**Universidade de Coimbra**
*Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores*

---

## CCEE - Controlo por Computador no Espaço de Estados 2021/2022
## TP3-Trabalho Prático nº3

Controlo por Computador no Espaço de Estados de um two-wheel Self-Balancing Robot: Simulação e Aplicação num Kit MinSeg

(Version 1.1 | 19/05/2022)

---


Figura 1: Kit MinSeg "Dual Axis Balance".

Data Limite de Entrega (cópia em papel): 13/06/2022 (10h-12h)
***- No inforestudante: relatório e ficheiros Matlab /Simulink até às 20h:00 (11/06/2022)***

## Objectivo

Projeto e análise de um sistema de controlo no espaço de estados de um *two-wheel Self-Balancing Robot* (SBR). O principal objetivo é manter o SBR sempre na sua posição vertical, mesmo quando sujeito a perturbações externas.

**Modelo do Self-Balancing Robot (SBR)** Na Fig.2 ilustra-se a estrutura geométrica e os diversos parâmetros necessários à obtenção do modelo dinâmico do SBR, na qual se considera a nomenclatura contida na Tabela 1.

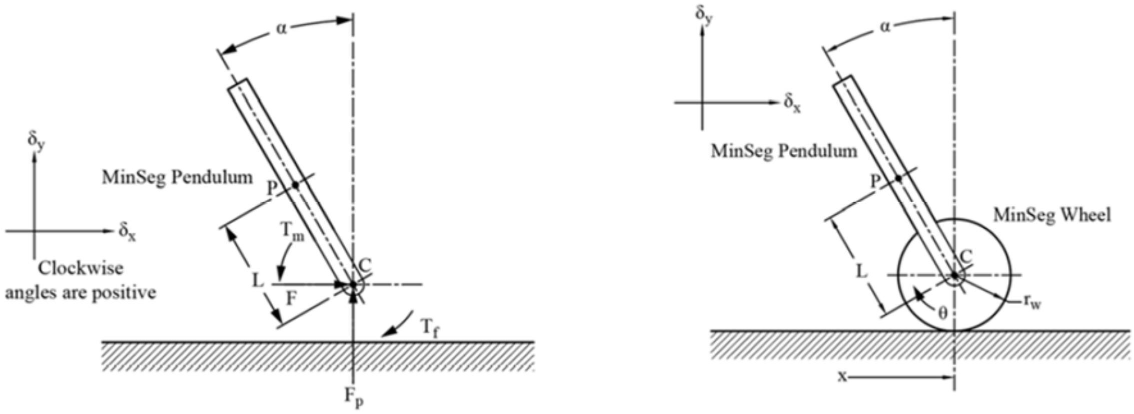

Figura 2: Estrutura geométrica e parâmetros do SBR [1].

| | |
|---|---|
| P: Ponto de referência do pêndulo | $T_f$: Fricção da roda |
| α: Posição do pêndulo | $T_m$: Binário do motor DC |
| L: Distância do centro da roda até P | $R_m$: Resistência do motor |
| C: Centro da roda | $K_t$: Constante de binário do motor |
| $M_p$: Massa do pêndulo | $K_b$: Constante do motor |
| $I_P$: Momento de Inercia em P | $M_w$: Massa das duas rodas |
| X: Distância percorrida pela roda | $R_w$: Raio da roda |
| $F_P$: Força do pêndulo na roda | $I_W$: Momento de Inercia no centro da roda |
| F: Força horizontal no eixo do motor | Θ: Posição da roda (*relative to inertial frame*) |

Tabela 1: Nomenclatura do SBR.

Aplicando a 2ª lei de Newton ao somatório das forças aplicadas ao SBR e as leis de Kirchhoff ao circuito elétrico do motor DC, é possível obter as seguintes equações que descrevem o modelo não linear do SBR (ver desenvolvimento em [1]):

$$(I_P + L^2 M_p)\ddot{\alpha} + L\cos(\alpha)\, M_p \ddot{x} = -\frac{K_t}{R_m}V + gL\sin(\alpha)\, M_p + \frac{K_b K_t}{R_m R_w}\dot{x} - \frac{K_b K_t}{R_m}\dot{\alpha} \quad (1)$$

$$L\cos(\alpha) M_p R_w \ddot{\alpha} + \left(\frac{I_w}{R_w} + M_p R_w + M_w R_w\right)\ddot{x} = \frac{K_t}{R_m}V - \frac{K_b K_t}{R_m R_w}\dot{x} + \frac{K_b K_t}{R_m}\dot{\alpha} \quad (2)$$

O modelo anterior pode ser linearizado para o desejado ponto de equilíbrio ($\alpha = 0$) aplicando as seguintes simplificações: $\sin(\alpha) \approx \alpha$ e $\cos(\alpha) = 1$. A partir de (1) e (2 e aplicando as simplificações referidas, é possível obter o seguinte modelo linear, definido no espaço de estados, do SBR:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{gLM_p\left((M_p + M_w)R_w^2 + I_w\right)}{a_2} & -\frac{a_1 K_b K_t}{a_2 R_m} & 0 & \frac{a_1 K_b K_t}{a_2 R_m R_w} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{gL^2 M_p^2 R_w^2}{a_2} & \frac{a_3 K_b K_t R_w}{a_2 R_m} & 0 & -\frac{a_3 K_b K_t}{a_2 R_m} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a_1 K_t}{a_2 R_m} \\ 0 \\ \frac{a_3 K_t R_w}{a_2 R_m} \end{bmatrix} .V(t)$$

onde:

$$a_1 = I_w + R_w\big(M_p(L + R_w) + M_w R_w\big)$$

$$a_2 = I_w\big(I_p + L^2 M_p\big) + R_w^2\big(I_p\big(M_p + M_w\big) + L^2 M_p M_w\big)$$

$$a_3 = I_p + L M_p(L + R_w)$$

## Parâmetros do "Dual Axis Balance" MinSeg Kit

Considere o SBR com os seguintes parâmetros: $R_m$=14 Ohm; $K_b$=0.1343 V.s/rad; $K_t$=0.0948 N.m/A; L=0.045 m; $M_p$=0.296 Kg; $M_w$=0.032 Kg (massa das 2 rodas); $R_w$=0.022 m; $I_p$=0 Kg.m$^2$; $I_w$=1/2*$M_w$*$R_w^2$ Kg.m$^2$; g=9.81 m/s$^2$; h=0.03 s.

Substituindo os valores dos diversos parâmetros do SBR, resulta o seguinte modelo linear no espaço de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1562.3 & -30.01 & 0 & 1364.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -60.495 & 1.2822 & 0 & -58.282 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -223.46 \\ 0 \\ 9.5473 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Trabalho Prático

### Parte I: Controlador LQR, Simulação (Matlab & Simulink)

Utilize, em todas as simulações, as seguintes condições iniciais: $[\alpha_0 \quad \dot{\alpha}_0 \quad x_0 \quad \dot{x_0}] = [-0.17453 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.

1) Com base nas eqs (1) e (2) desenvolva e implemente o modulo Simulink do modelo não linear do SBR (modulo "Modelo Não Linear" na Fig.4. Faça a validação do modelo com base em simulações.
2) Recorrendo a um processo de simulação-ajuste do controlador, obtenha um sistema de controlo por computador, no espaço de estados, conforme ilustrado nas Fig. 3 e Fig.4. No projeto do controlador utilize o projeto LQR.
3) Aplique, em t=2s, uma perturbação (em forma de degrau) no estado α no valor de 0.17454 rad. Apresente sinais de simulação (t=0…6s) da resposta dos estados (com especial foco em α e $x$), comando de tensão e outros considerados pertinentes. Analise, comente, e compare os resultados relativos a simulações com os sistemas da Fig.3 e Fig.4.

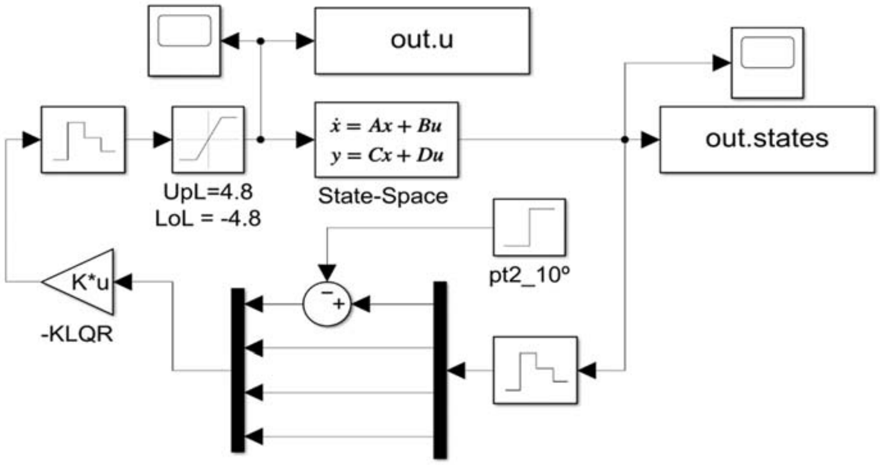


Figura 3: Sistema de controlo no Espaço de Estados.

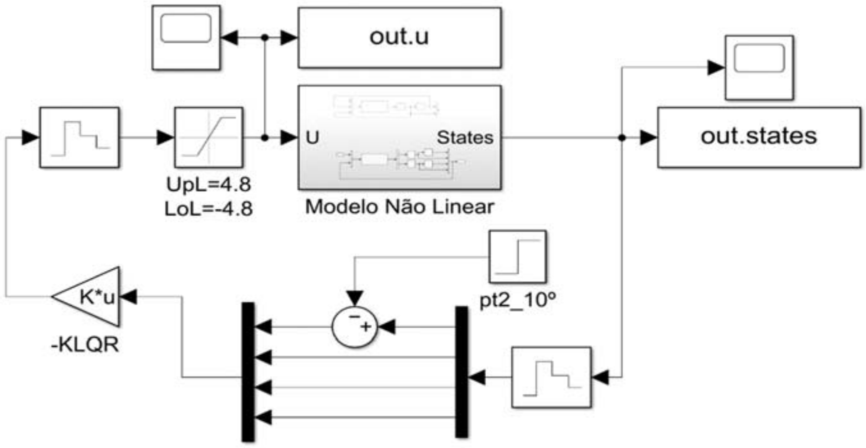


Figura 4: Sistema de controlo no modelo não linear.

## Parte II: Controlador LQR aplicado no kit MinSeg

Considere que a tensão de entrada do motor deve estar compreendida entre -4.8V e 4.8V (Vsupply = 4.8V); EncCov = 2π/1336 (constante para transformar os pulsos do encoder em distância angular); GyroRad= $4.2386e^{-05}\pi$ (constante para transformar o valor obtido do giroscópio em velocidade angular (rad/s)). A Fig. 5 apresenta os diversos módulos do sistema de controlo, a aplicar no Kit MinSeg, implementado no ficheiro "TP3_MinSeg_SBR.slx".

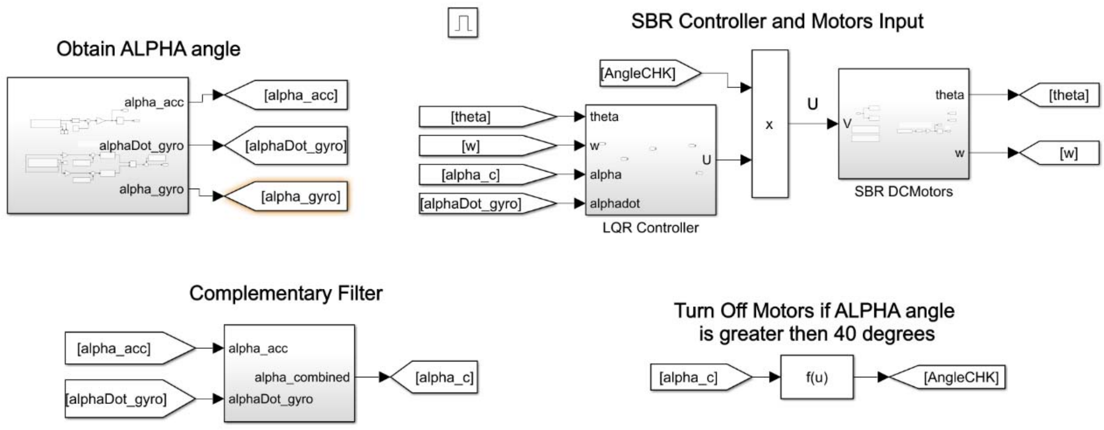


Figura 5: Módulos do sistema de controlo do SBR Kit MinSeg.

1) Implemente, no módulo Simulink "LQR Controller" ilustrado na Fig. 5, um projeto de controlo LQR.
2) Considere os ganhos obtidos pelo método LQR: $K_{LQR} = [K_\alpha \quad K_{\dot{\alpha}} \quad K_x \quad K_{\dot{x}}]$. A fim de serem utilizados no kit MinSeg, os ganhos obtidos têm que ser alterados para $K'_{LQR} = [K_\alpha \quad K_{\dot{\alpha}} \quad R_w K_x \quad R_w K_{\dot{x}}]$. Explique o porquê.
3) Programe o kit MinSeg com o controlador LQR projetado. Analise e apresente os sinais dos estados (com especial foco em α e $x$), comando de tensão e outros considerados pertinentes. Aproximadamente em t = 5s, faça uma ligeira perturbação no kit MinSeg. Analise e comente os resultados.
4) Faça um estudo, com base teórica e recorrendo a simulações, sobre o filtro complementar utilizado para se obter a posição do pendulo (α) (ver Fig.6).

Notas Práticas:

- A posição de referência no MinSeg Kit é dada pela posição em que o MinSeg Kit é inicializado. Consequentemente, o MinSeg kit deve ser inicializado na sua posição vertical.

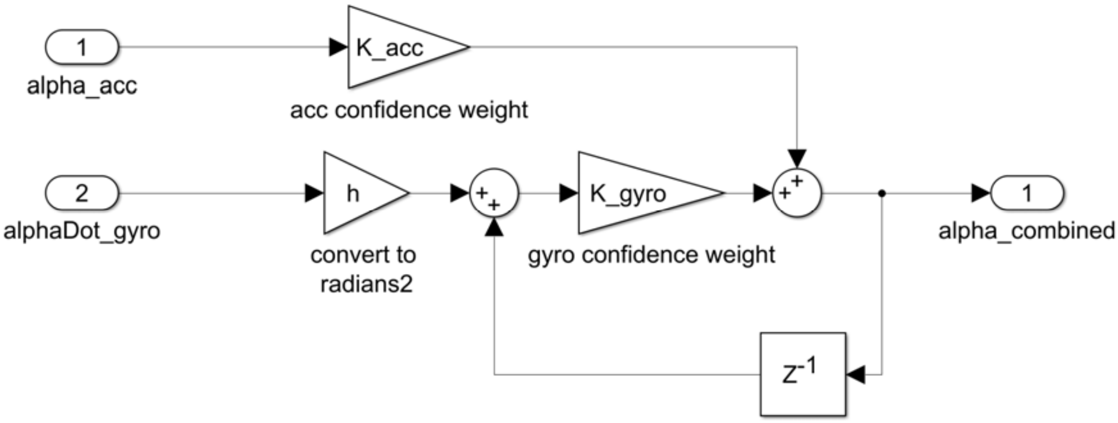


Figura 6: Filtro Complementar com K_acc=0.02 e K_gyro=0.98.

## Bibliografia

[1] B. Howard and L. Bushnell, "Enhancing Linear System Theory Curriculum with an Inverted Pendulum Robot," American Control Conference (ACC), 2015.

Urbano J. Nunes e Ricardo Pereira

Version 1.0: 04/05/2022
Version 1.1: 19/05/2022