四川大学期末考试试题（闭卷）

（2022——2023 学年　第 1 学期）　　A 卷

课程号：201018030 课序号：　　　课程名称：概率统计（理工）任课教师：　　　　成绩：
适用专业年级：　　　学生人数：　　印题份数：　　　　　　　学号：　　　　　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。这里的“样本”都是指“简单随机样本”。除不尽的结果请保留最简分数或指数形式。

附：标准正态分布的分布函数值：$\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1.96) = 0.975.$

t 分位数：$t_{0.95}(15) = 1.7531, t_{0.975}(15) = 2.1315, t_{0.95}(16) = 1.7459, t_{0.975}(16) = 2.1199$

χ^2 分位数：$\chi^2_{0.05}(15) = 7.261, \chi^2_{0.95}(15) = 24.996, \chi^2_{0.025}(16) = 7.962, \chi^2_{0.95}(16) = 26.296$

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 将一个半径为 1cm 的圆形硬币随机地抛在半径为 20cm 的圆形凳面上，则硬币不与凳面边缘相交的概率为_______.

2. 设二维随机变量(X, Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} Cx, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，其中 C 为常数，则概率 $P(X + Y \le 1) =$ ______.

3. 设随机变量 $Y \sim e(1)$ (指数分布)，随机变量 $X_k=\begin{cases} 0, & Y\le k \\ 1, & Y>k \end{cases}$，$k = 1, 2$. 则 $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) =$ _______.

4. 设二维随机变量$(X, Y) \sim N(1, 0;\ 4, 9;\ -0.5)$ (二维正态分布)，则 $Z = 3X + 2Y$ 的变异系数 $C_v=\dfrac{\sqrt{D(Z)}}{|E(Z)|}$ 为_______.

5. 设总体 $X \sim \Gamma(3, 2)$ (Γ 分布)，$X_1, X_2, ..., X_n$ 为来自 X 的样本. 则当 $n\to\infty$时，$Y_n=\dfrac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 依概率收敛于_______.

6. 设 $X_1, X_2, ..., X_{13}$ 和 $Y_1, Y_2, ..., Y_{10}$ 分别是来自总体 $N(-2, 9)$和 $N(1, 4)$的样本，样本均值分别为 $\bar{X},\bar{Y}$. 设两总体相互独立，若 $C\dfrac{\sum_{i=1}^{13}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{k=1}^{10}(Y_k-\bar{Y})^2}$ 服从 F 分布，则常数 $C =$ ______.

二、解答题 （共 82 分）

1. (12 分) 某班教师发现在考试及格的学生中有 85%的学生按时交作业，而在考试不及格的学生中只有 35%的学生按时交作业，现在知道有 90%的学生考试及格. 从这个班级中随机地抽取一位学生.

(1) 求抽到的这位学生是按时交作业的概率;

(2) 若已知抽到的这位学生是按时交作业的，求他考试及格的概率.

2. (10 分) 开展某项检测时采用 $n(n > 1)$混 1 的混管检测，即每 n 人的样本混成一管进行一次检测，只有这 n 个人全是阴性，检测结果才是混管阴性. 设人群中的阳性率为 p $(0 < p < 1)$，检测没有误差，每次混管的 n 个人是否阴性是相互独立的. 现在发现一支混管阳性，以 X 记参与这支混管检测的 n 人中阳性的人数. 求: (结果用 n 和 p 表示)

(1) 随机变量 X 的概率分布律;

(2) 这 n 人中平均有多少人阳性？

3. (10 分) 设有一传递游戏，首先在箱子中装入足够的游戏币，在传递过程中，经手人随机地以相同的概率选择从箱子中拿走 2 枚、拿走 1 枚、不拿也不加、加入 1 枚、加入 2 枚游戏币，然后将箱子传给下一个人. 设各经手人的行为是相互独立的，求经过 200 人传递后，箱子内的游戏币数目增减不超过 10 枚的概率.

4. (16 分)设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 X 的边缘密度 $f_X(x)$；

(2) 求条件密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$和条件概率 $P\left(Y<\frac{1}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$;

(3) 求 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

5. (12 分) 设一台设备开机后能无故障工作的时间 $X \sim e(1)$ (单位: 小时). 现该设备的工作方式为: 若出现故障则自动关机，若未出现故障，则工作 1 小时后关机. 求该设备的工作时间 Y 的期望 $E(Y)$和方差 $D(Y)$.

6. (12 分) 某工程师测试一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做了 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 $X_1, X_2, \dots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, 利用$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$估计参数 σ:

(1) 求 Z_1 的概率密度;

(2) 求参数 σ 的极大似然估计量.

7. (10 分) 在正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$中抽取样本容量为 16 的样本，测得样本均值为 $\overline{x}$ =5.2，样本方差

$s^2 = 2.56$.

(1) 求 μ 的置信度为 95%的置信区间;

(2) 请问 σ^2 是否显著大于 2.5？即作假设检验 H_0: $\sigma^2 \le 2.5$, H_1: $\sigma^2 > 2.5$. $(\alpha = 0.05)$