DGI
2019

2.1. Introdução

Frequentemente deparamo-nos com proposições em relação às quais ***não podemos tomar uma posição certa*** (falsa ou verdadeira). Em vez disso tomamos uma ***posição intermédia de incerteza*** dizendo que a proposição é mais ou menos provável.

A *teoria das Probabilidades* é um ***conjunto de ferramentas matemáticas*** que que têm como primeiro objectivo ***quantificar essa incerteza*** sendo, por isso, aplicada ao estudo de fenómenos (ou experiências) não determinísticos ou aleatórios.

Exemplos de Aplicação:

- **Estatística Indutiva** ***(ex. estimação por intervalo e teste de hipóteses)***
- **Estudos de Fiabilidade** ***(ex. previsão de vida de equipamentos)***
- **Mecânica Quântica** ***(ex. descrição do movimento de partículas)***
- **Optimização** ***(ex. processos de Markov e filas de espera)***
- **Actividades Recreativas** ***(ex. totoloto, jogo de dados, etc.)***

DGI
2019

2.2. Conceitos Fundamentais

2.2.1. *Experiência Aleatória*

Uma experiência aleatória é um ***processo*** (ou um conjunto de circunstâncias) ***sujeito à influência de factores causais***, conduzindo a resultados incertos.

Características Fundamentais

- Pode *repetir-se indefinidamente* sob condições essencialmente inalteradas;
- Cada vez que se realiza a experiência obtém-se um *resultado individual imprevisível*, sendo, no entanto, possível descrever o conjunto de todos os possíveis resultados da experiência;
- Ao longo de um *grande número de repetições* da experiência, os *resultados* são irregulares ou mesmo caóticos quando considerados individualmente, mas, quando considerados em conjunto *evidenciam regularidades* ou padrões bem definidos.

DGI
2019

2.2.2. ***Espaço Amostral***

Dada uma experiência aleatória, denomina-se por espaço amostral ou espaço de resultados (S) o ***conjunto*** fundamental formado por ***todos os resultados que é possível obter quando se efectua a experiência***.

- Os espaços amostrais podem ser ***discretos ou contínuos***, conforme os seus elementos sejam numeráveis ou não. Os espaços amostrais discretos podem ser ***finitos ou infinitos***.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	*(espaço amostral discreto e finito)*
$S = \{1, 2, 3, \ldots\}$	*(espaço amostral discreto e infinito)*
$S = [0;\ 500]$	*(espaço amostral contínuo)*

- O espaço amostral de uma experiência aleatória ***depende de forma como esta é avaliada***.

2.2.3. Acontecimentos ou Eventos

Na realização de uma experiência aleatória podemos estar interessados na eventualidade de ocorrência de um determinado acontecimento. Um acontecimento está associado a uma experiência aleatória, constituindo um ***sub-conjunto do espaço amostral*** (S) associado a essa experiência, ou seja, um conjunto de resultados possíveis.

2.2.3.1. Acontecimentos Simples

Contêm *exactamente um* dos resultados possíveis de uma experiência aleatória.

2.2.3.2. Acontecimentos Compostos

Contêm *mais do que um* dos resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Exemplo

Lançamento de uma moeda ao ar três vezes. Se o resultado for avaliado pela sequência de caras (H) e coroas (T), o espaço amostral é constituído por 8 resultados.

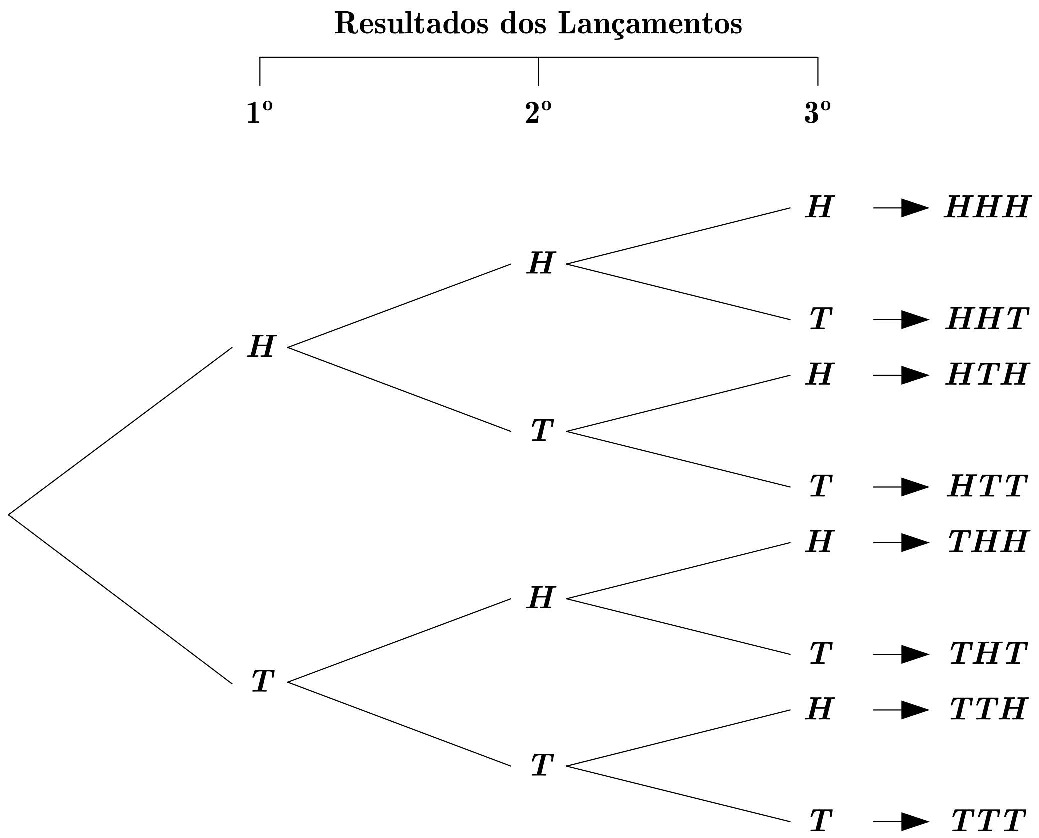


Diagrama em árvore

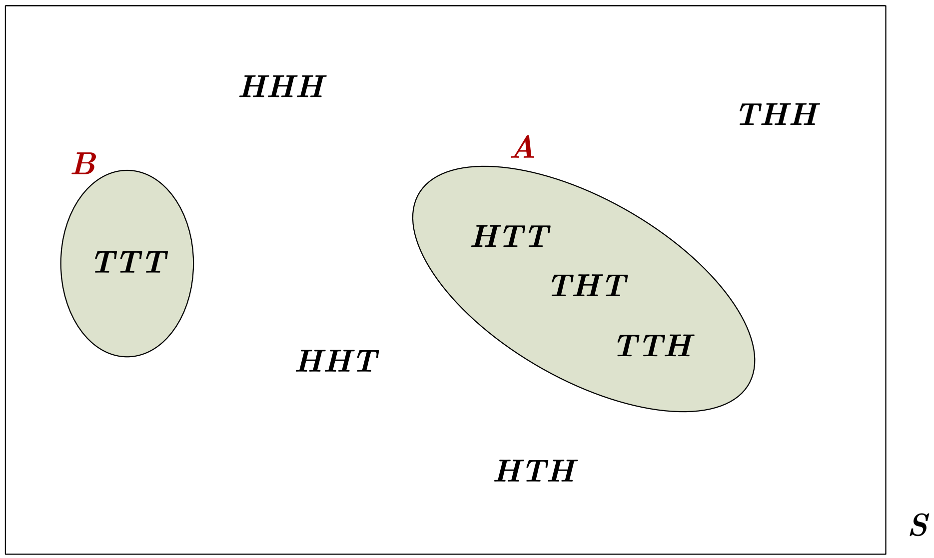


Diagrama de Venn

Considerando que:

A – **Representa o acontecimento *"saída de duas coroas"***

B – **Representa o acontecimento *"saída de três coroas"***

A – **acontecimento composto**

B – **acontecimento simples**

2.2.3.3. Acontecimento certo

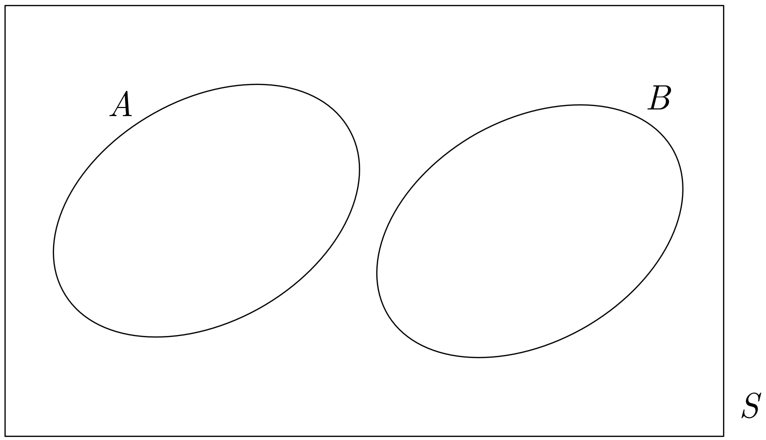
Contem *todos os resultados possíveis* de uma experiência aleatória.

2.2.3.4. Acontecimento impossível

Não contem *nenhum dos resultados possíveis* de uma experiência aleatória.

2.2.3.5. Acontecimentos incompatíveis

Dois acontecimentos dizem-se *mutuamente exclusivos ou incompatíveis* se eles não puderem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$



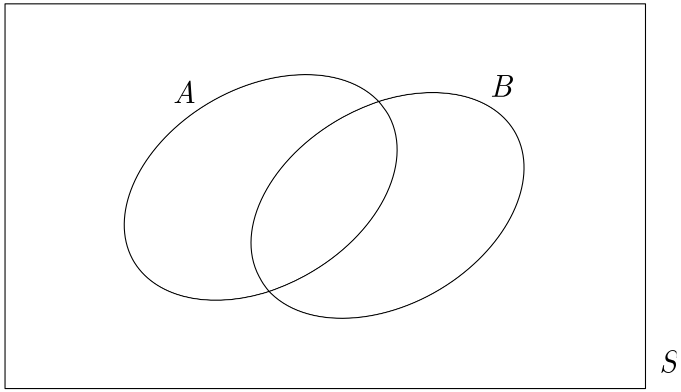
Exemplo: *Lançamento de um dado*

A - saída de face par
B - saída de face ímpar

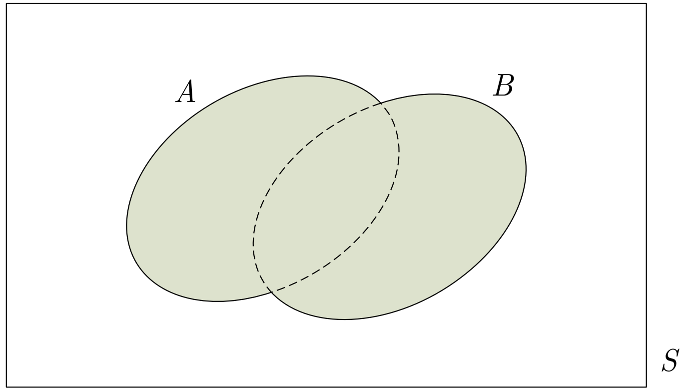
2.2.3.6. *Operações entre Acontecimentos*

Como os acontecimentos correspondem a subconjuntos do espaço amostral, podem aplicar-se as operações lógicas de reunião, intersecção, diferença e complementaridade.

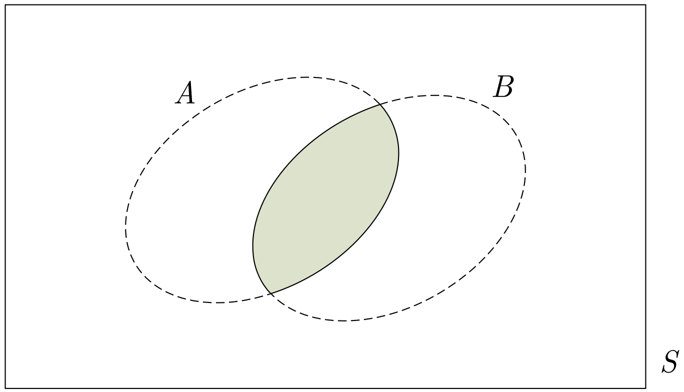
Operações Lógicas entre Conjuntos



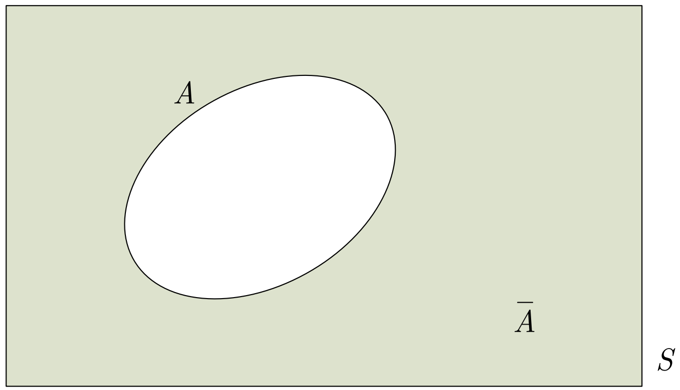
$A,\ B$ e S



Reunião $(A \cup B)$



Intersecção $(A \cap B)$



Complementar de A $(\bar{A})$

Propriedades das operações sobre conjuntos

$A \cup B = B \cup A$	*(comutatividade)*
$A \cap B = B \cap A$	"
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	*(associatividade)*
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	"
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*(distributividade)*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	"
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	*(Leis de De Morgan)*
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	"
$A \cup \emptyset = A$	*(elemento neutro)*
$A \cap S = A$	"
$A \cup S = S$	*(elemento absorvente)*
$A \cap \emptyset = \emptyset$	"

DGI
2019

2.2.4. Conceito de Probabilidade

2.2.4.1. *Definição Clássica (Lei de Laplace)*

Se um acontecimento pode ocorrer de N_A maneiras diferentes, num total de N maneiras possíveis (N resultados mutuamente exclusivos e equiprováveis) então a probabilidade do acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Propriedades

P1: $0 \leq P(A) \leq 1$

P2: $P(S) = 1$

P3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(A e B mutuamente exclusivos)*

2.2.4.2. Definição Frequencista

Se após N repetições de uma experiência aleatória, se observarem N_A ocorrências do acontecimento A, então a probabilidade de ocorrência do acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Propriedades

P1: $0 \leq P(A) \leq 1$

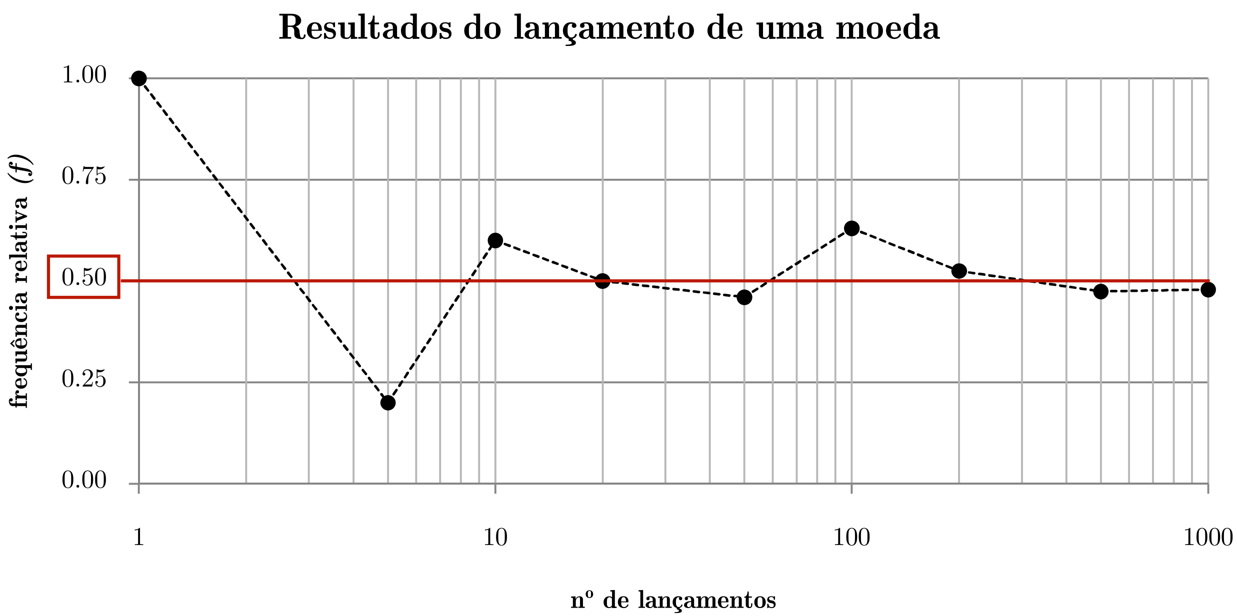
P2: $P(S) = 1$

P3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(A e B mutuamente exclusivos)*

Exemplo

O quadro abaixo traduz os resultados obtidos do lançamento de uma moeda ao ar. Qual a probabilidade de "sair face"?

nº de lançamentos	1	5	10	20	50	100	200	500	1000
nº de "faces"	1	1	6	10	23	63	105	237	479
frequência relativa	1	0.2	0.6	0.5	0.46	0.63	0.525	0.474	0.479



DGI
2019

2.2.4.3. Definição Axiomática

$P(A)$ é a *probabilidade de ocorrência* do acontecimento A desde que sejam *satisfeitos os seguintes axiomas*:

Axioma 1: para *qualquer acontecimento* A (*i.e.*, qualquer subconjunto de um espaço amostral S), a probabilidade desse acontecimento satisfaz a relação: $0 \leq P(A) \leq 1$

Axioma 2: A *probabilidade* associada ao *acontecimento certo* é:

$$P(S) = 1$$

Axioma 3: Se *dois acontecimentos* A e B forem *mutuamente exclusivos*, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Com base nos axiomas anteriores podem deduzir-se as seguintes propriedades:

P1: Para qualquer acontecimento A:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

P2: Acontecimento impossível:

$$P(\emptyset) = 0$$

P3: Para quaisquer acontecimentos A e B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2.2.5. Probabilidade Condicional

$P(A|B)$ é a probabilidade de ocorrer o acontecimento A dado que ocorreu (ou ocorrerá) o acontecimento B. Como B ocorreu (ou ocorrerá), B *passa a ser o novo espaço amostral*, que vem substituir o espaço original S.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

Exemplo

Lançamento de um dado honesto.

A – saída de face 4

B – saída de face par

$$\longrightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

2.2.6. Acontecimentos Independentes

Se $P\left(A|B\right) = P\left(A\right)$, isto é, se *a probabilidade de ocorrência de* $\boldsymbol{A}$ *não é afectada pela ocorrência, ou não de* $\boldsymbol{B}$, dizemos que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são acontecimentos independentes.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes então eles devem ser independentes dois a dois:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \quad i \neq j$$

três a três:

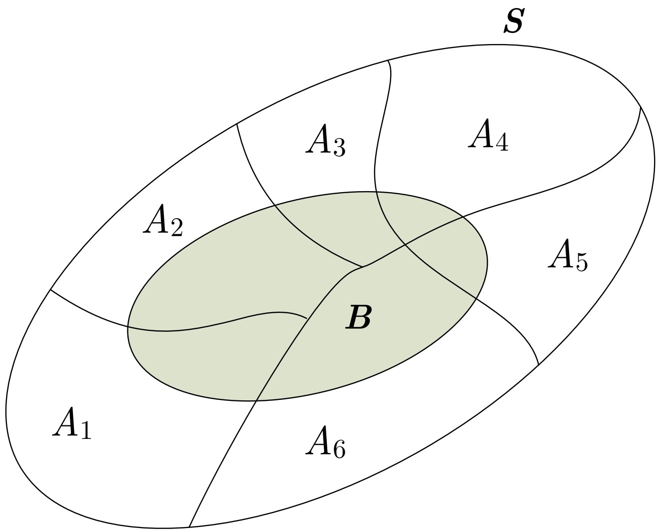
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \times P(A_j) \times P(A_k), \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k$$

$(\ldots)$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) = \prod_{n=1}^{N} P\left(A_n\right)$$

2.2.7. Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos mutuamente exclusivos que constituem uma partição do espaço amostral S.



$$P\left(A_k|B\right) = \frac{P\left(A_k \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(A_k\right) \times P\left(B|A_k\right)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \times P\left(B|A_k\right)}$$

Exemplo

Admita-se que num determinado país, 1% da população sofre de tuberculose e ainda que:

- Para uma pessoa que tenha, de facto, contraído a doença, uma microrradiografia tem um resultado positivo (detecta a tuberculose) em 95% dos casos e,
- Para uma pessoa não tuberculosa, essa percentagem é de apenas 0.5%.

Pretende saber-se qual a probabilidade de uma pessoa a quem a microrradiografia tenha dado resultado positivo estar tuberculosa.

2.3. Análise Combinatória

2.3.1. Princípio fundamental da contagem

Numa sequência de n selecções/acontecimentos independentes em que cada selecção/acontecimento tem $n_1, n_2, \ldots, n_n$ resultados possíveis, o número total de sequências diferentes é dado por $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n$.

Notas

As selecções/acontecimentos dizem-se independentes se os resultados obtidos não condicionarem o resultado das novas selecções/acontecimentos.

O número de elementos de um conjunto U denomina-se de Cardinal e representa-se por $\#(U)$.

Exemplo

Calcule o número total de números com três dígitos que podem ser formados se se admitir que:

a) O dígito zero não faz parte da classe das centenas e que não é permitida a repetição de qualquer dígito.

R:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

dezenas

Número (N): | c | d | u |

centenas *unidades*

$$\mathsf{c} = D \setminus \{0\} \quad \rightarrow \quad \#(\mathsf{c}) = 9$$

$$\mathsf{d} = D \setminus \mathsf{c} \quad \rightarrow \quad \#(\mathsf{d}) = 9$$

$$\mathsf{u} = D \setminus \{\mathsf{c}, \mathsf{d}\} \quad \rightarrow \quad \#(\mathsf{u}) = 8$$

$$\longrightarrow \#(\mathsf{N}) = \#(\mathsf{c}) \times \#(\mathsf{d}) \times \#(\mathsf{u}) = 648$$

b) O dígito zero não faz parte da classe das centenas e que é permitida a repetição de qualquer dígito.

R:

$$\mathsf{c} = D \setminus \{0\} \quad \rightarrow \quad \#(\mathsf{c}) = 9$$

$$\mathsf{d} = D \quad \rightarrow \quad \#(\mathsf{d}) = 10$$

$$\mathsf{u} = D \quad \rightarrow \quad \#(\mathsf{u}) = 10$$

$$\longrightarrow \#(\mathsf{N}) = \#(\mathsf{c}) \times \#(\mathsf{d}) \times \#(\mathsf{u}) = 900$$

DGI
2019

2.3.2. Permutações Simples

Designam-se por permutações de n elementos distintos às sequências constituídas por aqueles elementos e que diferem umas das outras apenas pela ordem pela qual eles se dispõem.

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n^n = n!$$

Nota

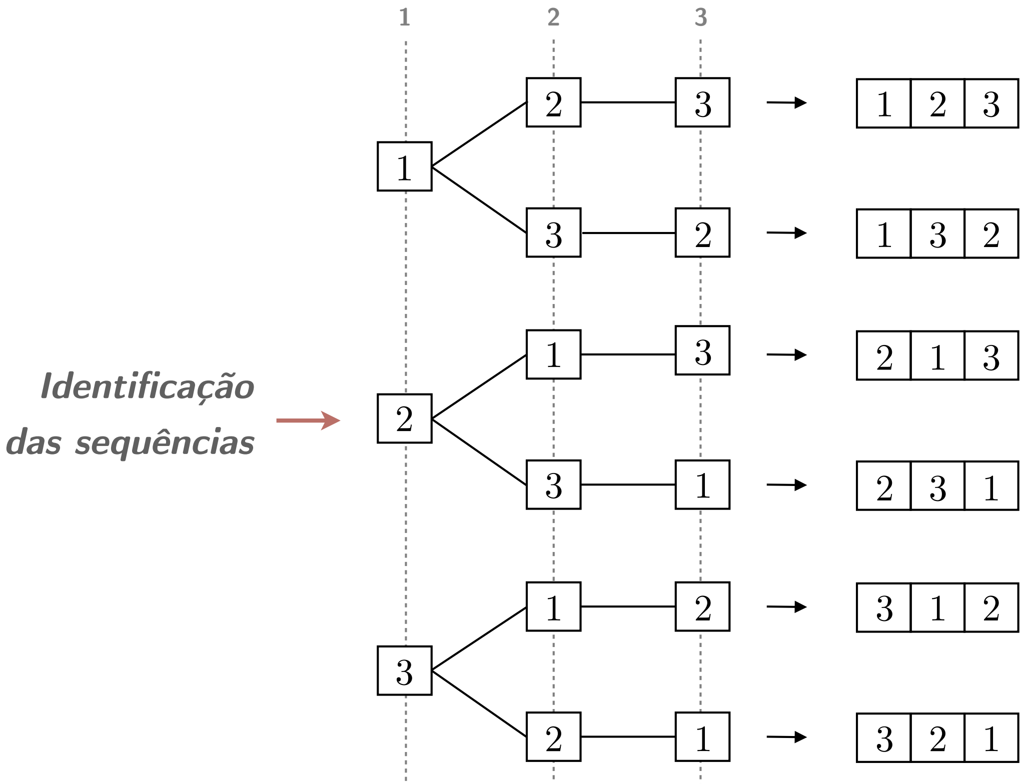
Factorial de um número natural: $n! = \prod_{k=1}^{n} k, \quad k > 0$

por definição: $0! = 1$

Exemplo

$U = \{1, 2, 3\} \quad \rightarrow \quad n = 3$

Permutações sem repetição de U: $\mathrm{P}_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$



2.3.3. Permutações Circulares

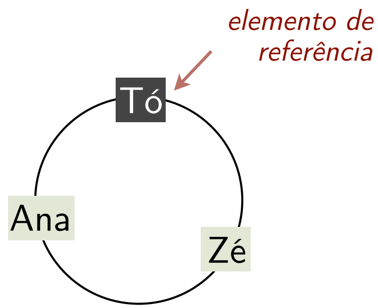
Quando os elementos estão arranjados em círculo é necessário escolher um deles para servir de elemento de referência aos restantes. Assim, duas permutações circulares são diferentes se a sequência dos restantes elementos, no sentido horário, é diferente.

$$\# = (n-1)!$$

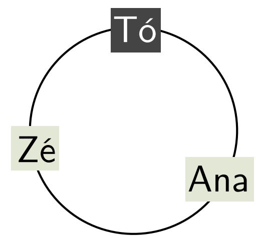
Exemplo

De quantas maneiras um grupo de 3 pessoas se pode dispor em torno de uma mesa redonda?

R:



Ana $\leftrightarrow$ Zé



$\longrightarrow \quad \# = (3-1)! = 2$

2.3.4. *Permutações com Repetição*

Se tivermos n elementos e cada um deles se repetir $n_1, n_2, \ldots, n_r$ vezes, o número de permutações é dado por:

$$\mathrm{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_r!}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

Exemplo

Quantas palavras se podem formar com as letras que compõem a palavra ESTATISTICA?
(as palavras podem ou não ter significado)

R:

$$\text{ESTATISTICA} \begin{cases} \text{E} & (\times 1) \\ \text{S} & (\times 2) \\ \text{T} & (\times 3) \\ \text{A} & (\times 2) \\ \text{I} & (\times 2) \\ \text{C} & (\times 1) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P}_{1,2,3,2,2,1} = \frac{11!}{1! \times 2! \times 3! \times 2! \times 2! \times 1!} = 831\,600$$

2.3.5. Arranjos Simples

Designam-se por arranjos de n elementos distintos tomados p a p os agrupamentos constituídos por p daqueles elementos e que diferem uns dos outros quer pelos elementos que neles figuram quer pela ordem na qual eles se dispõem.

$$\mathrm{A}_p^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad n \geq p$$

Exemplo

$U = \{1, 2, 3\} \quad \rightarrow \quad n = 3$

número de Arranjos de U, 2 a 2: $\quad \mathrm{A}_p^n = \mathrm{A}_2^3 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$

sequências: $\boxed{1\,|\,2}$ $\boxed{1\,|\,3}$ $\boxed{2\,|\,1}$ $\boxed{2\,|\,3}$ $\boxed{3\,|\,1}$ $\boxed{3\,|\,2}$

DGI
2019

2.3.6. Combinações

Designam-se por combinações de n elementos distintos tomados p a p os agrupamentos constituídos por p daqueles elementos que diferem uns dos outros pelos elementos que neles figuram, independentemente da ordem pela qual se dispõem.

$$\mathrm{C}_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{\mathrm{A}_p^n}{p!}, \quad n \geq p$$

Exemplo

$$U = \{1, 2, 3\} \quad \rightarrow \quad n = 3$$

número de Combinações de U, 2 *a* 2: $\quad \mathrm{C}_p^n = \mathrm{C}_2^3 = \dfrac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$

sequências: $\boxed{1 \mid 2} \quad \boxed{1 \mid 3} \quad \boxed{2 \mid 3}$

Folha de Cálculo

1. *Factorial de um Número Natural*

Designação Port[Ing]: FACTORIAL [FACT]

Definição: FACT(*número ou endereço de célula*)

2. *Arranjos e Permutações Simples*

Designação Port[Ing]: PERMUTAR [PERMUT]

Definição: PERMUT(*número ou endereço de célula* - n, *número ou endereço de célula* - p)

3. *Combinações*

Designação Port[Ing]: COMBIN[COMBIN]

Definição: COMBIN(*número ou endereço de célula* - n, *número ou endereço de célula* - p)

DGI
2019

Folha de Cálculo

$U = \{1, 2, 3\}$

alternativa

B5 | fx =FACT(B2)

	A	B	C	D
1				
2	$n =$	3		
3	$p =$	2		
4				
5	$P_n =$	6		
6				
7				
8				

Permutações Simples

B6 | fx =PERMUT(B2,B3)

	A	B	C	D
1				
2	$n =$	3		
3	$p =$	2		
4				
5	$P_n =$	6		
6	${}^nA_p =$	6		
7				
8				

Arranjos Simples

B7 | fx =COMBIN(B2,B3)

	A	B	C	D
1				
2	$n =$	3		
3	$p =$	2		
4				
5	$P_n =$	6		
6	${}^nA_p =$	6		
7	${}^nC_p =$	3		
8				

Combinações