Introduction à la Méthode des Éléments Finis chapitre 3: " Vers la programmation de la MEF$-\mathbb{P}_1$ "

François Lefèvre

Laboratoire de Mathématiques de Reims

francois.lefevre@univ-reims.fr

Master/M1 - accréditation [2024-20xx]

Plan du cours

Problème de la Thermique Stationnaire

Chercher **la température** $u(\mathrm{X})$ telle que :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} (o) & -\mathrm{div}(\kappa \nabla u(\mathrm{X})) & = & f(\mathrm{X}) & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ (i) & -\kappa \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(\mathrm{X}) & = & 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ (ii) & -\kappa \dfrac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}(\mathrm{X}) & = & \alpha(u(\mathrm{X}) - u_E) & \text{sur } \Gamma_F = \Gamma \backslash \Gamma_N \end{cases}$$

où $\kappa(\mathrm{X}) \geq \kappa_0 > 0$ est la *conductivité thermique*, $f(\mathrm{X})$ est la *source de chaleur*, $\alpha(\mathrm{X}) \geq \alpha_0 > 0$ est le *facteur du transfert thermique*, et u_E est la *température extérieure*. Tous donnés.

NB : Pour une grande valeur numérique de $\alpha(\mathrm{X})$ (ex : $\alpha = 10^8$), la cond. de Fourier-Robin devient une **condition de Dirichlet** : $u(\mathrm{X}) = u_E$.

Formulation Variationnelle

Soit V un espace de fonctions *suffisament régulières* [... typiquement $H^1(\Omega)$].
La **Formulation Variationnelle** de $(\mathcal{P})$ s'écrit :

$$(\mathcal{P}_v) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in S(= V \text{ ici}) \text{ telle que} \\ a(u,v) = L(v), \ \forall v \in V \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u : \textit{fct admissible} \\ v : \textit{fct test} \end{array} \right.$$

avec

$$\boxed{a(u,v) = \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dX} + \int_{\Gamma_F} \alpha \, u \, v \, \mathrm{dS}}$$

et

$$\boxed{L(v) = \int_\Omega f \, v \, \mathrm{dX} + \int_{\Gamma_F} \alpha \, u_E \, v \, \mathrm{dS}}$$

Problème bien posé (Thm de Lax-Milgram) :

$(\mathcal{P}_v)$ **admet une solution unique**

[... sous conditions de régularité : $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma_F)$]

(Addendum) Problème d'Optimisation et Pénalisation

Proposition : $(\mathcal{P}_v)$ est **équivalent** au problème d'optimisation

$$(\mathcal{P}_o) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \ / \ \mathcal{J}(u) = \min_{v \in V} \mathcal{J}(v) \\ \text{avec } \mathcal{J}(v) \doteq \dfrac{1}{2} a(v,v) - L(v) \end{cases}$$

et l'on a :

$$\boxed{\mathcal{J}(u) = \mathcal{J}_0(u) + \frac{\alpha}{2} ||u - u_E||^2_{0,\Gamma_F} + C}$$

avec $\mathcal{J}_0(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \kappa |\nabla u|^2 \, \mathrm{dX} - \int_\Omega f \, u \, \mathrm{dX}$ et $C = C^{te} = -\dfrac{\alpha}{2} \displaystyle\int_{\Gamma_F} u_E^2 \, \mathrm{dS}$

La fonctionnelle $\mathcal{J}(\bullet)$ dite **d'énergie**, à minimiser, est constituée d'une partie $\mathcal{J}_0(\bullet)$ qui correspond à **un problème de Neumann pur** plus d'**un terme de pénalisation** $\frac{\alpha}{2} ||u - u_E||^2_{0,\Gamma_F}$.

Lorsque α est une **très grande valeur**, on voit une fois de plus que l'on peut garantir une condition de Dirichlet $u \simeq u_E$ sur Γ_F.

Assemblage : 1er Principe Additif

Algorithme en **3 étapes additives** :

- **Etape #1 : initialisation à zéro**

$$a(u,v) \leftarrow 0\,; \quad L(v) \leftarrow 0\,;$$

- **Etape #2 : addition des termes volumiques [rigidité et source]**

$$a(u,v) \mathrel{+}= \int_\Omega \kappa \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{dX}\,; \quad L(v) \mathrel{+}= \int_\Omega f v \,\mathrm{dX}\,;$$

- **Etape #3 : addition des termes de bord [transfert thermique]**

$$a(u,v) \mathrel{+}= \int_{\Gamma_F} \alpha u v \,\mathrm{dS}\,; \quad L(v) \mathrel{+}= \int_{\Gamma_F} \alpha u_E v \,\mathrm{dS}\,;$$

Discrétisation de Galerkin

Introduisons un sous-espace $\boxed{V_h = \mathrm{vect}\{\phi_1, ..., \phi_N\} \subset V}$ de **dimension finie**. On considère alors le problème variationnel discrêt :

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h = \displaystyle\sum_{J=1}^{N} u_J \phi_J \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

On voit immédiatement que :

$$(\mathcal{P}_h) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(\phi_1, \phi_1) u_1 + ... + a(\phi_N, \phi_1) u_N = L(\phi_1) \\ \vdots \\ a(\phi_1, \phi_N) u_1 + ... + a(\phi_N, \phi_N) u_N = L(\phi_N) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{U}^h = \mathbb{F}.$$

$$\boxed{\mathbb{A} = (a(\phi_J, \phi_I))_{1 \leq I, J \leq N}; \quad \mathbb{U}^h = (u_J)_{1 \leq J \leq N} \in \mathbb{R}^N; \quad \mathbb{F} = (L(\phi_I))_{1 \leq I \leq N}.}$$

Fonctions Chapeaux EF-$\mathbb{P}_1$

En EF-$\mathbb{P}_1$, comme candidate pour ϕ_I, on prendra *la fonction chapeau* ψ_I :

$$\begin{cases} \psi_I \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), \\ \psi_{I|T_t}(\mathrm{X}) = a_t x + b_t y + c_t \in \mathbb{P}_1, \ \forall T_t \in \mathcal{T}_h, \\ \psi_I(M_J) = \delta_{IJ}, \ \forall (I,J) \in [\![1,N]\!] \times [\![1,N]\!]. \end{cases}$$

(fct ψ_I à dessiner), et :

$$\boxed{V_h \doteq \mathrm{vect}\{\psi_1, ..., \psi_N\} = \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \,/\, v_{|T_t} \in \mathbb{P}_1, \ \forall T_t \in \mathcal{T}_h\}.}$$

On a :

$$u_h(\mathrm{X}) = \sum_{J=1}^{N} u_h(M_J)\psi_J(\mathrm{X}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(\psi_I) = \bigcup_{T_t \text{ voisins de } M_I} T_t$$

// Interpolation des valeurs aux noeuds // La matrice $\mathbb{A}$ est CREUSE !!

// [en Python] `plot_trisurf(coord[:,0],coord[:,1],Uh,tri)`

$\Longrightarrow$ graphe de l'interpolation $\mathbb{P}_1$ des valeurs `Uh` aux sommets des triangles.

Termes matriciels

Pour assembler (=construire) le système, on doit calculer tous ces termes :

$$\mathbb{A}_{IJ} = a(\psi_J, \psi_I) = \underbrace{\int_\Omega \kappa \nabla \psi_J . \nabla \psi_I \, \mathrm{dX}}_{=K_{IJ}} + \underbrace{\int_{\Gamma_F} \alpha \, \psi_J \, \psi_I \, dl}_{=P_{IJ}} = K_{IJ} + P_{IJ}$$

$$\mathbb{F}_I = L(\psi_I) = \underbrace{\int_\Omega f \, \psi_I \, \mathrm{dX}}_{=F_I} + \underbrace{\int_{\Gamma_F} \alpha \, u_E \, \psi_I \, dl}_{=E_I} = F_I + E_I$$

[respectivement nommés : *Rigidité, Poids, Source, Transfert Extérieur*]

2nd Principe Additif

[Partition du maillage / Localité des supports]

$$\forall I \in [\![1, N]\!], \quad \int_\Omega \bullet\, \psi_I \,\mathrm{dX} = \sum_{T_t \in \mathcal{T}_h} \int_{T_t} \bullet\, \psi_I \,\mathrm{dX} = \sum_{T_t \subset \mathrm{Supp}(\psi_I)} \int_{T_t} \bullet\, \psi_I \,\mathrm{dX}$$

Mais on ne dispose d'aucune structure de données désignant les triangles voisins d'un sommet. On additionne plutôt les 3 contributions d'un élément T_t de sommets I_1, I_2, I_3, en bouclant sur les éléments :

$$\int_\Omega \bullet\, \psi_{I_1} \mathrm{dX} = \ldots + \int_{T_t} \bullet\, \psi_{I_1} \mathrm{dX} + \ldots$$

$$\int_\Omega \bullet\, \psi_{I_2} \mathrm{dX} = \ldots + \int_{T_t} \bullet\, \psi_{I_2} \mathrm{dX} + \ldots$$

$$\int_\Omega \bullet\, \psi_{I_3} \mathrm{dX} = \ldots + \int_{T_t} \bullet\, \psi_{I_3} \mathrm{dX} + \ldots$$

Coefficients élémentaires volumiques

Du global au local sur un triangle...

Posons $\psi_i^t = \psi_{I|T_t}$ si $\boxed{I = \mathtt{tri}(t,i)}$, et $\psi_j^t = \psi_{J|T_t}$ si $\boxed{J = \mathtt{tri}(t,j)}$.

On a les **termes "volumiques" sur un triangle** T_t :

$$K_{IJ}^t \doteq \int_{T_t} \kappa \, \nabla\psi_J . \nabla\psi_I \, \mathrm{dX} = \kappa^t \int_{T_t} \nabla\psi_j^t . \nabla\psi_i^t \, \mathrm{dX} \doteq k_{ij}^t \quad , \forall (i,j) \in \mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_3$$

[Rigidité élémentaire]

$$F_I^t \doteq \int_{T_t} f \, \psi_I \, \mathrm{dX} = \int_{T_t} f \, \psi_i^t \, \mathrm{dX} \doteq f_i^t \quad , \forall i \in \mathbb{N}_3.$$

[Source élémentaire]

Coefficients élémentaires de bord

Du global au local sur une arête...

Posons $\psi_i^a = \psi_{I|A_a}$ si $\boxed{I = \mathtt{ar}(a,i)}$, et $\psi_j^a = \psi_{J|A_a}$ si $\boxed{J = \mathtt{ar}(a,j)}$.

On a les **termes de bord sur une arête** A_a :

$$P_{IJ}^a \doteq \int_{A_a} \alpha\, \psi_J\, \psi_I\, dl = \alpha^a \int_{A_a} \psi_j^a\, \psi_i^a\, dl \doteq p_{ij}^a \quad , \forall (i,j) \in \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2,$$

[Poids élémentaire]

$$E_I^a \doteq \int_{A_a} \alpha\, u_E\, \psi_I\, dl = \alpha^a \int_{A_a} u_E\, \psi_i^a\, dl \doteq e_i^a \quad , \forall i \in \mathbb{N}_2,$$

[Transfert élémentaire]

Ces coefficients sont calculables soit exactement, soit approximativement (par des formules d'intégration numérique).

Matrices Élémentaires

$\Longrightarrow$ On rassemble tous ces **coefficients élémentaires** dans **des matrices élémentaires** :

sur un triangle T_t :

$$k^t = \begin{pmatrix} k_{11}^t & k_{12}^t & k_{13}^t \\ & k_{22}^t & k_{23}^t \\ sym & & k_{13}^t \end{pmatrix}, f^t = \begin{pmatrix} f_1^t \\ f_2^t \\ f_3^t \end{pmatrix},$$

sur une arête A_a :

$$p^a = \begin{pmatrix} p_{11}^a & p_{12}^a \\ sym & p_{22}^a \end{pmatrix}, e^a = \begin{pmatrix} e_1^a \\ e_2^a \end{pmatrix},$$

qu'on va maintenant assembler triangle par triangle, ou arête par arête...

$\mathbb{A}$ est symétrique, définie positive !

Algorithme d'Assemblage

$\mathbb{A} \leftarrow 0_{N\times N}$, $\mathbb{F} \leftarrow 0_{\mathbb{R}^N}$ % :initialisation (mat. & vec. nuls) ; Rem : N=`nbn`

pour $t \leftarrow 1$: `nbe` % :addition des termes volumiques

- calcul des coeff. élémentaires : $k^t = (k^t_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ et $f^t = (f^t_i)_{1\leq i\leq 3}$
- $I_1 \leftarrow \mathtt{tri}(t,1)$; $I_2 \leftarrow \mathtt{tri}(t,2)$; $I_3 \leftarrow \mathtt{tri}(t,3)$
- $\mathbb{A}(I_1,I_1) \mathrel{+}= k^t_{11}$; $\mathbb{A}(I_1,I_2) \mathrel{+}= k^t_{12}$; $\mathbb{A}(I_1,I_3) \mathrel{+}= k^t_{13}$; $\mathbb{F}(I_1) \mathrel{+}= f^t_1$
- $\mathbb{A}(I_2,I_1) \mathrel{+}= k^t_{21}$; $\mathbb{A}(I_2,I_2) \mathrel{+}= k^t_{22}$; $\mathbb{A}(I_2,I_3) \mathrel{+}= k^t_{23}$; $\mathbb{F}(I_2) \mathrel{+}= f^t_2$
- $\mathbb{A}(I_3,I_1) \mathrel{+}= k^t_{31}$; $\mathbb{A}(I_3,I_2) \mathrel{+}= k^t_{32}$; $\mathbb{A}(I_3,I_3) \mathrel{+}= k^t_{33}$; $\mathbb{F}(I_3) \mathrel{+}= f^t_3$

fin (pour t)

$\mathbb{K} \leftarrow \mathbb{A}$ % :matrice de rigidité (si calcul d'erreur)

pour $a \in$ `GammaF` % :addition des termes de bord

- calcul des coeff. d'arêtes : $p^a = (p^a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ et $e^a = (e^a_i)_{1\leq i\leq 2}$
- $I_1 \leftarrow \mathtt{ar}(\mathrm{a},1)$; $I_2 \leftarrow \mathtt{ar}(\mathrm{a},2)$
- $\mathbb{A}(I_1,I_1) \mathrel{+}= p^a_{11}$; $\mathbb{A}(I_1,I_2) \mathrel{+}= p^a_{12}$; $\mathbb{F}(I_1) \mathrel{+}= e^a_1$
- $\mathbb{A}(I_2,I_1) \mathrel{+}= p^a_{21}$; $\mathbb{A}(I_2,I_2) \mathrel{+}= p^a_{22}$; $\mathbb{F}(I_2) \mathrel{+}= e^a_2$

fin (pour a)