Cours #5
Opérateurs non-linéaires, morphologie mathématique

Nicolas Passat & Esther Fontaine

Université de Reims Champagne-Ardenne

CHPS0703 Traitement d'images

Certains opérateurs sont non-linéaires. . .

Rappels

- Une image I peut être vue comme un vecteur $\mathcal{V}_I$ dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
- Certains opérateurs de traitement d'images sont interprétables comme des applications linéaires $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ sur cet espace : ce sont des opérateurs linéaires.
  - Certains opérateurs sont convolutifs.
  - Certains opérateurs sont non-convolutifs.

Opérateurs non-linéaires

Tous les opérateurs agissant sur I ne sont pas forcément linéaires. . .
$\rightarrow$ Pourquoi ?

Des exemples d'opérateurs non-linéaires

Exemples d'opérateurs non-linéaires

- Modification d'intensité non-linéaire
  - égalisation d'histogramme
  - quantification
- (Pseudo-)convolutions dépendantes des valeurs
  - filtre bilatéral
  - moyennes non-locales
- (Pseudo-)convolutions non-linéaires
  - filtre de rang
  - filtre de choc

$\rightarrow$ De manière générale, un opérateur est non-linéaire si son comportement élémentaire (sur chaque vecteur de la base) est dépendant du contenu de l'image et/ou issu d'un processus aléatoire.

Morphologie mathématique

Un cadre pour les opérateurs non-linéaires : la morphologie mathématique

La morphologie mathématique (Matheron & Serra, 1964) propose un cadre théorique pour les opérateurs non-linéaires.

Deux paradigmes :

- cadre algébrique (treillis)
  - Erosions, dilatations
  - Ouvertures, fermetures
  - Opérateurs dérivés. . .
- cadre topologique (connectivité)
  - Ligne de partage des eaux
  - Modèles hiérarchiques
  - Opérateurs dérivés : opérateurs connexes

Morphologie mathématique : cadre algébrique

Treillis complet

Un treillis complet est un couple $(X, \leqslant)$ tel que :

- X est un ensemble
- $\leqslant$ est une relation d'ordre sur X
- $\forall S \subseteq X$, S admet un supremum dans $(X, \leqslant)$ noté $\bigvee S$
- $\forall S \subseteq X$, S admet un infimum dans $(X, \leqslant)$, noté $\bigwedge S$

Des exemples de treillis complets

- $(X, \leqslant)$ tel que $\leqslant$ est un ordre total
- $(2^{\Omega}, \subseteq)$ pour tout ensemble Ω (morphologie binaire)
- $(F^E, \leqslant)$ où $\leqslant$ est l'ordre point-à-point sur les fonctions induit par un ordre total $(F, \leq)$ (morphologie à niveaux de gris)

Morphologie mathématique : cadre algébrique

Adjonction

Soit $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ deux treillis, et

$$\delta : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$$
$$\varepsilon : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$$

deux applications. Elles forment une adjonction si $\forall x \in \mathcal{L}, \forall y \in \mathcal{M}$

$$\delta(x) \leqslant_{\mathcal{M}} y \iff x \leqslant_{\mathcal{L}} \varepsilon(y)$$

Un exemple (trivial) d'adjonction

- $\mathcal{L} = (\mathbb{R}, \leq)$ et $\mathcal{M} = (\mathbb{R}_+^*, \leq)$
- $\delta : x \mapsto \exp(x+1)$
- $\varepsilon : y \mapsto \ln(y) - 1$

Morphologie mathématique : cadre algébrique

Érosion, dilatation

Soit $\mathcal{L} = (X, \leqslant_X), \mathcal{M} = (Y, \leqslant_Y)$ deux treillis.
Soit (ε, δ) une adjonction sur ces treillis.

- δ est appelée dilatation et commute avec le supremum, i.e. $\forall S \subseteq X$:

$$\delta\left(\bigvee S\right) = \bigvee \delta(S)$$

- ε est appelée érosion et commute avec l'infimum, i.e. $\forall S \subseteq Y$:

$$\varepsilon\left(\bigwedge S\right) = \bigwedge \varepsilon(S)$$

Remarque

Dans la pratique, on aura généralement $\mathcal{L} = \mathcal{M}$.

Morphologie mathématique : cadre algébrique

Ouverture, fermeture

A partir de l'érosion $\varepsilon : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ et de la dilatation $\delta : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, on définit l'ouverture $\gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et la fermeture $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ par

$$\gamma = \delta\varepsilon$$

$$\varphi = \varepsilon\delta$$

Propriétés

- Stabilité : γ, φ agissent dans un unique treillis
- Idempotence : $\gamma\gamma = \gamma$, $\varphi\varphi = \varphi$
- Croissance : $x \leqslant y \Longrightarrow \gamma(x) \leqslant \gamma(y)$, $x \leqslant y \Longrightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$
- Extensivité, anti-extensivité
  - Extensivité : $x \leqslant \varphi(x)$
  - Anti-extensivité : $\gamma(x) \leqslant x$

Premier cadre d'utilisation : morphologie binaire

- $\mathbb{U}$ est l'espace euclidien ou cartésien : $\mathbb{U} = \mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).
- $X \subseteq \mathbb{U}$ est une image binaire (on note $X^c = \mathbb{U} \setminus X$ l'image négative)
- On considère le treillis puissance $(2^{\mathbb{U}}, \subseteq)$

Notion de translation (propriété d'espace vectoriel de $\mathbb{U}$)

- Pour $x \in \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{U}$, la translation de x par p est

$$x + p$$

- Pour $X \subseteq \mathbb{U}$ et $p \in \mathbb{U}$, la translation de X par p est

$$X_p = X + p = \{x + p \mid x \in X\}$$

N.B. : $X_0 = X$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Dilatation binaire : addition de Minkowski

- $X \subseteq \mathbb{U}$: image, objet
- $B \subseteq \mathbb{U}$: élément structurant

Somme de Minkowski de X et B :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b = \bigcup_{x \in X} B_x = \{x + b \mid x \in X, b \in B\}$$

La dilatation binaire (par B) est $\delta_B : 2^{\mathbb{U}} \to 2^{\mathbb{U}}$ telle que pour tout $X \subseteq \mathbb{U}$:

$$\delta_B(X) = X \oplus B$$

Remarque

La dilatation est similaire à un filtre de rang max sur la "fenêtre d'observation" B. (Attention : ce n'est pas une convolution !)

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Érosion binaire : soustraction de Minkowski

- $X \subseteq \mathbb{U}$: image, objet
- $B \subseteq \mathbb{U}$: élément structurant

Soustraction de Minkowski de X par B :

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \{p \in \mathbb{U} \mid B_p \subseteq X\}$$

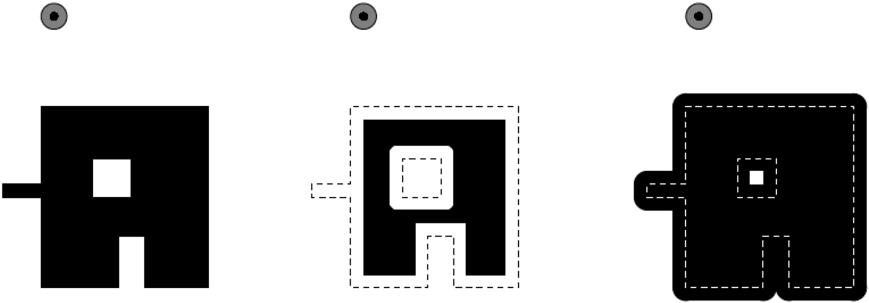
L'érosion binaire (par B) est $\varepsilon_B : 2^{\mathbb{U}} \to 2^{\mathbb{U}}$ telle que pour tout $X \subseteq \mathbb{U}$:

$$\delta_B(X) = X \ominus B$$

Remarque

La dilatation est similaire à un filtre de rang min sur la "fenêtre d'observation" B. (Attention : ce n'est pas une convolution !)

Morphologie mathématique : Morphologie binaire



Erosions / dilatations binaires : quelques propriétés

- $\{x\} \oplus \{p\} = \{x + p\}$
- $X \oplus \{p\} = X_p$
- $(X \oplus B)_p = X_p \oplus B = X \oplus B_p$
- $A \oplus B = B \oplus A$
- $X \oplus (A \oplus B) = (X \oplus A) \oplus B$
- $\{x\} \ominus \{p\} = \{x - p\}$
- $X \ominus \{p\} = X_{-p}$
- $(X \ominus B)_p = X_p \ominus B = X \ominus B_{-p}$
- $\dots$
- $X \ominus (A \oplus B) = (X \ominus A) \ominus B$

Erosions / dilatations binaires : quelques propriétés ($X \subseteq Y$ et $A \subseteq B$)

- $(X \oplus A) \subseteq (Y \oplus A)$
- $(X \oplus A) \subseteq (X \oplus B)$
- $(X \ominus A) \subseteq (Y \ominus A)$
- $(X \ominus A) \supseteq (X \ominus B)$

$$(X \ominus B) \subseteq X \subseteq (X \oplus B) \quad \text{si } 0 \in B$$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Symétrique

Le symétrique de $B \subseteq \mathbb{U}$ est $\check{B} = \{-b \mid b \in B\}$.

- $\check{\check{B}} = B$
- $(\check{B_p}) = (\check{B})_{-p}$

Erosions / dilatations binaires : quelques propriétés

- $(X \oplus B)^c = X^c \ominus \check{B}$
- $(X^c \oplus B)^c = X \ominus \check{B}$
- $(X \ominus B)^c = X^c \oplus \check{B}$
- $(X^c \ominus B)^c = X \oplus \check{B}$

Erosions / dilatations binaires : quelques propriétés

$$(X \oplus B \subseteq Y) \Leftrightarrow (X \subseteq Y \ominus B)$$

- $(\bigcup_i X_i) \oplus B = \bigcup_i (X_i \oplus B)$
- $X \oplus (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (X \oplus B_i)$
- $(\bigcap_i X_i) \ominus B = (\bigcap_i X_i \ominus B)$
- $X \ominus (\bigcap_i B_i) = \bigcap_i (X \ominus B_i)$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Des opérateurs fabriqués à base de dilatations et érosions

- Gradients morphologiques
- Transformées en tout ou rien
- Dilatations / érosions géodésiques
- ...

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Gradient morphologique

Soit $B \subseteq \mathbb{U}$ un élément structurant tel que $0 \in B$.
On peut définir plusieurs gradients morphologiques, qui mettent en évidence les bords dans une image $X \subseteq \mathbb{U}$:

$$\nabla_B^+(X) = (X \oplus B) \setminus X$$
$$\nabla_B^-(X) = X \setminus (X \ominus B)$$
$$\nabla_B(X) = (X \oplus B) \setminus (X \ominus B)$$

Remarque

Le choix de B influe sur la nature de l'information de gradient obtenue !

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Transformée en tout ou rien

Soit $A, B \subseteq \mathbb{U}$ deux éléments structurants tels que $A \cap B = \emptyset$.
La transformée en tout ou rien recherche les points x tels :

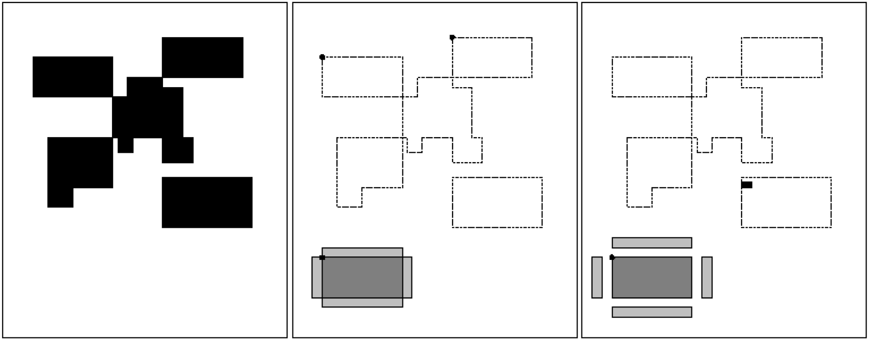
- A centré sur x est complètement dans X
- B centré sur x est complètement hors de X

(analogue morphologique du pattern matching)

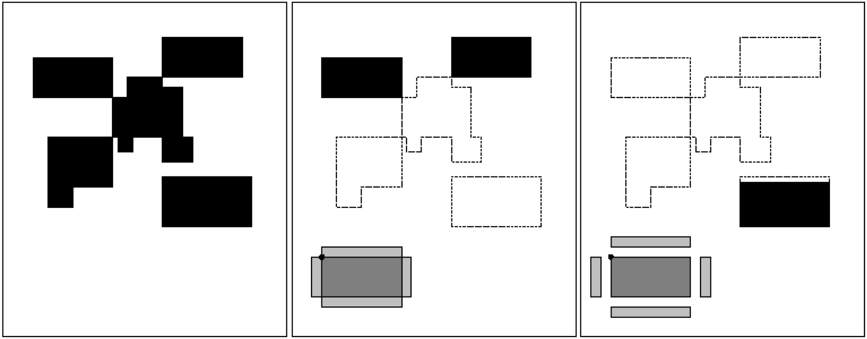
$$\begin{aligned} X \circledast (A, B) &= \{p \in \mathbb{U} \mid A_p \subseteq X \wedge B_p \subseteq X^c\} \\ &= (X \ominus A) \cap (X^c \ominus B) \\ &= (X \ominus A) \setminus (X \oplus \check{B}) \end{aligned}$$

Ouverture en tout ou rien : $(X \circledast (A, B)) \oplus A$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire



Morphologie mathématique : Morphologie binaire



Dilatation / érosion géodésique

On contraint la dilatation (resp. l'érosion) par un masque.
Soit une image $X \subseteq \mathbb{U}$, un élément structurant $B \subseteq \mathbb{U}$ tel que $0 \in B$ et un masque $M \subseteq \mathbb{U}$.

- $X \subseteq M$
- $\delta_B^M(X) = \delta_B(X) \cap M$
- $\delta_B^M(X, 0) = X$
- $\delta_B^M(X, k) = \delta_B^M(\delta_B^M(X, k-1))$

Dilatation géodésique :

$$\lim_k \delta_B^M(X, k)$$

- $M \subseteq X$
- $\varepsilon_B^M(X) = \varepsilon_B(X) \cup M$
- $\varepsilon_B^M(X, 0) = X$
- $\varepsilon_B^M(X, k) = \varepsilon_B^M(\delta_B^M(X, k-1))$

Érosion géodésique :

$$\lim_k \varepsilon_B^M(X, k)$$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Fermeture et ouverture : rappel de la définition algébrique

- Fermeture: $\varphi = \varepsilon\delta$
- Ouverture: $\gamma = \delta\varepsilon$

Fermeture et ouverture en morphologie binaire

- $\varphi_B(X) = \varepsilon_B\delta_B(X) = (X \oplus B) \ominus B = X \bullet B$
- $\gamma_B(X) = \delta_B\varepsilon_B(X) = (X \ominus B) \oplus B = X \circ B$

Sémantique de l'ouverture

$$\gamma_B(X) = \bigcup\{B_p \mid p \in \mathbb{U} \wedge B_p \subseteq X\}$$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Ouvertures / fermetures binaires : quelques propriétés

- $(X \circ B)_p = X_p \circ B$
- $(X \circ B_p) = X \circ B$
- $(X \circ B)^c = X^c \bullet \check{B}$
- $(X^c \circ B)^c = X \bullet \check{B}$
- $(X \circ B) \circ B = X \circ B$
- $X \supseteq (X \circ B)$

- $(X \bullet B)_p = X_p \bullet B$
- $(X \bullet B_p) = X \bullet B$
- $(X \bullet B)^c = X^c \circ \check{B}$
- $(X^c \bullet B)^c = X \circ \check{B}$
- $(X \bullet B) \bullet B = X \bullet B$
- $X \subseteq (X \bullet B)$

$$(X \ominus B) \subseteq (X \circ B) \subseteq X \subseteq (X \bullet B) \subseteq (X \oplus B) \quad \text{si } 0 \in B$$

Ouvertures / fermetures binaires : quelques propriétés ($X \subseteq Y$)

- $(X \circ B) \subseteq (Y \circ B)$
- $(X \bullet B) \subseteq (Y \bullet B)$

Des opérateurs fabriqués à base de fermeture et ouvertures

- Transformées en chapeau haut de forme ("top hat")
- Filtres alternés séquentiels
- ...

Transformées en chapeau haut de forme (“top hat”)

Soit $B \subseteq \mathbb{U}$ un élément structurant.
On peut définir la transformée en chapeau haut de forme, qui met en évidence les bords dans une image $X \subseteq \mathbb{U}$:

$$BTH_B(X) = (X \bullet B) \setminus X$$
$$WTH_B(X) = X \setminus (X \circ B)$$

Remarques

- Analogue du gradient morphologique pour les ouvertures / fermetures
- Le choix de B influe sur la nature de l'information de gradient obtenue !
- Pas de nécessité d'avoir $0 \in B$

Morphologie mathématique : Morphologie binaire

Séries (dé)croissantes d'ouvertures et fermetures

Soit $B \subseteq \mathbb{U}$ un élément structurant. Pour tout $i \geq 0$, on définit $B_i = \oplus_{k=1}^{i} B$ et les ouvertures et fermetures associées

$$\gamma_i = \delta_{B_i}\varepsilon_{B_i} \qquad \varphi_i = \varepsilon_{B_i}\delta_{B_i}$$

Pour tout $i \leq j$ on a

$$\gamma_j(X) \subseteq \gamma_i(X) \subseteq X \subseteq \varphi_i(X) \subseteq \varphi_j(X)$$

Filtres alternés séquentiels

- $m_i = \gamma_i\varphi_i$
- $n_i = \varphi_i\gamma_i$
- $r_i = \varphi_i\gamma_i\varphi_i$
- $s_i = \gamma_i\varphi_i\gamma_i$
- $M_i = m_i m_{i-1} \ldots m_2 m_1$
- $N_i = n_i n_{i-1} \ldots n_2 n_1$
- $R_i = r_i r_{i-1} \ldots r_2 r_1$
- $S_i = s_i s_{i-1} \ldots s_2 s_1$

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)

Second cadre d'utilisation : morphologie à niveaux de gris (plate)

- $\mathbb{U}$ est l'espace euclidien ou cartésien : $\mathbb{U} = \mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$).
- $\mathbb{V}$ est la droite étendue : $\mathbb{V} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- $\mathcal{F} : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ est une image à niveaux de gris
- L'ensemble des images est l'espace des fonctions $\mathbb{V}^{\mathbb{U}}$.
- On définit la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{V}^{\mathbb{U}}$ par :

$$\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{U}, \mathcal{F}(x) \leq \mathcal{G}(x)$$

Remarque

- La relation d'ordre $\leq$ est totale sur $\mathbb{V}$
- mais la relation d'ordre $\leqslant$ est partielle sur $\mathbb{V}^{\mathbb{U}}$.

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)

Supremum, infimum, treillis

La relation d'ordre $\leqslant$ est un treillis : elle admet un supremum et un infimum.

Soit $\{\mathcal{F}_i\}_i$ un ensemble de fonctions dans $\mathbb{V}^{\mathbb{U}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{U}$, on a :

- $(\bigvee_i^{\leqslant} \mathcal{F}_i)(x) = \bigvee_i^{\leq}(f_i(x))$
- $(\bigwedge_i^{\leqslant} \mathcal{F}_i)(x) = \bigwedge_i^{\leq}(f_i(x))$

Treillis $\rightarrow$ adjonction

- Tout comme $(2^{\mathbb{U}}, \subseteq)$ le couple $(\mathbb{V}^{\mathbb{U}}, \leqslant)$ est un treillis.
- On va donc définir une adjonction sur $(\mathbb{V}^{\mathbb{U}}, \leqslant)$.
- Cette adjonction fournira des opérations d'érosion et de dilatation.

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)

Érosions et dilatations plates

Soit $\mathcal{F} : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ une image à niveaux de gris.
Soit $B \subseteq \mathbb{U}$ un élément structurant.

- Dilatation (plate) :

$$(\mathcal{F} \oplus B)(x) = \bigvee_{b \in B} \mathcal{F}(x - b) = \bigvee_{p \in (\check{B})_x} \mathcal{F}(p)$$

- Érosion (plate) :

$$(\mathcal{F} \ominus B)(x) = \bigwedge_{b \in B} \mathcal{F}(x + b) = \bigwedge_{p \in B_x} \mathcal{F}(p)$$

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)

Seuillage

Soit $\mathcal{F} : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ une image à niveaux de gris. Soit $t \in \mathbb{V}$ une valeur (de seuillage). Le seuillage de $\mathcal{F}$ à la valeur t est l'image binaire

$$X_t(\mathcal{F}) = \{p \in \mathbb{U} \mid \mathcal{F}(x) \geq t\} \subseteq \mathbb{U}$$

On a notamment

- $u \leq v \Longrightarrow X_v(\mathcal{F}) \subseteq X_u(\mathcal{F})$
- $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \Longrightarrow X_t(\mathcal{F}) \subseteq X_t(\mathcal{G})$

Décomposition plate d'une image à niveaux de gris

$$\mathcal{F}(p) = \bigvee^{\leq} \{t \in \mathbb{V} \mid p \in X_t(\mathcal{F})\}$$

En d'autres termes, une image à niveaux de gris peut se modéliser par un empilement des images binaires obtenues par seuillages successifs.

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)

Liens entre morphologies plate et à niveaux de gris

$$(\mathcal{F} \oplus B)(x) = \bigvee \{t \in \mathbb{V} \mid x \in X_t(\mathcal{F}) \oplus B\}$$

$$(\mathcal{F} \ominus B)(x) = \bigwedge \{t \in \mathbb{V} \mid x \in X_t(\mathcal{F}) \ominus B\}$$

où on a les opérateurs binaires et à niveaux de gris

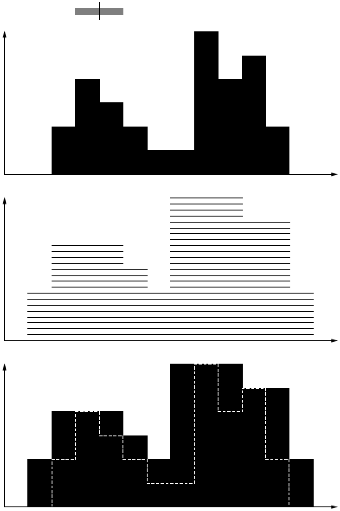
Moralité

On peut dériver de la morphologie binaire :

- les propriétés induites
- les opérateurs dérivés

pour la morphologie à niveaux de gris.

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)



D'autres paradigmes de morphologie mathématique

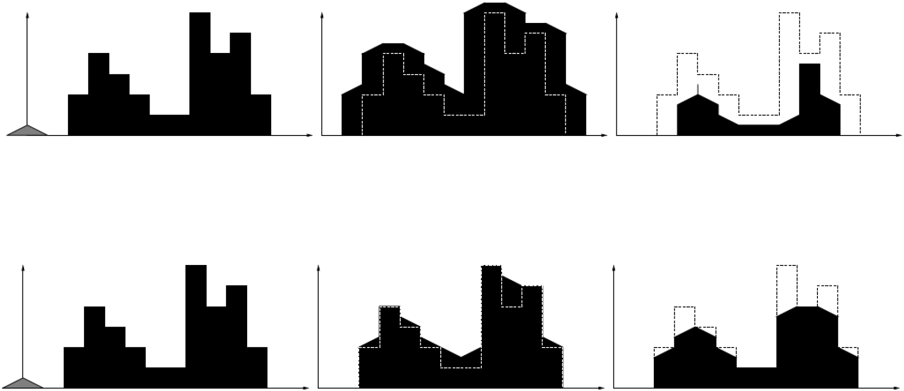
Autres paradigmes de morphologie mathématique

- MM à niveaux de gris "non plate" : $B : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$
- MM sur les graphes
- MM sur les complexes / maillages
- MM multivaluée : non trivial (treillis ?)
- etc.

Il "suffit" :

- de disposer d'un treillis
- de définir une paire (érosion,dilatation) formant une adjonction

Morphologie mathématique à niveaux de gris (plate)



Morphologie mathématique : cadre topologique

Connectivité

Le paradigme de connectivité consiste à déterminer comment le support d'une image se décompose (pour tout ou partie) en régions.

- Graphes
- Partitions
- Très souvent, la connexité (même si des notions alternatives de connectivité peuvent être proposées)
- Arbres

Cadre choisi (dans la grande majorité des cas)

- Le support Ω d'une image est structuré comme un graphe.
- Les points de Ω ("pixels") sont les sommets du graphe.
- Les liens d'adjacence d'une relation A (irréflexive, symétrique) sur Ω sont considérés comme les arêtes du graphe.

Morphologie mathématique : cadre topologique

Paradigme de la connectivité

- Une image $I : \Omega \to \mathbb{V}$ est vue comme un graphe valué.
  - La valuation est naturellement sur les sommets.
  - On peut aussi valuer les arêtes !
- On cherche à définir une représentation ou un modèle de I, souvent sous la forme d'un arbre de partitions de Ω.
- On construit des opérateurs connexes qui agissent sur cet arbre pour traiter ou analyse l'image I.

Opérateur connexe

Un opérateur connexe est un opérateur de traitement d'images :

- non-linéaire
- qui traite l'image à une échelle “région” et non pas “pixel”
- qui a la propriété de ne pas altérer les contours de l'image

Morphologie mathématique : cadre topologique

Des représentations (hiérarchiques) d'images

- Component-tree
- Tree of shapes
- Binary partition tree
- α-tree
- Watershed tree
- ...

Des structures (hiérarchiques) d'images

Toutes ces représentations :

- sont des modèles hiérarchiques, i.e. des arbres
- modélisent des partitions (totales ou partielles)

Certaines sont des modèles, d'autres non.

Morphologie mathématique : cadre topologique

Partition

Soit $\Omega \neq \emptyset$ un ensemble. Une partition de Ω est un ensemble P d'ensembles de Ω, i.e. $P \subset 2^{\Omega}$ tel que :

- $P \neq \emptyset$
- $\forall X, Y \in P, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$
- $\bigcup P = \Omega$

P est associée à une relation d'équivalence $\sim$ sur Ω ($P = \Omega / \sim$).

Partition partielle (ou partition générale)

- $P \neq \emptyset$
- $\forall X, Y \in P, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$
- $\bigcup P \subseteq \Omega$

Une partition est une partition générale.

Une partition générale est une partition d'un sous-ensemble de Ω.

Morphologie mathématique : cadre topologique

Raffinement de partitions (partielles)

Soit P_1, P_2 deux partitions (partielles) de Ω.
On dit que P_2 raffine P_1, et on note $P_2 \Subset P_1$ si

$$\forall X_2 \in P_2, \exists X_1 \in P_1, X_2 \subseteq X_1$$

Remarque : P_1 est nécessairement unique.

Relation de raffinement

On note Π l'ensemble des partitions (partielles). On note $\overline{\Pi} = \Pi \cup \{\emptyset\}$.

- Le raffinement $\Subset$ est une relation d'ordre partielle sur Π et $\overline{\Pi}$.
- $(\Pi, \Subset)$ admet un supremum.
- $(\overline{\Pi}, \Subset)$ admet un infimum.

En d'autres termes, $(\Pi, \Subset)$ est "presque" un treillis.

Morphologie mathématique : cadre topologique

Hiérarchie de partitions (partielles)

Soit $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=0}^{t}$ un ensemble de partitions (partielles) de Ω tel que :

- $P_0 = \{\Omega\}$
- $i \leq j \Longrightarrow P_j \Subset P_i$

$(\mathcal{P}, \Subset)$ est un ensemble de partitions (partielles) totalement ordonné.

Arbre de partitions

On note $\Theta = \bigcup_{i=1}^{t} P_i$. La relation d'inclusion $\subseteq$ sur Θ est une relation d'ordre partielle hiérarchique :

- elle admet un maximum : Ω
- pour tout $X \in \Theta$ l'ensemble $X^{\uparrow} = \{Y \in \Theta \mid X \subseteq Y\}$ est totalement ordonné par $\subseteq$

Le diagramme de Hasse de $(\Theta, \subseteq)$ est un arbre.

Morphologie mathématique : cadre topologique

Coupe dans un arbre de partitions

Soit $\mathfrak{T} = (\Theta, \subseteq)$ un arbre de partitions (partielles).

- Une coupe de $\mathfrak{T}$ est un sous-ensemble non-vide de $C \subseteq \Theta$ tel que tous les éléments de C sont non-comparables par $\subseteq$.
- Toute partition (partielle) P_i est une coupe de $\mathfrak{T}$.
- Toute coupe de $\mathfrak{T}$ est une partition partielle.

Arbre de partitions : espace riche de partitions (partielles) de Ω.

Construction d'un opérateur connexe

Etant donnée une image $I : \Omega \to \mathbb{V}$:

- Construire un arbre $\mathfrak{T}$ induit par une hiérarchie de partitions $\mathcal{P}$.
- Définir une coupe $C \subseteq \Theta$ dans $\mathfrak{T}$
- Produire, dans l'espace image, le résultat de l'opérateur induit par cette coupe.

Morphologie mathématique : cadre topologique

Arbres de partitions : représentation vs. modèles

- Certains arbres sont des modèles : component-trees, trees of shapes
- D'autres sont des représentations : binary partition trees, watershed trees

Les modèles sont des arbres qui encodent l'image sans perte d'information, de manière réversible.

Analogie (changement d'espace)

- Fabriquer l'arbre $\mathfrak{T}$ d'une image I
- Transformer $\mathfrak{T}$ en un arbre $\widehat{\mathfrak{T}}$
- Reconstruire une image $\widehat{I}$ à partir de $\widehat{\mathfrak{T}}$

- Calculer la transformée de Fourier $\mathfrak{F}$ de I
- Transformer $\mathfrak{F}$ en $\widehat{\mathfrak{F}}$
- Reconstruire $\widehat{I}$ par transformée de Fourier inverse sur $\widehat{\mathfrak{F}}$

Morphologie mathématique : cadre topologique

Exemple de modèle : component-tree

- Image $I : \Omega \to \mathbb{R}$
- Seuillages successifs $\Lambda_v(I) \subseteq \Omega$
- Partitions (partielles) $P_v = \mathcal{C}[\Lambda_v(I)]$: composantes connexes de $\Lambda_v(I)$
- Nœuds de l'arbre : $\Theta = \bigcup_v \mathcal{C}[\Lambda_v(I)] \subseteq 2^\Omega$

Le component-tree est le diagramme de Hasse $\mathfrak{T}$ de $(\Theta, \subseteq)$.

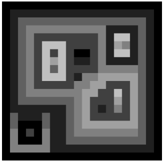
(Dé)composition de l'image par rapport au component-tree

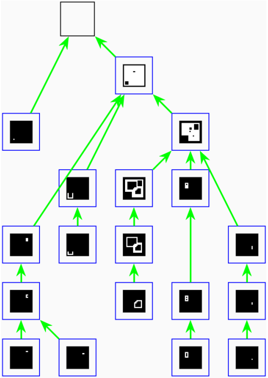
$$I = \bigvee_{X \in \Theta}^{\leqslant} \mathbf{1}_{(X,\rho(X))}$$

où

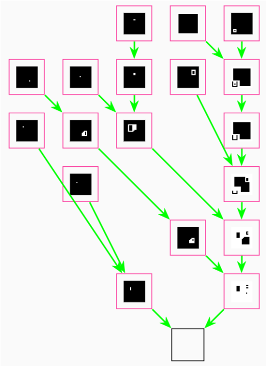
- $\mathbf{1}_{(A,v)}(x) = v$ si $x \in A$ et $-\infty$ sinon
- $\rho(X) = \arg_{v \in \mathbb{R}} \max\{X \in P_v\}$

Morphologie mathématique : cadre topologique



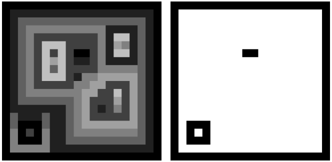


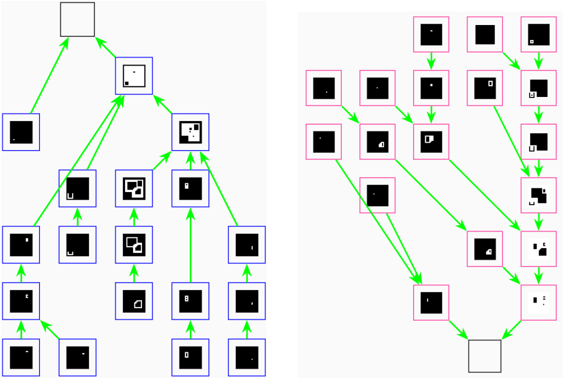
Max-tree



Min-tree

Morphologie mathématique : cadre topologique

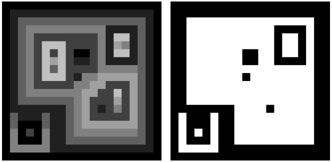


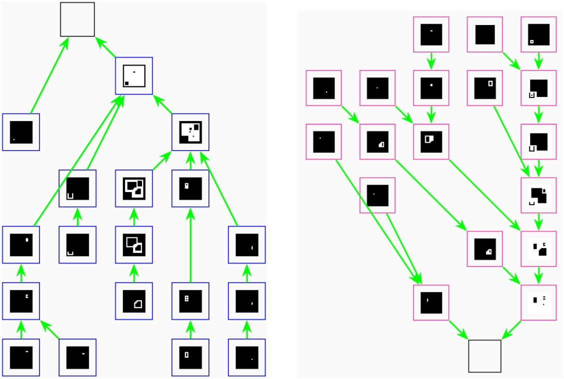


Max-tree

Min-tree

Morphologie mathématique : cadre topologique

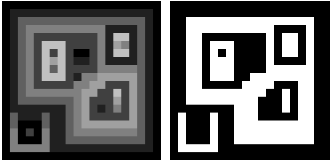


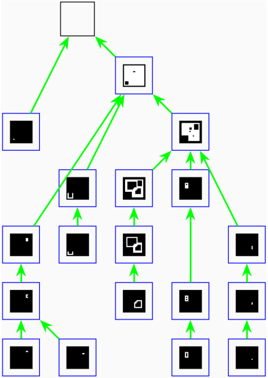


Max-tree

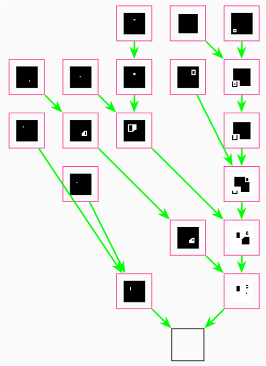
Min-tree

Morphologie mathématique : cadre topologique



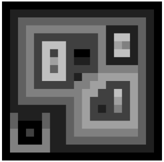


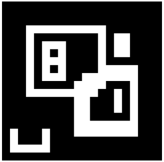
Max-tree

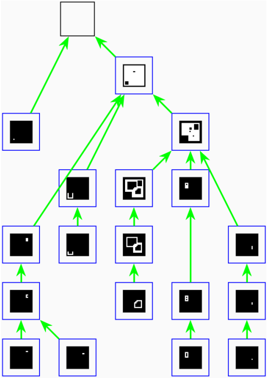


Min-tree

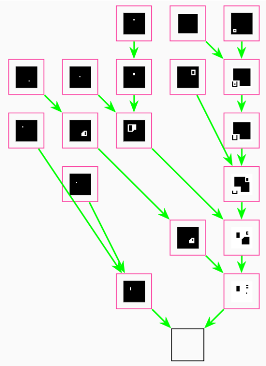
Morphologie mathématique : cadre topologique





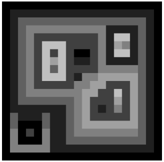


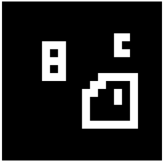
Max-tree

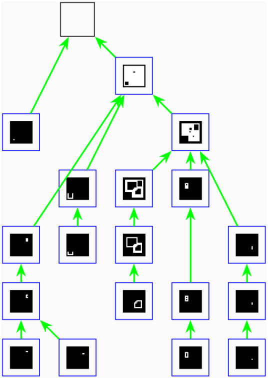


Min-tree

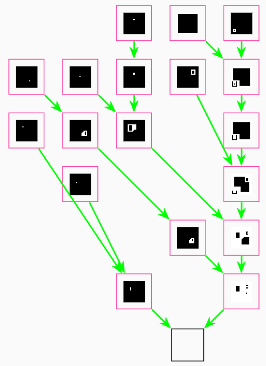
Morphologie mathématique : cadre topologique





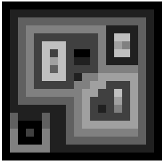


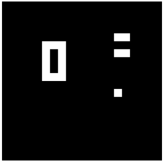
Max-tree

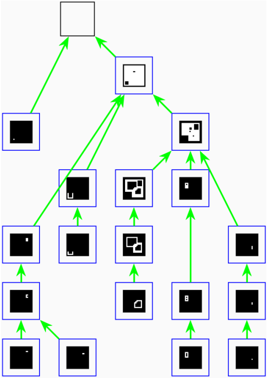


Min-tree

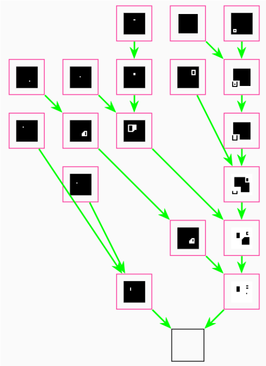
Morphologie mathématique : cadre topologique





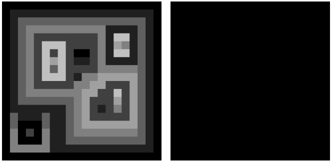


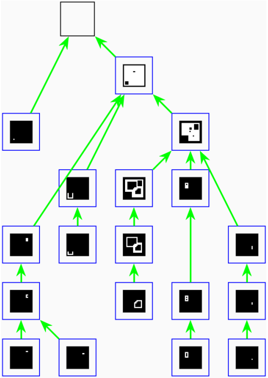
Max-tree



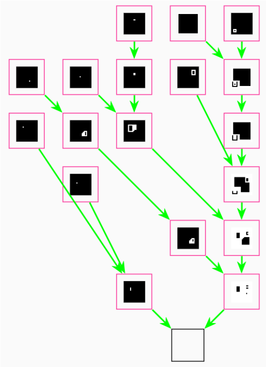
Min-tree

Morphologie mathématique : cadre topologique





Max-tree



Min-tree

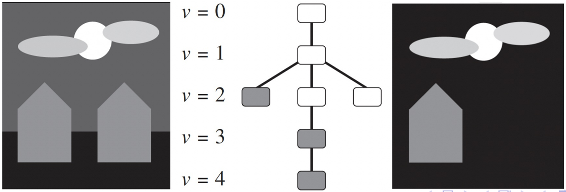
Morphologie mathématique : cadre topologique

Component-tree : opérateurs connexes

Formule de décomposition valide pour tout $\widehat{\Theta} \subseteq \Theta$

$$\widehat{I} = \bigvee_{X \in \widehat{\Theta}}^{\leqslant} \mathbf{1}_{(X,\rho(X))}$$

- Filtrage anti-extensif
- Segmentation : remplacer $\rho(X)$ par 1



Morphologie mathématique : cadre topologique

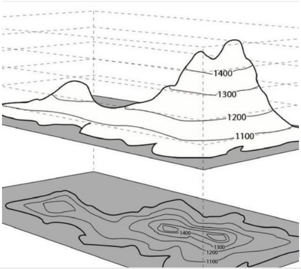
Variante de component-tree : tree of shapes

Le tree of shapes :

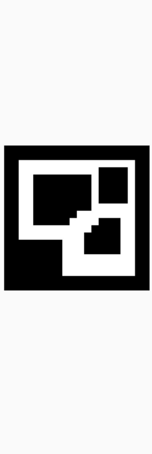
- considère l'image comme une carte topographique
- modélise les régions bornées par une isohypse

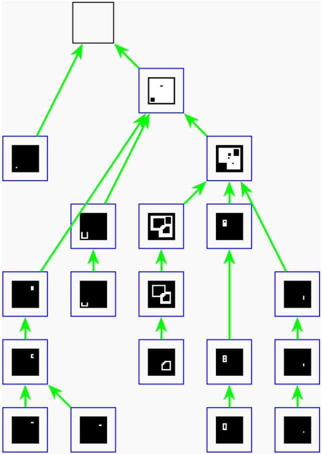
Ses nœuds sont obtenus comme des classes d'équivalence de nœuds de component-trees.

- Théorème de Jordan !

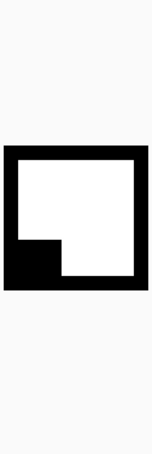


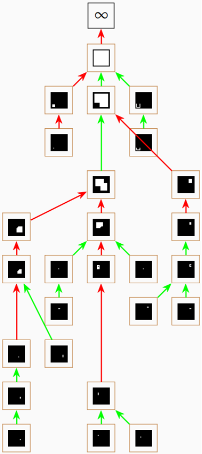
Morphologie mathématique : cadre topologique





Morphologie mathématique : cadre topologique





Morphologie mathématique : cadre topologique

Morphologie mathématique : cadre topologique