

# Introduction à la Méthode des Éléments Finis

## chapitre 1: " Maillages EF— $\mathbb{P}_1$ "

François Lefèvre

Laboratoire de Mathématiques de Reims

`francois.lefevre@univ-reims.fr`

Master/M1 - accréditation [2024-20xx]

- 1 Discrétisation
- 2 Pas et Qualité
- 3 Structure de Données

# Définition

Soit le domaine  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ). Un **maillage**  $\mathcal{T}_h$  est une **partition** de  $\Omega$  en un **nombre finis** de sous-domaines  $K_I$  **convexes** (pratiquement : des segments en 1D, des triangles ou quadrangles en 2D, des tétraèdres ou hexaèdres en 3D) telle que

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{K_I \in \mathcal{T}_h} K_I$ ,
- tout élément  $K_I$  de  $\mathcal{T}_h$  est d'intérieur non vide,
- l'intersection de deux éléments distincts de  $\mathcal{T}_h$  est : soit l'ensemble vide, soit un sommet, soit une arête, soit une face commune (si 3D).

Lorsque les éléments  $K_I$  sont des **triangles** (2D) ou des **tétraèdres** (3D), on appelle  $\mathcal{T}_h$  **une triangulation**.

REM : La 2nde condition interdit les triangles/tétraèdres dégénérés (3 sommets alignés en 2D / 4 sommets coplanaires en 3D).

# Le Pas (cas 2D)

Dans un triangle  $T = (S_1, S_2, S_3)$  de sommets  $S_i(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ , on note les 3 arêtes  $a_i = [S_i S_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) avec la convention que  $S_4 = S_1$ .

① Le **pas d'un triangle**  $T$  est

$$h_T = \max_{i \in \{1,2,3\}} L_i$$

où  $L_i$  désigne la longueur de l'arête  $a_i$ .

② Le **pas d'un maillage**  $\mathcal{T}_h$  est

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

# La Qualité (cas 2D)

- ❶ La **qualité d'un triangle**  $T$  est définie par

$$Q_T = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{h_T}{r_T}$$

où  $h_T$  est le pas de  $T$  et  $r_T$  est le rayon de son cercle inscrit.

- ❷ La **qualité d'une triangulation**  $\mathcal{T}_h$  est définie par

$$Q_{\mathcal{T}_h} = \max_{T \in \mathcal{T}_h} Q_T.$$

REM : le triangle équilatéral est de qualité égale à 1 (c'est la meilleure qualité possible). La qualité ne dépend que de la forme du triangle.

## Fichier .msh de FreeFem++ (cas 2D)

- `nbn` : nombre total de nœuds (=sommets) du maillage,
- `nbe` : nombre total d'éléments (=triangles),
- `nba` : nombre total d'arêtes de frontière.
- `coord(1:nbn,1:2)` : tableau de réels contenant les coordonnées de tous les sommets (=nœuds) ordonnés en numérotation globale.
- `tri(1:nbe,1:3)` : tableau d'entiers contenant les indices (en numérotation globale) des trois sommets de chaque élément.
- `arete(1:nba,1:2)` : tableau d'entiers contenant les indices des deux sommets des arêtes **de frontière**.
- `ref_noeud(1:nbn)` : indices des références pour identifier les nœuds situés sur les différents sous-domaines ou parties du bord.
- `ref_tri(1:nbe)` : indices des références pour identifier les éléments des différents sous-domaines.
- `ref_arete(1:nba)` : indices des références pour identifier les arêtes des différentes parties du bord.