

Leis do Cálculo Funcional (2022/23)

FUNÇÕES

Natural-id	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(1)
Assoc-comp	$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$	(2)
Natural-const	$\underline{k} \cdot f = \underline{k}$	(3)
Fusão-const	$f \cdot \underline{k} = \underline{f \cdot k}$	(4)
Leibniz	$\begin{cases} f \cdot h = g \cdot h \\ h \cdot f = h \cdot g \end{cases} \Leftrightarrow f = g$	(5)

PRODUTO

Universal-\times	$k = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$	(6)
Cancelamento-\times	$\begin{cases} \pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \\ \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g \end{cases}$	(7)
Reflexão-\times	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id_{A \times B}$	(8)
Fusão-\times	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(9)
Def-\times	$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle$	(10)
Absorção-\times	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(11)
Natural-π_1	$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$	(12)
Natural-π_2	$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$	(13)
Functor-\times	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) = (g \times i) \cdot (h \times j)$	(14)
Functor-id-\times	$id_A \times id_B = id_{A \times B}$	(15)
Eq-\times	$\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} f = h \\ g = k \end{cases}$	(16)

COPRODUTO

Universal-$+$	$k = [f, g] \Leftrightarrow \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$	(17)
Cancelamento-$+$	$\begin{cases} [f, g] \cdot i_1 = f \\ [f, g] \cdot i_2 = g \end{cases}$	(18)
Reflexão-$+$	$[i_1, i_2] = id_{A+B}$	(19)
Fusão-$+$	$f \cdot [g, h] = [f \cdot g, f \cdot h]$	(20)
Def-$+$	$f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$	(21)
Absorção-$+$	$[g, h] \cdot (i + j) = [g \cdot i, h \cdot j]$	(22)
Natural-i_1	$(i + j) \cdot i_1 = i_1 \cdot i$	(23)
Natural-i_2	$(i + j) \cdot i_2 = i_2 \cdot j$	(24)
Functor-$+$	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$	(25)
Functor-id-$+$	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(26)
Eq-$+$	$[f, g] = [h, k] \Leftrightarrow \begin{cases} f = h \\ g = k \end{cases}$	(27)

MISC. PRODUTO / COPRODUTO

$$\text{Lei da troca} \quad \langle [f, g], [h, k] \rangle = \langle [f, h], [g, k] \rangle \quad (28)$$

CONDICIONAL

$$\text{Natural-guarda} \quad p? \cdot f = (f + f) \cdot (p \cdot f)? \quad (29)$$

$$\text{Def condicional de McCarthy} \quad p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p? \quad (30)$$

$$\text{1.ª Lei de fusão do condicional} \quad f \cdot (p \rightarrow g, h) = p \rightarrow f \cdot g, f \cdot h \quad (31)$$

$$\text{2.ª Lei de fusão do condicional} \quad (p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h) \quad (32)$$

ISOMORFISMOS (α)

$$\text{'Shunt-left'} \quad h \cdot \alpha = k \equiv h = k \cdot \alpha^\circ \quad (33)$$

$$\text{'Shunt-right'} \quad \alpha \cdot g = f \equiv g = \alpha^\circ \cdot f \quad (34)$$

EXPONENCIAÇÃO

$$\text{Universal-exp} \quad k = \bar{f} \Leftrightarrow f = \text{ap} \cdot (k \times \text{id}) \quad (35)$$

$$\text{Cancelamento-exp} \quad f = \text{ap} \cdot (\bar{f} \times \text{id}) \quad (36)$$

$$\text{Reflexão-exp} \quad \overline{\text{ap}} = \text{id}_{B^A} \quad (37)$$

$$\text{Fusão-exp} \quad \overline{g \cdot (f \times \text{id})} = \bar{g} \cdot f \quad (38)$$

$$\text{Def-exp} \quad f^A = \overline{f \cdot \text{ap}} \quad (39)$$

$$\text{Absorção-exp} \quad f^A \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g} \quad (40)$$

$$\text{Natural-exp} \quad g \cdot \text{ap} = \text{ap} \cdot (g^A \times \text{id}) \quad (41)$$

$$\text{Functor-exp} \quad (g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A \quad (42)$$

$$\text{Functor-id-exp} \quad \text{id}^A = \text{id} \quad (43)$$

FUNCTORES

$$\text{Functor-F} \quad F(g \cdot h) = (Fg) \cdot (Fh) \quad (44)$$

$$\text{Functor-id-F} \quad F \text{id}_A = \text{id}_{(F A)} \quad (45)$$

INDUÇÃO

$$\text{Universal-cata} \quad k = \langle g \rangle \Leftrightarrow k \cdot \text{in} = g \cdot Fk \quad (46)$$

$$\text{Cancelamento-cata} \quad \langle g \rangle \cdot \text{in} = g \cdot F \langle g \rangle \quad (47)$$

$$\text{Reflexão-cata} \quad \langle \text{in} \rangle = \text{id}_\top \quad (48)$$

$$\text{Fusão-cata} \quad f \cdot \langle g \rangle = \langle h \rangle \Leftarrow f \cdot g = h \cdot Ff \quad (49)$$

$$\text{Base-cata} \quad Ff = B(\text{id}, f) \quad (50)$$

$$\text{Def-map-cata} \quad \top f = \langle \text{in} \cdot B(f, \text{id}) \rangle \quad (51)$$

$$\text{Absorção-cata} \quad \langle g \rangle \cdot \top f = \langle g \cdot B(f, \text{id}) \rangle \quad (52)$$

RECURSIVIDADE MÚTUA

Fokkinga

$$\begin{cases} f \cdot in = h \cdot F \langle f, g \rangle \\ g \cdot in = k \cdot F \langle f, g \rangle \end{cases} \equiv \langle f, g \rangle = \langle \langle h, k \rangle \rangle \quad (53)$$

“Banana-split”

$$\langle \langle i \rangle, \langle j \rangle \rangle = \langle (i \times j) \cdot \langle F \pi_1, F \pi_2 \rangle \rangle \quad (54)$$

COINDUÇÃO

Universal-ana

$$k = \llbracket g \rrbracket \Leftrightarrow \text{out} \cdot k = (F k) \cdot g \quad (55)$$

Cancelamento-ana

$$\text{out} \cdot \llbracket g \rrbracket = F \llbracket g \rrbracket \cdot g \quad (56)$$

Reflexão-ana

$$\llbracket \text{out} \rrbracket = id_{\top} \quad (57)$$

Fusão-ana

$$\llbracket g \rrbracket \cdot f = \llbracket h \rrbracket \Leftarrow g \cdot f = (F f) \cdot h \quad (58)$$

Base-ana

$$F f = B(id, f) \quad (59)$$

Def-map-ana

$$\top f = \llbracket B(f, id) \cdot \text{out} \rrbracket \quad (60)$$

Absorção-ana

$$\top f \cdot \llbracket g \rrbracket = \llbracket B(f, id) \cdot g \rrbracket \quad (61)$$

MÓNADAS

Multiplicação

$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \top \mu \quad (62)$$

Unidade

$$\mu \cdot u = \mu \cdot \top u = id \quad (63)$$

Natural- u

$$u \cdot f = \top f \cdot u \quad (64)$$

Natural- μ

$$\mu \cdot \top (\top f) = \top f \cdot \mu \quad (65)$$

Composição monádica

$$f \bullet g = \mu \cdot \top f \cdot g \quad (66)$$

Associatividade- \bullet

$$f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h \quad (67)$$

Identidade- \bullet

$$u \bullet f = f = f \bullet u \quad (68)$$

Associatividade- \bullet/\cdot

$$(f \bullet g) \cdot h = f \bullet (g \cdot h) \quad (69)$$

Associatividade- \cdot/\bullet

$$(f \cdot g) \bullet h = f \bullet (\top g \cdot h) \quad (70)$$

μ versus \bullet

$$id \bullet id = \mu \quad (71)$$

DEFINIÇÕES ao ponto (‘POINTWISE’)

Igualdade extensional

$$f = g \Leftrightarrow \langle \forall x :: f x = g x \rangle \quad (72)$$

Def-comp

$$(f \cdot g) x = f (g x) \quad (73)$$

Def-id

$$id x = x \quad (74)$$

Def-const

$$\underline{k} x = k \quad (75)$$

Notação- λ

$$f a = b \equiv f = \lambda a \rightarrow b \quad (76)$$

Def-split

$$\langle f, g \rangle x = (f x, g x) \quad (77)$$

Def- \times

$$(f \times g) (a, b) = (f a, g b) \quad (78)$$

Def-cond

$$(p \rightarrow f, g) x = \text{if } p x \text{ then } f x \text{ else } g x \quad (79)$$

Def-proj

$$\pi_1(x, y) = x \quad \wedge \quad \pi_2(x, y) = y \quad (80)$$

Elim-let

$$\text{let } x = a \text{ in } b = b[x/a] \quad (81)$$

Elim-pair

$$t = t[(x, y)/z, x/\pi_1 z, y/\pi_2 z] \quad (82)$$

Def-ap

$$ap(f, x) = f x \quad (83)$$

Curry

$$\bar{f} a b = f(a, b) \quad (84)$$

Uncurry

$$\hat{f}(a, b) = f a b \quad (85)$$

Composição monádica

$$(f \bullet g) \ a = \mathbf{do} \ \{ b \leftarrow g \ a; f \ b \} \quad (86)$$

'Binding as μ '

$$x \gg= f \ = \ (\mu \cdot \top f)x \quad (87)$$

Notação-do

$$\mathbf{do} \ \{ x \leftarrow a; b \} \ = \ a \gg= (\lambda x \rightarrow b) \quad (88)$$

' μ as binding'

$$\mu \ x \ = \ x \gg= id \quad (89)$$

Sequenciação

$$x \gg y \ = \ x \gg= \underline{y} \quad (90)$$