\
x^0 &= 1 \quad (\text{se } x \neq 0)
\end{aligned}$$

2.2.9 Regras para os expoentes

Sejam $n, m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x^n \cdot x^m &= x^{n+m} \\
x^n \cdot y^n &= (xy)^n \\
\frac{x^n}{x^m} &= x^{n-m} \quad (\text{se } x \neq 0) \\
(x^n)^m &= x^{nm} \\
x^{m/n} &= \left(x^{1/n}\right)^m = (x^m)^{1/n} \quad (x \geq 0 \text{ se } n \text{ é par}) \\
(xy)^n &= x^n y^n
\end{aligned}$$

Exemplo 2.7 *Simplificar a expressão*

$$\frac{\left(4x^2y\right)^3}{8xy^{-2}} = \frac{4^3x^6y^3}{8xy^{-2}} = \left(\frac{64}{8}\right)\left(\frac{x^6}{x}\right)\left(\frac{y^3}{y^{-2}}\right) = 8x^{6-1}y^{3-(-2)} = 8x^5y^5$$

Exemplo 2.8 *Determinar os zeros da função* $f(x) = x^{5/3} - 4x$*.*

Podemos colocar x em evidência:

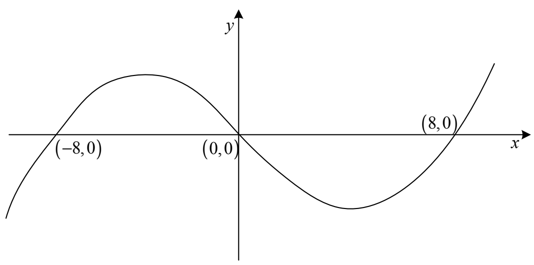
$$f(x) = x\left(x^{5/3-1} - 4\right) = x\left(x^{2/3} - 4\right),$$

logo os zeros são $x = 0$ e $x^{2/3} - 4 = 0 \Leftrightarrow x^{2/3} = 4$.

$$x = 0 \ \vee \ x^{2/3} - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \vee \quad & x^{2/3} - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^{2/3} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{2/3}\right)^3 = 4^3 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \end{aligned}$$

Os zeros são, então, $x_1 = -8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$. O gráfico é algo como



2.2.10 Função logaritmo

Considere-se a função definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \log_a(x) \end{aligned}$$

A esta função dá-se o nome de **função logaritmo de base** a, onde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Se $x > 0$, então podemos definir o logaritmo de base a de x como o número y tal que

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Desta equivalência resulta

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{e} \quad x = a^{\log_a(x)}$$

Um caso especial é o chamado logaritmo **neperiano** ou de base e;

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Os logaritmos têm as seguintes propriedades:

1. $\log_a (xz) = \log_a (x) + \log_a (z)$

2. $\log_a \left(\frac{x}{z}\right) = \log_a (x) - \log_a (z)$

3. $\log_a (x)^b = b \log_a (x)$

4. $\log_a (a) = 1$, por exemplo, $\ln (e) = 1$

5. $x = a^{\log_a (x)}$, por exemplo, $e^{\ln(3)} = 3$

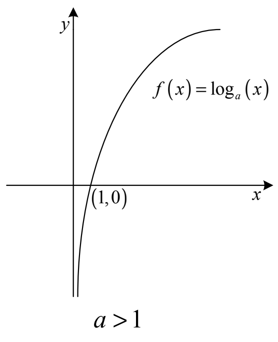
6. Esta propriedade serve como fórmula para mudança de base; é bastante útil para logaritmos de base a, em que $0 < a < 1$;

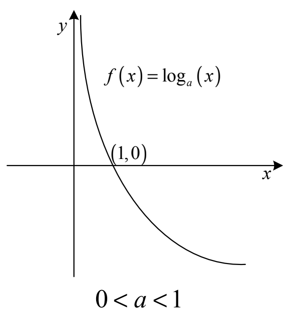
$$\log_a (x) = \frac{\ln (x)}{\ln (a)}$$

Exemplo 2.9

$$\begin{aligned} \log_{1/e} (x+8) &= \frac{\ln (x+8)}{\ln (e)^{-1}} = -\frac{\ln (x+8)}{\ln (e)} \\ &= -\ln (x+8) \end{aligned}$$

Graficamente, em analogia com a função exponencial (estão relacionadas, são a inversa uma da outra como se verá mais tarde), temos dois casos: para $a > 0$ e para $0 < a < 1$:





No caso de $0 < a < 1$, um exemplo possível será

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x)$$

Notar que, quando $x < 1$, $\log_a (x) < 0$. Ambas as funções anulam-se para $x = 1$ e têm como contradomínio o conjunto $\mathbb{R}$.

Pela definição de logaritmo, no cálculo do domínio temos que ter em atenção que o argumento da função tem que ser positivo;

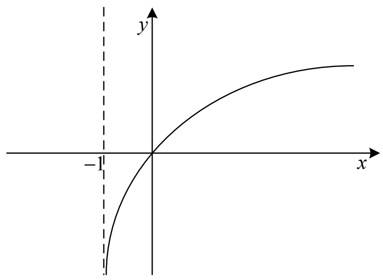
Considere-se a função $f(x) = \log_a(h(x))$ em que $h(x)$ é uma função real de variável real. Então o domínio de f será

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \tag{2.4}$$

Exemplo 2.10 *Considere a função $f(x) = \ln(x+1)$.*
O domínio desta função será obtido através da expressão (2.4):

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} \\ &= \left]-1, +\infty\right[\end{aligned}$$

O gráfico desta função será algo como



Exemplo 2.11 *Considere a função $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$.*
Utilizando (2.4) vamos ter

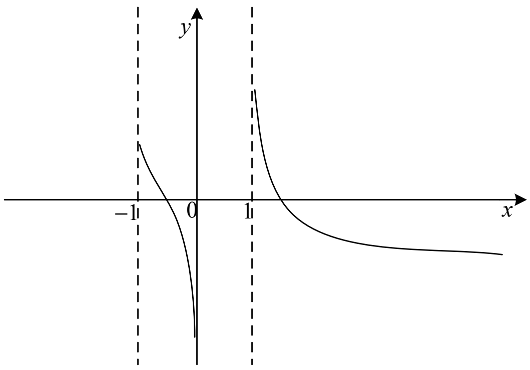
$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x}{x^2-1} > 0\right\}$$

		-1		0		1	
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x}{x^2-1}$	$-$	s/s	$+$	0	$-$	s/s	$+$

O domínio será então, o conjunto de valores para x que fazem com que $\frac{2x}{x^2-1}$ seja sempre positivo:

$$D_f = \left]-1, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

O gráfico será algo parecido com o esboço seguinte:



2.3 Funções definidas por ramos

Considere-se, a título de exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ h(x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Funções assim definidas, chamam-se funções definidas por ramos (neste exemplo, por dois ramos). O domínio deste tipo de funções é obtido pelos intervalos do valor para x e, por vezes, pelos domínios próprios das funções g e h.

Exemplo 2.12 *Considere-se a função*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & se \quad x < 0 \\ 2 - 2x & se \quad 0 \leq x < 1 \\ \ln(x) & se \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

O domínio desta função é $\mathbb{R}$. Uma função assim definida significa que:

- *se $x \in \left]-\infty, 0\right[$, então $f(x) = -x^2$;*
- *se $x \in \left[0, 1\right[$, então $f(x) = 2 - 2x$;*
- *se $x \in \left[1, +\infty\right[$, então $f(x) = \ln(x)$.*

Exemplo 2.13 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & se \quad x \geq 2 \\ \ln(-x-2) & se \quad x < -2 \end{cases}.$$

Determine o seu domínio.

Resolução:

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left(x^2 - 4 \geq 0 \ \wedge \ x \geq 2\right) \ \vee \ (-x-2 > 0 \ \wedge \ x < -2)\right\} \\
&= \{]-\infty,-2] \ \cup \ [2,+\infty[\ \cap \ [2,+\infty[\} \ \cup \ \{]-\infty,-2] \ \cap \ ]-\infty,-2]\} \\
&= \mathbb{R} - [-2,2[\ .
\end{aligned}$$

2.3.1 Módulo de uma função

Seja f uma função rela de variável real. O gráfico $g(x) = |f(x)|$ é obtido a partir do gráfico de f reflectindo no eixo dos xx a parte negativa da função.

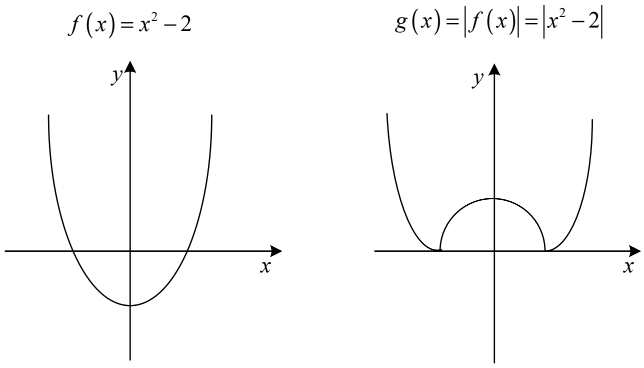
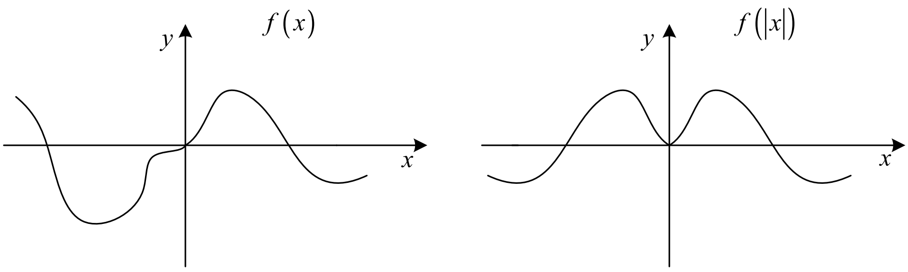


Figura 2.5: Módulo da função $f(x) = x^2 - 2$.

Nota 2.3 *Seja f uma função. A função $g(x) = f(|x|)$ resulta numa função par já que*

$$f(|x|) = f(|-x|) = f(x) \ .$$

A parte positiva do domínio de f, ou seja $x \geq 0$, é reflectida no eixo dos yy.



2.4 Operações com funções

2.4.1 Álgebra das funções

Sejam f e g duas funções reais de variável real.

1. Soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. Diferença: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
3. Produto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
4. Quociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x),\ g(x) \neq 0$
5. Caso particular: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$

A soma,a diferença, o produto de funções só tem sentido para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das funções consideradas. Ou seja, no caso das funções f e g, ao elementos do conjunto $D_f \cap D_g$.

Exemplo 2.14 *Seja $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Como f só está definida para $x > 0$ (o domínio de $\ln(x)$ é $\mathbb{R}^+$), só faz sentido falar de $f(x) + g(x)$ se $x > 0$.*

No caso do quociente, só tem sentido para valores que pertencem simultaneamente aos domínios das duas funções consideradas e que não anulem o denominador. Neste caso, e para as funções f e g, estes valores pertencem ao conjunto

$$D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\} \ .$$

2.4.2 Composição de funções

Sejam A, B e C conjuntos reais e f e g duas funções reais de variável real, tal que

$$f : A \longrightarrow B; \quad g : B \longrightarrow C$$

onde o contradomínio de f, $f(A)$, está contido (ou é igual) ao domínio da função g:

$$f(A) \subseteq D_g$$

Podemos, então, definir uma função de A em C; como o domínio de g é B, podemos achar a imagem $f(x)$ por g. Este elemento de C vai ser $g(f(x))$.

Definição 2.1 *Se f é uma função de A em B e g uma função de B em C, então a função composta $g \circ f$ é a função de A em C definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \, .$$

Pela definição, o domínio de $g \circ f$ vai ser

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \ \ \wedge \ \ f(x) \in D_g\} \, . \tag{2.5}$$

Exemplo 2.15 *Sejam* $f(x) = 2x + 4$ *e* $g(x) = 5 + \sqrt{x}$.
O domínio de f *é* $\mathbb{R}$ *e o domínio de* g *é* $\mathbb{R}_0^+$. *O domínio de* $g \circ f$ *vai ser obtido por*

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \ \wedge \ f(x) \in D_g\}$$

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \ \wedge \ f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ 2x + 4 \in \mathbb{R}_0^+\right\} \end{aligned}$$

Para $2x + 4 \in \mathbb{R}_0^+$ *temos que assegurar que* $2x + 4$ *é maior ou igual que o primeiro elemento do conjunto* $\mathbb{R}_0^+$:

$$2x + 4 \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow 2x + 4 \geq 0,$$

ou seja, $x \geq -2$. *Temos então,*

$$D_{g\circ f} = [-2, +\infty] .$$

O cálculo de $g \circ f$ *será*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 4) = 5 + \sqrt{2x + 4}$$

Exemplo 2.16 *Considerem-se as funções* $f(x) = 3x - 4$ *e* $g(x) = 2x - \sqrt{x}$. *Calcular o domínio de* $(g \circ f)(x)$.
Resolução:
Os domínios das duas funções serão:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[\ . \end{aligned}$$

Por (2.5) o domínio de $(g \circ f)(x)$ *será:*

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ f(x) \in [0, +\infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 3x - 4 \geq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{4}{3}\right\} \\ &= \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Exemplo 2.17 *Considerem-se as funções* $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$ *e* $g(x) = \log_2 x$. *Determinar os domínios de* $(g \circ f)(x)$ *e* $(f \circ g)(x)$ *e as respectivas expressões analíticas.*

Resolução:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\} \\ D_g &= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+ . \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} - \{3\} \ \wedge \ e^{\frac{1}{x-3}} \in \mathbb{R}^+\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \ \wedge \ e^{\frac{1}{x-3}} > 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\} \\ &= \mathbb{R} - \{3\} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ \log_2 x \in \mathbb{R} - \{3\}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ \log_2 x \neq 3\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ x \neq 2^3\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2^3\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{8\} . \end{aligned}$$

As expressões analíticas de $(g \circ f)(x)$ *e* $(f \circ g)(x)$ *serão:*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(e^{\frac{1}{x-3}}\right) \\ &= \log_2 e^{\frac{1}{x-3}} = \frac{1}{x-3} \log_2 e \\ &= \frac{1}{x-3} \frac{\ln e}{\ln 2} = \frac{\ln e}{(x-3)\ln 2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\log_2 x) \\ &= e^{\frac{1}{\log_2 x - 3}} \end{aligned}$$

De uma forma geral, a composição de funções não é comutativa, ou seja

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) .$$

Nem sempre podemos recorrer à expressão analítica da função composta para calcular o seu domínio:

Exemplo 2.18 *Considerem-se as funções* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = x^2$*. Calcular o domínio de* $(g \circ f)(x)$ *e a expressão analítica de* $(g \circ f)(x)$*.*

Resolução:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ ; \quad D_g = \mathbb{R} .$$

Então

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{\in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ . \end{aligned}$$

A expressão analítica de $(g \circ f)(x)$ *será:*

$$(g \circ f)(x)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x .$$

O Exemplo 2.18 mostra como nem sempre se pode recorrer à expressão analítica da função composta para calcular o seu domínio. O domínio, neste caso, calculado a partir da função composta levaria à conclusão errada que, o domínio de $g \circ f$ seria $\mathbb{R}$ quando ele é, de facto, $\mathbb{R}_0^+$.

2.4.3 Função inversa

Seja f uma função **injectiva**, tal que

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

À função $g : B \longrightarrow A$ (também ela injectiva) que satisfaz

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x \quad \forall x \in D_f^{'} \\ (g \circ f)(x) &= x \quad \forall x \in D_f \end{aligned}$$

chama-se **função inversa** de f e escreve-se $g = f^{-1}$. A função inversa é caracterizada por

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto x \end{aligned}$$

ou seja, sabendo que $f(x) = y$, então a função inversa define-se por $f^{-1}(y) = x$.

Graficamente[1], e como

$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x) \Leftrightarrow (y, x) \in G\left(f^{-1}\right),$$

[1] $G(f)$=gráfico de f.

os gráficos de f e f^{-1} vão simétricos relativamente à recta $y = x$; o ponto médio que une os pontos $P_1(x, y)$ de $G(f)$ e $P_2(y, x)$ de $G\left(f^{-1}\right)$, é um ponto que pertence à recta $y = x$.

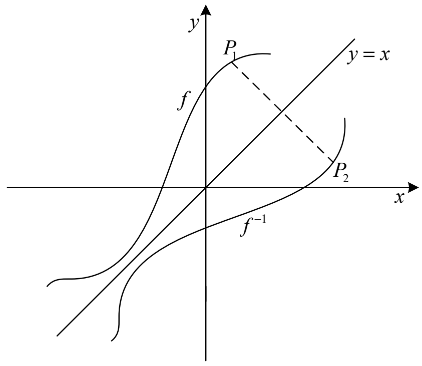


Figura 2.6: Exemplo de gráfico de uma função inversa.

Exemplo 2.19 *Considere-se a função* $f(x) = 4x + 2$.
Para calcular determinar a função inversa iguala-se a função a y *e resolve-se a equação em ordem a* x*;*

$$y = 4x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{4}$$

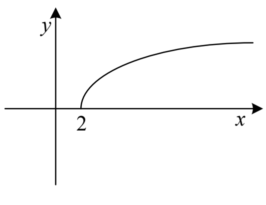
A função inversa é, então caracterizada por

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-2}{4} \end{array}$$

Exemplo 2.20 *Considere-se a função* $f(x) = \sqrt{2x-4}$.
O domínio de f *é*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \geq 0\} = [2, +\infty[$$

Vê-se graficamente que o contradomínio é $\mathbb{R}_0^+$ *e que a função é injectiva:*

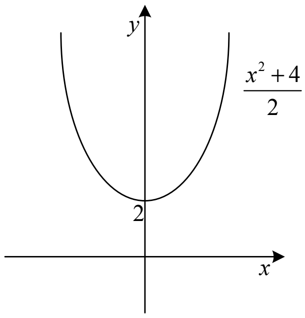


$$y = \sqrt{2x-4} \Leftrightarrow y^2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y^2+4}{2}$$

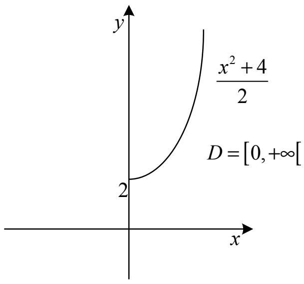
Temos então

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+4}{2}$$

Notar que, assim como f, a função f^{-1} tem que ser injectiva. A função inversa é uma parábola, ou seja, ***não é injectiva****.*



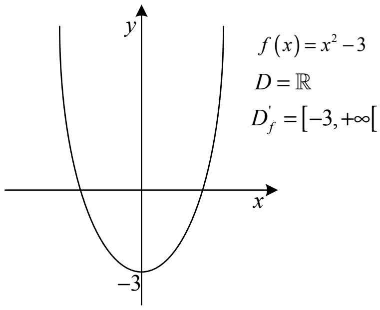
No entanto,e como o domínio da função inversa tem que ser o contradomínio da função, restringindo o domínio da inversa a um subconjunto desse domínio onde a função tome todos os seus valores e onde seja injectiva, podemos considerar a função obtida como a função inversa. Neste caso, iremos optar por considerar a restrição principal como o conjunto $[0, +\infty[$*, ou seja,* $\mathbb{R}_0^+$.



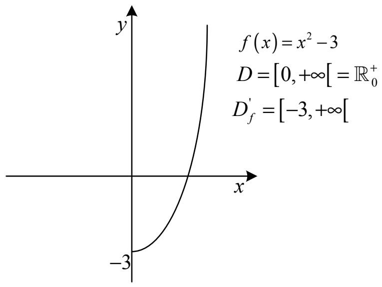
A função inversa é, então caracterizada por

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+4}{2} \end{array}$$

Exemplo 2.21 *Considere-se a função* $f(x) = x^2 - 3$.
Graficamente esta função representa uma parábola



e como tal, a função não é injectiva. Temos, então, que restringir o domínio desta *função a um intervalo em que a função tome todos os seus valores (ou seja, o contra-domínio **tem que ser** o mesmo) e seja injectiva. Uma das possibilidades é restringir o domínio ao conjunto $\mathbb{R}_0^+$ (a outra possibilidade seria $\mathbb{R}_0^-$);*



O cálculo da inversa será:

$$y = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 = y + 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+3}$$

Como $x \in [0, +\infty[$ *(é positivo) elimina-se* $x = -\sqrt{y+3}$*, ou seja,* $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$. *A função inversa será caracterizada por*

$$\begin{array}{rcl} f : [3, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+3} \end{array}$$

Um dos aspectos da importantes do cálculo da função inversa, é a **possibilidade de calcular o contradomínio de uma função**. De facto, basta-nos determinar a função inversa e calcular o seu domínio. Temos que ter em atenção que isto só é possível quando f^{-1} é uma função injectiva. Ter em atenção que uma função inversa é sempre injectiva, o que pode não ser injectiva é uma função que tenha a mesma expressão analítica de f^{-1} (ver exemplo 2.20).

Função logaritmo e função exponencial

Por 2.2.10 vimos que

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x\,,$$

ou seja, a função logaritmo é a inversa da função exponencial (e vice-versa). Se a função f for definida por $f(x) = \log_a(x)$, a sua função inversa será $f^{-1}(x) = a^x$:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a(x) \\ f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

2.4.4 Equações trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.6}$$

Exemplo 2.22

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.23

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(3x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.7}$$

Exemplo 2.24

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.25

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = -\cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos(\pi + x) \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pm(\pi + x) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pi + x + 2k\pi \vee 2x = -\pi - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pi + k\pi \vee 3x = -\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pi + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.8}$$

Exemplo 2.26

$$\operatorname{tg}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Exemplo 2.27

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(3x)=-\operatorname{tg}(x) &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x)=\operatorname{tg}(-x)\\ &\Leftrightarrow 3x=-x+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow 4x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

$$\operatorname{ctg}(x)=\operatorname{ctg}(\alpha)\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{2.9}$$

Exemplo 2.28

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \operatorname{ctg}(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Exemplo 2.29

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}(3x)=-\operatorname{ctg}(x) &\Leftrightarrow \operatorname{ctg}(3x)=\operatorname{ctg}(-x)\\ &\Leftrightarrow 3x=-x+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Relação entre o seno e co-seno

$$\cos(\alpha)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\quad\wedge\quad \operatorname{sen}(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \tag{2.10}$$

Exemplo 2.30

$$\begin{aligned}\cos(x)=\operatorname{sen}(3x) &\Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\\ &\Leftrightarrow x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi\ \vee\ x=-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \vee\ 2x=\frac{\pi}{2}-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ \vee\ x=\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Relação entre tangente e co-tangente

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \wedge \quad \operatorname{ctg}(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tag{2.11}$$

Exemplo 2.31

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}(2x) = \operatorname{tg}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg}(2x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Limites de Funções

Considere-se a função racional $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$. Como $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, a função não está definida em 2 e, portanto, não podemos calcular $f(2)$. Mas podemos ver como se comporta a função *perto de* 2:

x	1.5	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.5
$f(x)$	4.5	4.9	4.99	4.999	4.9999	–	5.0001	5.001	5.01	5.5

Estes valores sugerem que o **limite** de f quando x tende para 2 será 5.

Definição 3.1 *Diz-se que o número L, $L \in \mathbb{R}$, é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para toda a sucessão de valores $x_n \to a$, com $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (que aproximam a de ambos os lados e ***sempre diferentes*** *de a) se tem $f(x_n) \to L$.*

Observação 3.1 *Conceito de limite de uma sucessão.*
Considere-se, por exemplo, $a_n = \dfrac{1}{n}$. Estamos a considerar a sucessão

$$a_1 = 1\,,\ \ a_2 = \frac{1}{2}\,,\ \ a_3 = \frac{1}{3}\,,\ \ a_4 = \frac{1}{4}\,,\ldots,\ \ a_n = \frac{1}{n}\,,\ldots$$

Nenhum número desta sucessão é zero mas, e é fácil de verificar, quanto maior for n mais próximo de zero se encontrará o número a_n. Isto significa que, com o aumento de n os números a_n tendem para zero, ou que a_n tem como limite zero, ou ainda que a sucessão $a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ***converge*** *para zero. A convergência da sucessão para zero é geralmente representada simbolicamente pela equação*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ou, por vezes, por

$$a_n \to 0\,.$$

Em geral, mesmo que a função esteja definida em a (o que não acontece no caso anterior), não nos interessa o valor de $f(a)$, ou seja, o valor no ponto, mas apenas nas **proximidades** de a.

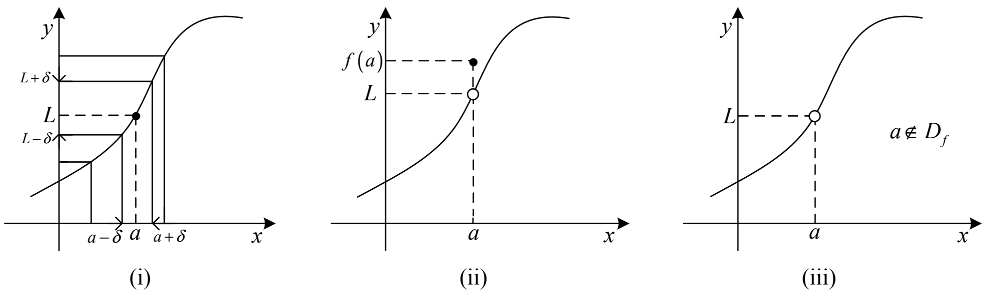


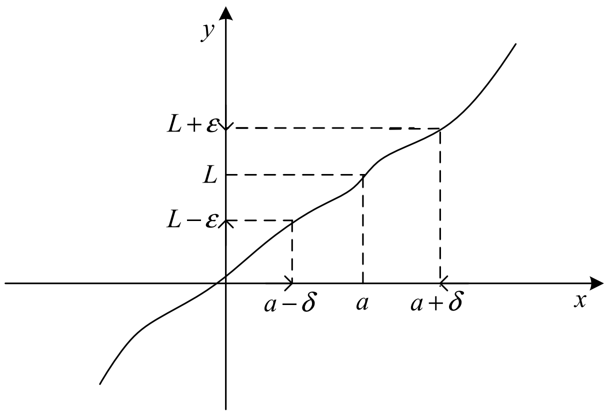
Figura 3.1: Nos três casos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. No caso (ii) $a \in D_f$ e tem como imagem $f(a)$; no caso (iii) a não pertence ao domínio da função e, portanto, a função não está definida nesse ponto.

Definição 3.2 *Diz-se que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *quando*

$$\forall\epsilon\,,\ \exists\delta\ :\ \epsilon < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\,,$$

ou seja, para qualquer intervalo centrado em L *do tipo* $]L-\epsilon, L+\epsilon[$*, existe pelo menos um intervalo da forma* $]a-\delta, a+\delta[-\{a\}$*, onde a imagem de qualquer ponto pertence ao intervalo* $]L-\epsilon, L+\epsilon[$*.*

De acordo com a definição, para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não nos interessa o que se passa no ponto a (pode até não pertencer ao domínio); o que nos interessa é o que se passa **imediatamente antes e depois de** a, ou seja, o que se passa na **vizinhança** de a.



3.1 Propriedades dos limites

Teorema 3.1 ***Unicidade do limite***
Seja f *uma função definida numa vizinhança de* a*. O limite de* f *em* a*, quando existe,*

é único.

Teorema 3.2 ***Propriedades algébricas dos limites***
Sejam f e g duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$.

1. $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$.
2. $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$.
3. *Seja k uma constante:* $\lim\limits_{x\to a} (kf)(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = kL$.
4. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *se* $g(x) \neq 0$ *e* $M \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to a} (f)^n(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} (f)(x)\right)^n = L^n$; $n \in \mathbb{N}$.

Teoremas sobre limites:

1. O limite de uma constante é a própria constante: $a, b \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to a} b = b$.
2. Funções lineares (rectas): $a, b, m \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} (mx + b) = m$.
3. Funções polinomiais: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
4. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, e $L > 0$, então $f(x) > 0$ $\forall x$.
5. Se $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ ou $a < 0$ e n é um inteiro positivo ímpar

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} &= \sqrt[n]{a} \\ \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{f(a)} \end{aligned}$$

Exemplo 3.1 *Verificar que* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ *é* 5.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+3) = 5$$

Exemplo 3.2 *Considere-se a função* $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ *cujo domínio é* $]9, +\infty[$. *Calcular o limite de f quando x tende para* 9.

$$\lim_{x\to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x\to 9} \left(\sqrt{x} + 3\right) = 6$$

Teorema 3.3 *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *e g é uma função limitada numa vizinhança perto de* $x = a$, *então* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$.

Ou seja, se g é uma função limitada, o que implica

$$|g(x)| \leq m \Leftrightarrow -m \leq g(x) \leq m$$

e o limite de f quando $x \to a$ é zero, o limite do produto das duas funções quando $x \to a$ vais ser zero:

Exemplo 3.3

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

já que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ *e* $\lim_{x\to 0} x = 0$.

3.2 Limites laterais

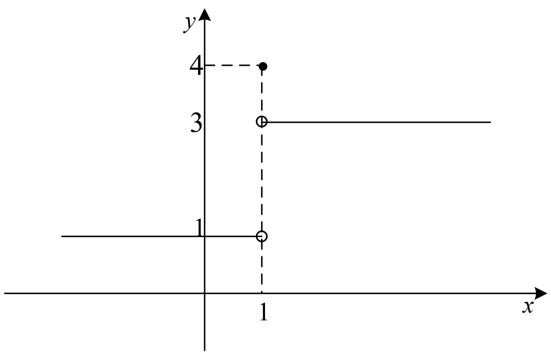
Por vezes é conveniente *olhar* para cada um dos lados do ponto a separadamente, considerando apenas sucessões $x_n \to a$ para valores à direita ou para valores à esquerda de a; ou seja

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)\ .$$

Teorema 3.4 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L\,.$$

Exemplo 3.4 *A figura representa o gráfico da função f.*



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3\ , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \ \Rightarrow\ \text{não existe } \lim_{x\to 1} f(x)$$

Nota 3.1 *A aritmética dos limites é válida para os limites laterais.*

Teorema 3.5 ***Encaixe dos limites****.*
Sejam f, g e h funções e $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

3.3 Limites infinitos

Nos limites infinitos estamos a considerar limites de funções num ponto a em que, à medida que nos aproximamos de a a função tende para valores infinitos ($\pm\infty$):

- Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ diz-se que f não é limitada.
- Se $\lim_{x\to a} f(x) \neq \infty$ a função f é limitada numa vizinhança de $x = a$.

Exemplo 3.5 *Considere a função* $f(x) = \dfrac{x^2+x+6}{x-2}$ *cujo domínio é* $\mathbb{R}-\{2\}$. *Pretende-se calcular o limite de* f *quando* $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x+6}{x-2} = \frac{12}{0}$$

Estamos a comparar números muito próximos de 12 (no numerador) com números muito próximos de zero (no denominador); obtemos, por isso, valores muito grandes em módulo: positivos se o denominador é positivo, negativos se o denominador é negativo. Devemos, então, analisar o sinal do denominador. O denominador é representado pele polinómio do 1º grau $x-2$, *que é uma recta, e que se anula para* $x = 2$. *Por uma tabela pode-se verificar onde esse polinómio é negativo ou positivo (ver tabela 3.1).*

x		2	
$x-2$	$-$	0	$+$

Tabela 3.1: Tabela de valor para $f(x) = x-2$.

Na figura 3.2 está representada a recta $y = x-2$ *e os valores, em sinal, da função* $x-2$ *perto na vizinhança de 2.*

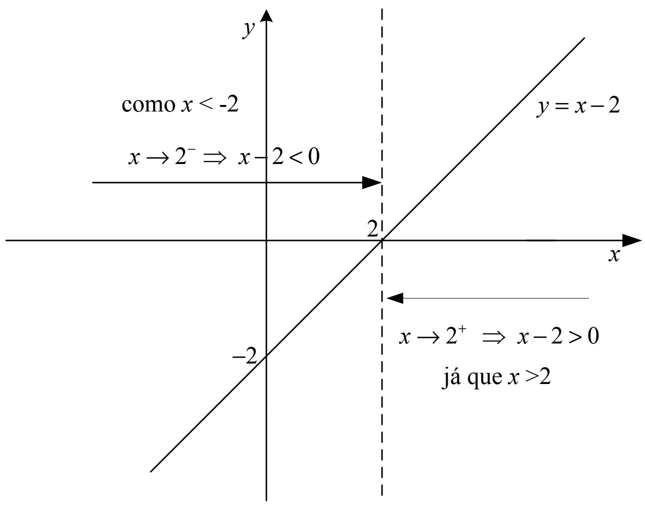


Figura 3.2: Representação gráfica de $y = x-2$.

Então

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x+6}{x-2} = \frac{12}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+x+6}{x-2} = \frac{12}{0^-}=-\infty\,,$$

ou seja, não existe $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+6}{x-2}$ *já que, e pelo Teorema 3.4, os limites laterais são diferentes.*

Exemplo 3.6 *Considere a função* $f(x)=\frac{x-5}{x-2}$ *cujo domínio é* $\mathbb{R}-\{2\}$. *Pretende-se calcular o limite de* f *quando* $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-5}{x-2}=\frac{-3}{0}$$

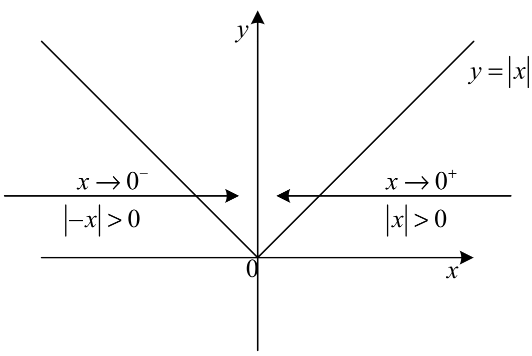
Pelo exemplo 3.5 teremos

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-5}{x-2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-5}{x-2}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$

Exemplo 3.7 *Considere-se a função* $f(x)=\frac{1}{|x|}$ *cujo domínio é* $\mathbb{R}-\{0\}$. *Pretende-se calcular o limite da função quando* $x\to 0$. *Temos então,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=\frac{1}{0}\cdot$$

Como no caso anterior estudemos o sinal do numerador:



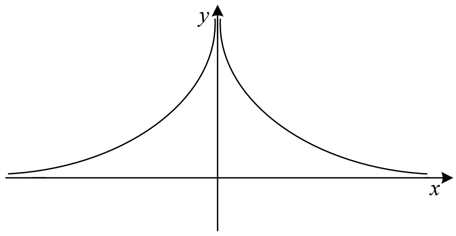
Temos assim

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x|} &= \frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{|x|} &= \frac{1}{0^-}=+\infty\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=\frac{1}{0}=+\infty\end{aligned}$$

3.4 Limites no infinito

Estes são limites de funções quando $x\to\pm\infty$. Os domínios destas funções são sempre ilimitados (caso contrário não faria sentido calcular estes limites).

Exemplo 3.8 *Considere-se a função* $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ *que, como já vimos, tem domínio* $\mathbb{R}-\{0\}$*, ou seja,* $D_f=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ *que é um conjunto ilimitado. O gráfico da função é o que se segue*



e é fácil de se verificar que quando $x\to\pm\infty$ *a função* f *tende para zero (o gráfico aproxima-se da recta* $y=0$*), ou seja,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$$

Quando temos funções racionais, **dividimos ambos os membros pela maior potência de** x.

Exemplo 3.9

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}=1$$

Exemplo 3.10

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5x+2}{3x^2-3}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{aligned}$$

Nota 3.2 *Ter em atenção que este processo de divisão pelo maior termo* ***só é válido*** *quando* $x\to\pm\infty$.

3.4.1 Polinómios

Considere-se o polinómio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Então

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n\,.$$

Exemplo 3.11

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5x^3-3x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}5x^3=+\infty$$

Exemplo 3.12

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+x^2+x^3-4x^7\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^7\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(4x^7\right)=-\left(+\infty\right)=-\infty$$

Exemplo 3.13

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+x^2+x^3-4x^7\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4x^7\right)=-\lim_{x\to-\infty}\left(4x^7\right)=-\left(-\infty\right)=+\infty$$

3.4.2 Aritmética dos limites infinitos

Seja $k\in\mathbb{R}$

1. Soma:

$$\begin{aligned}+\infty\pm k &= +\infty\\ -\infty\pm k &= -\infty\\ \pm\infty\pm\infty &= \pm\infty\\ +\infty-(+\infty) &= \text{indeterminação}\end{aligned}$$

2. Produto:

$$\begin{aligned}
\text{Se } k \neq 0: \quad \pm\infty \times k &= \pm\infty \\
+\infty \times (+\infty) &= +\infty \\
+\infty \times (-\infty) &= -\infty \\
+\infty \times 0 &= \text{indeterminação}
\end{aligned}$$

3. Quociente:

$$\begin{aligned}
\text{Se } k \neq 0: \quad \frac{k}{\pm\infty} &= 0 \\
\text{Se } k \neq 0: \quad \frac{k}{0} &= \pm\infty \\
\frac{\pm\infty}{\pm\infty} &= \text{indeterminação} \\
\frac{0}{0} &= \text{indeterminação} \\
\frac{+\infty}{0^+} &= +\infty\,; \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty
\end{aligned}$$

3.4.3 Regra da exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere-se o $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$:

1. $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
2. $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 1$.
3. $0 < a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
4. $a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
5. $-1 < a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
6. $a = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \pm 1$ (oscilante).
7. $a < -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = -\infty$.

Estes limites podem escrever-se como:

1. $|a| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
2. $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
3. $a = 1\ |a| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 1$.
4. $a = -1\ |a| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \pm 1$.

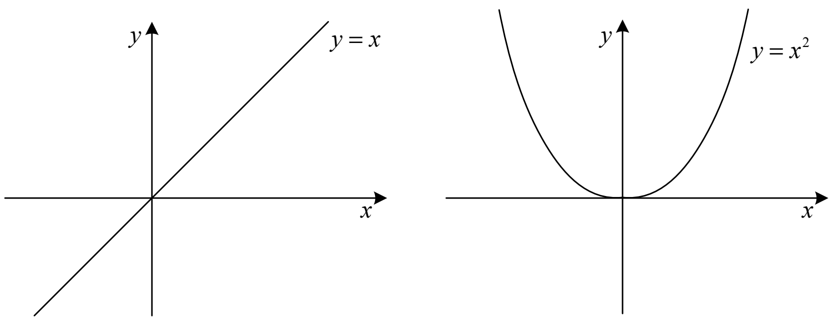
Capítulo 4

Funções Contínuas

4.1 Noção de continuidade

A ideia mais simples de função contínua é de uma função cujo gráfico é possível traçar *sem levantar o lápis do papel.*

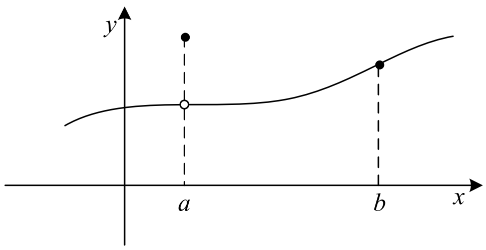
Exemplo 4.1 *A função $f(x) = x$, graficamente representada pela recta $y = x$, é uma função contínua já que o seu domínio é $\mathbb{R}$, ou seja, está definida para todo o $x \in \mathbb{R}$. O mesmo acontece para a função $f(x) = x^2$.*



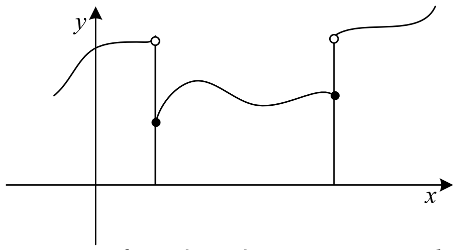
No caso de um intervalo fechado, por exemplo $[a, b]$, se f é contínua em todos os pontos do intervalo aberto $]a, b[$ e se também o for em $x = a$ e $x = b$ (nos extremos do intervalo), então f é contínua em $[a, b]$.

Definição 4.1 *Uma função f diz-se contínua no intervalo fechado $[a, b]$ se é contínua em cada ponto de $]a, b[$ e se*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \, .$$



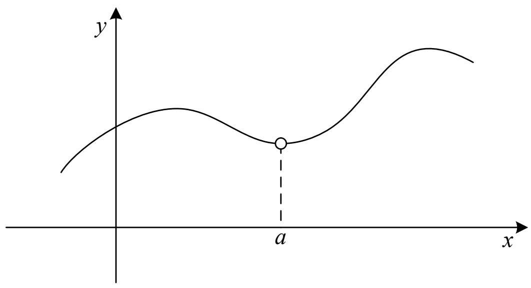
Não é contínua em $[a,b]$



f não é contínua em a nem em b, mas é continua em $[a,b]$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existir e se $a \in D_f$, este limite pode ser ou não igual a $f(a)$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ diz-se que f é **contínua** no ponto $x = a$.

Exemplo 4.2 *Neste caso $f(a)$ não existe o que faz com que não seja contínua em $x = a$ (pode existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, mas $f(a)$ não existe).*



Definição 4.2 *Uma função f é contínua num ponto a se forem satisfeitas as seguintes condições :*

1. *f está definida num intervalo aberto que contém a, ou seja, existe $f(a)$.*
2. *Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.*
3. *$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Geralmente uma função numa ponto arbitrário $x = a$ tem limite à esquerda e limite à direita desse ponto. Caso existam estes limites e se os limites forem iguais a $f(a)$ a função é contínua em $x = a$.

Definição 4.3 *Uma função diz-se contínua em $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \ .$$

Contudo, mesmo que esta igualdade não se verifique, podemos sempre ter **continuidade à esquerda** ou **continuidade à direita**.

Se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ podemos ter uma das seguintes situações:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$: continuidade à direita.

2. $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$: continuidade à esquerda.

Exemplo 4.3 *Verifique a continuidade da função* $f(x) = \begin{cases} 3+\ln(x-2) & , \quad x \geq -1 \\ \dfrac{2x-1}{x} & , \quad x < -1 \end{cases}$.
Se considerarmos $g(x) = 3+\ln(x-2)$ *vemos que o seu domínio é*

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x-2>0\} = \left]-2,+\infty\right[\, .$$

Como $\forall x \geq -1 \subset \left]-2,+\infty\right[$ *a função* g *é continua para* $x \geq -1$.
Considerando agora $h(x) = \dfrac{2x-1}{x}$. *Esta função tem como domínio* $\mathbb{R}-\{0\}$. *Como* $\forall x < -1 \subset \mathbb{R}-\{0\}$, *a função* h *é contínua* $\forall x < -1$. *Temos, então que verificar a continuidade de* f *em* $x=-1$, *ou seja, verificar se*

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \, .$$

Então,

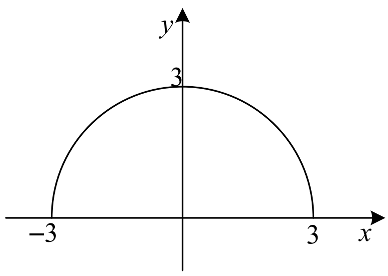
$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} [3+\ln(x-2)] = 3 \\ \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} = \frac{2x-1}{x} = 3 \end{aligned}$$

A função f *é contínua em* $x=-1$, *o que faz com que* f *seja contínua.*

Exemplo 4.4 *Considere a função* $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. *Verifique a sua continuidade.*
O domínio da função é traduzido por

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} : 9-x^2 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\} = [-3,3] \end{aligned}$$

Esta função é contínua em $]-3,3[$. *De notar que a função* f *é um semi-círculo de raio* $r=3$ *(ver figura).*



$y=\sqrt{9-x^2}\, y^2 = 9-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=9$

Circunferência de $C(0,0)$ e raio $r=3$

Temos que verificar a continuidade de f nos extremos do intervalo, ou seja, à direita de $x = -3$ e à esquerda de $x = 3$ (ver definição 4.1). Verifica-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} &= 0 = f(-3) \\ \lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} &= 0 = f(3) \end{aligned}$$

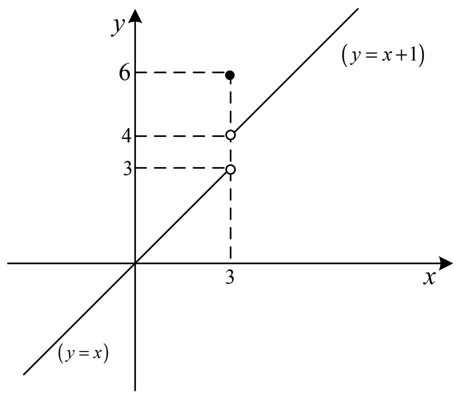
Verifica-se que f é contínua em $[-3, 3]$.

Exemplo 4.5 *considere-se a funçao* $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 3 \\ 6 & , \quad x = 3 \\ x + 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$. *Verificar a continuidade.*

Todas as funções que compõem a função f são contínuas em $\mathbb{R}$; teremos, então, que verificar a continuidade no ponto $x = 3$. Vemos que

$$\begin{aligned} f(3) &= 6 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} (x + 1) = 4 \\ \lim_{x \to 3^-} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} (x) = 3\,, \end{aligned}$$

ou seja, a função f não é contínua. aliás o gráfico da função f é representativo desse facto:



Exemplo 4.6 *Considere-se a função* $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{3} + 3 & , \quad x \leq 1 \\ 1 & , \quad x = 2 \\ x & , \quad x \geq 3 \end{cases}$. *Verificar a continuidade.*

Todas as funções que compõem a função f são contínuas em $\mathbb{R}$. Há que verificar a *continuidade nos extremos, ou seja, em $x = 1$ e $x = 3$.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{x^2}{3}+3\right) = \frac{8}{3} = f(1)\\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} x = 3 = f(3)\ .\end{aligned}$$

A função é contínua em em $x = 1$ e $x = 3$. Como $x = 2$ é um ponto isolado a, a função é contínua em $x = 2$.

4.2 Propriedades das funções contínuas

Sejam f e g duas funções contínuas no ponto $x = a$.

1. Soma: $(f \pm g)(x)$ continua a ser contínua em $x = a$.
2. Produto: $(f \cdot g)(x)$ continua a ser contínua em $x = a$.
3. Quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, com $g \neq 0$, continua a ser contínua em $x = a$.
4. Seja $k \in \mathbb{R}$, então $kf(x)$ é uma função contínua em $x = a$.

4.3 Teoremas fundamentais sobre continuidade

4.3.1 Teorema de Bolzano (ou dos valores intermédios)

Teorema 4.1 ***Teorema de Bolzano.***
Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se k está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$ (ver figura 4.1).

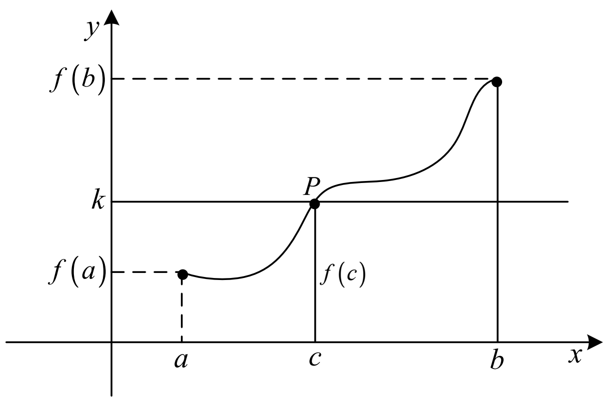


Figura 4.1: Representação do Teorema de Bolzano.

Corolário 4.1 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ são de sinais contrários, então existe pelo menos um zero no intervalo $[a, b]$, isto é,*

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$$

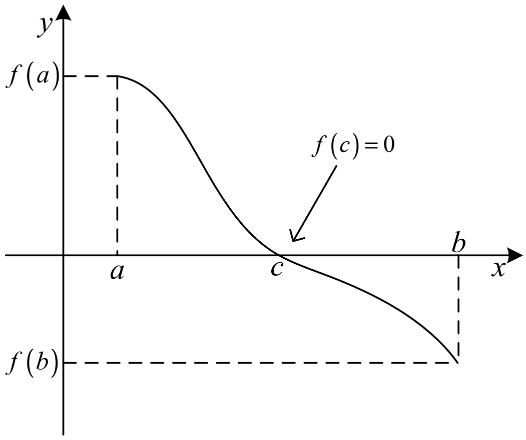


Figura 4.2: Corolário ao Teorema de Bolzano. Notar que $f(a) \times f(b) < 0$.

O Teorema de Bolzano tem particular interesse na obtenção de zeros (raízes) de funções reais.

Exemplo 4.7 *Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Utilizando o Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem pelo menos uma raíz real no intervalo $[-1, 0]$.*

Como f é um polinómio[1]*, é contínua em $\mathbb{R}$ e, por conseguinte, é contínua em qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, ou seja, é contínua em $[-1, 0]$.*

$f(-1) = -5$ e $f(0) = 1$, $f(-1)$ e $f(0)$ têm sinais contrários, logo, pelo Teorema de Bolzano (neste caso pelo seu corolário) a função tem pelo menos um zero em $[-1, 0]$.

[1] Qualquer polinómio de grau $n \geq 1$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Capítulo 5

Derivação

Definição 5.1 *Seja l é uma recta não-paralela ao eixo dos yy e $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos diferentes de l. O declive m (ou coeficiente angular) da recta l é dado por*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Se l for paralela ao eixo dos yy, m não é definido.

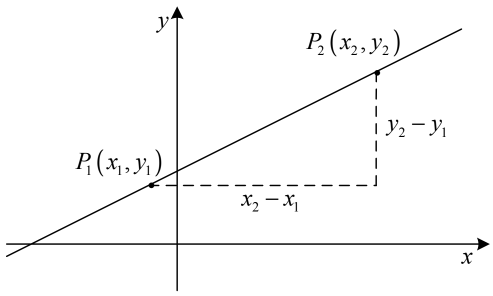


Figura 5.1: Recta de declive m positivo.

O numerador $y_2 - y_1$ na fórmula de m mede a variação vertical na direcção, quando se vai de P_1 a P_2, e o denominador mede a variação horizontal na mesma direcção. Na determinação de m de uma recta, é indiferente a ordem dos pontos, ou seja,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

O declive da recta é positivo se $y_2 > y_1$, negativo se $y_2 < y_1$ ou nulo se $y_2 = y_1$ (neste caso temos uma recta horizontal).

Considere-se a figura 5.2. Na geometria analítica plana, a recta tangente l a um círculo em um ponto P que pertença ao círculo, pode ser definida como a recta que tem apenas o ponto P como ponto comum (de contacto) com o círculo, tal como está ilustrado na figura 5.2(i). Tal definição não pode ser alargada a qualquer gráfico, pois a tangente num ponto pode interceptar o gráfico mais do que uma vez, conforme a figura 5.2(ii).

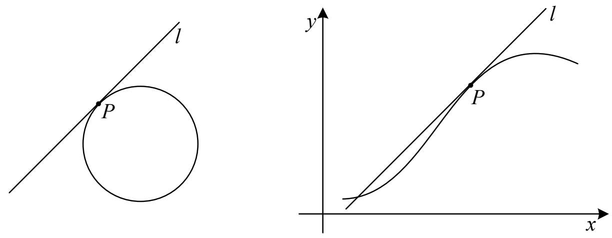


Figura 5.2:

Para definir a recta tangente l em um ponto P do gráfico de uma equação basta indicar o declive m de l, pois este dado determina completamente a recta. Para chegar a m comecemos por escolher outro ponto arbitrário Q, do gráfico, e considerar a recta que passa por P e Q, conforme a figura 5.3(i).

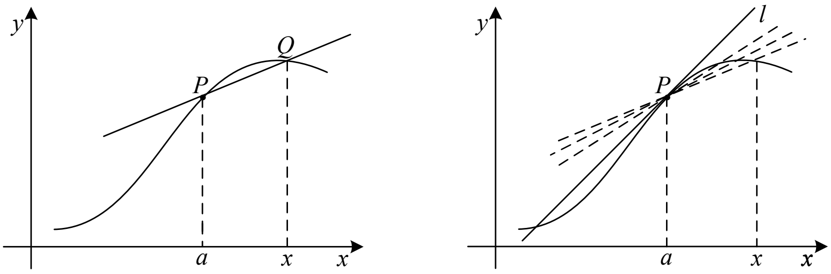


Figura 5.3:

Uma recta em tais condições é chamada **secante** do gráfico. Estudemos em seguida a variação da secante à medida que Q se aproxima de P, ou tende para P, sobre o gráfico, tal como está ilustrado pelas linhas tracejadas na figura 5.3(ii). Tudo parece indicar que, quando P está próximo de Q, o declive m_{PQ} da secante deve estar próximo do declive de l. Por esta razão, se m_{PQ} tem um limite quando Q tende para P, definimos tal valor como o declive m da recta tangente l. Se a é a abcissa de P e x a abcissa de Q (ver figura 5.3(i)), então

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ}$$

Seja $P(a, f(a))$ um ponto do gráfico de uma função f. Considere-se outro ponto do gráfico $Q(a+h, f(a+h))$ em que h representa a diferença de abcissas entre P e Q (ver figura 5.4(i)). Pela definição 5.1 o declive m_{PQ} da secante que passa por P e Q é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Como o declive m da recta tangente l é a posição limite de m_{PQ} quando Q tende para P (ver figura 5.4(ii)), se f for contínua, podemos fazer Q tender para P fazendo h tender para zero.

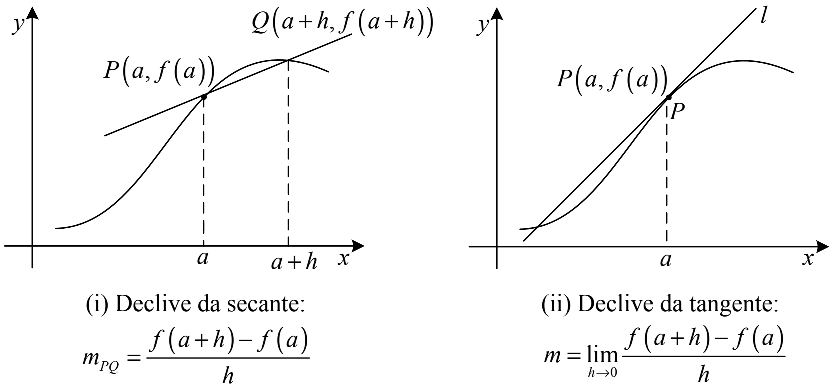


Figura 5.4:

Definição 5.2 *Se uma função f é definida num intervalo aberto que contém a, então o declive m da recta tangente ao gráfico de f no ponto $P(a, f(a))$ é dado por*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

desde que o limite exista.

5.1 Definição de derivada

Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real representada pela curava C (ver figura 5.5). Ao valor x_0 da abcissa corresponde o valor $y_0 = f(x_0)$ da ordenada: ponto $P_0(x_0, y_0)$. Damos a x um acréscimo h a partir de x_0. Ao novo valor $x = x_0 + h$ corresponde $y = f(x)$: ponto $P_1(x, y)$.

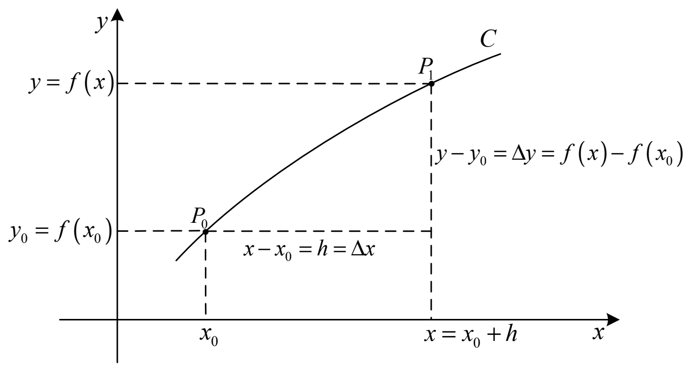


Figura 5.5:

Considere-se o quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nas suas várias formas:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Este quociente representa, no fundo, a variação da função entre P_0 e P_1.

Definição 5.3 *Chama-se taxa de variação média de uma função entre os pontos x_0 e x ao quociente*

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Considere-se o limite deste quociente quando h tende para zero. Quando $h\to 0$, e como h é o acréscimo a partir de x_0 para se chegar a x, x vai-se aproximando cada vez mais de x_0 e, então, $x\to x_0$. Chama-se **derivada** de y no ponto x_0 (ou derivada de f no ponto x_0 ao limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Definição 5.4 ***Derivada num ponto****.*
Se uma função está definida em $]a,b[$ que contenha x_0, a derivada de f em x_0, representada por $f'(x_0)$, é dada por

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Definição 5.5 *A função diz-se* ***diferenciável*** *(ou* ***derivável****) em x_0 se o limite da definição 5.4* ***existir*** *e for* ***finito****.*

Definição 5.6 *Uma função diz-se diferenciável em um intervalo aberto $]a,b[$ se o é para todo o $x\in\,]a,b[$*

Definição 5.7 *Uma função f diz-se diferenciável se o for em* ***todo*** *o seu domínio.*

Exemplo 5.1 *Calcular a partir da definição, a derivada da função $f(x)=x^2$.*
Para calcular a partir da definição temos que calcular num ponto do domínio. Vamos considerar o ponto $x_0\in D_f$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0\,. \end{aligned}$$

Temos, então que, $f'(x_0)$ existe e é finita, logo $f'(x)=2x\,,\ \forall x\in D_f$.

Exemplo 5.2 *Calcular a derivada de* $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ *a partir da definição. Considere-se* $x_0 \in D_f$*:*

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(x_0 + h)^2 - 5(x_0 + h) + 4\right] - \left(3x_0^2 - 5x_0 + 4\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(3x_0^2 + 6x_0 h + 3h^2 - 5x_0 - 5h + 4\right) - \left(3x_0^2 - 5x_0 + 4\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6x_0 h + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (6x_0 + 3h - 5) \\ &= 6x_0 - 5 \end{aligned}$$

Como $f'(x_0)$ *existe e é finita, temos que* $f'(x) = 6x - 5 \ \forall x \in D_f$*.*

Exemplo 5.3 *Considere a função* $f(x) = 3x - 2$*. Calcule a derivada de* f *no ponto* $x = 2$*.*

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{(3x - 2) - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{3x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x - 2)}{x - 2} = 3\,. \end{aligned}$$

$$f'(2) = 3 \ \Rightarrow \ f'(x) = 3 \ \forall x \in D_f\,.$$

5.2 Interpretação geométrica da derivada

Considere-se uma curva C de equação $y = f(x)$ e uma secante definida por dois pontos, $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ (ver figura 5.6) Se P_0 permanecer fixo e P_1 de deslocar sobre

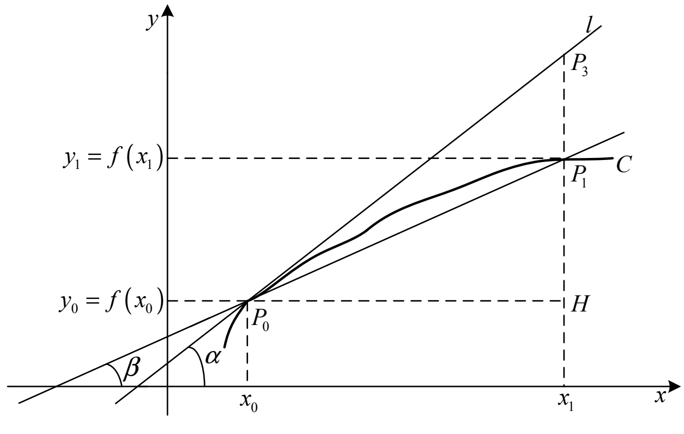


Figura 5.6:

a curva tendendo para P_0, a posição limite da recta $\overline{P_0 P_1}$ é a tangente l à curva C no ponto P_0.

O declive da recta $\overline{P_0P_1}$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\overline{HP_1}}{\overline{P_0H}}.$$

Se $\Delta x \to 0,\ P_1 \to P_0$ e a recta tende para a tangente l cujo declive é dado por

$$\frac{\overline{HP_2}}{\overline{P_0H}}.$$

Tem-se assim que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\overline{HP_2}}{\overline{P_0H}}.$$

Conclui-se então que a derivada da função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ é igual ao declive da tangente à curva C no ponto $P_0(x_0, y_0)$.

Considere-se β como o ângulo que a secante $\overline{P_0P_1}$ faz com o eixo dos xx. Temos então que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta.$$

Se $\Delta x \to 0$ o ângulo β tende para um limite α, a recta l e que forma um ângulo α com o eixo dos xx é a tangente procurada. O declive desta recta m é dado por

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ou seja,

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha. \tag{5.1}$$

A equação (5.1) demonstra que o valor da derivada $f'(x)$ para o valor dado da variável x é igual à tangente do ângulo formado pelo eixo dos xx e a tangente à curva representativa da função $y = f(x)$ no ponto correspondente $P_0(x_0, y_0)$.

Nota 5.1 *Se $f'(x_0) = 0$, então a recta tangente à função no ponto $x = x_0$ é uma recta horizontal (paralela ao eixo dos xx).*

5.2.1 Derivadas laterais

Vimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R}$, se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x^-\to a} f(x) = L$. Como a derivada de uma função num ponto $x = a$ é um limite, então

$$\begin{aligned} f'\left(x_0^+\right) &= \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{derivada lateral de } f \text{ à direita de } x = x_0. \\ f'\left(x_0^-\right) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{derivada lateral de } f \text{ à esquerda de } x = x_0. \end{aligned}$$

Definição 5.8 *Existe $f'(x_0)$ para uma função f num ponto $x = x_0$ se existem $f'\left(x_0^+\right)$*

e $f'\left(x_0^-\right)$ *e se se verificar que* $f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right) = f'(x_0)$.

Na figura 5.7 a tangente à esquerda, t_1, não coincide com a tangente à direita, t_2, isso quer dizer que não existe derivada no ponto $(x_0, f(x_0))$. Geometricamente falando, podemos concluir que existe derivada num ponto se e só se o gráfico da função é tal que não existam *bicos*, isto é, pedaços do gráfico em que as secantes de um lado e do outro se aproximem de diferentes tangentes. Uma função tem derivada num ponto se as tangentes nesse ponto estiverem no prolongamento uma da outra, ou seja, se formarem uma só recta.

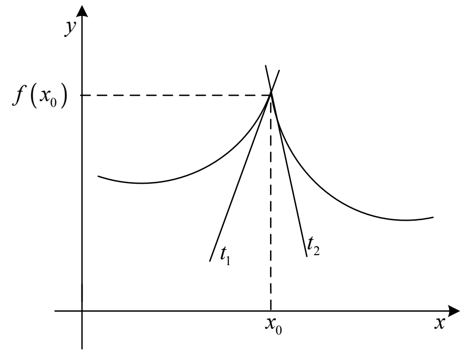


Figura 5.7: Derivadas laterais diferentes num ponto $x = x_0$.

Exemplo 5.4 *Seja a função* $f(x) = |x|$. *O domínio da função é* $\mathbb{R}$ *mas, não é diferenciável em* $x = 0$.

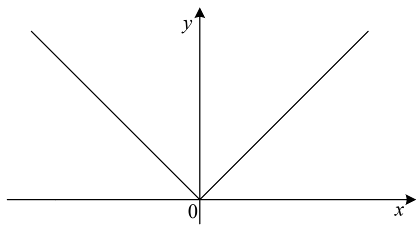


Figura 5.8: Gráfico da função $f(x) = |x|$.

$$\begin{aligned}
f'\left(0^+\right) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\
f'\left(0^-\right) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1
\end{aligned}$$

Logo, como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, *não existe* $f'(0)$ *e* f *não é diferenciável ja´que existe um ponto do seu domínio que não tem derivada.*

Teorema 5.1 *Seja* f *uma função e* f' *a sua derivada. Então* $D_{f'} \subseteq D_f$.

Teorema 5.2 *Se f é derivável em $x = x_0$, então f é contínua em $x = x_0$.*

Exemplo 5.5 *Verificar se existe $f'(1)$ para a função* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1\,, & x \leq 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$

Para ver se existe derivada em $x = 1$ é necessário verificar a continuidade de f em $x = 1$, ou seja, verificar se

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) :$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} 2x = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \left(x^2 + 1\right) = 2 \\ f(1) &= 2 \end{aligned}$$

Verifica-se que de facto é contínua em $x = 1$, ou seja, esta igualdade verifica-se. Então, como é contínua, pode admitir derivada em $x = 1$:

$$\begin{aligned} f'\left(1^+\right) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2 \\ f'\left(1^-\right) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \\ &\Rightarrow f'(1) = 2\,. \end{aligned}$$

5.3 Notação para as derivadas

Notação de Newton Seja a função $y = f(x)$. Na notação de Newton utiliza-se para representar derivadas as formas f', $f'(x)$ ou ainda y'.

Notação de Leibniz Na notação de Leibniz $y = f(x)$ usa-se a notação $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ e por vezes $\frac{d}{dx} f(x)$. Se quisermos especificar o valor da derivada num certo ponto x_0 escrevemos $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$.

5.4 Regras de derivação

Derivada de uma potência Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$, então

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha - 1}\,.$$

Mais geralmente, para uma função f:

$$\frac{d}{dx} \left(f(x)\right)^{\alpha} = \alpha \left(f(x)\right)^{\alpha - 1} f'(x)\,.$$

Exemplo 5.6 $f(x) = \left(x^2 - 6x + 2\right)^5$.

$$f'(x) = 5\,\left(x^2 - 6x + 2\right)^4 \left(x^2 - 6x + 2\right)' = 5\,\left(x^2 - 6x + 2\right)^4 (2x - 6)$$

Polinómios No caso de rectas, ou seja, polinómios do 1º grau, o valor da derivada é sempre igual ao valor do declive da recta:

$$f(x) = mx + b \Rightarrow f'(x) = m\,, \quad \frac{d}{dx}(mx + b) = m$$

ou

$$y = mx + b \Rightarrow y' = m\,.$$

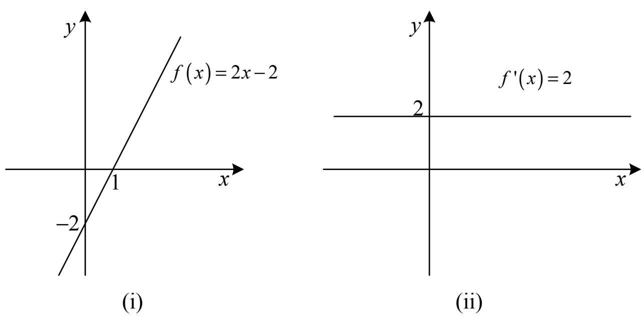


Figura 5.9: Representação gráfica de f (em (i)) e de f' (em (ii)).

Se f é uma função constante igual a k, então $f' = 0$, ou seja, a derivada de uma constante é nula: $\dfrac{d}{dx}(k) = 0$.

Sejam f e g duas funções reais de variável real:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f \pm g)(x) &= \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} = f' \pm g' \\
\frac{d}{dx}(fg)(x) &= \frac{df}{dx}\,g + f\,\frac{dg}{dx} = f'\,g + f\,g' \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\frac{df}{dx}\,g - f\,\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \wedge \quad g \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Caso particular, se k é uma constante: $\dfrac{d}{dx}(kf) = k\,\dfrac{df}{dx}$.

Para um qualquer polinómio de grau n, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} \cdots + a_1\,.$$

Derivada da exponencial Seja a uma constante tal que $a \in \mathbb{R}$. A função exponencial define-se por $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a^x \ln a$$

De uma forma mais geral, sendo $u = u(x)$

$$f(x) = a^u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'a^u \ln a$$

Caso particular: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ (já que $\ln e = 1$), ou seja, para $u = u(x)$ temos

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u \,.$$

Derivada da função logarítmica Seja f uma função definida por $f(x) = \log_a x$. A sua derivada é

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Mais geralmente para $u = u(x)$:

$$f(x) = \log_a u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{u \ln a}$$

Exemplo 5.7 *Seja* $f(x) = \log_2 \left(x^2 - 2\right)$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 2) \ln 2}$$

Como caso particular temos:

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \,,$$

ou seja, para $u = u(x)$

$$f(x) = \ln u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{u}$$

5.4.1 Regra da cadeia (derivada da função composta)

Considere-se a função u. Se a função u é derivável em x e se $g(u)$ é derivável em $u(x)$ então a **função composta** $f(x) = g(u(x))$ é derivável em x e temos

$$f'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) \;.$$

Em notação de Leibniz teremos

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx}$$

Exemplo 5.8 *Seja* $g(u) = 2u^2 + 3$ *e* $u(x) = x^2 + 3$. *Considere a função composta* $f(g(u))$. *Calcule a sua derivada em ordem a* x.

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx} = \left(2u^2+3\right)'_u \left(x^2+3\right)'_x = 4u \cdot 2x = 8ux$$

Como $u = x^2 + 3$

$$\frac{df}{dx} = 8\left(x^2+3\right)x = 8x^3 + 24x\,.$$

5.4.2 Derivadas das funções trigonométricas

Seja $u = u(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' \cos(u) \\
f(x) &= \cos(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -u' \operatorname{sen}(u) \\
f(x) &= \operatorname{tg}(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' \sec^2(u) \\
f(x) &= \operatorname{cotg}(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -u' \operatorname{cosec}(u)
\end{aligned}$$

Para as funções trigonométricas inversas temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{arcsen}(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
f(x) &= \arccos(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
f(x) &= \operatorname{arctg}(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} \\
f(x) &= \operatorname{arccotg}(u) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}
\end{aligned}$$

5.4.3 Derivadas de funções irracionais

Seja $u = u(x)$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{(u^{n-1})}}$$

Exemplo 5.9 *Calcular a derivada da função* $f(x) = \sqrt[3]{2x}$.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\,.$$

As derivadas das funções racionais também podem ser calculadas através da fórmula da derivada da potência. De facto

$$f(x) = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$$

e, então

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(u^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\, u^{\frac{1}{n}-1}\, u'$$

Exemplo 5.10 $f(x) = \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}}$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}}\, 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\,.$$

5.4.4 Derivada de uma função elevada a uma outra função

Sejam u e v funções de x. O problema que se coloca aqui é o de calcular a derivada da função f sendo $f(x) = u^v$.

Como $a = e^{\ln a}$, podemos afirmar que $f(x) = u^v = e^{\ln u^v}$. Como $(e^u)' = u'e^u$ vamos ter

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u^v)' = \left(e^{\ln u^v}\right)' = (\ln u^v)'\, e^{\ln u^v} = (\ln u^v)'\, u^v = (v\ln u)'\, u^v \\ &= \left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) u^v = u^v v'\ln u + v\, u^{v-1}u' \end{aligned}$$

Exemplo 5.11 *Calcular a derivada da função* $f(x) = (3x+1)^{2x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\ln(3x+1)^{2x}}\right)' = \left(\ln(3x+1)^{2x}\right)' e^{\ln(3x+1)^{2x}} \\ &= (2x\ln(3x+1))'\,(3x+1)^{2x} \\ &= \left(2\ln(3x+1) + 2x\,\frac{3}{3x+1}\right)(3x+1)^{2x} \\ &= \left(2\ln(3x+1) + \frac{6x}{3x+1}\right)(3x+1)^{2x} \\ &= 2(3x+1)^{2x}\ln(3x+1) + 6x\,(3x+1)^{2x-1} \end{aligned}$$

5.5 Determinação de rectas tangentes

O que se pretende é calcular uma recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $x = x_0$, ou seja num ponto (x_0, y_0). Esta recta tangente, e como qualquer recta, tem a forma $y = mx + b$, sendo o declive m desta recta igual ao valor da derivada de f no ponto x_0:

$$m = f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Exemplo 5.12 *Calcule a recta tangente ao gráfico da função* $f(x) = 3x^2 + 1$ *no ponto* $x = 1$.

$$f'(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = 6$$

Como $y = mx + b \Leftrightarrow b = y - mx$*:*

$$\begin{aligned} y &= f(1) = 3 \times 1 + 1 = 4 \\ b &= 4 - 6 \times 1 \Leftrightarrow b = -2 \end{aligned}$$

A equação procurada é $y = 6x - 2$ *.*

5.6 Derivadas de ordem superior

Considere-se a função $f(x)$. Esta função tem como **1ª derivada** ou derivada de **1ª ordem**

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

A **segunda derivada** ou derivada de**2ª ordem** será

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Obtemos a derivada de ordem n, derivando a derivada de ordem $n-1$:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n)} f}{dx^{(n)}}\right),$$

ou seja,

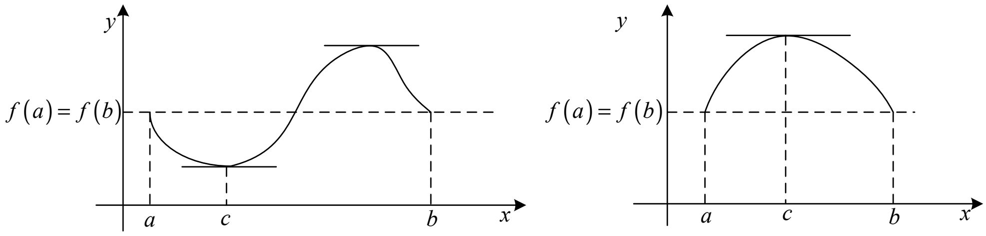
$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' \Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' \Leftrightarrow \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)$$

5.7 Teoremas fundamentais sobre derivação

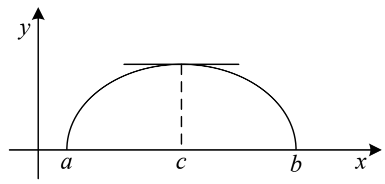
5.7.1 Teorema de Rolle

Teorema 5.3 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função continua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e derivável em* $]a, b[$*. Se* $f(a) = f(b)$ *então existe pelo menos um* $c \in\ ]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*



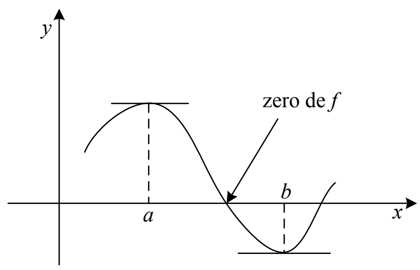
Isto significa que entre dois pontos de uma função contínua e diferenciável com a mesma imagem existe pelo menos um ponte onde a recta tangente é horizontal, ou seja, a derivada é nula.

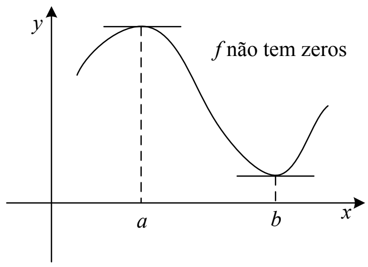
Corolário 5.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função continua no intervalo fechado* $[a, b]$ *e com derivada em* $]a, b[$. *Se* $a = 0$ *e* $b = 0$, *então existe pelo menos um* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.



Entre dois zeros de uma função contínua e diferenciável há pelo menos um zero da derivada.

Corolário 5.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $[a, b] \subset I$. *Se* a *e* b *são dois zeros de* f', *então* f *tem no máximo um zero entre* $[a, b]$.





5.7.2 Teorema de Lagrange (valor médio)

Teorema 5.4 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e diferenviável em* $[a, b]$. *Então existe um* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Existe um ponto do gráfico cujo declive da recta tangente é igual ao declive da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (ver figura 5.10).

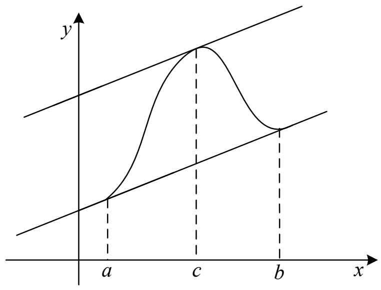


Figura 5.10:

Bibliografia

[1] Eduardo Rêgo; **Apontamentos de Análise Matemática I**, Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia e de Gestão, Instituto Politécnico de Bragança, 1996.

[2] Ilda Marisa Reis, Vítor Luís Sousa; **Análise Matemática I**, Departamento de Matemática, Escola Superior de Tecnologia e de Gestão, Instituto Politécnico de Bragança, 2003.

[3] Jaime Carvalho e Silva;**Princípios de Análise Matemática Aplicada**, McGraw-Hill.

[4] Jaime Carvalho e Silva, Carlos M. Franco; **Análise Matemática Aplicada**,McGraw-Hill.

[5] Earl W. Swokowski; **Cálculo com Geometria Analítica**, vol.1, McGraw-Hill.

[6] N. Piskounov; **Cálculo Diferencial e Integral**, vol1, Lopes e Silva Editora.

[7] Howard Anton; **Calculus**, John Wiley & Sons.

[8] Serge Lang; **A First Course in Calculus**, Springer-Verlag, New York.