FICHA DE TRABALHO 12 - I.C. / T.H.

12.1

$\bar{x} = 81.09 \qquad n = 7$

$s^2 = 1.2748 \qquad s = 1.1291$

a) $\alpha = 5\%$

$H_0: \mu = 80$

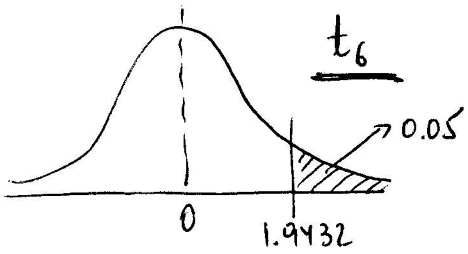
$H_1: \mu > 80$ (hipótese a validar)

$ET = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ Se H_0 verdadeira $ET \sim t_6$

Deve rejeitar-se H_0 se

$ET > t_6(\alpha)$

$t_6(0.05) = 1.9432$



$ET = \dfrac{81.09 - 80}{1.1291/\sqrt{7}} = 2.5541$

Como $ET > t_6(\alpha)$ $\Rightarrow$ Rejeitar H_0: pode concluir-se que a afirmação da empresa é correcta.

$v.p = P(t_6 \geq 2.5541) = 0.0216$

b) O intervalo correspondente é aberto à direita e a 95%

$\left[\bar{x} - t_{n-1}(\alpha) \dfrac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$

$\left[81.09 - 1.9432 \dfrac{1.1291}{\sqrt{7}}, +\infty \right[$

$[80.26, +\infty[$ Como $H_0: \mu = 80$ não está contida no intervalo, pode concluir-se pela rejeição da hipótese.

12.2

$E1 \begin{cases} n = 10 \\ s = 4.7 \end{cases}$ $\quad$ $E2 \begin{cases} n = 16 \\ s = 5.8 \end{cases}$ $\quad$ $\alpha = 5\%$

$H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

$H_1 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Por conveniência, e uma vez que as tabelas da distribuição F são à direita, é aconselhável colocar a população cujo erro amostral seja maior no numerador.

Então:

$H_0 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$ $\qquad$ $ET = \dfrac{s_2^2/\sigma_2^2}{s_1^2/\sigma_1^2}$

$H_1 : \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$ $\qquad$ Se H_0 verdadeira, $ET \sim F_{n_2-1,\, n_1-1}$

ou seja $ET \sim F_{15,9}$

Deve rejeitar-se H_0 se : $\begin{cases} ET > F_{15,9}(\alpha/2) = 3.7694 \\ \quad \text{ou} \\ ET < F_{15,9}(1-\alpha/2) = 0.3202 \end{cases}$

$ET = \dfrac{(5.8)^2}{(4.7)^2} = 1.5229$

$\therefore$ Não rejeitar H_0. As variâncias não são significativamente diferentes.

$v.p. = 2P(F_{15,9} \geq 1.5229) = (2)(0.2656) = 0.5312$

(nas tabelas, mostrar aos alunos que $v.p. > 20\%$)

12.3 Amostra A (folheto) $\begin{cases} n = 15 \\ \bar{x} = 45.5333 \\ s^2 = 178.12 \\ s = 13.3463 \end{cases}$ Amostra B (folheto + visita) $\begin{cases} n = 12 \\ \bar{x} = 56.25 \\ s^2 = 154.2045 \\ s = 12.4179 \end{cases}$

$\alpha = 5\%$

a) 2 amostras independentes

$H_0: \mu_B = \mu_A \iff \mu_B - \mu_A = 0$

$H_1: \mu_B > \mu_A \iff \mu_B - \mu_A > 0$ (Pretende-se testar se houve valorização)

Para determinar a estatística do teste, é necessário testar a igualdade de variâncias:

$H_0: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$

$H_1: \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1$

Utilizando o intervalo de confiança a 95%:

$$\left[\frac{s_A^2 / s_B^2}{f_{14,11}(\alpha/2)} , \frac{s_A^2 / s_B^2}{f_{14,11}(1-\alpha/2)} \right]$$

$$\left[\frac{178.12 / 154.2045}{3.3588} , \frac{178.12 / 154.2045}{0.3231} \right]$$

$$[0.344 , 3.575] \quad \therefore \sigma_A^2 \approx \sigma_B^2$$

Considerando as variâncias iguais

$$ET = \frac{(\bar{x}_B - \bar{x}_A) - (\mu_B - \mu_A)}{s\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim t_{n_B + n_A - 2}$

$ET \sim t_{25}$

$$s^2 = \frac{(n_A - 1) s_A^2 + (n_B - 1) s_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{(14)(178.12) + (11)(154.2045)}{25} = 167.60$$

$$s = 12.9460$$

$$ET = \frac{(56.25 - 45.5333) - 0}{12.9460\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{12}}} = 2.1374$$

Deve rejeitar-se H_0 se $ET > t_{25}(\alpha) = 1.7081$

$\therefore$ Rejeitar H_0. A visita conduziu a uma maior valorização do imóvel

$v.p. = P(t_{25} > 2.1374) \approx 0.0213$

(12.3) (cont.)

b) Neste caso, as amostras devem considerar-se emparelhadas e o teste deve ser efectuado sobre as diferenças.

$$\Delta = X_B - X_A \qquad \begin{cases} \bar{\Delta} = 4.3333 \\ s_\Delta^2 = 27.0952 \\ s_\Delta = 5.2053 \end{cases} \qquad \alpha = 5\%$$

$H_0: \mu_\Delta = 0$

$H_1: \mu_\Delta > 0$

$$ET = \frac{\bar{\Delta} - \mu_\Delta}{s_\Delta / \sqrt{n}}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim t_{14}$

Rejeitar H_0 se $ET > t_{14}(\alpha) = 1.7613$

$$ET = \frac{4.3333 - 0}{5.2053/\sqrt{15}} = 3.2242$$

$\therefore$ Rejeitar H_0. Conclui-se que a visita ao andar modelo conduziu a uma valorização significativa dos imóveis

$$v.p. = P(t_{14} > 3.2242) = 0.0031$$

(12.4) $n = 10$ $\quad \hat{Y} = 8$ $\quad \alpha = 5\%$

a) $H_0: p = 0.5$

$H_1: p > 0.5$

$ET = \hat{Y}$ $\qquad$ Se H_0 verdadeira $ET \sim B(n=10, p=0.5)$

$$v.p. = P(ET \geq 8) = 0.439 + 0.0098 + 0.0010 = 0.0547$$

A um nível de significância de 5% não se pode rejeitar H_0, não havendo evidência de que a maioria dos alunos tenha achado o teste muito puxado.

(12.4) (cont).

b) $n = 50$ $\hat{Y} = 32$

Neste caso, como a amostra é grande, pode fazer-se

$$ET = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$ Se Ho verdadeira $ET \sim N(0,1)$

Deve rejeitar-se Ho se $ET > z(\alpha) = 1.6449$

$$ET = \frac{0.64 - 0.50}{\sqrt{(0.50)(0.50)/50}} = 1.9799 \qquad \hat{p} = \frac{32}{50} = 0.64$$

$\therefore$ Rejeitar Ho. Há evidência de que a maioria dos alunos achou o teste muito puxado.

$$v.p. = P(z \geq 1.9799) = 0.0239$$

(Pela Binomial $v.p. = 0.0325$)

c) a) Tabela A6 : $[0.493, 1]$

$\therefore$ 0.5 está incluído, logo, não rejeitar Ho

b) $\left[\hat{p} - z(0.05)\sqrt{\frac{pq}{n}}, 1\right]$

$$\left[0.64 - 1.6449\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{50}}, 1\right]$$

$$[0.520, 1]$$

$\therefore$ 0.5 não está incluído, logo rejeitar Ho.

12.5

$$\underline{A}\ (\text{antes}) \begin{cases} n = 14 \\ \bar{x} = 4.5793 \\ s^2 = 0.0224 \\ s = 0.1497 \end{cases} \qquad \underline{B}\ (\text{depois}) \begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = 4.586 \\ s^2 = 0.0110 \\ s = 0.1050 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Considerando } \alpha = 5\%}$

A precisão das análises pode ser medida através da variância, ou seja, menos variância ⇒ mais precisão
Pretende-se verificar se a experiência melhora a precisão logo:

$$H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 1 \qquad \text{(melhor desempenho em B)}$$

$$ET = \frac{s_A^2/\sigma_A^2}{s_B^2/\sigma_B^2}$$

Se Ho verdadeira $ET \sim f_{n_A-1,\, n_B-1}$

$ET \sim f_{13,9}$

Deve rejeitar-se Ho se $ET > f_{13,9}(\alpha) = 3.0475$

$$ET = \frac{0.0224}{0.0110} = 2.0364$$

∴ Não rejeitar Ho. Não há evidência de que a precisão da análise tenha aumentado com a experiência.

$$v.p. = P(f_{13,9} \geq 2.0364) = 0.1441$$

12.6

Pesado $\begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = 89.9 \\ s^2 = 1522.1 \\ s = 39.0141 \end{cases}$ Leve $\begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = 97.2 \\ s^2 = 387.733 \\ s = 19.6910 \end{cases}$

a) Como estão envolvidos 20 automóveis diferentes, as amostras devem considerar-se independentes.

Logo,

$H_0: \mu_P = \mu_L \Leftrightarrow \mu_P - \mu_L = 0$

$H_1: \mu_P \neq \mu_L \Leftrightarrow \mu_P - \mu_L \neq 0$

Para determinar ET a utilizar é necessário testar a igualdade de variâncias:

$H_0: \sigma_P^2 / \sigma_L^2 = 1$

$H_1: \sigma_P^2 / \sigma_L^2 \neq 1$

O intervalo de confiança a 95% para σ_P^2/σ_L^2 é:

$$\left[\frac{\sigma_P^2/\sigma_L^2}{f_{9,9}(\alpha/2)} , \frac{\sigma_P^2/\sigma_L^2}{f_{9,9}(1-\alpha/2)} \right]$$

$$\left[\frac{1522.1/387.733}{4.0260} , \frac{1522.1/387.733}{0.2484} \right]$$

$$[\,0.975 \,,\, 15.804\,]$$ $\therefore$ Considerar $\sigma_P^2 \simeq \sigma_L^2$

Para o teste aos valores esperados, fica:

$$ET = \frac{(\bar{x}_P - \bar{x}_L) - (\mu_P - \mu_L)}{s\sqrt{\frac{1}{n_P} + \frac{1}{n_L}}}$$

Se H_0 verdadeira $ET \sim t_{n_P+n_L-2}$

$ET \sim t_{18}$

com $$s^2 = \frac{(n_P-1)s_P^2 + (n_L-1)s_L^2}{n_P+n_L-2} = \frac{(9)(1522.1)+(9)(387.733)}{18}$$

$s^2 = 954.92 \qquad s = 30.902$

12.6 (cont.)

Ho deve ser rejeitada se:

$ET < -t_{18}(\alpha/2)$ ou se $ET > t_{18}(\alpha/2)$

Com $t_{18}(\alpha/2) = 2.1009$

$$ET = \frac{(89.9-97.2)-0}{30.902\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = -0.5282$$

∴ Não rejeitar Ho. Não há evidência de diferenças significativas nos quilómetros percorridos

$$v.p. = 2P(t_{18} \geq 0.5282) = (2)(0.3019) = 0.6038$$

b) $\alpha = 5\%$ $\sigma_L^2 = 340 \text{ Km}^2$?

$H_0: \sigma_L^2 = 340$

$H_1: \sigma_L^2 \neq 340$

$ET = \frac{(n-1)s_L^2}{\sigma_L^2}$ Se Ho verdadeira $ET \sim \chi^2_{n_L-1}$

$ET \sim \chi^2_9$

Rejeitar Ho se $\begin{cases} ET > \chi^2_9(\alpha/2) = 19.0228 \\ \text{ou} \\ ET < \chi^2_9(1-\alpha/2) = 2.7004 \end{cases}$

$$ET = \frac{(9)(387.733)}{340} = 10.2635$$

∴ Não rejeitar Ho. Não há evidência de que a variância seja significativamente diferente de 340.

$$v.p. = 2P(\chi^2_9 \geq 10.2635) = (2)(0.3296) = 0.6592$$

12.7

$n = 500$ $\alpha = 0.01$

$\hat{Y} = 130$

$p > 20\%$?

É necessário testar a proporção de facturas com erros.

$H_0: \ p = 0.20$

$H_1: \ p > 0.20$ (afirmação a comprovar)

$\hat{Y} \to$ nº de facturas (em 500) com erros

$\hat{Y} \sim B(n=500, p=0.20)$ se H_0 verdadeira

Como a amostra é grande

$$ET = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$ Se H_0 verdadeira $ET \approx N(0,1)$

Deve rejeitar-se H_0 se $ET > z(\alpha) = 2.3263$

$$ET = \frac{0.26 - 0.20}{\sqrt{(0.20)(0.80)/500}} = 3.3541 \qquad \hat{p} = \frac{\hat{Y}}{n} = \frac{130}{500} = 0.26$$

$\therefore$ A um nível de significância de 1%, rejeitar H_0, havendo evidência de que a afirmação do contabilista esteja correcta.

$$v.p. = P(z \geq 3.3541) = 0.0004$$

12.8

$n = 100$ $\alpha = 5\%$

$\hat{Y} = 14$

$H_0: \ p = 0.20$

$H_1: \ p \neq 0.20$

O intervalo de confiança para p é dado por:

$$\hat{p} \pm z(\alpha/2)\sqrt{pq/n} \qquad \text{com} \quad z(\alpha/2) = 1.96$$

Para $n = 100$: $0.14 \pm 1.96\sqrt{(0.20)(0.80)/100} \Rightarrow [0.0616, 0.2184]$

$\therefore$ Não rejeitar H_0

(12.8) (cont.)

Para $n = 1000$: $0.14 \pm 1.96 \sqrt{(0.20)(0.80)/1000}$

$$[0.1152 \, , \, 0.1648]$$

∴ Neste caso é possível concluir pela rejeição de Ho.

(12.9) Mulher (A) $\left| \begin{array}{l} n = 40 \\ \hat{Y} = 18 \end{array} \right.$ Homem (B) $\left| \begin{array}{l} n = 60 \\ \hat{Y} = 24 \end{array} \right.$

$\alpha = 5\%$ $p_A = 0.40$ $p_B = 0.50$

$H_0: \; p_A - p_B = 0.10$

$H_1: \; p_A - p_B \neq 0.10$

$$ET = \frac{(\hat{p}_A - \hat{p}_B) - (p_A - p_B)}{\sqrt{\frac{p_A q_A}{n_A} + \frac{p_B q_B}{n_B}}}$$

Se Ho verdadeira $ET \sim N(0,1)$

Ho deve ser rejeitado se $ET > z(\alpha/2)$ ou se $ET < -z(\alpha/2)$
com $z(\alpha/2) = 1.96$

$$ET = \frac{(0.45 - 0.40) - (0.10)}{\sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{40} + \frac{(0.50)(0.50)}{60}}}$$

$\hat{p}_A = \frac{18}{40} = 0.45$

$\hat{p}_B = \frac{24}{60} = 0.40$

$ET = -0.4959$

∴ Não rejeitar Ho. Não há evidência de que a diferença de proporções seja significativamente diferente de 10%

$$v.p. = 2P(Z \geq 0.4959) = (2)(0.31) = 0.62$$

NOTA: no denominador da ET utilizaram-se as proporções históricas porque, em princípio, têm um maior grau de credibilidade que as estimativas amostrais. No entanto, isto é discutível.