
RAPPORT DU LABORATOIRE N°3

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

LE GÉNIE
EN PREMIÈRE CLASSE



ELE2200 – SYSTÈMES ET SIMULATION

ANTONIO SANNIRAVONG - 1667171
GAUTIER CHATY - 1673741

Hiver 2015

Département de génie électrique

École Polytechnique de Montréal

Introduction

Au cours de ce troisième laboratoire d'ELE2200, l'objectif est d'étudier le comportement d'un bras robotique à l'aide de MATLAB et de Simulink. Pour ce faire, il s'agira d'utiliser les équations fournies dans l'énoncé pour en déduire des modèles d'états et des schémas Simulink. Ainsi il sera possible de simuler la sortie ($\theta(t)$) du système pour une entrée donnée ($u(t)$).

Les différentes simulations permettront de déterminer les caractéristiques du système et de mieux comprendre son fonctionnement. Aussi, il faudra comparer les éventuelles différences entre le système non linéaire et celui linéarisé autour d'un point d'équilibre.

Enfin, la discussion permettra de remettre en cause l'exactitude des résultats obtenus.

Rappels théoriques

Modélisation du moteur

Les équations permettant de décrire le système sont données dans l'énoncé. Les voici ci-dessous.

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_c \dot{\theta}(t)$$

$$C_m(t) = K_m i(t)$$

$$J_m(t) \ddot{\theta}(t) + B_m \dot{\theta}(t) = C_m(t)$$

Le modèle d'état linéaire du moteur seulement est donné sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Où $x = [i \ \dot{\theta}]^T$, u est la tension d'entrée du système et $\dot{\theta}$ la sortie.

Après calculs on obtient les matrices correspondantes ci-dessous.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_c}{L} \\ \frac{K_m}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1]$$

$$D = [0]$$

Ensuite, à l'aide de Matlab, il est assez simple de calculer la fonction de transfert du système. Ainsi, en utilisant la fonction `F = simplify(C*inv(s*I-A)*B+D)`, on obtient la fonction de transfert

$$F(s) = \frac{K_m}{s^2 J_m L + (B_m L + J_m R)s + B_m R + K_m K_c}$$

Les pôles de $F(s)$ sont les suivants :

- $z_1 = -1990$
- $z_2 = -10.05$

On peut faire une approximation à l'ordre 1 du moteur en posant que le pôle le plus lent est plus de dix fois plus lent que l'autre et ainsi poser $L=0$ dans $F(s)$.

De cette façon, on obtient une nouvelle fonction de transfert, dite approximée, qui a pour forme littérale

$$F_a(s) = \frac{K_m}{B_m R + K_c K_m + s(J_m R)}$$

Celle-ci possède un pôle qui est $z_a = -10$.

On remarque donc que le pôle de $F(s)$ est très proche du pôle z_2 de $F(s)$. En fait, il s'agit du pôle dominant (car c'est le plus lent) donc ce qui implique que la réponse en régime permanent du système dépend principalement du moteur.

Modélisation du bras robotique

Il s'agira maintenant de traiter la modélisation du bras robotique. Les équations décrivant le système sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_c \dot{\theta}(t) \\ C_m(t) &= K_m i(t) \\ (J_m + J_1) \ddot{\theta}(t) + (B_m + B_1) \dot{\theta}(t) + \frac{M_1 g l_1}{2} \sin(\theta(t)) &= C_m(t) \end{aligned}$$

Le modèle d'état linéaire du moteur et du bras robotique est donné sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

Où $x = [i \ \theta \dot{\theta}]^T$, u est la tension d'entrée du système et θ la sortie.

On a donc,

$$\begin{cases} \dot{i}(t) = \frac{u(t) - Ri(t) - K_c \dot{\theta}(t)}{L} \\ \dot{\theta} = x_3 \\ \ddot{\theta} = -\frac{B_m + B_1}{J_m + J_1} \dot{\theta}(t) - \frac{M_1 g l_1 \sin(\theta(t))}{2(J_m + J_1)} + \frac{K_m i(t)}{J_m + J_1} \\ y = x_2 \end{cases}$$

Et,

Pour maintenir le bras robotique à $\theta_e = \frac{\pi}{5}$, le couple d'équilibre à appliquer est de $C_e = \frac{M_1 g l_1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1,73 \text{ N.m}^{-1}$. Ainsi, le courant nécessaire est de $i_e = \frac{C_e}{K_m} = \frac{1,73}{0,5} = 3,46 \text{ A}$.

Finalement, $u_e = Ri_e = 0,5 * 3,46 = 1,73 \text{ V}$

Le système étant non-linéaire, il y a donc une infinité de positions pour cette tension d'équilibre.

La linéarisation du système autour du point d'équilibre donne le modèle d'état suivant, avec $\delta x = [\delta i \ \delta \theta \ \delta \dot{\theta}]^T$, δu la variation de tension autour de la tension u_e et $\delta y = \delta \theta$ la variation d'angle autour de θ_e .

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta x} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_c}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_m}{J_m + J_1} & -\frac{M_1 g l_1 \cos(\theta_e)}{2(J_m + J_1)} & \frac{-B_m + B_1}{J_m + J_1} \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y = [0 \quad 1 \quad 0] \delta x + [0] \delta u \end{array} \right.$$

On obtient ainsi la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{\Delta \theta}{\Delta U} = \frac{2K_m}{(2J_1 L + 2J_m L)s^3 + (2B_1 L + 2B_m L + 2J_1 R + 2J_m R)s^2 + (LM_1 \cos(\theta) g l_1 + 2B_1 R + 2B_m R + 2K_m K_c)s + M_1 \cos(\theta) R g l_1}$$

Une approximation de G(s) à l'ordre 2 donne la fonction de transfert

$$G_a(s) = \frac{2K_m}{(2J_1 R + 2J_m R)s^2 + (2B_1 R + 2B_m R + 2K_c K_m)s + M_1 \cos(\theta) R g l_1}$$

Identification

Dans cette partie, les deux blocs Simulink sont déjà fournis. Ils permettent respectivement de simuler, le fonctionnement du moteur et du pendule avec le moteur, sans et avec une perturbation en entrée.

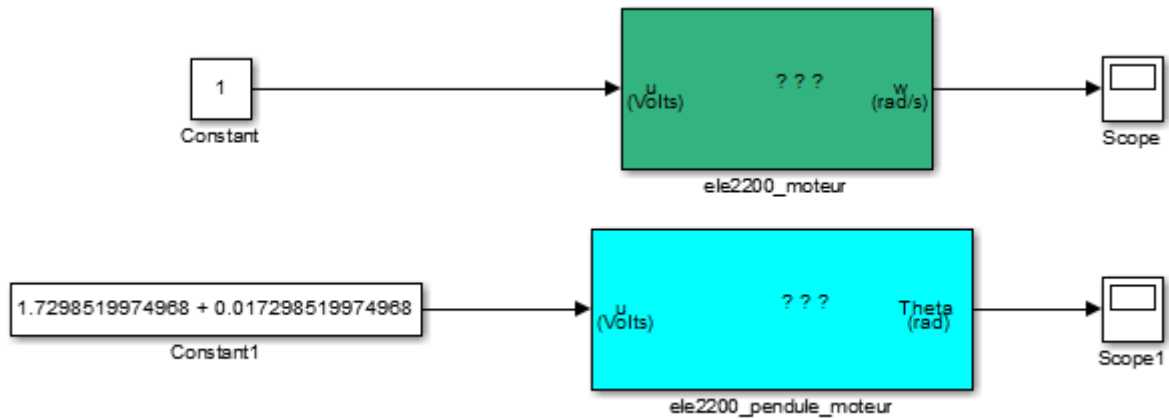


Figure 1 - Bloc Simulink du moteur et du moteur + bras robotique

3.1 Identification du moteur

On choisit de prendre $U_0 = 1$ afin de simplifier les calculs des valeurs expérimentales de K et de τ .

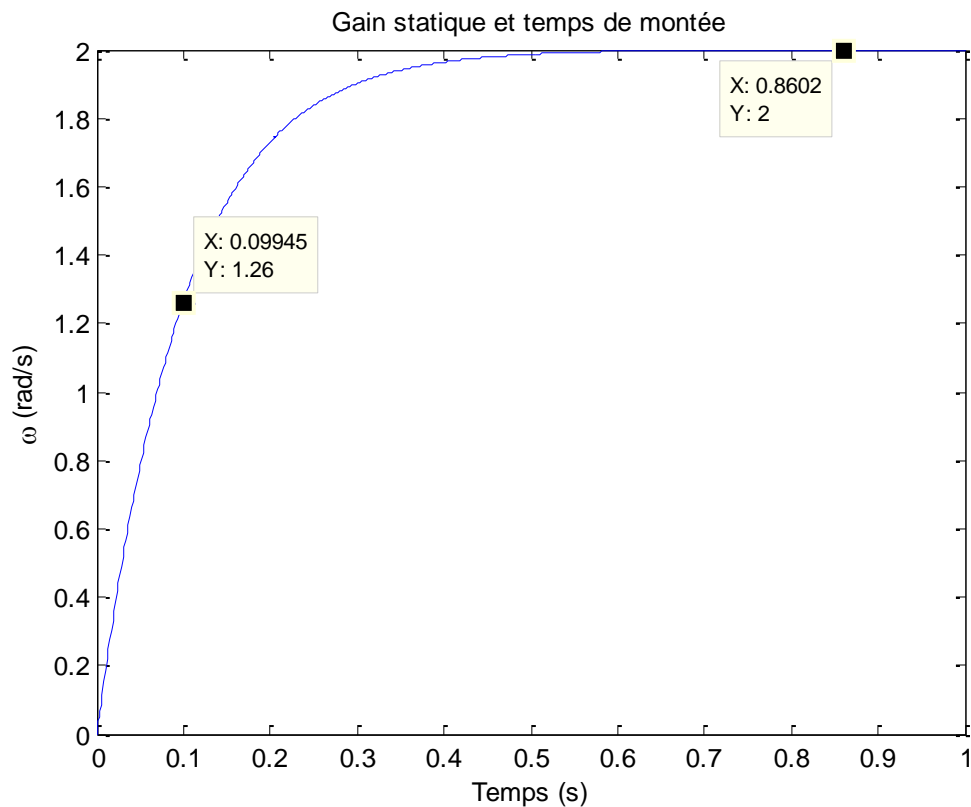


Figure 2 - Réponse à un échelon unitaire

On remarque clairement qu'en régime permanent, $Y_{RP} = KU_0 = 2$. Ainsi il est aisé d'en déduire que

$$\boxed{K = 2}$$

De plus, en fixant un temps de simulation à 1 seconde et en utilisant la fonction `interp1(y, t, 0.63*K*U0)` de Matlab on obtient la constante de temps $\tau = 63\%U_0K = \mathbf{0,0995}$.

Enfin, comme trouvé plus haut, $F_a(s) = \frac{Km}{B_m R + K_c K_m + s(J_m R)}$. Cette fonction de transfert approximée permet de trouver les valeurs de J_m et B_m par identification. Donc on a,

$$F_a(s) = \frac{0,5}{B_m * 0,5 + 0,48 * 0,5 + s(J_m * 0,5)}$$

$$F_a(0) = \frac{0,5}{B_m * 0,5 + 0,48 * 0,5} \Rightarrow \boxed{B_m = \mathbf{0,020 \text{ N.m.s/rad}}}$$

Et donc,

$$F_a(s) = \frac{0,5}{0,02 * 0,5 + 0,48 * 0,5 + s(J_m * 0,5)} = \frac{1}{J_m s + 0,5} = \frac{1}{0,5(\frac{J_m s}{0,5} + 1)} = \frac{2}{\frac{J_m s}{0,5} + 1} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Ainsi, par identification, $K = 2$ et $\tau = \frac{J_m}{0,5} \Rightarrow \boxed{J_m = \tau * 0,5 = \mathbf{0,04975 \text{ kg.m}^2}}$.

3.2 Identification des paramètres du bras robotique

En prenant $\theta_e = \frac{\pi}{5}$ comme condition initiale dans le module, on obtient la tension $\boxed{u_e = \mathbf{1,73 \text{ V}}}$ comme tension nécessaire au maintien du bras robotique à cet angle.

On perturbe à présent la tension u_e par une tension $\delta u = 1\%u_e = 0,0173$.

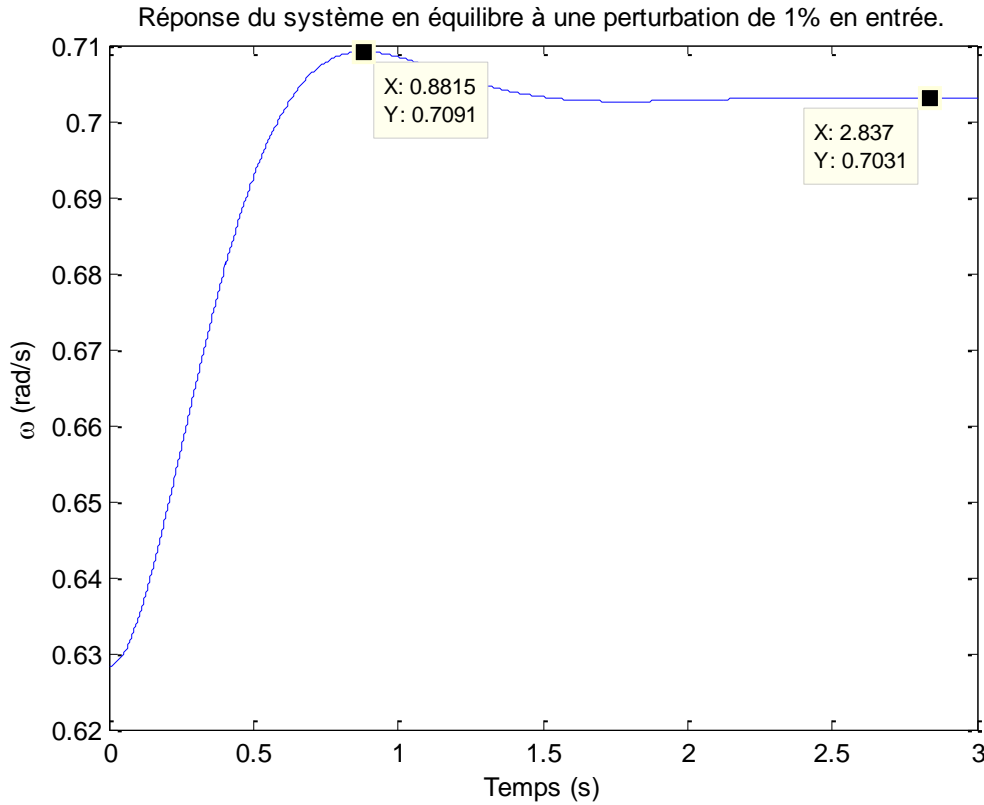


Figure 3 - Réponse du système en équilibre à une perturbation de 1% en entrée

Grâce au graphique ci-dessus, on peut déterminer le dépassement D , le temps de pic T_p et le gain statique du système K_s .

On a, $\theta_e = \frac{\pi}{5}$, $\delta\theta_{max} \approx 0,636 - \theta_e$, et $\delta\theta_{RP} \approx 0,635 - \theta_e$.

Ceci permet de déterminer le dépassement $D = \frac{\delta\theta_{max} - \delta\theta_{RP}}{\delta\theta_{RP}} = 0,0885 = 8,85\%$.

On peut aussi en déduire ξ grâce à la formule $D = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ et obtenir $\xi = 0,611$.

D'autre part, le temps de pic évalué sur la courbe est de 0,887 secondes. Il est aussi donné par $T_p = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1,280591913\pi}{\omega}$, on peut donc identifier $\omega = 4,47 \text{ rad/s}$.

Enfin, $K_s = \frac{\delta\theta_{RP}}{\delta u} = 0,4212$.

Finalement, à l'aide de la fonction de transfert $G_a(s)$ trouvée plus haut et de $\frac{\delta\theta}{\delta U} = \frac{K_s\omega}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$ il est possible d'identifier les valeurs approximatives de M_1 , l_1 et B_1 .

$$G_a(s) = \frac{2K_m}{(2J_1R + 2J_mR)s^2 + (2B_1R + 2B_mR + 2K_cK_m)s + M_1 \cos(\theta_e) Rgl_1}$$

$$G_a(s) = \frac{1}{(J_1 + 0,05)s^2 + (B_1 + 0,5)s + 3,968228358M_1l_1}$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta U} = \frac{K_s \omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} = G_a(s)$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta U} = \frac{8,4271}{s^2 + 5,4655s + 20,00739} \xrightarrow{\text{en divisant par le numérateur}} \frac{1}{0,11866s^2 + 0,648s + 2,3741}$$

En identifiant chacun des coefficients du dénominateur, on trouve par conséquent,

$$J_1 + 0,050 = 0,11866 \Rightarrow \boxed{J_1 = 0,0687 \text{ kg.m}^2}$$

$$B_1 + 0,5 = 0,648 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0,1486 \text{ N.m.s/rad}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,968228358M_1l_1 = 2,3741 \Rightarrow M_1 = \frac{0,5983}{l_1} \\ J_1 = \frac{M_1l_1^2}{3} = 0,0687 = 0,1994l_1 \Rightarrow \boxed{l_1 = 0,3443 \text{ m}} \\ \boxed{M_1 = 1,8752 \text{ kg}} \end{array} \right.$$

Les valeurs obtenues sont très proches de celles théoriques mais toutefois différentes. En effet, ceci s'explique en majeure partie par les arrondis effectués lors des calculs. D'autre part, ceci peut se justifier par l'évaluation du dépassement, du temps de pic et du gain statique qui sont des évaluations visuelles de ces valeurs. Elles peuvent donc être un peu grossières et provoquer quelques erreurs de calcul.

Enfin, la caractérisation du système avec seulement 1% de perturbation n'est peut-être pas très représentatif.

Comparaison entre le système non linéaire et son linéarisé

On désire à présent analyser la différence entre deux modèles du système afin de mettre en évidence leurs avantages et leurs inconvénients. Il s'agit d'un modèle défini par intégrateurs qui modélise le système de façon non-linéaire et d'un modèle que l'on aura linéarisé et implémenté à l'aide d'un bloc State Space.

4.1 Schéma de simulation

Voici un aperçu du schéma de simulation complet.

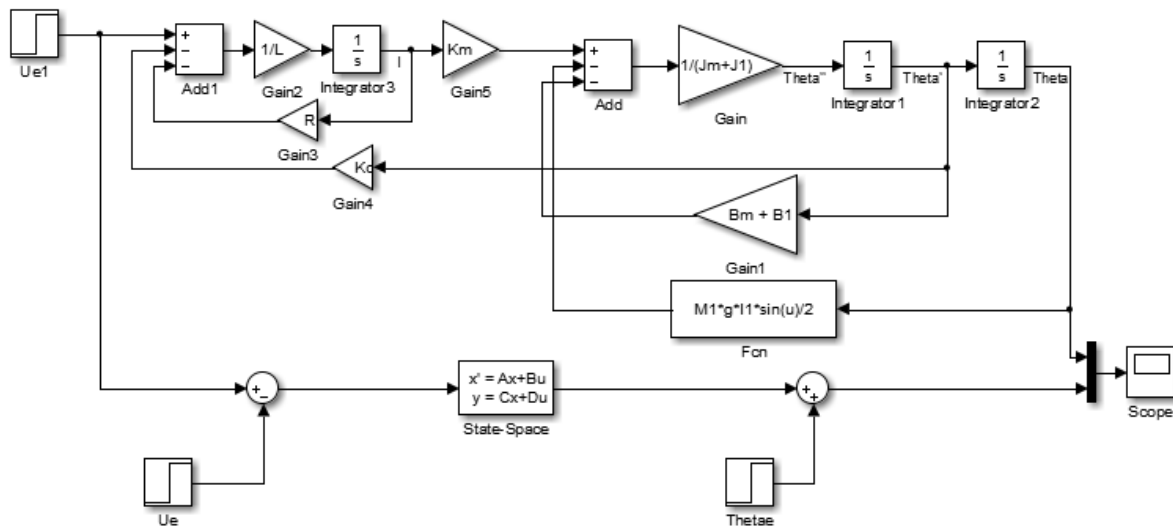


Figure 4 - Schéma de simulation des modèles non-linéaires et linéarisés

4.2 Perturbation des conditions initiales

On commence par vérifier la réponse du système en perturbant les conditions initiales. En pratique, cela se traduit par un déplacement du bras du robot par rapport à sa position d'équilibre. L'analyse de la réponse du système débute donc à ce point.

On remarque rapidement que dans tous les cas, le système non-linéaire présente un temps de réponse plus court et un dépassement plus élevé dans toutes les situations. La réponse n'est pas identique car dans un cas nous avons la composante non linéaire qui est la force de la gravité sur le bras mécanique en fonction de son angle alors que dans l'autre nous avons seulement sa valeur à un point d'équilibre.

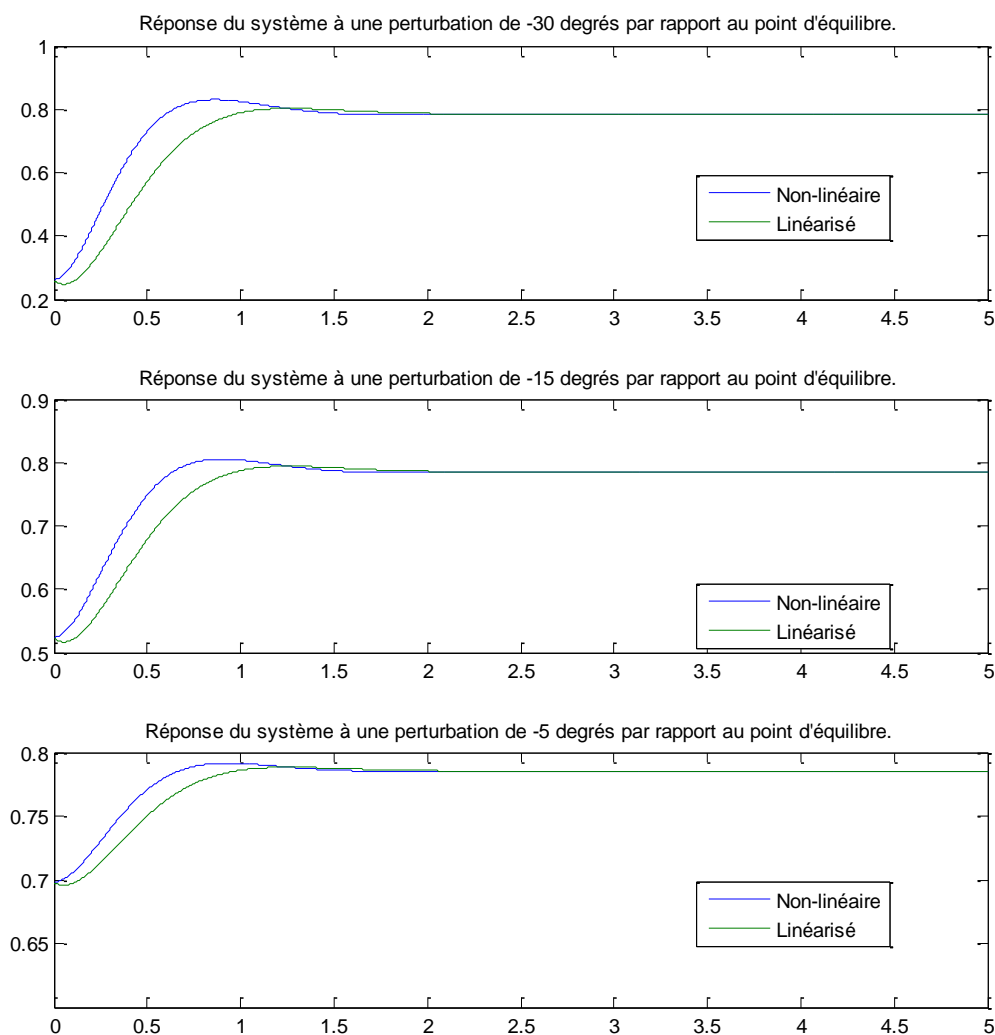


Figure 5 - Réponse du système à des perturbations de conditions initiales négatives

Dans les trois graphiques ci-haut, le bras part à trois différentes positions plus basses que le point d'équilibre. À ces positions, dans le modèle non linéaire, la gravité est moins importante et permet au système de revenir au point d'équilibre plus rapidement.

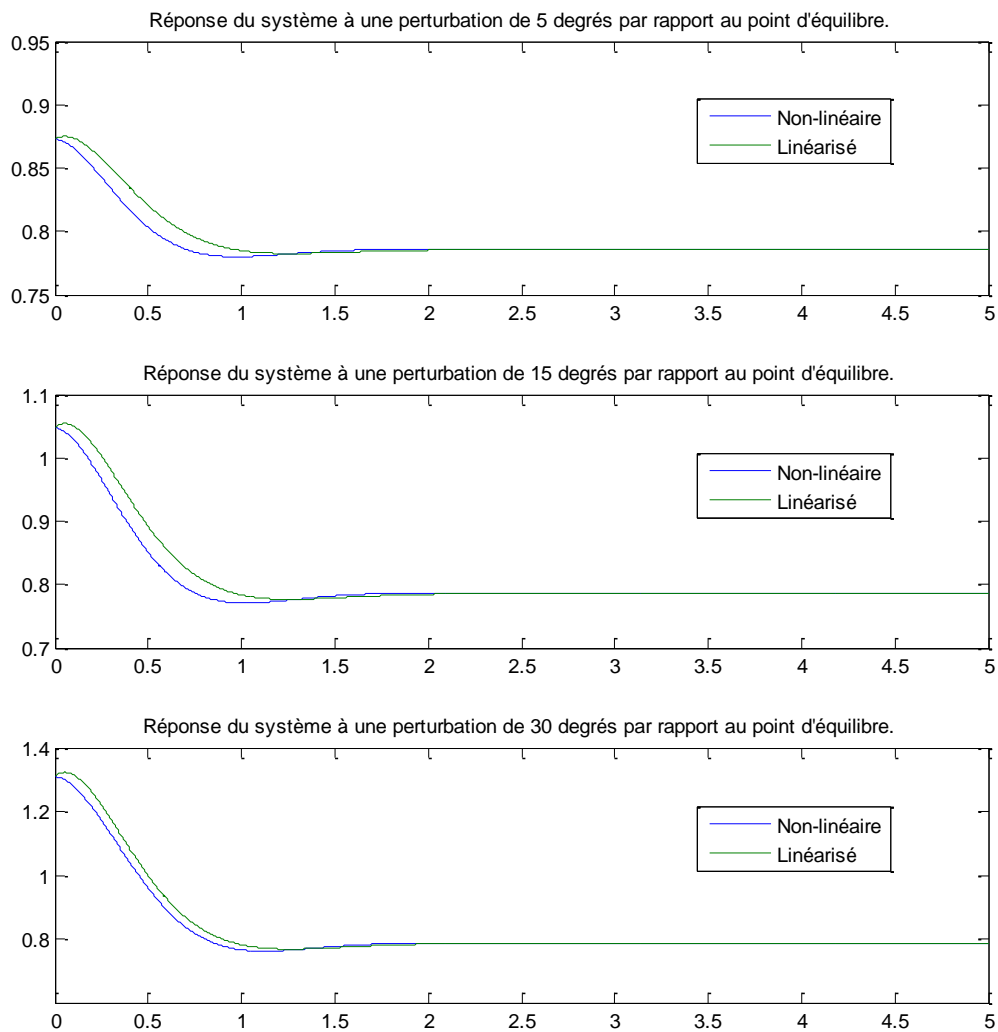


Figure 6 - Réponse du système à des perturbations de conditions initiales positives

Dans ces 3 autres figures, le point de départ du bras mécanique est plus élevé que le point d'équilibre. On voit quand même que le modèle non-linéaire répond plus rapidement car il tient compte que la force que la gravité applique sur le bras est plus élevée et accélère le bras plus rapidement vers sa position d'équilibre

4.3 Perturbation de l'entrée

Maintenant, on vérifie la réponse du système lorsqu'on perturbe l'entrée du système. On a vu précédemment que la sortie du système peut être en équilibre par rapport à une tension d'entrée donnée. Cependant, il y a une réponse transitoire qui n'est pas la même entre ces deux modèles. Ici on peut remarquer que des variations continues à l'entrée ne se traduiront pas en une réponse identique comme attendu.

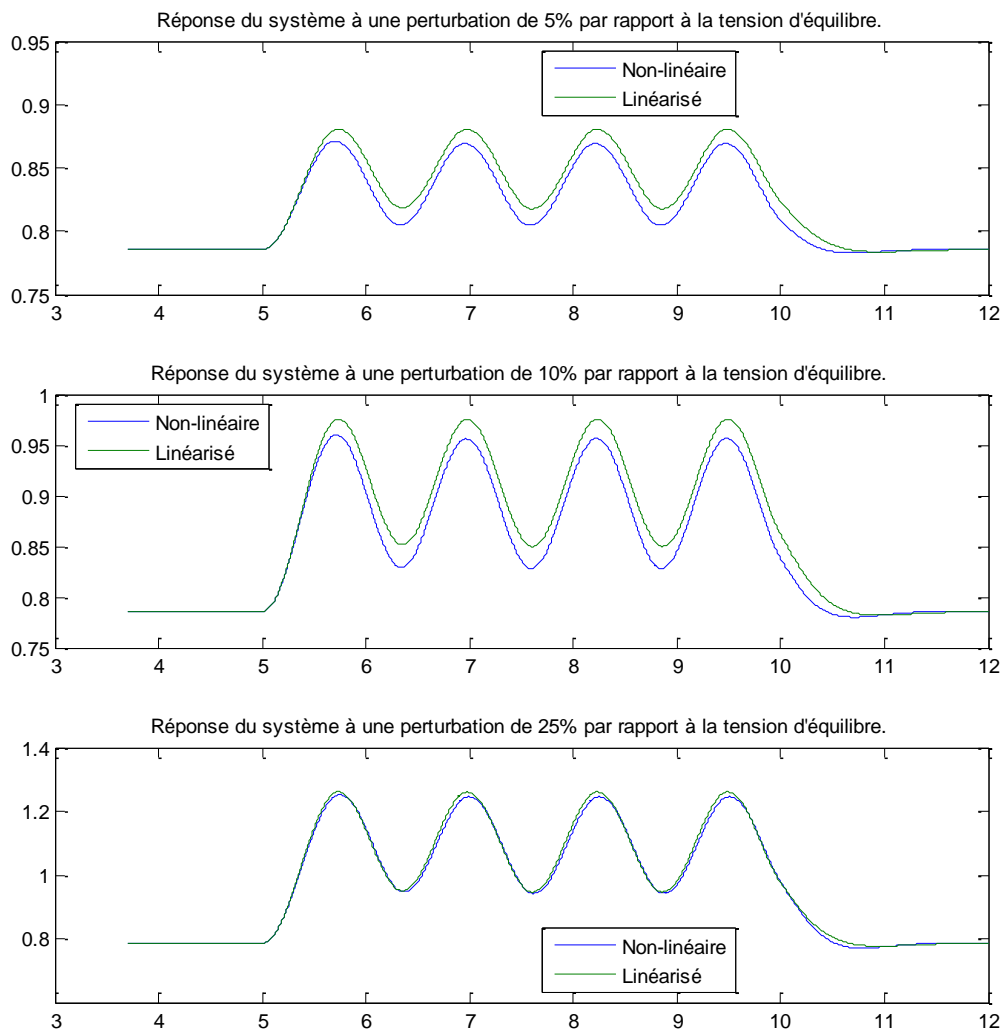


Figure 7 - Réponse du système à des perturbations d'entrée

Ce qui est important de noter est que, malgré la tension d'entrée croissante, l'angle en sortie maintient une relation linéaire pour le système linéarisé alors que pour le système non linéaire l'angle commence à s'éloigner davantage par rapport à l'angle de départ. On peut dire que le modèle linéarisé est tout de même fidèle au modèle réel jusqu'à au moins ce point où l'on applique une perturbation de 25% en entrée.

Réponse du système à une perturbation de 43% par rapport à la tension d'équilibre.

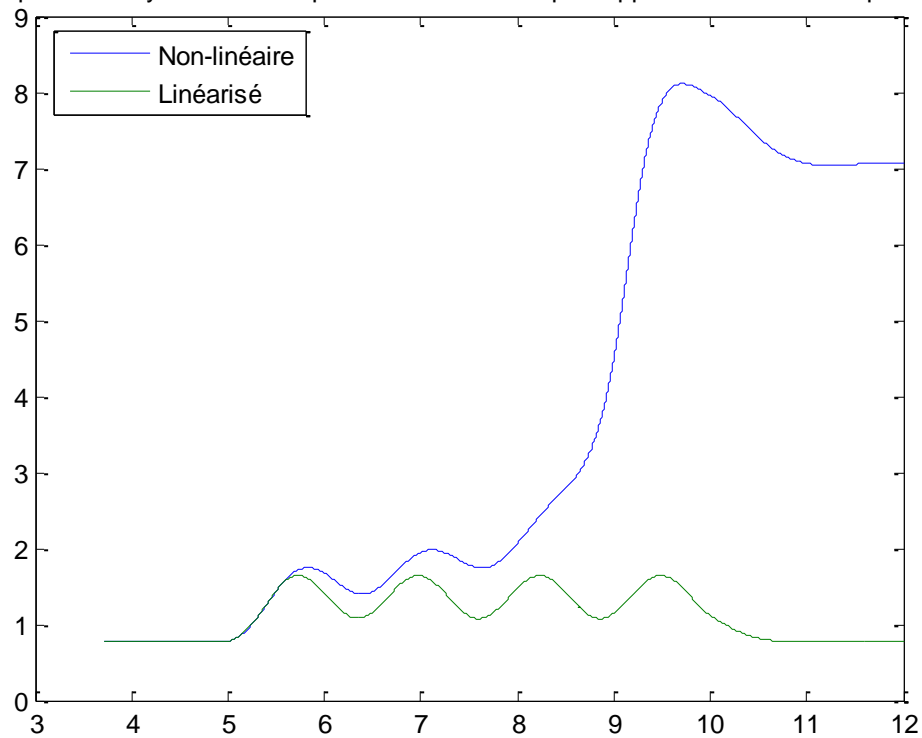


Figure 8 - Réponse du système à une perturbation d'entrée très élevée

La figure ci-haut présente maintenant la réponse du système à une variation de l'entrée de 45% selon les deux modèles. Ce qui se produit en réalité est bien représenté par le modèle non linéaire. Avec une variation assez importante, l'inertie du bras mécanique grandit aussi. Cependant, ce qui n'est pas pris en compte par le modèle linéarisé est que l'effet de la gravité sur le bras est réduite plus on se rapproche du sommet du cercle. On observe qu'à ce point le bras a assez d'inertie pour continuer sa trajectoire et se balancer jusque de l'autre côté du bras et revenir à son point d'équilibre $2\pi \text{ rad}$ plus loin.

Discussion et conclusion

Finalement, le calcul théorique des fonctions de transfert caractérisant le système avec ou sans le bras robotique retourne un résultat cohérent. De plus, celui-ci nous permet de déterminer l'ordre de grandeur de la tension nécessaire au fonctionnement du moteur avec le bras robotique. Celle-ci paraît très plausible.

D'autre part, la modélisation du système linéarisé à l'aide des fonctions de transfert obtenues théoriquement on permet l'identification de certaines caractéristiques (M_1 , I_1 , B_1 , B_m et K_m) du système. On arrive à des résultats approximatifs proches de ceux utilisés pour la simulation du système réel. Cependant ceux-ci sont tout de même différents.

On remarque aussi que la différence de comportement entre le système réel et le système linéarisé est notable. En effet, bien que le système linéarisé réagisse similairement au système réel, celui-ci n'est plus capable de représenter le fonctionnement réel lorsqu'on s'éloigne trop du point de linéarisation.