

Cours #1

Images : définition, modélisation, exemples

Nicolas Passat & Esther Fontaine



CHPS0703 Traitement d'images

Image

Image : un objet polysémique

- un objet **physique**
- un objet **numérique**

Avec, en général, une charge sémantique

Image : une définition

- Une image est la représentation **spatiale** d'une **grandeur physique**
- Une image est la **représentation spatiale** d'une **grandeur physique**

Le point de vue physique

Pour produire une image

il faut 3 composants

- un **objet / une scène** : ce qui est observé
- un **medium** : ce qui porte l'information d'observation
- un **capteur** : ce qui collecte / structure l'information

Exemples de triplets (**objet, medium, capteur**)

- (**paysage, lumière du soleil, œil**)
- (**bâtiment, lumière infra-rouge, caméra thermique**)
- (**corps humain, rayons X, plaque photosensible**)

Point de vue physique \rightarrow point de vue mathématique

L'image produite

- En chaque point x d'un espace Ω
- une valeur v d'une certaine nature \mathbb{V} relative à une grandeur physique est mesurée

Une image est une fonction

$$\begin{array}{rccc} F & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{V} \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

Premiers éléments de modélisation : dimensions

En général :

- Ω est une partie de \mathbb{R}^d : $\prod_{i=1}^d [\alpha_i, \omega_i] \rightarrow d$ est la dimension spatiale
- \mathbb{V} est une partie de \mathbb{R}^k : $\prod_{j=1}^k [a_j, z_j] \rightarrow k$ est la dimension spectrale

Point de vue mathématique → point de vue numérique

Image “physique” vs. image “numérique”

Une image, au sens physique est un objet :

- continu **spatialement**
- continu **spectralement**

mais, les images numériques que nous manipulons sont obtenues par des dispositifs d'acquisition artificiels :

- composés d'un **nombre fini de capteurs**
- qui réalisent des **mesures quantifiées**

Donc, une image, au sens numérique, est un objet :

- discret **spatialement**
- discret **spectralement**

Point de vue mathématique → point de vue numérique

Image au sens physique

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

Image au sens numérique

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{Z}^d & \rightarrow & \mathbb{Z}^k \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} F & : & \prod_{i=1}^d [\![\alpha_i, \omega_i]\!] & \rightarrow & \prod_{j=1}^k [\![a_j, z_j]\!] \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

Modélisation informatique d'une image

Reformulation

En posant $\sigma_i = \omega_i - \alpha_i$ et $\nu_j = a_j - z_j$, on peut reformuler (à constantes additives près) :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{N}^d & \rightarrow & \mathbb{N}^k \\ & & x & \mapsto & v \\ \hline F & : & \prod_{i=1}^d \llbracket 0, \sigma_i - 1 \rrbracket & \rightarrow & \prod_{j=1}^k \llbracket 0, \nu_j - 1 \rrbracket \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

Image = tableau multidimensionnel de vecteurs

Une image peut être modélisée informatiquement par :

- un tableau à d dimensions
- de taille σ_i sur chacune des dimensions respectives
- où chaque case contient un k -uplet $v = (v_j)_{j=1}^k$ encodé sur un type dont la taille permet la représentation de $(\max_j \nu_j)$ valeurs

Modélisation informatique d'une image

Reformulation

En posant $\sigma_i = \omega_i - \alpha_i$ et $\nu_j = a_j - z_j$, on peut reformuler (à constantes additives près) :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{N}^d & \rightarrow & \mathbb{N}^k \\ & & x & \mapsto & v \\ \hline F & : & \prod_{i=1}^d \llbracket 0, \sigma_i - 1 \rrbracket & \rightarrow & \prod_{j=1}^k \llbracket 0, \nu_j - 1 \rrbracket \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

Image = tableau multidimensionnel de vecteurs

Une image peut être modélisée informatiquement par :

- un tableau à d dimensions
- de taille σ_i sur chacune des dimensions respectives
- où chaque case contient un k -uplet $v = (v_j)_{j=1}^k$ encodé sur un type dont la taille permet la représentation de $(\max_j \nu_j)$ valeurs

Modélisation informatique d'une image

Image = tableau multidimensionnel de vecteurs

Exemple de la représentation pour une image à 2 dimensions spatiales et 3 dimensions spectrales :

$$T[x_1][x_2] = (v_1, v_2, v_3)$$

Alternative #1 : Image = tableau multidimensionnel de scalaires

Le vecteur encodé en chaque case donne lieu à une dimension supplémentaire du tableau.

Exemple de la représentation pour une image à 2 dimensions spatiales et 3 dimensions spectrales :

$$T[x_1][x_2][0] = v_1$$

$$T[x_1][x_2][1] = v_2$$

$$T[x_1][x_2][2] = v_3$$

Modélisation informatique d'une image

Image = tableau multidimensionnel de vecteurs

Exemple de la représentation pour une image à 2 dimensions spatiales et 3 dimensions spectrales :

$$T[x_1][x_2] = (v_1, v_2, v_3)$$

Alternative #2 : Image = tableau monodimensionnel de vecteurs

La matrice d -dimensionnelle est "déroulée" sur une seule dimension.

Idée : \mathbb{N}^d est en bijection avec \mathbb{N} (comment ?)

Plus simplement : $\prod_{i=1}^d \llbracket 0, \sigma_i - 1 \rrbracket$ est en bijection avec $\llbracket 0, (\prod_{i=1}^d \sigma_i) - 1 \rrbracket$

$$T[x_1 \cdot \sigma_1 + x_2] = (v_1, v_2, v_3)$$

Alternative #3 : Image = tableau monodimensionnel de scalaires

Composer les paradigmes des alternatives #1 et #2...

Modélisation algébrique d'une image

Moralité de l'analyse précédente

Toute image numérique

$$\begin{array}{rccc} F & : & \prod_{i=1}^d \llbracket 0, \sigma_i - 1 \rrbracket & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

peut être vue comme

$$\begin{array}{rccc} F & : & \llbracket 0, D - 1 \rrbracket & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

avec

$$D = k \cdot \prod_{i=1}^d \sigma_i$$

Modélisation algébrique d'une image

En d'autres termes

Toute image numérique

$$\begin{array}{rccc} F & : & \prod_{i=1}^d \llbracket 0, \sigma_i - 1 \rrbracket & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ & & x & \mapsto & v \end{array}$$

peut être vue (cf. alternative #3) comme un **vecteur**

$$\mathcal{V}_F = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

Modélisation algébrique d'une image

En d'autres termes

L'ensemble des images numériques

$$\begin{array}{rccc} F & : & \prod_{i=1}^d \llbracket 0, \sigma_i - 1 \rrbracket & \rightarrow \mathbb{R}^k \\ & & x & \mapsto v \end{array}$$

forme un espace vectoriel de dimension D dont une base est formée des vecteurs unitaires :

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \mathcal{V}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \mathcal{V}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Retour à la physique... les media

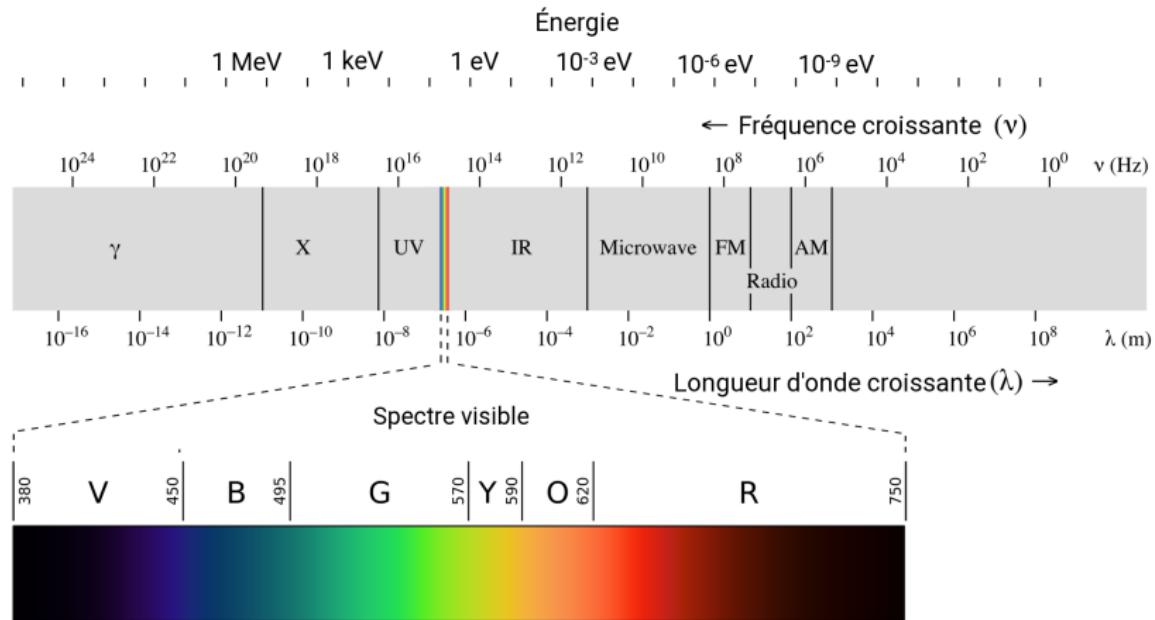
Que peut-on observer pour construire une image

- Lumière :
 - γ → astronomie, imagerie nucléaire
 - X → radiographie X, TDM
 - UV
 - visible → ...
 - (N)IR → thermique, télédétection
 - micro-onde → astronomie
 - radio → radar, IRM
- Son → sonar
- Rayonnement électronique : microscopie

Différents modes opératoires

Emission (directe ou induite), réflexion, absorption...

Retour à la physique... les media



Retour à la physique... les capteurs

Capteur naturels

Exemple : œil

Capteurs physiques (non-électroniques)

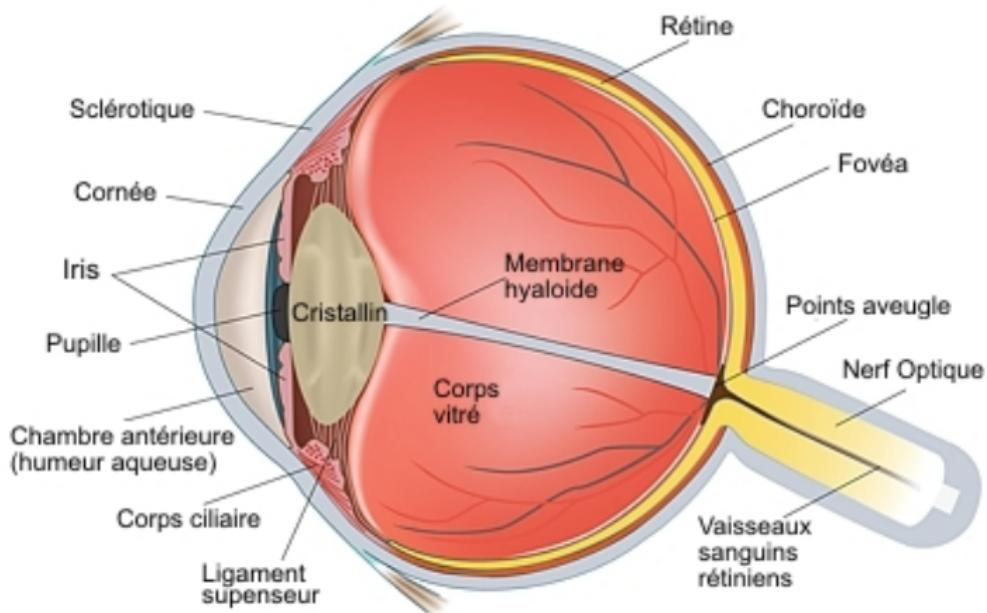
Exemple : pellicules argentiques, plaques radiographiques

Capteurs physiques (électroniques)

- matrices d'appareils photo / caméras numériques
- dispositifs tomographiques (TDM, imagerie nucléaire)
- antennes radiofréquence (IRM)
- ...

→ Les processus de reconstruction d'images dépendent des types de capteurs !

Retour à la physique... les capteurs



Propriétés des images numériques produites

Dans la plupart des cas

Les images sont souvent :

- à support cartésien
- isotropes

Mais parfois

Les images peuvent être :

- cartésiennes non-isotropes (imagerie médicale)
- non structurées (LIDAR)

Dans ce tels cas, il faut évidemment adapter les structures de données, les algorithmes, etc.