

Introduction à la Méthode des Éléments Finis

chapitre 1: " Maillages EF- \mathbb{P}_1 "

François Lefèvre

Laboratoire de Mathématiques de Reims

francois.lefeuvre@univ-reims.fr

Master/M1 - accréditation [2024-20xx]

1 Discrétisation

2 Pas et Qualité

3 Structure de Données

Définition

Soit le domaine Ω ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$). Un **maillage** \mathcal{T}_h est une **partition** de Ω en un **nombre finis** de sous-domaines K_I **convexes** (pratiquement : des segments en 1D, des triangles ou quadrangles en 2D, des tétraèdres ou hexaèdres en 3D) telle que

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{K_I \in \mathcal{T}_h} K_I$,
- tout élément K_I de \mathcal{T}_h est d'intérieur non vide,
- l'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_h est : soit l'ensemble vide, soit un sommet, soit une arête, soit une face commune (si 3D).

Lorsque les éléments K_I sont des **triangles** (2D) ou des **tétraèdres** (3D), on appelle \mathcal{T}_h **une triangulation**.

REM : La 2nde condition interdit les triangles/tétraèdres dégénérés (3 sommets alignés en 2D / 4 sommets coplanaires en 3D).

Le Pas (cas 2D)

Dans un triangle $T = (S_1, S_2, S_3)$ de sommets $S_i(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, on note les 3 arêtes $a_i = [S_i S_{i+1}]$ ($i = 1, 2, 3$) avec la convention que $S_4 = S_1$.

- ① Le **pas d'un triangle** T est

$$h_T = \max_{i \in \{1,2,3\}} L_i$$

où L_i désigne la longueur de l'arête a_i .

- ② Le **pas d'un maillage** \mathcal{T}_h est

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

La Qualité (cas 2D)

- ① La **qualité d'un triangle** T est définie par

$$Q_T = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{h_T}{r_T}$$

où h_T est le pas de T et r_T est le rayon de son cercle inscrit.

- ② La **qualité d'une triangulation** \mathcal{T}_h est définie par

$$Q_{\mathcal{T}_h} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} Q_T.$$

REM : le triangle équilatéral est de qualité égale à 1 (c'est la meilleure qualité possible). La qualité ne dépend que de la forme du triangle.

Fichier .msh de FreeFem++ (cas 2D)

- nbn : nombre total de nœuds (=sommets) du maillage,
- nbe : nombre total d'éléments (=triangles),
- nba : nombre total d'arêtes de frontière.
- coord(1:nbn,1:2) : tableau de réels contenant les coordonnées de tous les sommets (=nœuds) ordonnés en numérotation globale.
- tri(1:nbe,1:3) : tableau d'entiers contenant les indices (en numérotation globale) des trois sommets de chaque élément.
- arete(1:nba,1:2) : tableau d'entiers contenant les indices des deux sommets des arêtes **de frontière**.
- ref_noeud(1:nbn) : indices des références pour identifier les nœuds situés sur les différents sous-domaines ou parties du bord.
- ref_tri(1:nbe) : indices des références pour identifier les éléments des différents sous-domaines.
- ref_arete(1:nba) : indices des références pour identifier les arêtes des différentes parties du bord.