4.1

y	$p(y)$	$yp(y)$	$y^2p(y)$	$y^3p(y)$	$y^4p(y)$
1	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15
2	2/15	4/15	8/15	16/15	32/15
3	3/15	9/15	27/15	81/15	243/15
4	4/15	16/15	64/15	256/15	1024/15
5	5/15	25/15	125/15	625/15	3125/15

Momentos na origem:

Ordem 1 : $\mu'_1 = \sum_y yp(y) = \mathbf{{}^{55}/_{15}}$ (Média)

Ordem 2 : $\mu'_2 = \sum_y y^2p(y) = {}^{225}/_{15} = \mathbf{15}$

Ordem 3 : $\mu'_3 = \sum_y y^3p(y) = \mathbf{{}^{979}/_{15}}$

Ordem 4 : $\mu'_4 = \sum_y y^4p(y) = {}^{4425}/_{15} = \mathbf{295}$

Momentos centrados:

Ordem 1 : $\mu_1 = \mathbf{0}$ (Para qualquer distribuição)

Ordem 2 : $\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = {}^{225}/_{15} - \left({}^{55}/_{15}\right)^2 = \mathbf{1,[5]}$ (Variância - σ^2)

Ordem 3 : $\mu_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_2\,\mu'_1 + 2(\mu'_1)^3 = {}^{979}/_{15} - (3)(15)\,{}^{55}/_{15} + 2\left({}^{55}/_{15}\right)^3 = \mathbf{-1,1[407]}$

Ordem 4 : $\mu_4 = \mu'_4 - 4\,\mu'_3\,\mu'_1 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - 3(\mu'_1)^4 = 295 - (4)\,{}^{979}/_{15}\,.\,{}^{55}/_{15} + (6)(15)\left({}^{55}/_{15}\right)^2 - (3)\left({}^{55}/_{15}\right)^4 = \mathbf{5,4963}$

Coeficiente de assimetria: $\boldsymbol{\tau} = {}^{\mu_3}/_{\sigma^3} = {}^{-1,1407}\Big/_{(1,[5])^{3/2}} = \mathbf{-0,5880}$

Coeficiente de Kurtose: $\boldsymbol{\kappa} = {}^{\mu_4}/_{\sigma^4} - 3 = {}^{5,4963}/_{(1,[5])^2} - 3 = \mathbf{-0,7286}$

4.2 $f(t) = {}^{1}\!/_{18}\,(7-t)$

Momentos na origem:

$\mu_1' = \int_1^7 t f(t)dt = \mathbf{3}$ (Média calculada em 3.6).

$\mu_2' = \int_1^7 t^2 f(t)dt = {}^{1}\!/_{18}\int_1^7 (7t^2 - t^3)dt = {}^{1}\!/_{18}\left[{}^{7}\!/_{3}\,t^3 - {}^{1}\!/_{4}\,t^4\right]_1^7 = {}^{1}\!/_{18}\,({}^{7^4}\!/_{3} - {}^{7^4}\!/_{4} - {}^{7}\!/_{3} + {}^{1}\!/_{4} = \mathbf{11}$

$\mu_3' = \int_1^7 t^3 f(t)dt = {}^{1}\!/_{18}\int_1^7 (7t^3 - t^4)dt = {}^{1}\!/_{18}\left[{}^{7}\!/_{4}\,t^4 - {}^{1}\!/_{5}\,t^5\right]_1^7 = {}^{1}\!/_{18}\,({}^{7^5}\!/_{4} - {}^{7^5}\!/_{5} - {}^{7}\!/_{4} + {}^{1}\!/_{5} = \mathbf{46,6}$

$\mu_4' = \int_1^7 t^4 f(t)dt = {}^{1}\!/_{18}\int_1^7 (7t^4 - t^5)dt = {}^{1}\!/_{18}\left[{}^{7}\!/_{5}\,t^5 - {}^{1}\!/_{6}\,t^6\right]_1^7 = {}^{1}\!/_{18}\,({}^{7^6}\!/_{5} - {}^{7^6}\!/_{6} - {}^{7}\!/_{5} + {}^{1}\!/_{6} = \mathbf{217,8}$

Momentos centrados:

$\mu_1 = \mathbf{0}$ (Para qualquer distribuição)

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 11 - 3^2 = \mathbf{2}$ (Variância - σ^2)

$\mu_3 = \mu_3' - 3\,\mu_2'\,\mu_1' + 2(\mu_1')^3 = 46{,}6 - (3)(11)(3) + (2)(3)^3 = \mathbf{1,6}$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'\,\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4 = 217{,}8 - (4)(466)(3) + (6)(11)(3)^2 - (3)(3)^4 = \mathbf{9,6}$

Coeficiente de assimetria: $\boldsymbol{\tau} = {}^{\mu_3}\!/_{\sigma^3} = {}^{1,6}\!/_{2^{(3/2)}} = \mathbf{0,5657}$

Coeficiente de Kurtose: $\boldsymbol{\kappa} = {}^{\mu_4}\!/_{\sigma^4} - 3 = {}^{9,6}\!/_{2^2} - 3 = \mathbf{-0,6}$

4.3 $F \rightarrow Temperatura\ em\ °F\ ;\quad \mu_F = 153\ ;\quad \sigma_F = 7$

$C \rightarrow Temperatura\ em\ °C$

$F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow 1{,}8C = F - 32 \Leftrightarrow C = {}^{1}/_{1{,}8}F - {}^{32}/_{1{,}8}$

$$\boldsymbol{\mu_C} = {}^{1}/_{1{,}8}\,\mu_F - {}^{32}/_{1{,}8} = {}^{1}/_{1{,}8}(153) - {}^{32}/_{1{,}8} = \mathbf{67{,}22}$$

$$\sigma_C^2 = ({}^{1}/_{1{,}8})^2\sigma_F^2 = \left({}^{1}/_{1{,}8}\right)^2(7)^2 = 15{,}1234 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sigma_C^2} = \mathbf{3{,}89}$$

Transformação linear:

$W = a + bZ$
$\mu_W = a + b\mu_Z$ $\sigma_W^2 = b^2\sigma_Z^2$

4.4 $G = 200$; $D = 300$; $Y \rightarrow N^{o}\ de\ concertos\ atribuídos$; Com a função de probabilidade:

y	$p(y)$
0	0,05
1	0,20
2	0,30
3	0,30
4	0,10
5	0,04
6	0,01

a) O número médio de concertos atribuídos será;

$\mu_Y = \sum_y y\,p(y) = 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}9 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}06 = 2{,}36$

E o lucro será a variável $L \rightarrow Lucro = Receitas + Despesas$, ou seja; $L = 200Y - 300$, e o lucro médio:

$$\boldsymbol{\mu_L} = 200\mu_Y - 300 = (200)(2{,}36) - 300 = \mathbf{172}$$

b) Perde dinheiro se organizar 0 ou 1 concerto. Logo,

$$\mathbf{P(Y \le 1)} = \mathrm{P(Y=0)} + \mathrm{P(Y=1)} = 0{,}20 + 0{,}05 = \mathbf{0{,}25}$$

c) Agora o lucro será a variável $L' = 200Y - 300 - 20Y = 180Y - 300$, vindo:

$$\boldsymbol{\mu_{L'}} = 180\mu_Y - 300 = (180)(2{,}36) - 300 = \mathbf{124{,}8}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_y y^2p(y) - {\mu_y}^2 = 0{,}2 + 1{,}2 + 2{,}7 + 1{,}6 + 1 + 0{,}36 - (2{,}36)^2 = 1{,}4904 \rightarrow \sigma_{L'}^2 = (180)^2\sigma_Y^2 = (180)^2(1{,}4904) = 48288{,}96$$

$$\boldsymbol{\sigma_{L'}} = \sqrt{\sigma_{L'}^2} = \mathbf{219{,}75}$$

4.5 $X \rightarrow$ *Número de obstáculos derrubados.* Que segue a função de probabilidade:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,05	0,20	0,45	0,30

a) $Y \rightarrow$ *Nº de obstáculos derrubados na prova,* $Y \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

A combinação de obstáculos derrubados e respetivas probabilidades serão: →

1ª mão	2ª mão	P
0	0	(0,05)x(0,05) = 0,0025
0	1	(0,05)x(0,20) = 0,0100
0	2	(0,05)x(0,45) = 0,0225
0	3	(0,05)x(0,30) = 0,0150
1	0	(0,20)x(0,05) = 0,0100
1	1	(0,20)x(0,20) = 0,0400
1	2	(0,20)x(0,45) = 0,0900
1	3	(0,20)x(0,30) = 0,0600
2	0	(0,45)x(0,05) = 0,0225
2	1	(0,45)x(0,20) = 0,0900
2	2	(0,45)x(0,45) = 0,2025
2	3	(0,45)x(0,30) = 0,1350
3	0	(0,30)x(0,05) = 0,0150
3	1	(0,30)x(0,20) = 0,0600
3	2	(0,30)x(0,45) = 0,1350
3	3	(0,30)x(0,30) = 0,0900

Resultando a função de probabilidade: →

y	$p(y)$
0	0,0025
1	0,0200
2	0,0850
3	0,2100
4	0,3225
5	0,2700
6	0,0900
$\Sigma =$	1

$$\boldsymbol{\mu_Y} = \sum_y y\,p(y) = 0{,}02 + 0{,}17 + 0{,}63 + 1{,}29 + 1{,}35 + 0{,}54 = \mathbf{4}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_y y^2 p(y) - \mu_y{}^2 = 0{,}02 + 0{,}34 + 1{,}89 + 5{,}16 + 6{,}75 + 3{,}24 - 16 = 1{,}4$$

$$\boldsymbol{\sigma_Y} = \sqrt{\sigma_Y^2} = \mathbf{1{,}1832}$$

b) $T \rightarrow$ *Nº de torrões que o cavalo recebe,* $T \in \{1,2,4\}$, e a f. p.:

↓

t	$p(t)$
1	0,36
2	0,5325
4	0,1075

$$\boldsymbol{\mu_T} = \sum_t t\,p(t) = 0{,}36 + 1{,}065 + 0{,}43 = \mathbf{1{,}855}$$

c) $P = 100 - X_1 - 1{,}2X_2$

$$\boldsymbol{\mu_P} = 100 - \mu_{X_1} - 1{,}2\mu_{X_2} = 100 - 4 - (1{,}2)(4) = \mathbf{91{,}2}$$

$$\sigma_P^2 = (1)^2\sigma_{X_1}^2 + (1{,}2)^2\sigma_{X_2}^2 = 1{,}4 + (1{,}2)^2 1{,}4 = 3{,}416 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\sigma_P^2} = \mathbf{1{,}8482}$$

Note-se que neste caso as variáveis X_1 e X_1 são independentes, logo $Cov(X_1, X_1) = 0$

Transformação linear:

$V = a + bW + cZ$
$\mu_V = a + b\mu_W + c\mu_Z$ $\sigma_V^2 = b^2\sigma_W^2 + c^2\sigma_Z^2 + 2bc.Cov(Z,W)$

4.6 $Compra \rightarrow 500$; $Venda \rightarrow 750$; $Retoma \rightarrow 400$

$Y \rightarrow Número\ de\ livros\ vendidos.$ Com a função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,10	0,15	0,20	0,35	0,15	0,05

a) É necessário verificar se o valor esperado do lucro é positivo.

Sendo a variável $L \rightarrow Lucro = Vendas + Retoma + Compra$, vem;

$L = 750Y + 400(5 - Y) - (5)(500) = 750Y + 2000 - 400Y - 2500 = 350Y - 500$

Sendo o nº médio de livros vendidos; $\mu_Y = \sum_y y\, p(y) = 0{,}15 + 0{,}40 + 1{,}05 + 0{,}6 + 0{,}25 = 2{,}45.$ Vem o lucro médio:

$\boldsymbol{\mu_L} = 350\mu_Y - 500 = (350)(2{,}45) - 500 = \mathbf{357{,}5}$ → Logo, **a atividade é rentável**

b) Determinar o preço de venda (P)

$L = PY + 400(5 - Y) - 2500 = PY + 2000 - 400Y - 2500 = (P - 400)Y - 500$

$\mu_L = 400 \quad \Longrightarrow \quad (P - 400)\mu_Y - 500 = 400$

$(P - 400)2{,}45 - 500 = 400$

$(P - 400)2{,}45 = 400 + 500$

$P - 400 = {}^{900}/_{2{,}45}$

$\boldsymbol{P} = {}^{900}/_{2{,}45} + 400 = \mathbf{767{,}35}$ **ou mais**

4.7 $Aposta \rightarrow 5\,€$

< 8	→	Nada	
8, 9	→	1 Vinho Porto	(5 €)
10, 11	→	1 Whisky	(12,5 €)
12	→	2 Whisky	(25 €)

a) Determinar a função de probabilidade dos pontos nos dados, sendo; $Y \rightarrow N^{o}\ de\ pontos\ nos\ dois\ dados,\quad Y \in \{2, \dots, 12\}$

Dado 2

Dado 1 / Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

← Cada combinação tem a probabilidade de

$$1/_6 * 1/_6 = 1/_{36}$$

(dados independentes)

Função de probabilidade:

$\mathbf{y}$	$\boldsymbol{p(y)}$	$\boldsymbol{Lucro}$
< 8	$21/_{36}$	5
8, 9	$9/_{36}$	0
10, 11	$5/_{36}$	$-7{,}5$
12	$1/_{36}$	-20
$\Sigma =$	1	

$\boldsymbol{\mu_L} = (5)\,21/_{36} + (0)\,9/_{36} + (-7{,}5)\,5/_{36} + (-20)\,1/_{36} = 105/_{36} - 37{,}5/_{36} - 20/_{36} = 47{,}5/_{36} = \mathbf{1{,}3194}$. Logo **é vantajoso.**

b) Seja, $W \rightarrow Preço\ da\ garrafa\ de\ whisky$

$$\mu_L = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad 105/_{36} + 5/_{36}\,(5 - W) + 1/_{36}\,(5 - 2W) = 2{,}5 \ \Rightarrow$$

$$105/_{36} + 25/_{36} + 5/_{36} - 5/_{36}\,W - 2/_{36}\,W = 2{,}5 \Rightarrow$$

$$135/_{36} - 7/_{36}\,W = 2{,}5 \ \Rightarrow 7/_{36}\,W = 135/_{36} - 2{,}5 \ \Rightarrow$$

$$W = (1{,}25)(36)/_7 \ = \mathbf{6{,}42}\ \textbf{ou menos}$$

4.8 - Questão 3.7 b)

Determinar o novo preço de revenda (R)

Sejam; $L \rightarrow Lucro$ $\quad Y \rightarrow Número\ de\ veículos\ vendidos$

$L = 2750Y + (4 - Y)R - 10000$

$\mu_{\boldsymbol{L}} = 2750\mu_Y + (4 - \mu_Y)R - 10000,$ onde $\mu_Y = 0{,}15 + 0{,}80 + 0{,}75 + 0{,}40 = 2{,}1$

Pretende-se que $\mu_{\boldsymbol{L}} = 100$, então

$$(2750)(2{,}1) + (4 - 2{,}1)R - 10000 = 100 \implies$$

$$1{,}9R = 10000 + 100 - 5775 \implies$$

$$\boldsymbol{R} = {}^{4325}/_{1,9} = \mathbf{2276{,}3}$$

- Questão 3.9 c)

Verificar se o lucro do jogo é positivo.

Sejam; $L \rightarrow Lucro$ $\quad Y \rightarrow Número\ de\ pontos\ no\ dado$

$L = Y - 3{,}5$

$\boldsymbol{\mu_L} = \mu_Y - 3{,}5 = {}^{11}/_{3} - 3{,}5 = {}^{22}/_{6} - {}^{21}/_{6} = \mathbf{{}^{1}/_{6}}$

Logo, tal como anteriormente, conclui-se que o jogo é vantajoso.