

# Cours #4

## Opérateurs linéaires

Nicolas Passat & Esther Fontaine



CHPS0703 Traitement d'images

# Espace vectoriel des images

## Espace vectoriel des images

Une image  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  peut être vue comme un vecteur  $\mathcal{V}_I$  dans  $\mathbb{R}^n$  où  $\Omega = \{x_i\}_{i=1}^n$ .

- Les images de support  $\Omega$  forment un espace vectoriel  $E$ .
- Une base de  $E$  est formée par les fonctions  $\mathbf{e}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) telles que  $\mathbf{e}_i(x_j) = \delta_{ij}$ .
- La dimension de  $E$  est  $n$ .

## Rappel sur les applications linéaires

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de dimensions  $n$  et  $k$ , respectivement. (On prend le même corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .)

Une application linéaire est une fonction  $A : E \rightarrow F$  telle que :

- pour tout  $x \in E$ ,  $A(\lambda x) = \lambda A(x)$
- pour tout  $x, y \in E$ ,  $A(x + y) = A(x) + A(y)$

# Opérateurs linéaires sur les images

Rappel : opérateur de traitement d'image

Soit  $E, F$  deux espaces d'images.

- Un opérateur de traitement d'image est une application  $A : E \rightarrow F$ .
- Si  $A$  est une application linéaire, on dit que l'opérateur de traitement d'image est linéaire.
- Sinon, on dit que l'opérateur de traitement d'image est non-linéaire.

Représentation d'un opérateur linéaire

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels de bases  $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$  et  $(\mathbf{f}_i)_{i=1}^k$ .

Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est totalement défini par la donnée des images des vecteurs de base de  $E$ .

$$A(X) = A\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n A(x_i \cdot \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot A(\mathbf{e}_i)$$

# Opérateurs linéaires sur les images

## Représentation d'un opérateur linéaire

$A(\mathbf{e}_i)$  est un vecteur de  $F$  :

$$A(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^k a_{j,i} \cdot \mathbf{f}_j$$

Donc  $A$  peut s'exprimer comme une matrice à  $k$  lignes et  $n$  colonnes :

$$M_A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,i} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,i} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

# Opérateurs linéaires sur les images

## Représentation d'un opérateur linéaire

$$M_A(\mathbf{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,i} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,i} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,i} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{j,i} \\ \vdots \\ a_{k-1,i} \\ a_{k,i} \end{pmatrix}$$

# Opérateurs linéaires sur les images

## Représentation d'un opérateur linéaire

$$\begin{aligned} M_A(X) &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,i} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,i} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot x_1 + \dots + a_{1,i} \cdot x_i + \dots + a_{1,n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{j,1} \cdot x_1 + \dots + a_{j,i} \cdot x_i + \dots + a_{j,n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{k,1} \cdot x_1 + \dots + a_{k,i} \cdot x_i + \dots + a_{k,n} \cdot x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Différentes sortes d'opérateurs linéaires

## Classification

- $F = E$  (endomorphisme) :  $A$  envoie dans le même espace d'images
  - $A$  bijectif (automorphisme)
  - $A$  non-bijectif
- $F \neq E$  :  $A$  envoie dans un autre espace d'images
  - $\dim(F) = \dim(E)$ 
    - $A$  bijectif (isomorphisme)
    - $A$  non-bijectif
  - $\dim(F) \neq \dim(E)$ 
    - $\dim(F) \neq 1$
    - $\dim(F) = 1$  (forme linéaire)

## Autre classification

- Opérateurs de convolution
- Autres opérateurs

# Opérateurs de convolution

## Rappel sur les convolutions (cas continu, 1D)

Soit  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (fonction **support**).

Soit  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (fonction **noyau**).

La convolution de  $I$  par  $N$  est définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$(N * I)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N(y) \cdot I(x - y) \cdot dy$$

à ne pas confondre avec la corrélation (à moins que  $N$  soit une fonction paire... ) :

$$(N \circ I)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N(y) \cdot I(x + y) \cdot dy$$

## Remarque

Convolution dans l'espace image = produit dans l'espace de Fourier

# Opérateurs de convolution

## Rappel sur les convolutions (cas discret, 1D)

Soit  $I : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (fonction **support**).

Soit  $N : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (fonction **noyau**).

La convolution de  $I$  par  $N$  est définie, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  par :

$$(N * I)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} N(y) \cdot I(x - y) \quad (1)$$

## Rappel sur les convolutions (cas discret, $d$ D)

Soit  $I : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $N : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

La convolution de  $I$  par  $N$  est définie, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  par :

$$(N * I)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot I(x - y)$$

# Opérateurs de convolution et espaces vectoriels

## Rappel sur les convolutions (cas discret, 1D)

L'espace  $E$  des images  $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  possède comme base  $(\mathbf{e}_z : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R})_{z \in \mathbb{Z}^d}$  telle que pour toute fonction  $\mathbf{e}_z(x) = \delta_{z,x}$ .

## Décomposition

Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on a :

$$\begin{aligned}(N * \mathbf{e}_z)(x) &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \mathbf{e}_z(x - y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \delta_{z, x-y} \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \delta_{z+y, x} = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \mathbf{e}_{z+y}(x)\end{aligned}$$

Donc

$$N * \mathbf{e}_z = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \mathbf{e}_{z+y}$$

# Opérateurs de convolution et espaces vectoriels

Convolution  $\Rightarrow$  opérateur linéaire

Sans surprise, la convolution est un opérateur linéaire :

$$(N * \lambda \cdot I)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot (\lambda \cdot I)(x - y)$$

$$= \lambda \cdot \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot I(x - y)$$

$$= \lambda \cdot (N * I)(x)$$

$$(N * (I + J))(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot (I + J)(x - y)$$

$$= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot I(x - y) + \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot J(x - y)$$

$$= (N * I + N * J)(x)$$

# Opérateurs de convolution et espaces vectoriels

Convolution : pas n'importe quel opérateur linéaire. . .

$$N * \mathbf{e}_z = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \mathbf{e}_{z+y}$$

La convolution par  $N$  agit de la même manière sur chaque vecteur de la base  $(\mathbf{e}_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ .

Dit autrement :

La matrice de la convolution est formée du même vecteur colonne répété modulo décalage par  $z$ .

$$N * \mathbf{e}_0 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \mathbf{e}_{0+y} = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} N(y) \cdot \mathbf{e}_y = N$$

La partie non-nulle de  $N$  définit la **fenêtre de convolution** et la valeur de  $N$  définit le **masque de convolution**.

# Opérateurs de convolution : points d'attention

## Points d'attention

- Taille de la fenêtre de convolution ( $\rightarrow$  complexité)
- Séparabilité dimensionnelle du masque de convolution ( $\rightarrow$  complexité)
- Composition des masques de convolution ( $\rightarrow$  complexité)
- Normalisation du masque de convolution ( $\rightarrow$  cohérence)
- Gestion des effets de bord ( $\rightarrow$  cohérence)

## Propriété

- Opérateurs de convolutions sont rarement inversibles, mais souvent quasi-inversibles  
Exemple : défloutage d'image (convolution = point spread function)

# Des exemples d'opérateurs de convolution

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes

- identité !
- multiplication par un scalaire (non nul)
- moyennes
- lissages (e.g. gaussien)
- gradient
- laplacien

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont différents

- projection tomographique (Radon)

# Tous les opérateurs linéaires ne sont convolutifs...

## Exemples d'opérateurs linéaires non-convolutifs

- translations, rotations, symétries
- changements d'échelle (sous et super-résolution)
- redimensionnement
- ajout de biais multiplicatif

## Quiz : pour tous ces opérateurs (convolutifs ou non)

- dimension de la matrice ?
- forme de la matrice ?
- inversibilité de la matrice ?
- rang de la matrice ?

# Quid des opérateurs affines ?

## Exemples d'opérateurs affines

- bruit additif
- biais additif
- négatif d'une image

Comment modéliser un opérateur affine comme un opérateur linéaire ?

Ajout d'une dimension (cf. coordonnées homogènes en géométrie)