Introduction à la Méthode des Éléments Finis
chapitre 2: " Modélisation du Transfert Thermique "

François Lefèvre

Laboratoire de Mathématiques de Reims

francois.lefevre@univ-reims.fr

Master/M1 - accréditation [2024-20xx]

Plan du cours

1. Notations et Opérateurs
2. Équation de la Chaleur
3. Modèle de la Tranchette
4. Conditions de Bord
5. Analyse Dimensionnelle

Notations et Opérateurs

- les variables : le temps $t \in [0, T]$, la position $X = (x_1, ..., x_d)^T \in \mathbb{R}^d$.
- la géométrie : le domaine (ouvert) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, son bord $\Gamma = \partial\Omega$, le domaine (fermé) $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.
- opérations de calcul différentiel :
  - le **gradient** d'un champ scalaire $u : \Omega \to \mathbb{R}$: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)^T$
  - la **divergence** d'un champ de vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_d)^T$:

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

  - le **Laplacien** d'un champ scalaire :

$$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Thermique, Cas Stationnaire

- les données : $f(\mathrm{X})$: **source** de "chaleur" ($f \geq 0$) / "froid" ($f \leq 0$)
  $\kappa(\mathrm{X})$: **conductivité thermique** du matériau
- les inconnues : $u(\mathrm{X})$: **température**, exprimée en $[K]$
  $\vec{q}(\mathrm{X}) = -\kappa(\mathrm{X})\nabla u(\mathrm{X})$: vecteur flux de chaleur
- équation **stationnaire** de **diffusion de la chaleur** :

$$\cancel{\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{X})} - \mathrm{div}(\kappa(\mathrm{X})\nabla u(\mathrm{X})) = f(\mathrm{X}), \qquad \forall \mathrm{X} \in \Omega$$

Modèle de la Tranchette

Paroi homogène d'**épaisseur** e (selon xx'), infiniment haute (selon zz') et large (selon yy'). [À DESSINER] Le transfert thermique se fait selon xx' :

- $\rightarrow$ de l'intérieur vers l'extérieur, si $u_E < u_I$ [cas où il fait froid dehors]
- $\rightarrow$ de l'extérieur vers l'intérieur, si $u_E > u_I$ [cas où il fait chaud dehors]

Le gradient de température est :

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x \\ \cancel{\partial u/\partial y} \\ \cancel{\partial u/\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La paroi est inerte (ni créatrice, ni consommatrice de chaleur) : $f = 0$, de sorte que l'équation de la chaleur s'écrit :

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\kappa\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\kappa\xcancel{\frac{\partial u}{\partial y}}) - \frac{\partial}{\partial z}(\kappa\xcancel{\frac{\partial u}{\partial z}}) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{u''(x) = 0}$$

(avec un léger abus de notation).

Résolution du problème / Condition de Fourier-Robin

Résolution : Puisque $u(0) = u_I$ et $u(e) = u_E$, on trouve

$$\boxed{u(x) = \left(\frac{u_E - u_I}{e}\right) x + u_I}$$

Flux de Chaleur : La loi de Fourier (diffusion) décrit le flux thermique

$$\vec{q}(X) = -\kappa(X)\nabla u(X), \ \ q = \vec{q}.\vec{n} = -\kappa \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{+\kappa}{e}(u_I - u_E)$$

la dernière quantité étant le flux dans la direction $\vec{n} = e_1 = (1, 0, 0)^T$.
Condition de Fourier-Robin : Le flux de chaleur sortant s'écrit

$$\boxed{q(0) = -\kappa \frac{du}{dx}(0) = \frac{+\kappa}{e}[u(0) - u_E]} \qquad \boxed{\alpha \doteq \frac{\kappa}{e} = \frac{1}{R}}$$

α = **facteur de transfert thermique**, R = **résistance thermique**.
!! Commenter le comportement du flux...

Fourier-Robin / Neumann / Dirichlet

Retenir que la **condition de bord de Fourier-Robin** :

$$\boxed{-\kappa \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha(u - u_E)}$$

présente les situations limites (vis à vis de e ou bien de α) suivantes :

Épaisseur...	e	$\alpha = \kappa/e$	Condition obtenue	Type
Cas limite 1	$+\infty$	0^+	$-\kappa \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$	**Neumann** homogène
Cas limite 2	0^+	$+\infty$	$u = u_E$	**Dirichlet**

Pour le cas 2, il faut lire la condition de Fourier-Robin sous cette forme

$$(u - u_E) = -\frac{\kappa}{\alpha} \times \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xrightarrow{\alpha \to \infty} 0 \Longleftrightarrow u = u_E$$

Transfert / Diffusion

Transfert Thermique :

conductivité thermique κ	$[Wm^{-1}K^{-1}]$
épaisseur de la paroi e	$[m]$
résistance thermique $R = \frac{e}{\kappa}$	$[m][W^{-1}mK] = [W^{-1}m^2K]$
facteur de transfert $\alpha = R^{-1}$	$[Wm^{-2}K^{-1}]$
flux thermique $q = -\kappa \frac{du}{dx}(0)$	$[Wm^{-1}K^{-1}][Km^{-1}] = [Wm^{-2}]$
$\alpha[u(0) - u_E]$	$[Wm^{-2}K^{-1}][K] = [Wm^{-2}]$

$\Rightarrow$ Le **flux thermique** est une *densité surfacique de puissance*.

Diffusion Thermique :

conductivité thermique κ	$[Wm^{-1}K^{-1}]$
source de chaleur $f = -\kappa \frac{d^2u}{dx^2}$	$[Wm^{-1}K^{-1}][Km^{-2}] = [Wm^{-3}]$

$\Rightarrow$ La **fonction source** est une *densité volumique de puissance*.