

**Universidade de Coimbra**

*Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores*

---

**CCEE - Controlo por Computador no Espaço de Estados 2021/2022**  
**TP3-Trabalho Prático nº3**

Controlo por Computador no Espaço de Estados de um two-wheel Self-Balancing Robot: Simulação e Aplicação num Kit MinSeg  
(Version 1.0 | 04/05/2022)

---



Figura 1: Kit MinSeg “Dual Axis Balance”.

**Objectivo**

Projeto e análise de um sistema de controlo no espaço de estados de um two-wheel *Self-Balancing Robot* (SBR). O principal objetivo é manter o SBR sempre na sua posição vertical, mesmo quando sujeito a perturbações externas.

**Modelo do Self-Balancing Robot (SBR)** Na Fig.2 ilustra-se a estrutura geométrica e os diversos parâmetros necessários à obtenção do modelo dinâmico do SBR, na qual se considera a nomenclatura contida na Tabela 1.

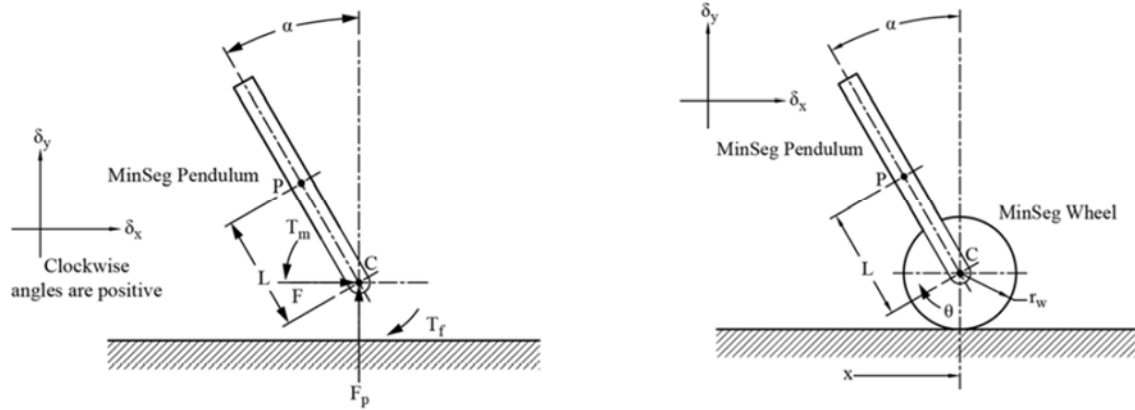


Figura 2: Estrutura geométrica e parâmetros do SBR [1].

P: Ponto de referência do pêndulo	T <sub>f</sub> : Fricção da roda
α: Posição do pêndulo	T <sub>m</sub> : Binário do motor DC
L: Distância do centro da roda até P	R <sub>m</sub> : Resistência do motor
C: Centro da roda	K <sub>t</sub> : Constante de binário do motor
M <sub>p</sub> : Massa do pêndulo	K <sub>b</sub> : Constante do motor
I <sub>p</sub> : Momento de Inercia em P	M <sub>w</sub> : Massa da roda
X: Distância percorrida pela roda	R <sub>w</sub> : Raio da roda
F <sub>p</sub> : Força do pêndulo na roda	I <sub>w</sub> : Momento de Inercia no centro da roda
F: Força horizontal no eixo do motor	Θ: Posição da roda ( <i>relative to inertial frame</i> )

Tabela 1: Nomenclatura do SBR.

Aplicando a 2ª lei de Newton ao somatório das forças aplicadas ao SBR e as leis de Kirchhoff ao circuito elétrico do motor DC, é possível obter as seguintes equações que descrevem o modelo não linear do SBR (ver desenvolvimento em [1]):

$$(I_p + L^2 M_p) \ddot{\alpha} + L \cos(\alpha) M_p \ddot{x} = -\frac{K_t}{R_m} V + g L \sin(\alpha) M_p + \frac{K_b K_t}{R_m R_w} \dot{x} - \frac{K_b K_t}{R_m} \dot{\alpha} \quad (1)$$

$$L \cos(\alpha) M_p R_w \ddot{\alpha} + \left( \frac{I_w}{R_w} + M_p R_w + M_w R_w \right) \ddot{x} = \frac{K_t}{R_m} V - \frac{K_b K_t}{R_m R_w} \dot{x} + \frac{K_b K_t}{R_m} \dot{\alpha} \quad (2)$$

O modelo anterior pode ser linearizado para o desejado ponto de equilíbrio ( $\alpha = 0$ ) aplicando as seguintes simplificações:  $\sin(\alpha) \approx \alpha$  e  $\cos(\alpha) = 1$ . A partir de (1) e (2) e aplicando as simplificações referidas, é possível obter o seguinte modelo linear, definido no espaço de estados, do SBR:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g L M_p ((M_p + M_w) R_w^2 + I_w)}{a_2} & -\frac{a_1 K_b K_t}{a_2 R_m} & 0 & \frac{a_1 K_b K_t}{a_2 R_m R_w} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g L^2 M_p^2 R_w^2}{a_2} & \frac{a_3 K_b K_t R_w}{a_2 R_m} & 0 & -\frac{a_3 K_b K_t}{a_2 R_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a_1 K_t}{a_2 R_m} \\ 0 \\ \frac{a_3 K_t R_w}{a_2 R_m} \end{bmatrix} \cdot V(t)$$

onde:

$$\begin{aligned}a_1 &= I_w + R_w(M_p(L + R_w) + M_w R_w) \\a_2 &= I_w(I_p + L^2 M_p) + R_w^2(I_p(M_p + M_w) + L^2 M_p M_w) \\a_3 &= I_p + L M_p(L + R_w)\end{aligned}$$

## Parâmetros do “Dual Axis Balance” MinSeg Kit

Considere o SBR com os seguintes parâmetros:  $R_m=14 \text{ Ohm}$ ;  $K_b=0.1343 \text{ V.s/rad}$ ;  $K_t=0.0948 \text{ N.m/A}$ ;  $L=0.045 \text{ m}$ ;  $M_p=0.296 \text{ Kg}$ ;  $M_w=0.032 \text{ Kg}$  (massa das 2 rodas);  $R_w=0.022 \text{ m}$ ;  $I_p=0 \text{ Kg.m}^2$ ;  $I_w=1/2 * M_w * R_w^2 \text{ Kg.m}^2$ ;  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ ;  $h=0.03 \text{ s}$ .

Substituindo os valores dos diversos parâmetros do SBR, resulta o seguinte modelo linear no espaço de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1562.3 & -30.01 & 0 & 1364.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -60.495 & 1.2822 & 0 & -58.282 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -223.46 \\ 0 \\ 9.5473 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Trabalho Prático

### Parte I: Controlador LQR, Simulação (Matlab & Simulink)

Utilize, em todas as simulações, as seguintes condições iniciais:  $[\alpha_0 \quad \dot{\alpha}_0 \quad x_0 \quad \dot{x}_0] = [-0.17453 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ .

- 1) Com base nas eqs (1) e (2) desenvolva e implemente o módulo Simulink do modelo não linear do SBR (módulo “Modelo Não Linear” na Fig.4. Faça a validação do modelo com base em simulações.
- 2) Recorrendo a um processo de simulação-ajuste do controlador, obtenha um sistema de controlo por computador, no espaço de estados, conforme ilustrado nas Fig. 3 e Fig.4. No projeto do controlador utilize o projeto LQR.
- 3) Aplique, em  $t=2s$ , uma perturbação (em forma de degrau) no estado  $\alpha$  no valor de  $0.17454 \text{ rad}$ . Apresente sinais de simulação ( $t=0...6s$ ) da resposta dos estados (com especial foco em  $\alpha$  e  $x$ ), comando de tensão e outros considerados pertinentes. Analise, comente, e compare os resultados relativos a simulações com os sistemas da Fig.3 e Fig.4.

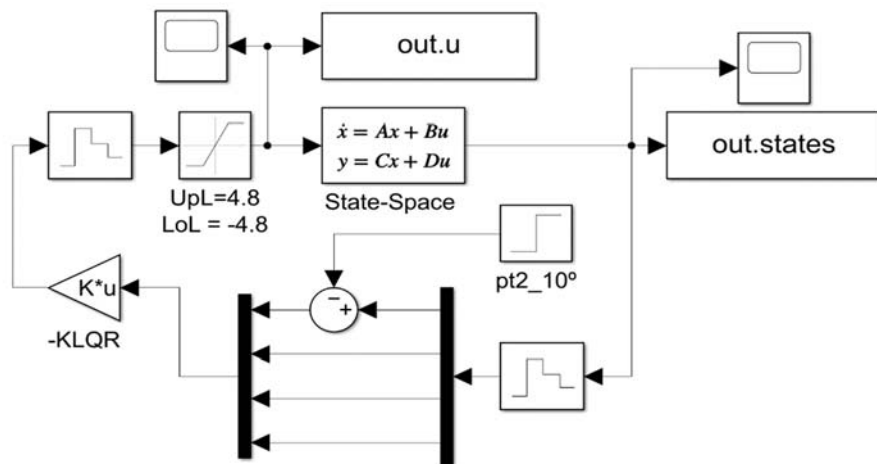


Figura 3: Sistema de controlo no Espaço de Estados.

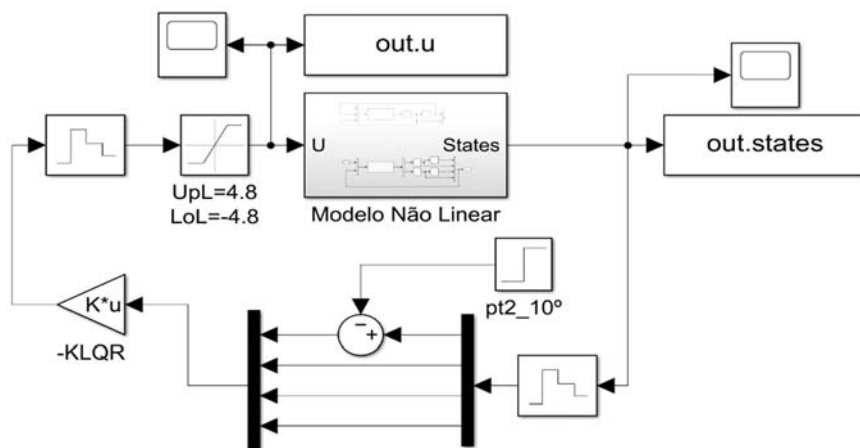


Figura 4: Sistema de controlo no modelo não linear.

## Parte II: Controlador LQR aplicado no kit MinSeg

Considere que a tensão de entrada do motor deve estar compreendida entre -4.8V e 4.8V ( $V_{supply} = 4.8V$ );  $EncCov = 2\pi/1336$  (constante para transformar os pulsos do encoder em distância angular);  $GyroRad = 4.2386e^{-05}\pi$  (constante para transformar o valor obtido do giroscópio em velocidade angular (rad/s)). Na Fig. 5 está ilustrado um sistema de controlo a aplicar no Kit MinSeg e implementado no ficheiro “TP3\_MinSeg\_SBR.slx”.

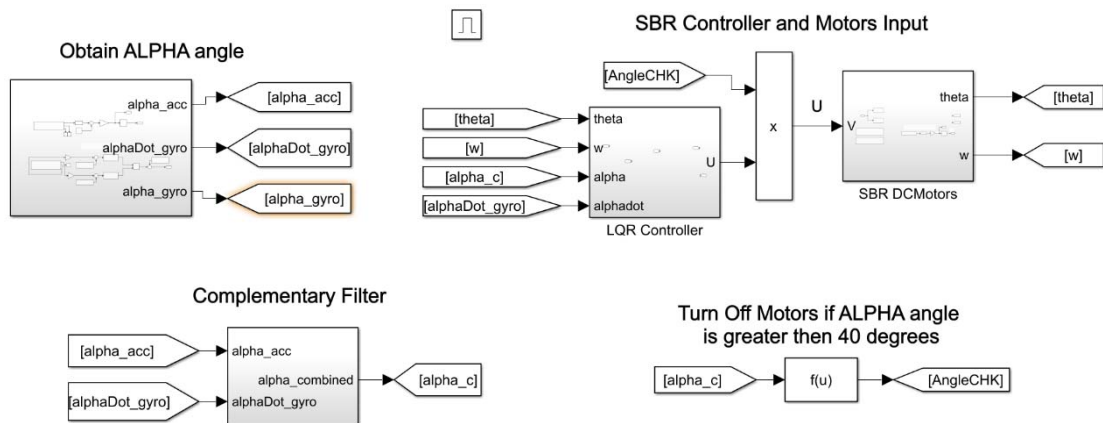


Figura 5: Sistema de controlo do SBR Kit MinSeg.

- 1) Implemente, no módulo Simulink “LQR Controller” ilustrado na Fig. 5, um projeto de controlo LQR.
- 2) Considere os ganhos obtidos pela técnica de controlo LQR:  $K_{LQR} = [K_\alpha \ K_{\dot{\alpha}} \ K_x \ K_{\dot{x}}]$ . De forma a serem utilizados no kit MinSeg, os ganhos obtidos têm que ser alterados para  $K'_{LQR} = [K_\alpha \ K_{\dot{\alpha}} \ R_w K_x \ R_w K_{\dot{x}}]$ . Explique o porquê.
- 3) Programe o kit MinSeg com o controlador LQR projetado. Analise e apresente os sinais dos estados (com especial foco em  $\alpha$  e  $x$ ), comando de tensão e outros considerados pertinentes. Aproximadamente em  $t = 5s$ , faça uma ligeira perturbação no kit MinSeg. Analise e comente os resultados.

## Bibliografia

[1] B. Howard and L. Bushnell, "Enhancing Linear System Theory Curriculum with an Inverted Pendulum Robot," American Control Conference (ACC), 2015.