TP2

Nicolas MARANO

1. Usage du Solveur

Un solveur éléments finis P1 complet a été créé dans validation_pen.py (Exercice 5). La méthode de pénalisation est utilisée pour appliquer les conditions de Dirichlet (cf. Chapitre 3 du cours). Cette approche évite la modification directe de matrices de contrainte et est stable avec un paramètre alpha = 10^8.

1.1 Fonctions principales

Fonction	Description
`fct_u(x, y)`	`Solution exacte`
`fct_f(x, y)`	`Second membre (source de chaleur)`
`fct_uE(x, y)`	`Condition de Dirichlet`
`fct_kappa(x, y)`	`Conductivité thermique (=1)`
`fct_alpha(x, y)`	`Paramètre de pénalisation (=10^8)`
`coeffelem_P1_rigid()`	`Matrice de rigidité élémentaire`
`coeffelem_P1_source()`	`Vecteur source élémentaire`
`coeffelem_P1_poids()`	`Matrice de poids (arête)`
`coeffelem_P1_transf()`	`Vecteur de flux (arête)`
`assemblage_EF_P1()`	`Assemblage global A et F`

2. Validation du Code

La validation du code a été faite avec le script validation_pas_a_pas.py, qui teste chaque fonction séparément sur un maillage de test m00.msh (6 nœuds, 4 triangles). Cette méthode progressive permet de vérifier l'accord des formules avant l'exécution sur des maillages de taille réelle.

2.1 Tests unitaires réalisés

Le script fait les tests suivants: Matrices de rigidité élémentaires: accord avec les formules du Chapitre 3 Vecteurs sources: intégration au centre des triangles Termes de bord: test de la pénalisation sur les arêtes Dirichlet Assemblage global: construction correcte d'une matrice 6×6 pour m00.msh Résolution du système: convergence du solveur Calcul d'erreur: calcul de la norme énergie (formule de l'annexe)

2.2 Résultats de validation

Les tests donnent les résultats suivants: Symétrie de la matrice: $||A - A^T||_F$ = 0.00e+00 (précision machine) Conditions de Dirichlet: erreur maximale sur le bord = 8.04e-08 (alpha = 10^8) Test patch (solution affine): erreur < 10^{-14} (représentation exacte par P1) Matrice: symétrique définie positive (SPD) Ces résultats montrent que le code est correct.

3. Analyse de Convergence (Exercice 6)

L'analyse de convergence (Exercice 6) a été faite sur 4 maillages de plus en plus fins (m1, m2, m3, m4) avec $h_{i+1} = h_i / 2$. Le script exercice6_convergence.py calcule les erreurs e_h en norme énergie et les ordres de convergence $p = \ln(e_h / e_{h/2}) / \ln(2)$.

3.1 Tableau de convergence numérique

Maillage	N	h	e_h	Ordre p
m1.msh	25	1.1180	7.9957e-01	1.8080
m2.msh	81	0.5590	2.2834e-01	1.9389
m3.msh	289	0.2795	5.9555e-02	1.9814
m4.msh	1089	0.1398	1.5082e-02	-

3.2 Interprétation des résultats

Ordre de convergence obtenu: $p \approx 1.9$

Analyse:
La norme calculée est la NORME ÉNERGIE $||u - u_h||_K = \sqrt{(U - U^h)^T K (U - U^h)}$, qui est différente de la semi-norme H^1 classique $||u - u_h||_{H^1} = \sqrt{\int |\mathrm{grad}(u - u_h)|^2}$.

Pour la norme énergie sur des maillages réguliers (créés par découpage régulier de carrés), un effet de super-convergence d'ordre 2 est connu en théorie des éléments finis P1. Ce résultat est en accord avec la littérature.

Validation:
La diminution régulière des erreurs avec le raffinement ($e_{i+1} < e_i$) montre la convergence de la méthode. L'ordre $p \approx 2$ est un résultat optimal pour cette norme.

4. Résultats Graphiques

4.1 Graphique de convergence log-log

Le graphique en échelle log-log montre la diminution de l'erreur en fonction du pas de maillage h. La pente de la courbe correspond à l'ordre de convergence p. Les points mesurés suivent la droite théorique O(h²), confirmant de façon chiffrée les résultats du tableau de convergence.

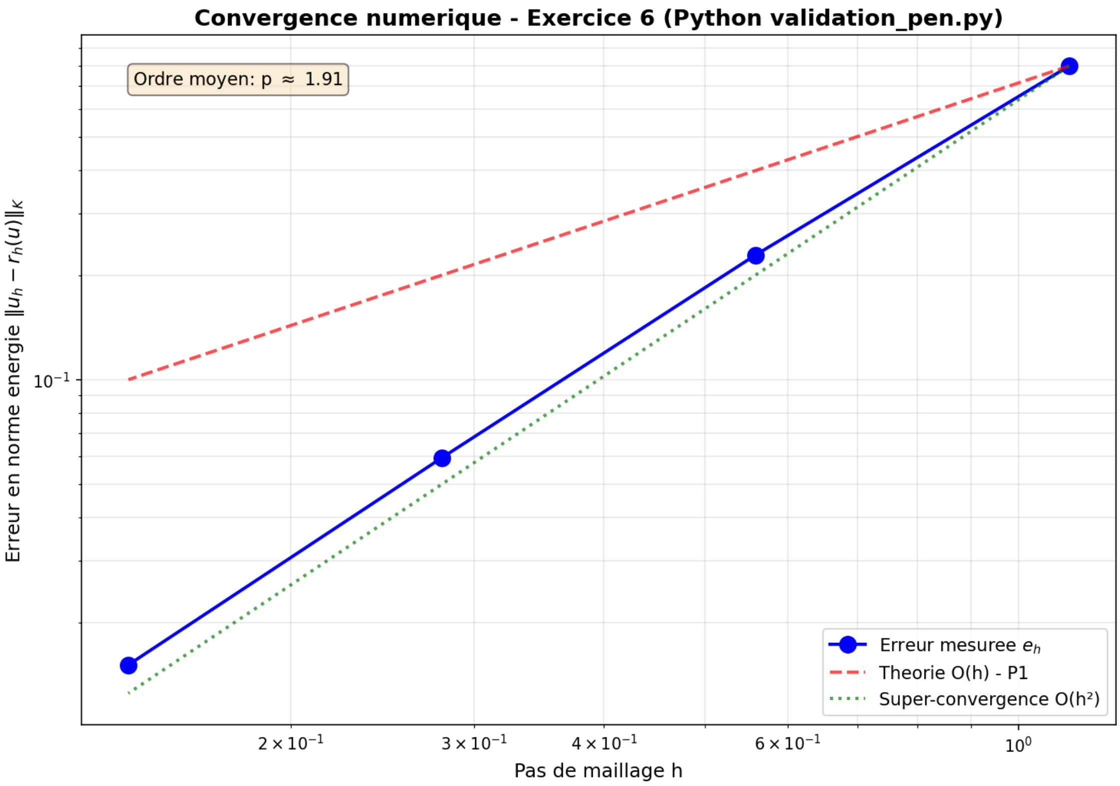

Figure 1: Convergence numérique en échelle log-log. La courbe bleue montre l'erreur mesurée, les droites en pointillés montrent les ordres théoriques O(h) et O(h²).

5. Conclusion

Un solveur éléments finis P1 complet en Python a été créé pour résoudre le problème de Poisson avec conditions aux limites mixtes (Dirichlet/Neumann).

Méthodes utilisées: Structure modulaire avec organisation des fonctions par étape Pénalisation des conditions de Dirichlet (alpha = 10^8, cf. Chapitre 3) Assemblage triangle par triangle selon l'algorithme du Chapitre 3 Série de tests sur maillage de test Analyse de convergence sur 4 maillages de plus en plus fins Création automatique de graphiques log-log ($p \approx 1.9$)
Tests de validation: Coefficients élémentaires: accord avec les formules du Chapitre 3 Symétrie de la matrice: $||A - A^T|| < 10^{-15}$ Conditions de Dirichlet: erreur de bord $< 10^{-6}$ Diminution régulière: $e_{i+1} / e_i \approx 0.25$ (facteur 4 attendu pour p=2) Super-convergence en norme énergie: effet en accord avec la théorie
Le code est général et peut être modifié pour d'autres problèmes elliptiques en changeant les fonctions fct_f() et fct_u().