3.1

Saco A - #9	Saco B - #9
2 Vermelhas	3 Vermelhas
1 Azul	3 Azuis
6 Pretas	3 Pretas

Y → Número de bolas Vermelhas selecionadas

a) Há duas sequências possíveis para a escolha dos sacos:

A-B
B-A

Em cada sequência há 4 resultados possíveis:

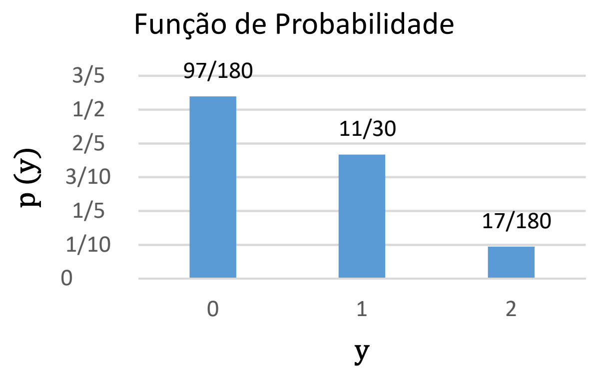
Vermelha + Vermelha
Vermelha + Outra
Outra + Vermelha
Outra + Outra

Para a sequência de sacos A-B:	x ½	Y	p(y)
P(VV) = 2/9 x 4/10 = 8/90	→	2	8/180
P(VO) = 2/9 x 6/10 = 12/90	→	1	12/180
P(OV) = 7/9 x 3/10 = 21/90	→	1	21/180
P(OO) = 7/9 x 7/10 = 49/90	→	0	49/180

Para a sequência de sacos B-A:	x ½	Y	p(y)
P(VV) = 3/9 x 3/10 = 9/90	→	2	9/180
P(VO) = 3/9 x 7/10 = 21/90	→	1	21/180
P(OV) = 6/9 x 2/10 = 12/90	→	1	12/180
P(OO) = 6/9 x 8/10 = 48/90	→	0	48/180

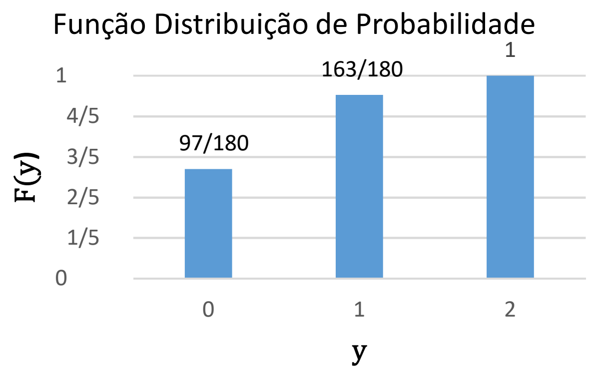
A **função de probabilidade** será:

Y	$p(y)$
0	$^{97}/_{180}$
1	$^{66}/_{180}$
2	$^{17}/_{180}$
$\Sigma =$	1



b) A **Função distribuição de probabilidade será**:

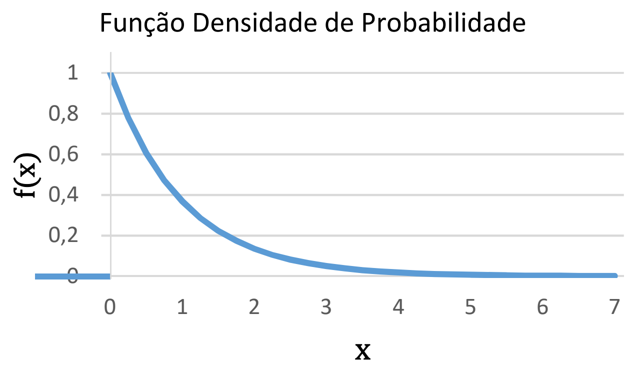
Y	$p(y)$	$F(y)$
0	$^{97}/_{180}$	$^{97}/_{180}$
1	$^{66}/_{180}$	$^{163}/_{180}$
2	$^{17}/_{180}$	**1**



c) $\boldsymbol{P(Y \geq 1)} = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{97}{180} = \boldsymbol{\frac{83}{180}}$

d) $\boldsymbol{P(Y \geq 1 \,|Y \neq 2)} = P(Y \geq 1 \mid Y \leq 1) = \frac{P(Y \geq 1 \cap Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{P(Y=1)}{F(1)} = \frac{66/180}{163/180} = \boldsymbol{\frac{66}{163}}$

3.2 $f(x) = e^{-x}$



a) O tempo entre chegadas tem que ser positivo, logo

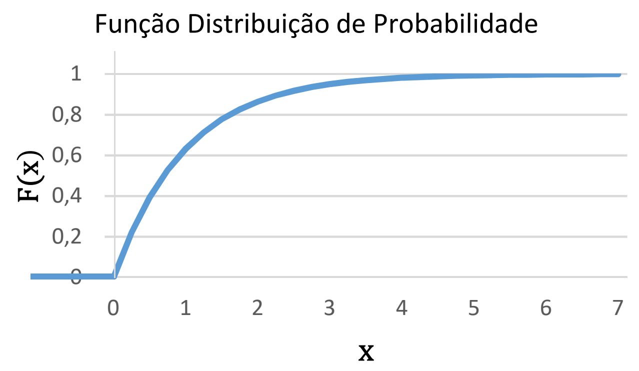
se $x < 0$, $\boldsymbol{f(x) = 0}$

se $x \geq 0$, $\boldsymbol{f(x) = e^{-x}}$

b) Se $x < 0$, $\boldsymbol{F(x) = 0}$;

se $x \geq 0$, $\boldsymbol{F(x)} = \int_0^x f(u)du = \int_0^x e^{-u}du = -\int_0^x -e^{-u}du =$

$$= -\left[e^{-u}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 = \boldsymbol{1 - e^{-x}}$$



c) 45 s = 0,75 min

$\boldsymbol{P(X > 0,75)} = 1 - P(X \leq 0{,}75) = 1 - F(0{,}75) =$

$$= 1 - (1 - e^{-0{,}75}) = e^{-0{,}75} = \boldsymbol{0,4724}$$

d) $\boldsymbol{P(X > 1,5 \mid X > 0,75)} = \frac{P(X>1{,}5 \cap X>0{,}75)}{P(X>0{,}75)} = \frac{P(X>1{,}5)}{P(X>0{,}75)} = \frac{e^{-1{,}5}}{e^{-0{,}75}} = e^{(-1{,}5-(-0{,}75))} = e^{-0{,}75} = \boldsymbol{0,4724}$ (Resultado igual ao anterior...!)

3.3

5 Azuis
4 Vermelhos

Estante A - #9

2 Azuis
5 Vermelhos

Estante B - #7

Y → Número de livros Vermelhos selecionadas

a) A experiência tem 2^3 resultados possíveis:

A-A-A	A-A-V	A-V-A	V-A-A	A-V-V	V-A-V	V-V-A	V-V-V

Com as seguintes probabilidades:

		Y	p(y)
P(AAA) = 5/9 x 4/8 x 4/9 = 80/648	→	0	80/648
P(AAV) = 5/9 x 4/8 x 5/9 = 100/648	→	1	100/648
P(AVA) = 5/9 x 4/8 x 3/9 = 60/648	→	1	60/648
P(VAA) = 4/9 x 5/8 x 3/9 = 60/648	→	1	60/648
P(AVV) = 5/9 x 4/8 x 6/9 = 120/648	→	2	120/648
P(VAV) = 4/9 x 5/8 x 6/9 = 120/648	→	2	120/648
P(VVA) = 4/9 x 3/8 x 2/9 = 24/648	→	2	24/648
P(VVV) = 4/9 x 3/8 x 7/9 = 84/648	→	3	84/648

E a função de probabilidade:

Y	$p(y)$
0	**80/648**
1	**220/648**
2	**264/648**
3	**84/648**
$\Sigma =$	1

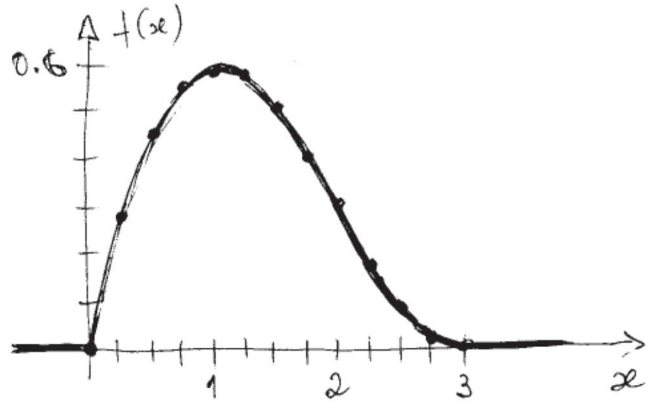
b) O número médio de livros vermelhos será; $\boldsymbol{\mu_Y} = \sum_y y\, p(y) = (0)\frac{80}{648} + (1)\frac{220}{648} + (2)\frac{264}{648} + (3)\frac{84}{648} = \frac{1000}{648} = \mathbf{1,5432}$

3.4 $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} {}^{4}\!/_{27}\,(\mathbf{9x - 6x^2 + x^3})\,; & para\ 0 \leq x \leq 3 \\ \mathbf{0}\,; & para\ outros\ valores\ de\ x \end{cases}$

a) Para os valores de x propostos entre 0 e 3 temos: →

x	$f(x)$
0	0
0,25	0,28
0,50	0,46
0,75	0,56
1	0,59
1,25	0,57
1,50	0,50
1,75	0,41
2	0,30
2,25	0,19
2,50	0,09
2,75	0,03
3	0

E desenhando os gráficos respetivos;



b) Para $x < 0$, $\boldsymbol{F(x) = 0}$; Para $x > 3$, $\boldsymbol{F(x) = 1}$

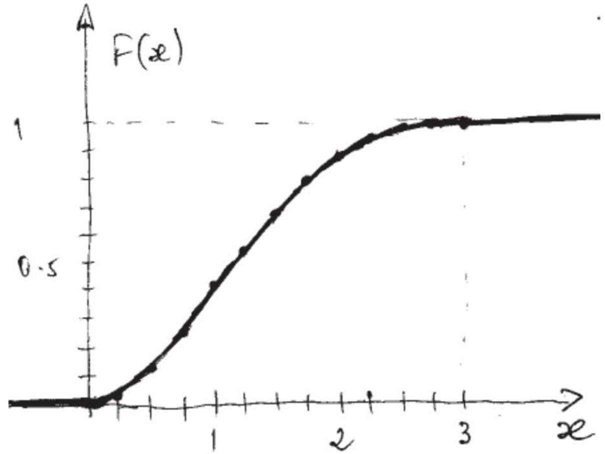
Para $0 \leq x \leq 3$, $\boldsymbol{F(x)} = \int_0^x f(u)du =$

$$= \int_0^x \frac{4}{27}(9u - 6u^2 + u^3)du =$$

$$= \frac{4}{27}\left[\frac{9}{2}u^2 - \frac{6}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4\right]_0^x = \frac{4}{27}\left(\frac{9}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) =$$

$$= \mathbf{\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{1}{27}x^4}$$

x	$F(x)$
0	0
0,25	0,04
0,50	0,13
0,75	0,26
1	0,41
1,25	0,55
1,50	0,69
1,75	0,80
2	0,89
2,25	0,95
2,50	0,98
2,75	0,998
3	1



c) $\boldsymbol{P(X \leq 1,5)} = F(1{,}5) = \mathbf{0,6875}$

$\boldsymbol{P(X \geq 2)} = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1 - 0,[8] = \mathbf{0,[1]}$

$\boldsymbol{P(1 \leq X \leq 2,5)} = P(X \leq 2{,}5) - P(X < 1) = F(2{,}5) - F(1) = 0{,}9838 - 0{,}4074 = \mathbf{0,5764}$

3.5 $\boldsymbol{P(Y=y)=ky\,;\,y\in\{1,2,3,4,5\}}$

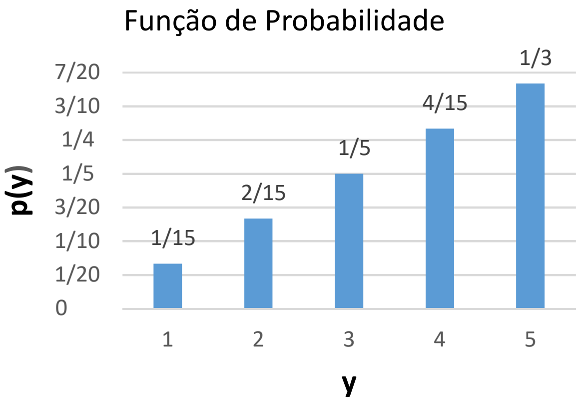
a) Uma função de probabilidade válida obriga a que; $\begin{cases} p(y)\geq 0\,, & \forall y \\ \sum_y p(y)=1 \end{cases}$

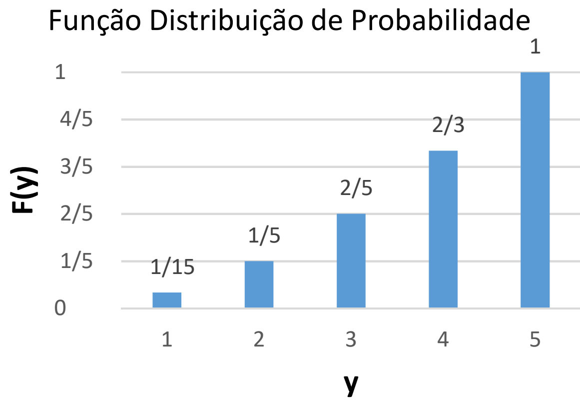
Então, $\sum_y p(y)=1 \Leftrightarrow k+2k+3k+4k+5k=1 \Leftrightarrow 15k=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k={}^{1}\!/_{15}}$

Com ambas as condições respeitadas.

b)

y	$p(y)$	$F(y)$
1	${}^{1}\!/_{15}$	${}^{1}\!/_{15}$
2	${}^{2}\!/_{15}$	${}^{3}\!/_{15}$
3	${}^{3}\!/_{15}$	${}^{6}\!/_{15}$
4	${}^{4}\!/_{15}$	${}^{10}\!/_{15}$
5	${}^{5}\!/_{15}$	1
$\Sigma=$	1	





c) Moda; $\boldsymbol{\xi_Y=5}$; Mediana; $\boldsymbol{\eta_Y=4}$

Média; $\boldsymbol{\mu_Y}=\sum_y y\,p(y)=(1)\frac{1}{15}+(2)\frac{2}{15}+(3)\frac{3}{15}+(4)\frac{4}{15}+(5)\frac{5}{15}=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}=\boldsymbol{3,[6]}$

Variância; $\boldsymbol{\sigma_Y^2}=\sum_y y^2\,p(y)-\mu_Y^2=(1)^2\frac{1}{15}+(2)^2\frac{2}{15}+(3)^2\frac{3}{15}+(4)^2\frac{4}{15}+(5)^2\frac{5}{15}-\left(\frac{11}{3}\right)^2=\frac{225}{15}-\frac{121}{9}=\boldsymbol{1,[5]}$

d) $\boldsymbol{P(Y=4)}=p(4)=\boldsymbol{{}^{4}\!/_{15}}$

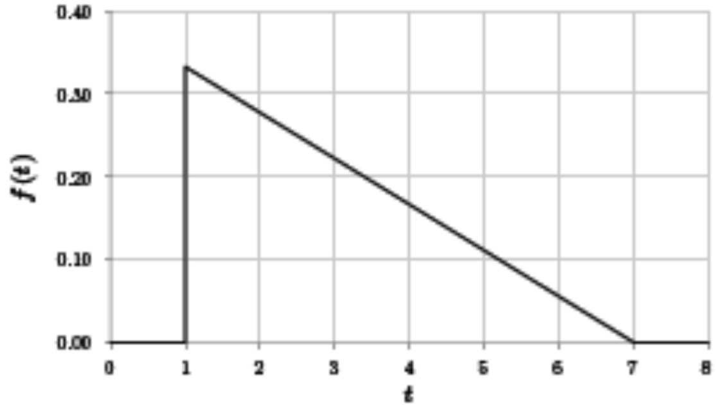
$\boldsymbol{P(Y\geq 2)}=1-P(Y\leq 1)=1-F(1)=1-{}^{1}\!/_{15}=\boldsymbol{{}^{14}\!/_{15}}$

3.6 $\boldsymbol{f(t) = a + bt}\,;\ 1 \leq t \leq 7$ e $\boldsymbol{f(7) = 0}$

a) Se $f(t)$ for ma função de probabilidade válida então; $\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \\ f(t) \geq 0\,,\ \ \forall t \end{cases}$

$$\int_1^7 f(t)dt = \int_1^7 (a+bt)dt = \left[at + \frac{b}{2}t^2\right]_1^7 = 7a + \frac{49}{2}b - a - \frac{1}{2}b = 6a + \frac{48}{2}b = 6a + 24b$$

então; $\begin{cases} 6a + 24b = 1 \\ a + 7b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 24b = 1 \\ a = -7b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18b = 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b = -{}^{1}/_{18}} \\ \boldsymbol{a = {}^{7}/_{18}} \end{cases}$

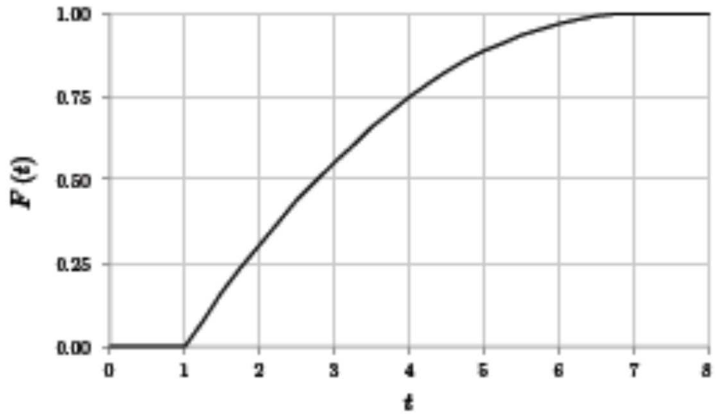


Logo a função densidade de probabilidade será:

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\,,\ \ t < 1 \\ \boldsymbol{\frac{7}{18} - \frac{1}{18}t}\,, 1 \leq t \leq 7 \\ \boldsymbol{0}\,,\ \ t > 7 \end{cases}$$

b) Para $1 \leq x \leq 7$, $\boldsymbol{F(t)} = \int_1^t f(u)du = \int_1^t \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{18}u\right) du = \frac{1}{18}\int_1^t (7-u)du =$

$$= \frac{1}{18}\left[7u - \frac{1}{2}u^2\right]_1^t = \frac{1}{18}\left(7t - \frac{1}{2}t^2 - 7 + \frac{1}{2}\right)$$



Logo a função distribuição de probabilidade será:

$$\boldsymbol{F(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\,,\ \ t < 1 \\ \boldsymbol{\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 7t - \frac{13}{2}\right)}, 1 \leq t \leq 7 \\ \boldsymbol{1}\,,\ \ t > 7 \end{cases}$$

c) Moda; $\boldsymbol{\xi_T} = 1$

Mediana; $\mathrm{F}(\eta)$=0,5 $\Leftrightarrow \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\eta^2 + 7\eta - \frac{13}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\eta = 11{,}2426} \\ \eta = 2{,}7574 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\eta_T = 2{,}7574}$

Média; $\boldsymbol{\mu_T}$

$$\boldsymbol{\mu_T} = \int_1^7 t\, f(t)dt = \frac{1}{18}\int_1^7 (7t - t^2)dt = \frac{1}{18}\left[\frac{7}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_1^7 = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{343}{2} - \frac{343}{3} - \frac{7}{2} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{324}{6}\right) = \mathbf{3}$$

Variância; $\boldsymbol{\sigma_T^2} = \int_1^7 t^2\, f(t)dt - \mu_T^2$

$$\int_1^7 t^2\, f(t)dt = \frac{1}{18}\int_1^7 (7t^2 - t^3)dt = \frac{1}{18}\left[\frac{7}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_1^7 = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{2401}{3} - \frac{2401}{4} - \frac{7}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{2376}{12}\right) = 11$$

$$\boldsymbol{\sigma_T^2} = 11 - 3^2 = \mathbf{2}$$

d) $\boldsymbol{P(T \geq 2)} = 1 - P(\mathrm{T} < 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}(4) + 14 - \frac{13}{2}\right) = \mathbf{0{,}69[4]}$

$\boldsymbol{P(T = 5) = 0}$

3.7 Compra; C = 2 500 U.M. ; Venda; V = 2 750 U.M. ; Revenda; R = 2 200 U.M.

a) Y → **Número de automóveis vendidos mensalmente**, sendo $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$

Lucro (L) = Receitas – Despesas = Vendas (V) + Revenda (R) – Compra (C)

$$\mathbf{L = 2\,750Y + R(4 - Y) - 10\,000}$$

y	p(y)	l	
0	0,10	-1200	← (2750x0+2200x4-10000)
1	0,15	-650	← (2750x1+2200x3-10000)
2	0,40	-100	← (2750x2+2200x2-10000)
3	0,25	450	← (2750x3+2200x1-10000)
4	0,10	1000	← (2750x4+2200x0-10000)

É necessário verificar se a média do Lucro (variável L) é positiva.

$$\boldsymbol{\mu_L} = \sum_l l\,p(l) = \sum_l l\,p(y) = 0{,}10(-1200) + 0{,}15(-650) + 0{,}40(-100) + 0{,}25(450) + 0{,}10(1000) = \mathbf{-45\ U.M.}$$

Logo a atividade não é rentável.

b) O lucro (l) em função do preço de Revenda virá;

y	p(y)	l	l x p(y)
0	0,10	4R-10000	0,4R-1000
1	0,15	3R-7250	0,45R-1087,5
2	0,40	2R-4500	0,8R-1800
3	0,25	R-1750	0,25R-437,5
4	0,10	1000	100
Σ =	1		1,9R - 4225

O preço de revenda R a praticar pelo stand viria: $\mu_L = 1{,}9\boldsymbol{R} - 4225 = 100 \Leftrightarrow 1{,}9\boldsymbol{R} = 4325 \Leftrightarrow \boldsymbol{R} = \mathbf{2276{,}3}$

3.8 $y \in \{0,1,2,3,x\}$; $\mu_Y = 6$

a) $\mu_Y = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(2) + \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}x = 6 \Leftrightarrow \frac{6}{5} + \frac{1}{5}x = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{24}{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 24}$

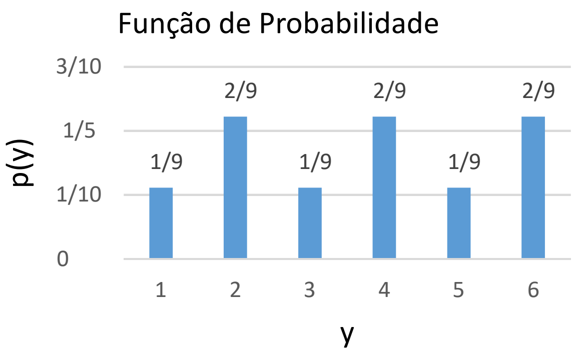
b) $\boldsymbol{\sigma_y^2} = \sum_y y^2\, p(y) - \mu_y^2 = \frac{1}{5}(0)^2 + \frac{1}{5}(1)^2 + \frac{1}{5}(2)^2 + \frac{1}{5}(3)^2 + \frac{1}{5}(24)^2 - 6^2 = \frac{590}{5} - 36 = 118 - 36 = \boldsymbol{82}$

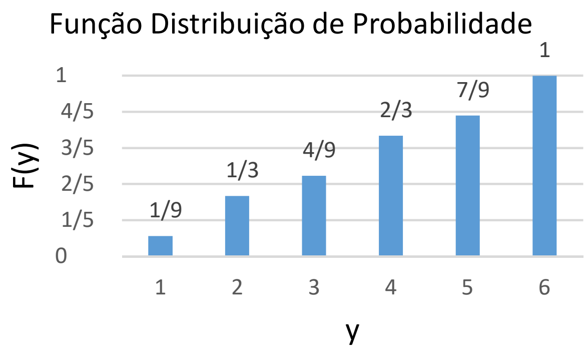
3.9 Y → **Pontos obtidos no dado**, e sabendo ainda que $\boldsymbol{P(par) = 2P(ímpar)}$

a) Fazendo; $p(1) = p(3) = p(5) = k$ e $p(2) = p(4) = p(6) = 2k$ e ainda como $\sum_y p(y) = 1$ então $3k + 6k = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = {}^{1}/_{9}}$

Logo as funções de probabilidade e distribuição de probabilidade serão;

y	$p(y)$	$F(y)$
1	$^1/_9$	$^1/_9$
2	$^2/_9$	$^3/_9$
3	$^1/_9$	$^4/_9$
4	$^2/_9$	$^6/_9$
5	$^1/_9$	$^7/_9$
6	$^2/_9$	1
$\Sigma =$	1	





b) $\mu_Y = \sum_y y\, p(y) = (1+3+5)\frac{1}{9} + (2+4+6)\frac{2}{9} = \boldsymbol{\frac{11}{3}}$

$\sigma_y^2 = \sum_y y^2\, p(y) - \mu_y^2 = (1+9+25)\frac{1}{9} + (4+16+36)\frac{2}{9} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{26}{9} = 2,[8] \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma_y} = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{26}{9}} = \boldsymbol{1,6997}$

c) L → Lucro obtido com o lançamento do dado, $L = Y - 3{,}5$. É necessário verificar se o valor esperado do ganho (variável L) é positivo.

$\mu_L = (-2{,}5 - 0{,}5 + 1{,}5)\frac{1}{9} + (-1{,}5 + 0{,}5 + 2{,}5)\frac{2}{9} = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{3}{18} = \boldsymbol{\frac{1}{6} > 0} \quad \rightarrow \quad$ **Logo o jogo é vantajoso.**

3.10

a) Como é uma função de probabilidade válida:

$f(x) \geq 0\,,\ \ \forall x$ e sendo ainda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ou seja, a área do triângulo abaixo da função $A_{\Delta} = 1$, obtém-se assim k:

$$\frac{(6-0)k}{2} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Para $x < 0 \quad e \quad x > 6\,,\ \boldsymbol{f(x) = 0}$

Para $0 \leq x \leq 3\,,$ trata-se de uma função do tipo $f(x) = bx$ com $\mathrm{b} = \frac{\frac{1}{3}-0}{3-0} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$

Para $3 \leq x \leq 6\,,$ como a função é simétrica fica $f(x) = a - \frac{1}{9}x$ a passar no ponto (6,0). Logo, $0 = a - \frac{1}{9}(6) \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

Resumindo;

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & x < 0 \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{x}, & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{x}, & 3 < x \leq 6 \\ \mathbf{0}, & x > 6 \end{cases}$$

b) Como a função é simétrica, $\boldsymbol{\mu_X = \eta_X = \xi_X = 3}$

c)

$$\boldsymbol{P(X < 2)} = \int_0^2 \frac{1}{9}x dx = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{9}(2) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$