



Exercícios Propostos

Cálculo I e

Matemática Aplicada I

Florbel Fernandes, João Nunes, João P. Almeida, José Matias e Edite Cordeiro

1º Semestre 2020/21

Conteúdo

1	Funções reais de uma variável real	1
1.1	Funções trigonométricas inversas	1
1.2	Aplicações da derivada	1
1.3	Técnicas de primitivação	2
1.4	Integrais definidos	3
1.5	Integrais impróprios	4
1.6	Exercícios extra	4
2	Séries numéricas	7
2.1	Série geométrica. Série de Mengoli.	7
2.2	Critérios de convergência para séries numéricas	7
2.2.1	Séries de termos não negativos	7
2.2.2	Séries alternadas	9
3	Séries de potências	11
3.1	Polinómio e série de Taylor	11
3.2	Operações com séries de potências	12
4	Funções de várias variáveis reais	13
4.1	Domínios de funções e curvas de nível	13
4.2	Limites e continuidade	13
4.3	Diferenciação	14
4.4	Otimização	16
5	Soluções	19
5.1	Soluções do Capítulo 1	19
5.2	Soluções do Capítulo 2	22
5.3	Soluções do Capítulo 3	23
5.4	Soluções do Capítulo 4	24

1 Funções reais de uma variável real

1.1 Funções trigonométricas inversas

Exercício 1 Considere as seguintes expressões analíticas das funções reais de variável real f, g, h, m :

$$\text{i) } f(x) = \frac{\pi}{3} - \arcsen\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \text{ii) } g(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos(3x + 1),$$

$$\text{iii) } h(x) = \pi + 6 \arcsen\left(\frac{5x + 1}{7}\right), \quad \text{iv) } m(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos(3x - 1),$$

determine, para cada uma delas:

- O domínio e o contra domínio da função.
- Os zeros da função.
- A função inversa. Faça a sua caracterização.

Exercício 2 Determine o domínio e o contra domínio da seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg}(x + 3) - \frac{\pi}{4}.$$

1.2 Aplicações da derivada

Exercício 3 Calcule os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 7}{3 + 4x^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\operatorname{tg}(x)}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 1)^{\frac{1}{x-1}}$$

1.3 Técnicas de primitivação

Exercício 4 Calcule as seguintes primitivas imediatas:

a) $\int 2x + x^3 - 5x^4 \, dx$

b) $\int \frac{x^2}{x^3 + 3} \, dx$

c) $\int 4^{2-3x} \, dx$

d) $\int \frac{1}{x \ln(x)} \, dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 1} \, dx$

f) $\int \frac{1}{(2x - 3)^3} \, dx$

Exercício 5 Calcule as seguintes primitivas (primitivação por partes):

a) $\int e^{2x}(x + 2) \, dx$

b) $\int x \sin(x) \, dx$

c) $\int (x^2 + 2) \ln(x) \, dx$

d) $\int e^x \sin(2x) \, dx$

e) $\int (2x + 1)^7 x \, dx$

f) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

g) $\int e^{\sin(x)} \sin(2x) \, dx$

h) $\int x^2 \arcsin(x) \, dx$

Exercício 6 Calcule as seguintes primitivas (primitivação de funções trigonométricas):

a) $\int \operatorname{tg}^3(6x) + \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{3}\right) \, dx$

b) $\int \sin^3(2x) \cos^2(2x) \, dx$

c) $\int \sin^4(x) \, dx$

d) $\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \, dx$

e) $\int \operatorname{tg}^2(x) \sec^2(x) \, dx$

f) $\int \operatorname{cosec}(x) \operatorname{cotg}(x) \, dx$

Exercício 7 Calcule as seguintes primitivas (substituição trigonométrica):

a) $\int \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{x} \, dx$

b) $\int \frac{\sqrt{16 + x^2}}{x^2} \, dx$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$

Exercício 8 Calcule as seguintes primitivas (primitivação de funções racionais):

a) $\int \frac{1}{x^2 + x} dx$

b) $\int \frac{x^6 + 4x}{x^2 - 1} dx$

c) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx$

d) $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

1.4 Integrais definidos

Exercício 9 Calcule os seguintes integrais definidos:

a) $\int_1^5 2 + x dx$

b) $\int_{-1}^4 |x - 2| dx$

c) $\int_{-1}^1 x\sqrt{1 - x^2} dx$ usando a substituição $x = \sin(t)$

Exercício 10 Determine a área da região delimitada por $y = 4 + x$ e $y^2 + x = 2$.

Sugestão: faça um esboço da região em causa.

Exercício 11 Calcule a área da seguinte região:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5 \wedge (-x + 5 \leq y \leq -x^2 + 7 \vee -x^2 + 7 \leq y \leq -x + 5)\}$$

Exercício 12 (Exame 2009/10) Esboce a região do plano de tal forma que:

$$y \leq 4 - x^2, \quad y \geq x + 2, \quad y \geq 2 - x$$

e calcule a sua área.

Exercício 13 (Exame 2015/16) Considere a região R definida da seguinte forma:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1 \wedge y \leq 3x + 3 \wedge y \leq 3\}.$$

Faça o esboço da região R e calcule a sua área.

Exercício 14 Calcule o volume do sólido de revolução gerado por rotação da região R , em torno do eixo dos xx , delimitada por:

$$y = \sin(x); \quad y = 0; \quad x = \frac{-\pi}{2}; \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Exercício 15 Calcule o volume do sólido de revolução gerado por rotação da região R , em torno do eixo dos yy , definida por:

$$y \leq \frac{1}{x^2} - 1; \quad y \geq 0; \quad y \leq 3; \quad x \geq 0$$

1.5 Integrais impróprios

Exercício 16 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - x} dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} dx$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x) dx$

f) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}} dx$

1.6 Exercícios extra

Exercício 17 Considere a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x+1}{3}\right)$$

determine:

a) Detemine o domínio e o contra domínio desta função.

b) Calcule os zeros de f .

c) Resolva, se possível, as seguintes equações:

i. $f(x) = -\frac{\pi}{4}$

ii. $f(x) = \frac{\pi}{2}$

d) Caracterize a função inversa f^{-1} .

Exercício 18 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{4 \ln(3-x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\ln(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^{x-2}$

Exercício 19 Calcule as seguintes primitivas:

-
- a) $\int \sqrt{3x+2} \, dx$
- b) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-(2x)^2}} \, dx$
- c) $\int \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+16} \, dx$
- d) $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx$
- e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx$
- f) $\int \sin(\ln(x)) \, dx$
- g) $\int \arctg(\sqrt{x}) \, dx$
- h) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} \, dx$
- i) $\int \frac{(\cos(x) + \sin(x))^2}{\sin^2(x)} \, dx$
- j) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} \, dx$
- k) $\int \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$
- l) $\int (4x+2) \operatorname{tg}^5(x^2+x) \sec^2(x^2+x) \, dx$
- m) $\int \frac{x^4+8x^2}{2x^3-2x^2+18x-18} \, dx$
- n) $\int \frac{x^6+4x}{(x^2-4)^2} \, dx$

Exercício 20 Calcule os seguintes integrais definidos:

- a) $\int_{-2}^2 x^3 \, dx.$ Comente.
- b) $\int_1^8 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$
- c) $\int_1^e \ln^2(x) \, dx$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2(x) \, dx$

Exercício 21 (Exame 2010/11) Considere a região R delimitada pelos gráficos das seguintes funções,

$$f(x) = -x^2 + 4, \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 3 & , x \geq 0 \\ 3 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Esboce a região R e determine a sua área.

Exercício 22 A região R encontra-se delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = 2e^x; \quad g(x) = 2e^{-x} \quad \text{e} \quad h(x) = 0$$

e pelas rectas $x = -1$ e $x = 1$.

- a) Calcule a área da região R .
- b) Calcule o volume do sólido de revolução gerado por rotação da região R em torno do eixo dos xx .

Exercício 23 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$

b) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$

d) $\int_0^\pi \sec^2(x) dx$

Exercício 24 Atribua, se possível, um valor à área da região R e um valor ao volume do sólido de revolução obtido por rotação da região R em torno de xx , sendo:

- a) R a região ilimitada definida pelo gráfico da função f e respectivas assíntotas.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- b) R a região situada à esquerda da recta $x = 1$ e compreendida entre o gráfico da função f e o eixo dos xx .

$$f(x) = e^{2x}$$

Exercícios recomendados do livro de texto (Calculus – Volume I, James Stewart):

Indeterminações: página 313

Técnicas de Primitivação: páginas 418, 464, 476, 511

Integrais definidos: página 401 (ex. 19 até 42), 409

Integrais Impróprios: página 533

2 Séries numéricas

2.1 Série geométrica. Série de Mengoli.

Exercício 25 Considere as seguintes séries geométricas. Indique quais as convergentes e, nesses casos, calcule a sua soma.

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} 5 \times (0.9)^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-0.2n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n+2}}$$

$$h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{4^{n+1}}$$

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 3^n}{4^{n+2}}$$

Exercício 26 Das seguintes séries de Mengoli indique as que são convergentes e, nesse caso, calcule a sua soma.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n}$$

$$c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$d) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} - 2^{-2n})$$

$$f) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$$

2.2 Critérios de convergência para séries numéricas

2.2.1 Séries de termos não negativos

Exercício 27 Indique a natureza das seguintes séries. Sugestão: analise o termo geral.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 + 5n}{4n^2 - 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + 2}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Exercício 28 Use o método da comparação para determinar a natureza das seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{3n^2 + 100}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 5n + 10}{2n^5 + n^3 + 20}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{3n^3 + 2}}$

Exercício 29 Use o critério da razão para determinar a natureza das seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+5)!}{2^n n^2 n!}$

Exercício 30 Aplique o critério da raiz para determinar a natureza das seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+5} \right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^{2n}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}$

Exercício 31 Através do critério do integral determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 5}$

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ } p \text{ constante}$

2.2.2 Séries alternadas

Exercício 32 Analise as seguintes séries quanto à convergência simples e absoluta.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\text{b)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\text{e)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^2(n)}$$

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^2 + 1}$$

$$\text{h)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+n^5}{2+n}$$

Exercício 33 (Exame 2009/10) Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n^5}{n+2}.$$

$$\text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3}{\sqrt[n^3+2]}.$$

Exercícios recomendados do livro de texto, Volume II:

Séries de termos não negativos: páginas 718, 727 e 732

Séries de termos alternados: páginas 737, 743, 745

3 Séries de potências

3.1 Polinómio e série de Taylor

Exercício 34 Determine o polinómio de Taylor de grau n , expandido em torno de x_0 para cada uma das seguintes funções:

- a) $f(x) = e^{-x}$, $n = 3$ e $x_0 = 0$ b) $f(x) = x \cos(x)$, $n = 2$ e $x_0 = \frac{\pi}{2}$
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$ e $x_0 = 9$ d) $f(x) = \ln(1 + x)$, $n = 4$ e $x_0 = 0$

Exercício 35 Determine as séries de Taylor das seguintes funções, através de expansões em torno de x_0 e encontre os respectivos intervalos de convergência.

- a) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$ b) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
c) $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $x_0 = 1$ d) $f(x) = 2^{x+1}$, $x_0 = -1$

Exercício 36 Determine o intervalo e o raio de convergência das seguintes séries de potências.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} (2x-1)^n$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-1)^n$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{2n}} (x-4)^n$

3.2 Operações com séries de potências

Exercício 37 Através de operações de substituição e/ou derivação e/ou integração e partindo de alguns desenvolvimentos fundamentais, encontre as séries de potências das funções abaixo indicadas e indique os maiores intervalos abertos em que estas séries são convergentes.

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ | b) $f(x) = e^{-2x^2}$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ | d) $f(x) = \ln(1+x)$ |
| e) $f(x) = \sin(2x) + x \cos(2x)$ | f) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ |
| g) $f(x) = x \sin(3x)$ | h) $f(x) = \frac{3}{(3-x)(1+2x)}$ |

Exercício 38 Fazendo uso de algumas expansões em série de MacLaurin, determine as somas das seguintes séries numéricas.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n!}$	b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! 4^n}$
c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1) 2^{2n}}$	d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1) 5^{n+1}}$

Exercício 39 (Exame 2009/10) Considere o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

- Determine o seu intervalo de convergência.
- Determine a série de MacLaurin de $g(x) = x^2 \ln(1+2x)$.

Alguns desenvolvimentos fundamentais

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, x < 1$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in \mathbb{R}$	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$

Exercícios recomendados do livro de texto, Volume II:

Séries de potências: página 751, 756, 772 e 784

4 Funções de várias variáveis reais

4.1 Domínios de funções e curvas de nível

Exercício 40 Para cada uma das seguintes funções indique o domínio e represente-o geometricamente.

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 + 2xy$

c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{y + 3}$

d) $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

f) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{y^2 + 3}$

g) $f(x, y) = \ln(xy)$

h) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

j) $f(x, y) = x e^{-\sqrt{y+2}}$

k) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

l) $f(x, y) = \sqrt{y \cdot \operatorname{sen}(x)}$

Exercício 41 Esboce a curva de nível $z = k$ para os valores de k especificados:

a) $z = x^2 + y^2; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$

b) $z = \frac{y}{x}; \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$

c) $z = x^2 + y; \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$

d) $z = x^2 - y^2; \quad k = -2, -1, 0, 1, 2$

4.2 Limites e continuidade

Exercício 42 Determine, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (4x^2 - xy)$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, -\pi)} xy^2 \operatorname{sen}(xy)$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2y^3)$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{2x^2+y^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{2x^2+y^2}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

Exercício 43 Considere a função f dada por $f(x,y) = \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$.

a) Mostre que f tende para 0 quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ao longo de qualquer recta $y = mx$ ou ao longo de qualquer parábola $y = kx^2$.

b) Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$, tomando $(x,y) \rightarrow (0,0)$, ao longo da curva $y = x^3$. Que pode concluir acerca da existência de limite, no ponto $(0,0)$?

Exercício 44 Determine o domínio de continuidade das seguintes funções:

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.3 Diferenciação

Exercício 45 Para cada uma das seguintes funções calcule as derivadas parciais de 1^a e 2^a ordem:

a) $f(x,y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$ b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = e^x \cos(y) + 2^x xy$ d) $f(x,y) = \ln(4x - 5y)$

e) $f(x, y) = e^{x-y^2}$

f) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + y^2)$

g) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

h) $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Exercício 46 Expresse as seguintes derivadas em notação "ô":

a) f_{xxx}

b) f_{xyy}

c) f_{yyxx}

d) f_{xyyy}

Exercício 47 Para cada uma das seguintes funções calcule as derivadas parciais de 1ª ordem:

a) $f(x, y, z, w) = 4x^2y^3z^4w^5.$

b) $f(x, y, z, w) = x \cos(yz) + e^w \sin(wx).$

Exercício 48 Suponha que $z = x^2y$, $x = t^2$, $y = t^3$. Use a derivada da função composta para calcular $\frac{dz}{dt}$, para $t = 2$.

Exercício 49 Use a derivada da função composta para determinar:

a) $\frac{dz}{dt}$ e sabendo que:

i. $z = 3x^2y^3$, $x = t^4$, $y = t^2$

ii. $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{\frac{2}{3}}$.

b) $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ sabendo que:

i. $z = \frac{x}{y}$, $x = 2 \cos(u)$, $y = 3 \sin(v)$

ii. $z = 3x - 2y$, $x = u + v \ln(u)$, $y = u^2 - v \ln(v)$

iii. $z = e^{x^2y}$, $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{1}{v}$.

Exercício 50 Usando a derivação implícita determine:

a) $\frac{dy}{dx}$ sabendo que:

i. $x^2y^3 + \cos(y) = 0$ define implicitamente y em função de x .

ii. $e^{xy} + y e^y = 1$ define y como função implícita de x .

b) $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ sabendo que:

i. $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$ define implicitamente z em função de x e y .

ii. $y e^x - 5 \operatorname{sen}(3z) = 3z$ define implicitamente z em função de x e y .

iii. $\ln(1+z) + xy^2 + z = 1$ define implicitamente z em função de x e y .

c) Sabendo que $y^2 - 2xy = 0$,

i. Calcule, se possível, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ no ponto $(1, 2)$.

ii. É possível calcular $\frac{dy}{dx}$ no ponto $(3, 5)$?

Exercício 51 (Exame 2009/10) Sabendo que $5 \operatorname{sen}(3z) = y e^x - 3z$ calcule, se possível, $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(1, 0, 0)$.

Exercício 52 Encontre a equação cartesiana para o plano tangente e para a recta normal à superfície no ponto M :

a) $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$; $M = (4, 9, 5)$ b) $f(x, y) = x e^{-y}$; $M = (1, 0, 1)$

c) $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$; $M = (-1, 0, 0)$ d) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $M = (0, 0, 5)$

e) $x^2y - 4z^2 = -7$; $M = (-3, 1, -2)$

Exercício 53 Determine:

a) todos os pontos da superfície definida pelas equações a seguir, nos quais o plano tangente é horizontal.

i. $z = x^3y^2$.

ii. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

iii. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

iv. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

b) um ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ no qual o plano tangente é paralelo ao plano $6x + 4y - z = 5$.

c) todos os pontos da superfície $x^3 + y^2 - z^2 = 1$ nos quais a recta normal é paralela à recta que passa por $P = (1, -2, 1)$ e $Q = (4, 0, -1)$.

Exercício 54 (Exame 2009/10) Considere a função f definida em $D \subset \mathbb{R}^2$, por

$$f(x, y) = xy^2 + \ln(1 + x^2 - y^2).$$

Determine a equação do plano tangente à superfície, dada pela função f , no ponto $M = (x_0, y_0, z_0)$ e tal que $x_0 = 1 = y_0$.

4.4 Otimização

Exercício 55 Para cada uma das seguintes funções conclua quanto à existência de máximos, mínimos e pontos de sela:

a) $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$

b) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

c) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

e) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

f) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$

Exercício 56 Seja $f(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$ com $a \neq 0, b \neq 0$.

- Determine a e b de modo que f tenha um máximo local no ponto $(1, 1)$.
- Para os valores a e b da alínea anterior verifique se a função tem outros máximos locais, mínimos locais e pontos sela.

Exercício 57 Para cada uma das seguintes funções conclua quanto à existência de extremos condicionados:

a) $f(x, y) = x + 2y$ quando $x^2 + y^2 = 4$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita a $4x^2 + y^2 = 8$

c) $f(x, y, z) = xyz$ quando $xy + yz + zx = 8$.

d) (Exame 20011/12) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ quando $x = y$.

e) $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ quando $xyz = 32$.

Exercício 58 Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que está:

- o mais próximo do ponto $(1, 2, 2)$
- o mais afastado do ponto $(1, 2, 2)$

Exercícios recomendados do livro de texto, Volume II:

Domínios, curvas de nível e continuidade: páginas 896, 897 e 906

Diferenciabilidade: páginas 918, 928, 936, 949, 955, 975 e 994

Optimização: páginas 959 e 968

5 Soluções

Apresentam-se as soluções de cada um dos capítulos.

5.1 Soluções do Capítulo 1

Exe. 1

i.

a) $D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e $\text{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. b) $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, $\text{Im}(f^{-1}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e $D_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

ii.

a) $D_g = \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ e $\text{Im}(f) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. b) $x = \frac{-1}{3}$.

c) $g^{-1}(x) = \frac{1}{3} (\cos(2x + \frac{\pi}{2} - 1))$, $\text{Im}(g^{-1}) = \left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ e $D_{g^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

iii.

a) $D_h = \left[-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right]$ e $\text{Im}(h) = [-2\pi, 4\pi]$. b) $x = -\frac{9}{10}$.

c) $h^{-1}(x) = \frac{-1+7\sin(\frac{x-\pi}{6})}{5}$, $\text{Im}(h^{-1}) = \left[-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right]$ e $D_{h^{-1}} = \text{Im}(h) = [-2\pi, 4\pi]$.

iv.

a) $D_m = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ e $\text{Im}(m) = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. b) $x = \frac{\sqrt{2}+2}{6}$.

c) $m^{-1}(x) = \frac{1+\cos(\frac{\pi-2x}{2})}{3}$, $\text{Im}(m^{-1}) = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ e $D_{m^{-1}} = \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exe. 2

$D_f = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

Soluções

Exe. 3

a) $\frac{1}{4}$.

b) 3.

c) 1.

d) 1.

e) $e^1 = e$.

f) 1.

Exe. 4

a) $x^2 + \frac{x^4}{4} - x^5 + C$.

b) $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 3| + C$.

c) $-\frac{4^{2-3x}}{3 \ln(4)} + C$.

d) $\ln |\ln(x)| + C$.

e) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x}) + C$.

f) $-\frac{1}{4(2x-3)^2} + C$.

Exe. 5

a) $\frac{1}{2} e^{2x} (x+2) - \frac{1}{4} e^{2x} + C$.

b) $-x \cos(x) + \sin(x) + C$.

c) $\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right) \ln(x) - \frac{x^3}{9} - 2x + C$.

d) $\frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + C$

e) $\frac{(2x+1)^8}{16} x - \frac{(2x+1)^9}{288}$

f) $e^{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} - 2e^{\sqrt{x}} + C$.

g) $2 \sin(x) e^{\sin(x)} - 2 e^{\sin(x)} + C$.

h) $\frac{x^3}{3} \arcsen(x) + \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 + \frac{2}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

Exe. 6

a) $\frac{1}{12} \operatorname{tg}^2(6x) - \frac{1}{6} \ln |\sec(6x)| + 3 \ln |\sin(\frac{x}{3})| + C$.

b) $\frac{1}{10} \sin^4(2x) \cos(2x) - \frac{1}{30} \sin^2(2x) \cos(2x) - \frac{1}{15} \cos(2x) + C$.

c) $-\frac{\sin^3(x) \cos(x)}{4} + \frac{3}{8} (x - \sin(x) \cos(x)) + C$.

d) $\ln |\sec(x) + \tan(x)| - \sin(x) + C$.

e) $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(x) + C$.

f) $-\frac{1}{\sin(x)} + C$.

Exe. 7

a) $2 \ln \left| \frac{2-\sqrt{4-9x^2}}{3x} \right| + \sqrt{4-9x^2} + C$.

b) $-\frac{\sqrt{16+x^2}}{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{16+x^2}}{4} + \frac{x}{4} \right| + C$.

c) $\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} + 2 \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \right| + C$.

Exe. 8

a) $\ln|x| - \ln|x+1| + C.$

b) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{3}{2} \ln|x+1| + \frac{5}{2} \ln|x-1| + C.$

c) $\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C.$

d) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + C.$

Exe. 9

a) 20.

b) $\frac{13}{2}.$

c) 0.

Exe. 10 $\frac{125}{6}.$ **Exe. 11** $\frac{155}{6}.$ **Exe. 12** $\frac{7}{3}.$ **Exe. 14** $\pi^2.$ **Exe. 15** $\pi \ln(4).$ **Exe. 16**

a) Converge.

b) Diverge.

c) Converge.

d) Diverge.

e) Diverge.

f) Converge.

5.2 Soluções do Capítulo 2

Exe. 25

- a) Convergente (5). b) Convergente (1). c) Convergente (45).
d) Convergente $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e-1}}\right)$. e) Convergente (3). f) Divergente.
g) Convergente $\left(\frac{3}{16}\right)$. h) Convergente $\left(\frac{5}{2}\right)$. i) Divergente.

Exe. 26

- a) Convergente (1). b) Convergente (1). c) Convergente $\left(\frac{3}{4}\right)$.
d) Convergente $\left(\frac{1}{2}\right)$. e) Convergente $\left(\frac{2}{3}\right)$. f) Convergente (1).

Exe. 27

- a) Divergente. b) Divergente. c) Convergente. d) Divergente.

Exe. 28

- a) Divergente. b) Convergente. c) Divergente.
d) Divergente. e) Convergente. f) Divergente.

Exe. 29

- a) Convergente. b) Divergente. c) Divergente.
d) Convergente. e) Divergente. f) Convergente.

Exe. 30

- a) Convergente. b) Convergente. c) Convergente.
d) Convergente. e) Divergente. f) Convergente.

Exe. 31

- a) Divergente. b) Convergente. c) Divergente.
d) Convergente. e) Convergente. f) Convergente se $p > 1$; divergente se $p \leq 1$.

Exe. 32

- a) Converge absolutamente. b) Converge absolutamente.
- c) Converge condicionalmente. d) Converge condicionalmente.
- e) Converge absolutamente. f) Divergente.
- g) Converge absolutamente. h) Converge condicionalmente.
- i) Divergente.

Exe. 33

- a) Convergente. b) Divergente. c) Converge absolutamente.

5.3 Soluções do Capítulo 3**Exe. 34**

- a) $P_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$
- b) $P_2(x) = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2$
- c) $P_3(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9) - \frac{1}{216}(x - 9)^2 + \frac{1}{3888}(x - 9)^3.$
- d) $P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$

Exe. 35

- a) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, \forall x \in \mathbb{R}.$
- b) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}.$
- c) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x - 1)^n, \forall x \in]0, 2[.$
- d) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln^n(2)}{n!} (x + 1)^n, \forall x \in \mathbb{R}.$

Exe. 36

- a) $[-1, 1 [.$ b) $\mathbb{R}.$
- c) $]0, 1[.$ d) $[1, 1].$ (intervalo degenerado)

e) $[-1, 1]$.

f) $[4 - \frac{1}{e^2}, 4 + \frac{1}{e^2}]$.

Exe. 37

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n, \quad |x| < \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}, \quad |x| < 1$.

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < 1$.

e) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}(3+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1$.

g) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

h) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{7} (-1)^n 2^{n+1} \right) x^n, \quad |x| < 1/2$.

Exe. 38

a) $2(e^{-2} - 1)$.

b) $e^{-1/4} - 1$.

c) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right)$.

d) $\ln \left(\frac{5}{4} \right)$.

Exe. 39

a) $] -1, 1 [$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+3}$.

5.4 Soluções do Capítulo 4

Exe. 40

a) $D_f = \mathbb{R}^2$.

b) $D_f = \mathbb{R}^2$.

c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge y \neq -3\}$.

d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x\}$.

- e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y^2\}.$

f) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}.$

g) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}.$

h) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$

i) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\}.$

j) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -2\}.$

k) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$

l) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq 0 \wedge \sin(x) \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin(x) \leq 0)\}.$

Exe. 42

- a) 1. b) $-\frac{\pi^2}{2}$.
c) 0. d) Não existe.
e) Não existe. f) 1.
g) ∞ . h) 0.

Exe. 43

- a) - b) Não existe.

Exe. 44

- a) \mathbb{R}^2 . b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exe. 45

- a) $f_x(x, y) = 8x - 8y^4$,
 $f_y(x, y) = -32xy^3 + 35y^4$,
 $f_{xx}(x, y) = 8$,
 $f_{xy}(x, y) = -32y^3$,
 $f_{yy}(x, y) = -96xy^2 + 140y^3$.

- $$\begin{aligned} b) \quad & f_x(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1/2}, \\ & f_y(x, y) = y(x^2 + y^2)^{-1/2}, \\ & f_{xx}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2} - x^2(x^2 + y^2)^{-3/2}, \\ & f_{xy}(x, y) = -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}, \\ & f_{yy}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2} - y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Soluções

c) $f_x(x, y) = e^x \cos(y) + \ln(2)2^x xy + 2^x y,$

$$f_y(x, y) = -e^x \sin(y) + 2^x x,$$

$$f_{xx}(x, y) = e^x \cos(y) + \ln^2(2)2^x xy + 2 \ln(2)2^x y,$$

$$f_{xy}(x, y) = -e^x \sin(y) + 2^x + \ln(2)2^x x,$$

$$f_{yy}(x, y) = -e^x \cos(y).$$

d) $f_x(x, y) = \frac{4}{4x-5y},$

$$f_y(x, y) = \frac{-5}{4x-5y},$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-16}{(4x-5y)^2},$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{20}{(4x-5y)^2},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{-25}{(4x-5y)^2}.$$

e) $f_x(x, y) = e^{x-y^2},$

$$f_y(x, y) = -2y e^{x-y^2},$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{x-y^2},$$

$$f_{xy}(x, y) = -2y e^{x-y^2},$$

$$f_{yy}(x, y) = (-2 + 4y^2) e^{x-y^2}.$$

f) $f_x(x, y) = \frac{1}{1+(x+y^2)^2},$

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1+(x+y^2)^2},$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-2x-2y^2}{(1+(x+y^2)^2)^2},$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{-4yx-4y^3}{(1+(x+y^2)^2)^2},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{2+2x^2+2y^4-4xy^2-8y^4}{(1+(x+y^2)^2)^2}.$$

g) $f_x(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2},$

$$f_y(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2},$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-4y}{(x+y)^3},$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{2y-2x}{(x+y)^2},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

h) $f_x(x, y) = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},$

$$f_y(x, y) = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-12x^2y^2+4x^4}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{8x^3y-8xy^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{12y^2x^2-4x^4}{(x^2+y^2)^3}.$$

Exe. 46

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_{xxx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right). & \text{b)} \quad f_{xyy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right). \\ \text{c)} \quad f_{yyxx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \right) \right). & \text{d)} \quad f_{yyy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Exe. 47

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_x(x, y, z, w) &= 8xy^3z^4w^5, \\ f_y(x, y, z, w) &= 12x^2y^2z^4w^5, \\ f_z(x, y, z, w) &= 16x^2y^3z^3w^5, \\ f_w(x, y, z, w) &= 20x^2y^3z^4w^4. \\ \text{b)} \quad f_x(x, y, z, w) &= \cos(yz) + w e^w \cos(wx), \\ f_y(x, y, z, w) &= -xz \sin(yz), \\ f_z(x, y, z, w) &= -xy \sin(yz), \\ f_w(x, y, z, w) &= e^w \sin(wz) + x e^w \cos(wx). \end{aligned}$$

Exe. 48 448

Exe. 49

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \text{i. } & 42t^{13}. \\ \text{ii. } & \frac{6t^{1/3} + 2}{6t^{4/3} + 3t}. \\ \text{b)} \quad \text{i. } & \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-2 \sin(u)}{3 \sin(v)}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-6 \cos(u) \cos(v)}{9 \sin^2(v)}. \\ \text{ii. } & \frac{\partial z}{\partial u} = 3 - 4u + \frac{3v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 3 \ln(u) + 2 \ln(v) + 2. \\ \text{iii. } & \frac{\partial z}{\partial u} = e^u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Exe. 50

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \text{i. } & \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2 - \sin(y)}. \\ \text{ii. } & \frac{dy}{dx} = -\frac{ye^{xy}}{xe^{xy} + (1+y)e^y}. \\ \text{b)} \quad \text{i. } & \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + yz}{-6yz + xy}, \\ & \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3z^2 + xz}{xy - 6yz}. \\ \text{ii. } & \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y e^x}{-3 - 15 \cos(3z)}, \\ & \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^x}{-3 - 15 \cos(3z)}. \end{aligned}$$

Soluções

- iii. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y^2(1+z)}{2+z}$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2xy(1+z)}{2+z}$.
- c) i. $\frac{dy}{dx}(1, 2) = 2$, $\frac{d^2y}{dx^2}(1, 2) = 0$.
ii. Não, porque $(3, 5) \notin \{(x, y) \mid y^2 - 2xy = 0\}$.

Exe. 51 $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 0) = 0$

Exe. 52

- a) Plano: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y - z = -\frac{5}{2}$; recta: $4(x - 4) = 6(y - 9) = -(z - 5)$.
- b) Plano: $x - y - z = 0$; recta: $x - 1 = -y = -(z - 1)$.
- c) Plano: $x + z + 1 = 0$; recta: $x + 1 = z \wedge y = 0$.
- d) Plano: $z = 5$; recta: $x = y = 0$.
- e) Plano: $-6x + 9y + 16z = -5$; recta: $\frac{x+3}{-6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z+2}{16}$.

Exe. 53

- a) i. $\{(x, y, z) \mid z = 0 \wedge (x = 0 \vee y = 0)\} = \{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$.
ii. $(0, -2, -4)$.
iii. $(0, 0, 0)$.
iv. $M_1 = (0, 0, -1)$ e $M_2 = (0, 0, 1)$.
- b) $M = (1, -2, -1)$.
- c) $M_1 = (1, 1, 1)$.

Exe. 54 $-3x + z + 2 = 0$.

Exe. 55

- a) 1 mínimo local. b) 1 ponto sela.
- c) 1 máximo local e um ponto sela. d) 2 mínimos e 1 ponto sela.
- e) 2 mínimos locais. f) 1 máximo local.

Exe. 56

- a) $a = b = 1$.
b) 4 pontos sela.

Exe. 57

- a) 1 máximo condicionado e 1 mínimo condicionado.

- b) 2 máximos condicionados e 2 mínimos condicionados.
- c) 1 mínimo condicionado e 1 máximo condicionado.
- d) 1 máximo condicionado e 2 mínimos condicionados.
- e) 1 mínimo condicionado.

Exe. 58

- a) $(2, 4, 4)$.
- b) $(-2, -4, -4)$.